

---

## Prise en compte du contexte algébrique dans la modélisation des connaissances d'un élève. Le cas de la factorisation.

**Marie-Caroline Croset\***

*\* Université Joseph Fourier  
Laboratoire LIG, équipe MeTAH  
46, Av F. Viallet  
38031 Grenoble Cedex - France  
Marie-Caroline.Croset@imag.fr*

---

*RÉSUMÉ. Nous nous intéressons à la modélisation des connaissances des élèves dans le domaine de l'algèbre. Notre travail utilise les traces des actions des élèves recueillies dans l'environnement informatique Aplusix. Pour capturer une connaissance, il est essentiel de tenir compte de la persistance et de la stabilité d'une action que ce soit dans la durée ou dans la situation. Cependant, deux actions peuvent paraître, de prime abord, contradictoires. Associées au contexte dans lequel elles apparaissent, elles peuvent devenir cohérentes. Dans cet article, nous présentons les résultats obtenus pour la modélisation des connaissances d'un élève par l'application de l'analyse statistique implicite. Cette analyse permet de révéler des relations significatives entre comportements et contextes algébriques.*

*MOTS-CLÉS : Modèle de l'apprenant, analyse statistique implicite, contexte algébrique, didactique, EIAH, algèbre.*

---

## 1. Introduction

L'étude des connaissances des élèves établie à partir de productions papier étant fastidieuse, elle a souvent donné lieu à des recherches en intelligence artificielle afin de l'automatiser. Outre l'intérêt évident de pouvoir, ainsi, traiter de grandes bases de données et de rendre compte, tant à l'enseignant qu'au chercheur, de l'état d'apprentissage d'un groupe d'élèves, modéliser les connaissances peut aussi servir à orienter un tuteur artificiel dans le choix d'un exercice de remédiation adapté. Un EIAH se doit de susciter ou d'accompagner l'apprentissage de son utilisateur. A cet effet, il semble nécessaire d'intégrer un diagnostic de connaissance et un modèle d'élève précis ; un modèle d'élève étant défini par [SISON & SHIMURA, 1998] comme une représentation qualitative qui justifie les comportements de l'élève en terme d'état actuel de connaissances. Cependant, certains auteurs ont mis en cause la nécessité d'utiliser des modèles d'élève détaillés, voir par exemple [SLEEMAN et al., 1989]. Les expérimentations montées par Sleeman semblent démontrer l'inefficacité d'une remédiation adaptée à chacune des erreurs comparée à un ré-enseignement générique. Or, les remédiations spécifiques proposées dans ces expérimentations, proches par leur contenu du ré-enseignement, ne sont pas d'ordre cognitif, comme le fait remarquer Sleeman lui-même. L'auteur suggère, afin d'éviter toute remédiation abusive, de rechercher dans l'erreur de l'élève à la fois la stabilité et un aspect conceptuel. Ce sont ces deux niveaux que nous avons tenté d'atteindre dans la modélisation d'élèves dans le domaine de l'algèbre.

Depuis 2003, notre équipe travaille sur la recherche d'invariants des connaissances dans le domaine transformationnel de l'algèbre<sup>1</sup> [KIERAN, 2001]. Pour cela, nous utilisons les protocoles d'élèves recueillis dans l'environnement informatique d'apprentissage pour l'algèbre, Aplusix [BOUHINEAU et al., 2001]. Un travail a été réalisé dans le domaine de la résolution des équations. Il repose sur une construction a priori des théorèmes-en-acte<sup>2</sup> possibles d'élèves. Cette construction manuelle anticipe les regroupements possibles de contextes algébriques. Elle est implantée dans un processus automatique afin de discriminer un corpus d'élèves en fonction des théorèmes-en-acte préconstruits [CHAACHOUA et al., 2006]. Dans le domaine de la factorisation d'expressions algébriques, nous avons décidé d'utiliser une autre technique, à savoir l'analyse statistique implicite. L'avantage de cette méthode sur la précédente est qu'il n'y a pas de construction a priori à produire : aucun lien n'est décrit entre les comportements ni entre les

---

<sup>1</sup> Kieran appelle transformationnelle, l'approche qui consiste à changer la forme d'une expression/équation en conservant l'équivalence. Elle rappelle que des approches uniquement générationnelle, ou de modélisation, ne permettent pas de donner à l'élève tous les sens de l'algèbre : transformer une expression en une autre équivalente permet de relier une tâche algébrique à une réflexion conceptuelle.

