

VERS UNE MODÉLISATION ÉPISTÉMIQUE DE L'APPRENANT. CAS DU DÉVELOPPEMENT ET RÉDUCTION D'EXPRESSIONS ALGÈBRIQUES.

Marie-Caroline Croset

Université Joseph Fourier – LEIBNIZ – MeTAH
46, Av Felix Viallet
38031 Grenoble Cedex
FRANCE

Marie-Caroline.Croset@imag.fr

RÉSUMÉ. La construction théorique et informatique d'un modèle de l'apprenant se fait en plusieurs étapes, que nous explicitons dans cet article pour le domaine particulier du développement et réduction d'expressions algébriques. Cette modélisation s'appuie sur des productions d'élèves recueillies au sein du logiciel APLUSIX. Embarquant nécessairement des choix de restrictions et d'interprétations, elle soulève la question de crédibilité des modèles produits tant théoriques qu'informatiques, à laquelle nous tentons de répondre.

MOTS-CLÉS : diagnostic automatique, algèbre, modélisation.

1. Introduction

Analyser les comportements d'élèves, afin de tenter de cerner leurs connaissances, est une pierre d'angle de la didactique. Habituellement établie sur des productions écrites, l'étude des processus de raisonnement d'apprenants est souvent manuelle et individuelle, travail lent, fastidieux et ne pouvant concerner que des effectifs restreints. Aussi, automatiser cette analyse apporte une aide considérable tant au didacticien qu'à l'enseignant ou qu'à tout autre chercheur dont l'apprentissage est au cœur de son étude. C'est dans cette recherche de détermination automatique d'analyse des productions que se place notre projet s'appuyant sur le logiciel APLUSIX, environnement informatique d'aide à l'apprentissage de l'algèbre (Nicaud *et al.*, 2004). Nous

souhaitons atteindre, à terme, le niveau de conceptions¹ pour représenter les connaissances des élèves.

Comme le précise (Wenger, 1987), la modélisation d'élève se situe sur deux registres : un niveau comportemental, organisation du réel observé et, de manière plus abstraite, un niveau épistémique qui cherche à interpréter ces comportements et qui réside souvent en une fonction diagnostique. Or, ces registres nécessitent, tous deux, comme le rappelle Baron (Baron, 1995), une recherche de compromis entre prises d'informations et modélisation, soulevant la question de fidélité entre modèle théorique et informatique (Wenger, 1987). Cette fidélité est scindée par Balacheff (Balacheff, 1994) en un homomorphisme du comportement et un épistémomorphisme, évaluant la vraisemblance entre modèle épistémique construit par un chercheur et celui implanté dans un dispositif informatique. C'est pourquoi, en détaillant notre travail de modélisation de l'apprenant, nous apporterons des précisions sur la pertinence des modèles théoriques, sur les outils qui les ont fondés ainsi que sur la qualité desdits morphismes entre modèles.

2. Premier modèle comportemental : les protocoles

2.1. Présentation d'APLUSIX.

Dans ce micromonde d'algèbre, l'élève se voit proposer des exercices, construits par l'enseignant ou le chercheur, de quatre types distincts : *calculer* des expressions numériques, *développer* et *réduire* des expressions polynomiales, *factoriser* des expressions polynomiales, *résoudre* des équations, inéquations ou systèmes. Dans chaque situation, une expression et une consigne sont présentées à l'élève. L'élève peut alors dupliquer l'expression et la modifier en conséquence. Pour notre travail, nous nous sommes attachés au domaine particulier du développement et réduction d'expressions algébriques afin de restreindre un champ très riche en investigations et d'aborder un nouveau domaine puisque celui des équations avait déjà été couvert (Chaachoua *et al.*, 2005).

¹ Par exemple au sens de Artigue (Artigue, 1989)

2.2. Les protocoles.

La prise en compte de l'apprenant est « représentée par le niveau de granularité choisi pour la description des comportements » (Balacheff, 1994). Dans l'environnement APLUSIX, ce niveau est caractérisé par ce qui est conservé de la production de l'élève, à savoir le temps et les micro-actions². Ces informations sont enregistrées dans un fichier texte, que l'on peut visionner via un « magnétoscope logiciel ». Cependant, aujourd'hui, le fichier sur lequel est construit le modèle épistémique est seulement constitué des étapes validées par l'élève : corrections, hésitations et temps ayant été mis de côté. Ce sont ces observables, plus restreints, que nous appellerons *protocoles* dans la suite. Ainsi, dans un premier temps, un corpus d'observables est construit, constituant un premier modèle comportemental.

L'homomorphisme du comportement - à savoir la relation qu'entretiennent actions de l'élève dans Aplusix et comportement réel de l'élève - réside, ici, en une simple restriction de la réalité. Nous ne nous interrogerons pas plus longuement sur ce premier modèle et sur la problématique de la fidélité car ils ne représentent qu'un outil, une base de données pour le diagnostic automatique, sur lequel porte notre travail. Cependant, une nouvelle question s'impose : celle de la nature et du traitement possible de ces traces de productions d'élèves. Pour construire un modèle épistémique, nous avons dû découper et interpréter cet ensemble d'informations sur l'état des connaissances de l'apprenant.

3. Premier modèle épistémique : un diagnostic de règles

La première modélisation épistémique réside en la construction d'une bibliothèque de règles, représentatives des actions d'élèves. Elle s'est construite en progressant le long d'une spirale composée :

- d'une analyse manuelle des protocoles afin d'identifier les règles sous-jacentes aux transformations erronées,
- du codage de ces règles en langage informatique et de la lecture des transformations diagnostiquées automatiquement.

² Toute action clavier ou souris effectuée par l'élève.

3.1. Quels outils pertinents pour la constitution manuelle de la bibliothèque ?

Le travail de modélisation de l'apprenant utilise souvent comme support des productions papier-crayon d'élèves. Or, outre un possible biais cognitif dû au contrat didactique, une copie donne rarement accès à la sphère privée³ de l'élève. Il n'en est pas de même au sein du logiciel Aplusix. En effet, le magnétoscope permet d'avoir accès non seulement à ce que l'élève accepte comme étape intermédiaire, visible aussi dans les protocoles et dans un cadre papier/crayon, mais aussi à ce qu'il efface, apportant des précisions considérables quant aux modélisations des transformations. C'est pourquoi nous avons eu régulièrement recours au magnétoscope dans le but de représenter une transformation d'élève par une règle ou une succession de règles. Cela a permis d'affiner notre analyse didactique grâce à une connaissance parfois plus précise de ce que l'élève avait comme intention lors de la résolution d'exercice. La trame de règles, ainsi élaborée, a donc pu se construire, avec fidélité, à partir de comportements auxquels nous n'aurions pas eu accès sur une simple copie.

Donnons en un exemple : un élève transforme $4 + 3(x + 2)^2$ en $10(x + 2)$. En rejouant ce que cet élève a pu effacer comme calcul, il apparaît que $4 + 6(x + 2)$ est une étape "cachée" intermédiaire à son calcul, comme le montre l'impression de l'écran, Figure 1. Ainsi avons-nous interprété la transformation erronée comme une succession de deux règles : « $ax^n \rightarrow nax$ » et « $a + bc \rightarrow (a + b)c$ ».



Figure 1. Vérification de nos hypothèses d'interprétation à l'aide du magnétoscope.

³ Caractérisée par l'exercice de l'action libre : brouillon, pensée etc.

Il a également fallu "imaginer" les autres erreurs possibles, en déclinant les transformations erronées, repérées dans les protocoles. Par exemple, l'erreur consistant à sommer les coefficients et les exposants d'un monôme de degré 1 et 2 revenait souvent : $2x^2 + 5x \rightarrow 7x^3$. Des transformations du type $5x + 2 \rightarrow 7x$ ou $2x + 5x \rightarrow 7x^2$ paraissaient alors tout aussi envisageables et nous les avons intégrées comme des transformations possibles, même si elles étaient absentes des protocoles analysés. A charge au diagnostic automatique de révéler si ces erreurs se manifestaient chez d'autres élèves ou non.

Le travail exposé dans cet article concerne plus particulièrement le domaine du développement et réduction d'expressions algébriques. A titre d'exemple, 70 règles incorrectes ont été construites dans le seul domaine du développement et réduction.