<sup>2</sup> Au sens de [VERGNAUD, 1991].

contextes algébriques. De plus, le travail effectué dans le cas des équations n'est pas nécessairement transposable dans un domaine plus complexe comme celui du développement ou factorisation d'expressions algébriques, où le nombre de règles en jeu est plus important.

Après une description, en section 2, des différentes traces d'un EIAH et en particulier, celles du logiciel Aplusix, la section 3 expose des variables descriptives de contexte algébrique dans le domaine de la factorisation. Dans la section 4, nous présentons l'expérimentation et les comportements repérés. La section 5 est consacrée aux résultats qui sont ressortis de l'analyse statistique implicite sous la forme de liaisons conjointes entre comportements et variables de contexte.

## 2. Types de traces et leur traitement

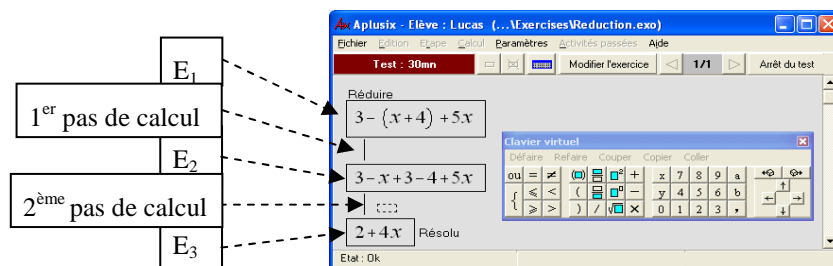
### 2.1. Impact de la directivité d'un EIAH

Face à la difficulté de la tâche de modélisation de l'élève, d'aucuns ont cherché à limiter le champ d'initiative de l'utilisateur-apprenant. Ainsi en est-il des environnements qui demandent à l'apprenant de choisir parmi une liste d'actions proposées et effectuent eux-mêmes la transformation, comme T-algebra [PRANK et al., 2006] ou ceux qui ne permettent qu'un pas de calcul à la fois, comme Cognitive Tutor [CORBETT & ANDERSON, 1995]. Certes, cette dernière limitation offre la possibilité de disposer d'une description des connaissances relativement fiable puisque restreinte, par exemple par la technique du model-tracing (ibid.). En effet, puisqu'un seul pas de calcul n'est autorisé, un diagnostic fin est réalisable : à chaque erreur correspond une règle, qui, elle-même, est reliée à une action tutorielle appropriée. Toutefois, comme le fait remarquer [MCARTHUR et al., 1990], tout élève qui effectue la même erreur, ou, tout au moins, une action reliée à une même règle, reçoit en retour le même message, et ce, indépendamment de ses activités passées. De plus, la restriction demandée par ces systèmes oblige à s'éloigner de la réelle complexité d'un processus mental, capable d'appliquer plusieurs transformations en un seul pas. Ainsi, cette limite empêche, peut-être, certaines connaissances (correctes, partielles ou erronées) d'apparaître. En revanche, le logiciel, Aplusix, laissant l'élève libre de ses actions, offre un cadre proche du papier-crayon, dénaturant peu le travail effectué par l'élève.

### 2.2. Présentation des traces d'Aplusix

Aplusix est un EIAH d'algèbre combinant des aspects micromonde et exerciceur. L'élève doit transformer des expressions algébriques selon le type de tâche demandée : factoriser, développer, réduire, calculer ou résoudre. Il est libre de produire autant de pas de calcul qu'il le souhaite, un « pas de calcul » étant la transformation d'une expression  $E_i$  en une autre,  $E_{i+1}$ , cf. Figure 1. Son pas de calcul est correct si l'équivalence des deux expressions est conservée et erroné si elle ne

l'est pas. Le domaine de l'algèbre, et plus particulièrement le domaine transformationnel de l'algèbre, étant relativement « formel », il s'est avéré judicieux de représenter les actions des élèves sous formes de règles correctes ou erronées.



**Figure 1.** Copie d'écran d'un élève ayant effectué deux pas de calculs. Le premier comporte une transformation incorrecte et le second, trois transformations correctes : deux calculs numériques et une addition de monômes.