3.2. Le diagnostic proprement dit.

Un logiciel, nommé Anaïs, a été développé pour analyser les productions des élèves. Il utilise pour cela les règles implantées à partir de notre analyse didactique, en tentant de trouver le meilleur enchaînement de ces règles (correctes ou erronées) entre deux expressions données : la source et le but.

– Partant de la source, Anaïs développe un arbre en appliquant toutes les règles applicables à cette expression.

– L'application d'une règle produit un nouveau nœud et Anaïs construit ainsi, de proche en proche, un arbre de recherche, en choisissant, à chaque étape, un nœud à développer selon une heuristique tenant compte du but à atteindre.

– Lorsque le processus réussit, le but peut être atteint par plusieurs chemins. La sélection du meilleur chemin, comme résultat, se base sur un coût⁴ des chemins. Ainsi, si l'élève passe de « $2(x+3) \rightarrow 2x+3$ », Anaïs peut entre-autre proposer deux chemins :

- « suppression brute de parenthèses »
- Ou une « distribution correcte de 2 sur les termes x et 3 » suivie d'une « perte du facteur 2 ».

⁴ Le coût du diagnostic tient compte du nombre de règles utilisées corrélé avec leur statut (correct, erroné, perte d'opérateur ou d'argument). Ces coûts sont paramétrables.

Or, le premier chemin étant constitué d'une seule règle contre deux pour le deuxième chemin, le « coût » de ce dernier est ainsi plus élevé. Anaïs proposera alors comme résultat de diagnostic le premier chemin tout en laissant accessible la visualisation du second.

Le logiciel Anaïs propose ainsi, sous la forme des dites règles de réécriture, une séquence d'étapes intermédiaires aux étapes produites par l'élève.

3.3. Evaluation de l'épistémomorphisme entre diagnostic et analyse manuelle.

La lecture "critique" du diagnostic automatique des protocoles a consisté en une comparaison entre le diagnostic proposé et notre préalable analyse didactique. Les résultats qui en sont ressortis semblent, pour le moins, montrer la pertinence du diagnostic automatique, comme le précise la Figure 2. Les résultats sont donnés pour un ensemble de 50 élèves d'un collège français ayant effectué un total de 188 transformations erronées.

Analyse	Explications	4 ^{ème}	3 ^{ème}
Nombre N de transformations erronées ⁵ dans le domaine considéré		129	59
DiagOk	Le diagnostic automatique est en accord avec l'analyse didactique	104	45
DiagBad	Le diagnostic automatique nous a paru incorrect.	12	2
EchecOk	Un échec peut, parfois, s'avérer correct si l'analyse didactique considère la transformation erronée non diagnosticable.	12	6
EchecBad	Un échec peut, parfois, s'avérer mauvais si l'analyse manuelle considère la transformation erronée comme diagnosticable.	1	6
DiagOk/ Diag	Quotient du nombre des bons diagnostics, <i>échecs non compris</i> , par le nombre de diagnostics, <i>échecs non compris</i> .	90%	96%
Ok/Bad	Quotient du nombre des bons diagnostics, <i>échecs compris</i> , par le nombre des mauvais diagnostics, <i>échecs compris</i> .	90%	86%

⁵ Toutes les transformations correctes sont correctement diagnostiquées par Anaïs mais nous n'en tenons pas compte dans nos résultats.

Figure 2. *Etude comparative entre diagnostic automatique et analyse didactique de 50 productions d'élèves dans le domaine du développement-réduction.*

La valeur de ce diagnostic a donc été évaluée, satisfaisante. Cependant, nous avons souhaité atteindre un niveau supérieur de modélisation, celui de regroupement de règles afin, à terme, de diagnostiquer des conceptions d'élèves. Les prémices de ce travail, décrites dans la partie suivante, ont permis d'élaborer une trame pour des recherches ultérieures.