### 3. Le contexte algébrique

#### 3.1. L'importance de la prise en compte du contexte

Dans l'exemple illustré en Figure 1, une règle erronée peut expliquer le premier pas de calcul :  $a - (b + c) \rightarrow a - b + a - c$ . Si l'on souhaite, comme nous l'avons vu précédemment dans [SLEEMAN et al., 1989] et [MCARTHUR et al., 1990], avoir une représentation conceptuelle des connaissances de l'élève, ce n'est pas la simple utilisation intermittente d'une règle qui nous intéresse, mais sa persistance et sa résistance à des contextes différents.

Pour cela, faut-il chercher à calculer, pour un élève donné, le rapport du nombre d'utilisations de telle règle par le nombre d'opportunités d'appliquer cette même règle, comme cela a déjà été étudié [PAYNE & SQUIBB, 1990] ? Dans ce cas, que signifie « opportunité d'application » ? Est-ce une occasion générique, ou, est-elle liée à l'élève même ? Il est difficile de répondre de façon objective, car ce qui pourrait paraître être une opportunité d'application pour nous, ne le serait pas nécessairement pour l'élève.

Précisons par un exemple : un élève, E, transforme  $5x^4 + 3x^3$  en  $8x^7$  en utilisant la règle erronée  $R : ax^n + bx^p \rightarrow (a + b)x^{(n+p)}$ . L'expression  $5x^2 \times 3x$  ne présente pas une opportunité d'appliquer R puisque cette règle R demande à ce que l'expression soit une somme. Or, qu'en est-il de  $5x^2 + 3x$  ? Cette expression pourrait présenter, à première vue, une « opportunité d'appliquer » R. Cependant, imaginons que E n'applique pas R à cette expression. Devons-nous en déduire que son comportement est incohérent ? [BALACHEFF, 2000] explique que deux comportements, plus précisément dans notre cas l'utilisation de deux règles différentes, « peuvent sembler contradictoires, mais cette incohérence peut s'expliquer localement, soit par le temps soit par la situation/contexte ». Il se peut que E n'ait pas utilisé R dans ce contexte

parce que les exposants supérieurs à 3 n'ont pas le même statut, à ses yeux, que les exposants 1 et 2.

Ainsi, plus que le nombre d'occurrences d'une règle ou la réécriture contextuelle d'une règle, nous cherchons le lien d'une règle avec un contexte précis, explicatif peut-être de son utilisation.

### 3.2. Les variables descriptives du contexte

Nous définissons une *variable de contexte* (algébrique) comme étant une caractéristique de l'expression algébrique ; par exemple, le degré de l'expression. Pour chacune des tâches étudiées (factoriser, développer...), nous définissons des variables de contexte différentes. Nous faisons l'hypothèse que ces variables peuvent être significatives chez un élève, c'est-à-dire, peuvent avoir un impact sur son comportement. Nous nous limiterons dans ce qui suit au domaine de la factorisation, pour pouvoir le décrire finement. Cependant, ce travail a aussi été réalisé dans le domaine du développement et réduction d'expressions algébriques.

Dans le domaine de la factorisation, nous repérons, a priori, six variables principales : la nature du facteur commun, sa visibilité, son degré, sa position, la présence d'un signe moins, la nature des cofacteurs. Nous allons en décrire trois plus finement :

- La première variable, nature du facteur commun, peut prendre 5 valeurs : numérique, monôme, somme de deux termes, somme de trois termes, produit ;

- La seconde variable, visibilité du facteur, dépend de la nature du facteur. Ainsi, la somme dans un des termes peut être évidente, opposée, commutée, opposée-commutée, non adjacente, multiple. Par exemple :  $3x + 6x(2 - x)$  a pour facteur commun le « monôme »  $3x$  ; Ce facteur est « évident-multiple ». Tandis que dans  $5 + t(t + 5) + t$ , le facteur commun est « la somme de deux termes »  $t + 5$ , il est « évident-NonAdjacent » ;

- La nature des cofacteurs, quant à elle, peut prendre 7 valeurs : cofacteur unitaire, unitaire opposé, identique, numérique, monôme, somme, produit de polynômes. Ainsi, dans  $(x + 8)^2 + x^2 + 8x$ , le facteur commun étant  $x + 8$ , les cofacteurs sont « identique-monôme ».

En combinant les six variables et les valeurs qu'elles peuvent prendre, nous arrivons à un total de 36 variables de contexte.

## 4. Etude expérimentale

Le corpus d'expressions factorisables présentées lors de l'expérimentation a été construit à partir des variables de contexte précédentes : il cherche à couvrir l'ensemble des combinaisons possibles de ces variables. Toutes les combinaisons ne sont pas réalisables : ainsi, un « facteur commun numérique » est nécessairement de

« degré 0 » et la combinaison « facteur numérique » et de « degré 2 » n'est pas possible. Certaines associations ont aussi été supprimées, à la fois par souci de ne pas complexifier la tâche pour des élèves de classe de 4<sup>ème</sup> ou de 3<sup>ème</sup>, mais aussi pour des contraintes de temps<sup>3</sup>. De cette manière, un ensemble de 41 expressions a été obtenu, estimées factorisables en deux fois 50 minutes, pour des élèves habitués à utiliser Aplusix.

L'analyse qui suit a été faite sur la production d'une élève de classe de 3<sup>ème</sup>. Après s'être familiarisée avec Aplusix, elle a travaillé consciencieusement sur ces 41 expressions pendant 70 minutes, en mode « test », donc sans rétroaction de la part d'Aplusix, et sans intervention d'enseignant. Ses réponses étaient automatiquement enregistrées par Aplusix. A noter que cette élève est considérée par son enseignant comme ayant un niveau « moyen ».

Les activités de cette élève ont été visionnées grâce à la fonctionnalité « magnéscope » d'Aplusix<sup>4</sup> de l'élève. Nous en avons extrait les pas de calcul qui concernaient un acte de factorisation. Ainsi, si, confrontée à une expression, elle commençait par factoriser puis par réduire un des facteurs obtenus, seul le pas de factorisation était conservé. Il se trouve que, dans cette expérimentation, les expressions étant relativement simples, l'élève n'effectuait, au mieux, qu'un seul acte de factorisation par expression. Par conséquent, 41 comportements ont été obtenus pour 41 expressions différentes. Trois grands types de comportements ont été envisagés :

- l'expression n'est pas traitée, noté *NonRens* (*non renseigné*) ;
- l'expression est correctement factorisée, noté *RES* (*résolu*) ;
- l'expression est incorrectement factorisée, noté *ER* (*erreur*).

Au vu des réponses de l'élève, ce dernier cas a été divisé à nouveau en trois :

- erreur sur le signe moins, noté *ER\_SM* ;
- erreur, notée *ER\_Rien*, que nous explicitons sur un exemple : l'expression  $(8y - 5)(6y + 3) + (8y - 5)$  est transformée en  $(8y - 5)(6y + 3)$ . Cette transformation peut être perçue comme la perte d'un terme ou comme l'application de la règle,  $ab + a \rightarrow a(b)$ , la mise en facteur de « a » dans le terme « a » laissant « rien » comme cofacteur. Seule la répétition de ce comportement, peut nous faire pencher pour l'utilisation de la seconde règle et non pour l'oubli contingent d'un terme ;
- autre type d'erreur, noté *ER\_Autre*.

---

<sup>3</sup> Il est difficile de trouver des élèves qui sont prêts à travailler plusieurs heures sur un même sujet. De plus, il y a un risque, non négligeable, que, sur une longue durée d'utilisation d'Aplusix, ses connaissances évoluent, même en mode « test ».

<sup>4</sup> Aplusix enregistre toutes les actions de l'élève produites avec la souris et le clavier : saisie, corrections, étapes finales, etc.

Ainsi, l'élève avait cinq comportements possibles : trois erronés, un correct et un consistant à ne pas traiter l'exercice. Au total, pour cette élève, 29 variables de contexte se sont révélées pertinentes. En effet, certaines n'ont eu que peu d'impact sur son comportement, comme nous le verrons plus loin. Dans la suite, nous appellerons *attributs* les 5 comportements et les 29 variables de contextes possibles.

## 5. Application de l'analyse statistique implicative

### 5.1. Principes généraux de l'analyse statistique implicative

Nous souhaitons trouver des liens entre les variables de contexte et les 5 comportements, au vu des 41 expressions. Pour cela, nous avons fait le choix de l'analyse statistique implicative, et utilisé le logiciel CHIC [GRAS, 1996]. Le but de la méthode est de trouver des relations significatives entre des attributs par un graphe orienté. On peut, rarement, dans l'analyse de données réelles, trouver de véritables implications mathématiques : elles souffrent généralement d'exceptions. On cherche, en fait, une quasi-implication entre deux attributs,  $a$  et  $b$ , n'ayant pas « trop » de contre-exemples. Cette quasi-implication est du type « si  $a$ , alors *presque*  $b$  ». L'« arc » entre  $a$  et  $b$  est représenté dans le graphe implicatif si l'intensité d'implication<sup>5</sup>, qui mesure l'étonnement d'observer peu de contre-exemples à la quasi-implication  $a \Rightarrow b$ , est supérieure à un seuil donné, eu égard à l'effectif des observations en jeu. Le seuil est fixé par l'analyste utilisateur de CHIC.