4. Deuxième modèle comportemental : le contexte pour la construction d'un diagnostic de conception.

Les sous-étapes proposées par Anaïs sont relativement élémentaires et locales car propres aux étapes produites par l'élève. Or, à terme, nous souhaitons construire une carte de conceptions représentative des connaissances de l'élève. Pour cela, nous avons besoin de rechercher une certaine stabilité dans le comportement de l'élève dans le champ du développement et réduction, à l'instar de ce qui avait été fait dans le domaine des équations (Chaachoua, Nicaud and Bittar, 2005). Le travail consiste, dans un premier temps, à étudier les différents contextes où un élève utilise une même règle, cette étude permettant, par la suite, de cerner des contextes les plus englobant possibles de l'action ainsi que des sous-contextes. Nous nous intéressons donc, à nouveau, aux comportements des élèves en cherchant des éléments de similitude dans le contexte. S'est alors posée la question de la pertinence du choix de tels éléments et des moyens à notre disposition pour les identifier.

4.1. Quels outils pour une construction pertinente du contexte ?

Notre travail a reposé, en partie, sur le tableau de statistiques qu'Anaïs produit à la suite d'un diagnostic. Celui-ci est constitué de la liste des règles et de leur nombre d'apparition par élève ou par groupe d'élève. Un fragment de cette liste en est donné Figure 3. Les règles construites étant relativement « contextualisées », nous souhaitons en construire de nouvelles, de granularité plus grossière afin de capturer des conceptions. Une lecture didactique du

tableau et des protocoles nous a permis de structurer les prémices d'éléments de contexte.

Noms des règles	Explication de la règle sous forme algébrique	Nombre d'utilisation
ER_2TermesNegatifsDonneNul	$-a - a \rightarrow 0$	25
ER_2TermesPositifsDonneNul	$a + a \rightarrow 0$	8
ER_InversionSigneResultat	$a + b + c \rightarrow -a - b - c$	137
ER_AjoutSigneMoins	$a + b + c \rightarrow a - b + c$	10
ER_Moins1erSomme_Coefficient	$-a(b+c) \rightarrow -ab + ac$	16
ER_Moins_Fois1erDeSomme	$-(b+c) \rightarrow -b + c$	23
ER_Moins_FoisAucunDeSomme	$-(b+c) \rightarrow b + c$	30
ER_Moins_FoisNbNegatifsDeSomme	$-(a-b+c-d) \rightarrow a + b + c + d$	1
ER_Moins_FoisNbPositifsDeSomme	$-(a-b+c-d) \rightarrow -a - b - c - d$	8

Figure 3. Exemple de règles et du nombre d'utilisation associé pour 153 élèves.

4.2. Exemple de construction

Il nous est apparu, par exemple, que la présence d'un signe moins avait des incidences sur le comportement de l'élève. Cela a conduit à l'écriture d'un premier contexte C_1 : « présence de deux termes égaux en valeur absolue et d'un signe moins ». Or, la difficulté réside dans le choix du niveau de granularité d'un tel contexte. En effet, associé à la règle R : « $\alpha + \beta \rightarrow 0$ », l'élève A, cf. Figure 4, aura un comportement stable tandis que l'élève B en aura un instable. Nous avons donc dû affiner ce premier contexte en un sous-contexte C_2 : « présence de deux termes égaux en valeur absolue, dont l'un au moins est de signe négatif » pour recueillir la stabilité du comportement de l'élève B.

Exemple de comportements de l'élève A	$-a + b - a \rightarrow b$ $a + b - a \rightarrow b$ $a - b + a \rightarrow b$	L'élève A applique la règle R pour les trois transformations. Les trois se situent dans C_1 .
Exemple de comportements de l'élève B	$-a + b - a \rightarrow b$ $a + b - a \rightarrow b$ $a - b + a \rightarrow 2a - b$	L'élève B n'applique pas R pour la 3 ^{ème} transformation qui, contrairement aux deux autres, ne se situe pas dans C_2 .

Figure 4. Problème de la granularité du contexte.

Ce travail fin a permis, pour l'instant, d'établir une hiérarchisation de contextes. Cinq grands types de variables de situation sont apparus : la nature des coefficients, la présence du signe moins, celle d'exposants, la similitude entre coefficients ou entre monômes, et enfin, le but final de l'élève. A travers ces traits, nous cherchons non des descripteurs exhaustifs de l'expression algébrique elle-même, mais bien des éléments pouvant être représentatifs de la transformation effectuée voire explicatifs des conceptions des élèves, associations d'une même action à différents contextes.