Les valeurs des attributs sont, dans notre cas, binaires. Le fichier, traité par le logiciel CHIC, est un tableau constitué, en colonnes, par les attributs et, en lignes, par les expressions algébriques. Une ligne est un vecteur de 0 et de 1, où, pour une expression donnée, un 1 représente l'utilisation de la règle de la colonne dans le contexte de la ligne.

Notons,  $C$ , les variables de contextes et  $R$ , les règles ou comportements. Dans notre travail, quatre types de relation entre attributs peuvent apparaître :

- $C_i \Rightarrow C_j$  ; Cette quasi-implication est interprétable de deux manières. D'une part, elle peut être évidente mathématiquement. Par exemple, si l'expression est de degré 3, alors l'expression est de degré supérieur à 2. D'autre part, cette implication peut apparaître parce que les contextes n'ont pas été suffisamment combinés. Par exemple, si le facteur commun est de degré 2, alors, presque toujours, il est sous la forme d'un produit. C'est le cas de l'expression à factoriser  $x(x + 1) - 5x(2x + 2)y$ . Cette implication est liée aux choix faits lors de la constitution du corpus des expressions. En effet, comme nous l'avons expliqué en section 4, certaines combinaisons de variables n'ont pas été envisagées pour simplifier les expressions à factoriser.

---

<sup>5</sup> Voir en particulier [GRAS, 2004] pour une définition de l'intensité d'implication.

–  $R_i \Rightarrow R_j$  ; Cette quasi-implication indique que, lorsque l'élève utilise  $R_i$ , il utilise *souvent*  $R_j$ . Cette relation peut être intéressante comme nous l'expliquerons dans les perspectives. Cependant, dans notre expérimentation, il est impossible de l'obtenir. En effet, pour une expression donnée, l'élève que nous considérons, n'a qu'un seul comportement : l'utilisation de  $R_i$  ou de  $R_j$  est exclusive l'une de l'autre.

–  $R_i \Rightarrow C_j$  ; Cette quasi-implication signifie que le contexte  $C_j$  est *souvent* vérifié lorsque la règle  $R_i$  est utilisée. Ce qui est plus compréhensible par la contraposée : si l'expression n'est pas de contexte  $C_j$ , alors l'élève n'utilise presque jamais  $R_i$ .

–  $C_j \Rightarrow R_i$  ; Cette quasi-implication exprime que lorsque l'expression est de contexte  $C_j$ , l'élève utilise *presque* toujours  $R_i$ .

Nous sommes intéressés par ces deux dernières implications. A cette fin, nous utilisons une option de CHIC qui permet de sélectionner uniquement certains attributs comme « sommets principaux ». Seuls les ancêtres et descendants des attributs choisis sont alors dessinés dans le graphe implicatif. Les parents et enfants directs sont en ligne pleine, tandis que les autres, comme les grands-parents, sont en pointillés<sup>6</sup>. En choisissant les règles comme sommets centraux, cela nous permet de ne visionner que les deux derniers types d'implication.

Le logiciel CHIC permet, de plus, de rechercher des implications avec plusieurs prémisses<sup>7</sup>. Ainsi, nous pouvons construire des implications avec deux prémisses, c'est-à-dire du type :  $(a \wedge b) \Rightarrow c$ .

Le graphe implicatif produit par CHIC fournit des résultats intéressants. D'une part, il est cohérent avec notre analyse manuelle des données. D'autre part, il révèle des implications auxquelles nous n'avions pas pensé lors de la visualisation des activités de l'élève. De plus, comme nous l'avons précédemment indiqué, certains attributs de contexte ne se sont pas révélés pertinents pour cette expérimentation : par exemple, la position du facteur commun au sein de l'expression n'a pas influencé le comportement de l'élève.

## 5.2. Résultats avec une prémisses

Avec une seule prémisses, au seuil de confiance 76 [GRAS, 2004], différentes informations sur l'élève se dégagent du graphe implicatif, cf. Figure 2 :

– l'expression n'est pas traitée, *NonRens*, lorsque le facteur commun ou un des cofacteurs sont des produits, respectivement *FProduit* et *Cof2Poly*, ou lorsque le facteur commun est une somme non adjacente, *FSum2TermNoAdj*, (exemple :  $2x+(x+2)*3+x^2$ ) ou opposée, *FSum2TermOpp*, (exemple :  $-2x-7+(2x+7)(x+5)$ ).

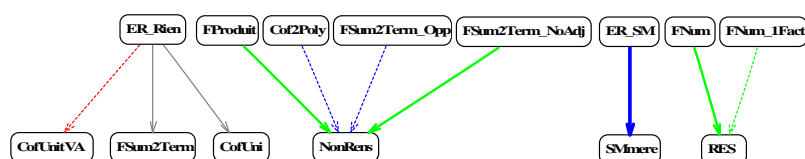
---

<sup>6</sup> La quasi-implication n'est pas transitive. Ceci oblige à distinguer les aïeux des parents.

<sup>7</sup> Une prémisses est une proposition, à partir de laquelle on déduit une conclusion.

– l'expression est correctement factorisée, *RES*, lorsque le facteur commun est numérique, *FNum*. L'expression  $-2x-14$  contribue à l'implication « *FNum*  $\Rightarrow$  *RES* ».

– La règle *ER\_Rien* a comme condition nécessaire un cofacteur unitaire, noté *CofUnitVA* (exemple :  $(x-4) + (x-4)x \rightarrow (x-4)(x)$  ou  $y(5y-1) - y \rightarrow y(5y-1)$ ). Ce qui n'est pas surprenant et montre que le modèle a du sens. Cependant, on peut noter que l'élève utilise particulièrement cette règle lorsque le facteur commun est une somme de deux termes, *FSum2Term*.

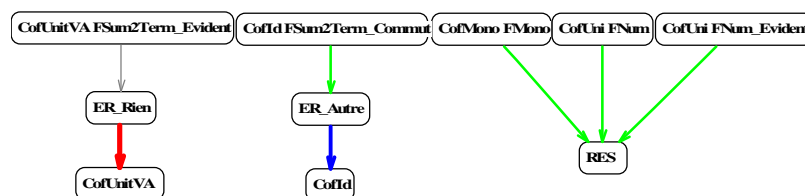


**Figure 2.** Graphe implicatif à une prémisse entre les attributs de règles et de contextes. Plus la flèche de l'implication est épaisse, plus l'implication est vraisemblable. La mesure des flèches les plus fines est de 76.

### 5.3. Résultats avec deux prémisses

Les renseignements qui ressortent de l'analyse avec deux prémisses sont plus fins mais aussi plus complexes, cf. Figure 3. Ainsi, la résolution est correcte, certes, quand le facteur commun est numérique (y compris quand un des cofacteurs est unitaire) mais aussi si le facteur commun est un monôme *et* si un des cofacteurs restants est lui-même un monôme. Un exemple qui contribue à l'implication  $(\text{CofMono} \wedge \text{FMono}) \Rightarrow \text{RES}$  est la transformation  $3x^2 + yx \rightarrow x(3 + y)$ .

Une autre information pertinente, que nous avons mise de côté dans un premier temps, apparaît. Elle concerne un traitement erroné qui n'est assimilé ni à *ER\_Rien* ni à *ER\_SM*. Nous l'avons identifiée sous le nom de *ER\_Autre*, qui englobait toute utilisation de règle erronée autre que celles susnommées. Or, nous constatons, cf. Figure 3, que le comportement est « autre » dans un cas particulier : celui où l'un des cofacteurs est dit « identique » et le facteur commun est une somme de deux termes commutés (exemple :  $(x-2)^2 + 3x(-2+x)$ ). Dans ce contexte, l'élève transforme incorrectement l'expression donnée, en répondant :  $(x-2)(3x(-2+x))$ . De même, elle transforme  $(t-1)^2 + (-1+t)$  en  $(t-1)(-1+t)$ . Ainsi, une quasi-règle, que nous n'avions pas prévue dans notre analyse manuelle, ressort de cette analyse statistique.



**Figure 3.** Graphe implicatif à deux prémisses de l'utilisation de règles ; seuil fixé à 90.

#### 5.4. Coefficients de corrélation

Il est intéressant de tenir compte des coefficients de corrélation entre deux variables, calcul fourni aussi par CHIC. Plus un coefficient de corrélation s'éloigne de zéro, meilleure est la corrélation. Ainsi, la variable *NonRens* est fortement corrélée, avec un degré de 0,48, à la variable *FSum2TermOpp*.