5. Conclusion

A chaque étape de modélisation se pose la question de la perte de données. Une restriction et une réorganisation d'informations sont nécessaires pour construire un modèle comportemental tandis que le modèle épistémique résulte d'un découpage du réel et surtout d'interprétations. De plus, leur transposition au sein d'un logiciel crée inéluctablement un décalage avec une interprétation humaine. Ces précisions quant à la fiabilité entre théorie et implémentation, aux outils informatiques fondant nos choix de construction et aux morphismes existant entre les modèles sont rappelées dans les losanges de la Figure 5.

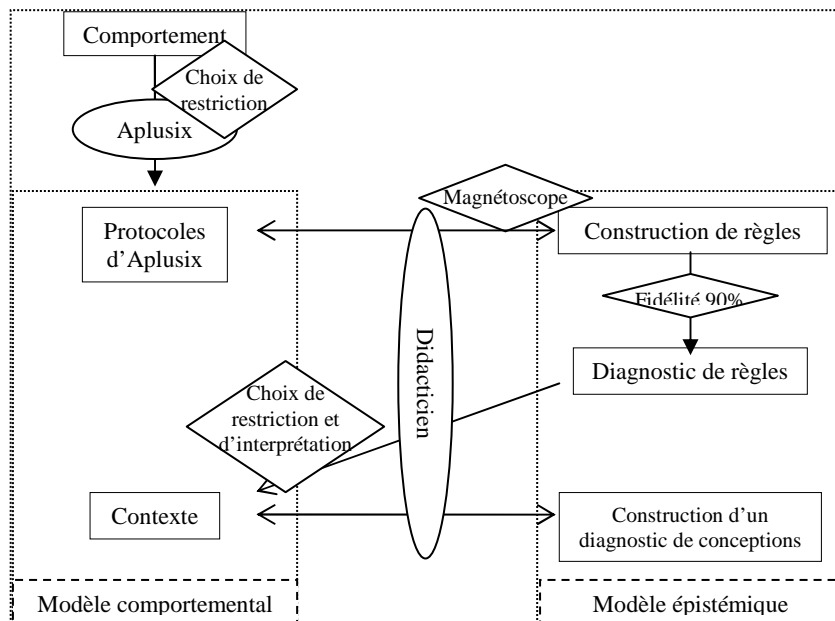


Figure 5. Schéma de conclusion

Notre travail a permis, dans un premier temps, de construire un diagnostic de règles grâce à une implémentation de règles écrites au vue des productions des élèves. Après une comparaison fine avec une analyse manuelle des protocoles, provoquant des retours réguliers sur l'écriture des règles, le diagnostic s'est révélé pertinent et fiable. Dans un second temps, notre travail a suscité l'émergence de grands thèmes de contextes. Deux analyses, l'une manuelle et didactique, l'autre automatique et statistique, se mettent actuellement en place afin de faire émerger des conceptions, application d'une règle dans des contextes différents. Le travail commencé mérite donc d'être poursuivi dans cette voie afin de construire un diagnostic de conceptions présentant, par exemple à l'enseignant, une représentation globale de la connaissance de ses élèves.

7. Bibliographie

Artigue M., Ingénierie didactique. In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage ed.; 1989; Vol. 9.3, pp 281-308.

Balacheff N., Didactique et intelligence artificielle. In *Recherche en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage ed.; 1994; Vol. 14, n°12, pp 9- 42.

Baron M., « Introduction, Quelques repères », *Sciences et Techniques Educatives, numéro spécial modélisation de l'apprenant*, 1995, pp 117-122.

Chaachoua H., Nicaud J.-F., Bittar M., « Détermination automatique des théorèmes-en-acte des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1. », *Actes de la conférence EIAH 2005*, Montpellier, INRP de Lyon: 2005; pp 33-45.

Nicaud J.-F., Bouhineau D., Chaachoua H., Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2004, Vol. 9, Issue 2.

Wenger E., *Artificial intelligence and tutoring systems*, Morgan Kaufmann Publishers: 1987.