Une autre information plus pertinente se dégage de l'étude des coefficients de corrélation. Un coefficient de corrélation entre deux vecteurs  $V_1$  et  $V_2$  est d'autant plus proche de -1 qu'aux valeurs 1 de  $V_1$  correspondent la valeur 0 dans le vecteur  $V_2$ . Ce cas concerne les variables *NonRens* et *FSum2TermComm* : les variables avec lesquelles *NonRens* a un coefficient de corrélation négatif sont *FSum2TermComm* (-0,25) et *FSum2TermEvident* (-0,23). Un coefficient de corrélation entre deux variables, élevé en valeur absolue, n'induit pas une relation de cause à effet entre ces variables. Cependant, dans notre cas, nous pouvons l'interpréter de la manière suivante : il y a concomitance entre le traitement d'un exercice et la nature 'simple' du facteur commun. Pour valider cette interprétation, nous avons introduit une nouvelle colonne, *Rens*, somme des quatre comportements autres que *NonRens* (à savoir les colonnes *RES* et *ER*), autrement dit la colonne « complémentaire » de la colonne *NonRens*. Le graphe implicatif présente les deux implications souhaitées au seuil 88 : lorsque le facteur commun est une somme « évidente » ou « commutée » de deux termes, l'élève traite l'exercice.

#### 5.5. Domaine du développement d'expressions algébriques

Dans le domaine de la réduction et du développement, les résultats sont aussi pertinents. Par exemple, le graphe implicatif permet de montrer que cette même élève utilise la règle  $ax^n \times bx^p \rightarrow abx^{\text{Max}(n,p)}$  uniquement lorsque la somme des degrés  $n+p$  est supérieure ou égale à 3. Elle applique cette règle que ce soit dans un contexte de développement (exemple :  $3x(5x^2 + 2x + 2) \rightarrow 15x^2 + 6x^2 + 2x$ ) ou de réduction (exemple :  $3x \times 4x^2 \rightarrow 12x^2$ ). A nouveau ici, l'ambiguïté entre l'oubli de l'argument  $x$  et l'utilisation de cette règle est levée : le nombre d'occurrences de ce comportement est trop élevé pour l'attribuer à un oubli.

Relier cette règle au contexte dans lequel elle est utilisée permet peut-être de donner une explication à son utilisation : l'élève ne semble pas maîtriser les exposants supérieurs ou égaux à 3. Confrontée à des expressions qu'elle ne sait pas transformer, elle construit une réparation ad hoc pour sortir de l'impasse, à la manière de la « Repair theory », développée par [BROWN & VAN LEHN, 1980].

## 6. Perspectives

Nous avons, grâce à l'utilisation de l'analyse statistique implicative, pu obtenir une représentation des connaissances de l'élève. Le mot connaissance est vu, ici, comme une règle, ou un comportement, ayant une certaine stabilité d'utilisation dans un ou plusieurs contextes. Nous souhaitons prolonger notre travail au domaine des équations afin de justifier certains choix faits a priori dans ce domaine, voire déterminer des relations non prévues par l'analyse didactique.

Nos résultats reposent sur un travail effectué à la main : le remplissage du tableau, avec l'identification des règles utilisées et la description du contexte de l'expression. Au vu des résultats satisfaisants obtenus, nous souhaitons automatiser ce processus. Un diagnostic automatique a été construit et intégré au logiciel Anaïs [SANDER et al., 2005]. Il permet d'associer à un pas de calcul de l'élève dans Aplusix une séquence de règles correctes ou erronées, préalablement définies. Ce diagnostic automatique est en cours d'amélioration. 80 % des transformations incorrectes des élèves sont correctement diagnostiquées par Anaïs (ibid.). Nous espérons améliorer les 20 % restant par un processus probabiliste.

Nous souhaitons utiliser, également, l'analyse implicative pour justifier le choix des variables de contexte. Cette analyse reposera sur un corpus d'élèves et un ensemble de règles abstraites et de descripteurs généraux de contexte. Les implications révélées pourront indiquer que dans telle classe de variables de contexte, telle règle a tendance à être utilisée. Elles pourront aussi lier l'utilisation d'une règle à une autre, explicitant quelles sont les règles dont la maîtrise est une condition suffisante à l'utilisation de telle autre règle.

## 7. Conclusion

Il nous paraît essentiel que les pratiques soient comprises dans leur contexte. [BALACHEFF, 2000] précise que « chaque situation peut constituer un domaine de validité, dans lequel la connaissance est un outil reconnu. Cette vision des choses souligne qu'il n'y a pas de transfert qui aille de soit d'une situation à une autre, même si, aux yeux de l'observateur, les situations peuvent apparaître isomorphes ». Ainsi, le lien entre comportement et contexte est essentiel. Il met en exergue l'avis de certains auteurs suscités quant au besoin de considérer la régularité et la stabilité dans la construction d'un modèle d'élève [SLEEMAN et al., 1989]. Pour prendre en compte le contexte, nous avons choisi l'analyse statistique implicative. Le modèle d'élève qui en a résulté est riche, puisqu'il permet de préciser finement les contextes algébriques où apparaissent certains comportements. Nous souhaitons, dans un avenir proche, rendre automatique l'ensemble du processus et pouvoir ainsi rendre compte de l'état global des connaissances d'un élève.

## 8. Bibliographie

- [BALACHEFF, 2000] Balacheff N., Les connaissances, pluralité de conceptions. Le cas des mathématiques, *Actes de la conférence Ingénierie de la connaissance*, Toulouse, 2000.
- [BOUHINEAU et al., 2001] Bouhineau D., Nicaud J-F., Pavard X., Sander E., Un micromonde pour aider les élèves à apprendre l'algèbre, *Sciences et Techniques Educatives*, Vol. 8, n°1-2, 2001, p 33-47.
- [BROWN & VAN LEHN, 1980] Brown J.S., Van Lehn K., Repair theory: A generative theory of bugs in procedural skills, *Cognitive Science*, Vol. 4, 1980, p 379-426.
- [CHAACHOUA et al., 2006] Chaachoua H., Bittar M., Nicaud J-F., Student's modelling with a lattice of conceptions in the domain of linear equations and inequations, *Proceedings of the 30<sup>th</sup> Conference of Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 2006, p 281-288.
- [CORBETT & ANDERSON, 1995] Corbett A.T., Anderson J.R., Knowledge Tracing: Modeling the Acquisition of procedural knowledge, *User Modeling and User-Adapted Interaction*, Vol. 4, 1995, p 253-278.
- [GRAS, 1996] Gras R., *L'implication statistique*, La Pensée Sauvage, 1996.
- [GRAS, 2004] Gras R., L'analyse implicative : ses bases, ses développements, *Revue Educação Matematica Pesquisa*, Vol. 4, n°2, 2004, p 11-48.
- [KIERAN, 2001] Kieran C., The core of algebra: Reflections on its Main Activities, *ICMI Algebra Conference*, Melbourne, Australia, 2001.
- [MCARTHUR et al., 1990] McArthur D., Stasz C., Zmuidzinas M., Tutoring Techniques in Algebra, *Cognition and Instruction*, Vol. 7, n°3, 1990, p 197-244.
- [PAYNE & SQUIBB, 1990] Payne S.J., Squibb H.R., Algebra Mal-Rules and Cognitive Accounts of Error, *Cognitive Science*, Vol. 14, n°3, 1990, p 445-481.
- [PRANK et al., 2006] Prank R., Issakova M., Lepp D., Vaiksaar V., Using Action-Object-Input Scheme for Better Error Diagnosis and Assessment in Expression Manipulation Tasks, *Maths, Stats and OR Network, Maths CAA Series*, <http://mathstore.ac.uk/articles/maths-caa-series/mar2006/>, 2006.
- [SANDER et al., 2005] Sander E., Nicaud J-F., Chaachoua H., Croset M-C., From usage analysis to automatic diagnosis: the case of the learning of algebra, *Proceedings of 12nd International Conference on Artificial Intelligence in Education (AIED 2005)*, Amsterdam, The Netherlands, IOS Press, pp. 45-52, 2005.
- [SISON & SHIMURA, 1998] Sison R., Shimura M., Student Modeling and Machine Learning, *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, Vol. 9, 1998, p 128-158.
- [SLEEMAN et al., 1989] Studies of Diagnosis and Remediation with High School Algebra Students, *Cognitive Science*, Vol. 13, 1989, p 551-568.
- [VERGNAUD, 1991] Vergnaud G., La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10/2.3, 1991, p 133-170.