

Raisonnement sur les actions : de Toronto à Amsterdam

Hans van Ditmarsch[†] Andreas Herzig[‡] Tiago de Lima[‡]
hans@cs.otago.ac.nz herzig@irit.fr santos@irit.fr

[†]Université d'Otago, Nouvelle Zelande

[‡]Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, France

Résumé :

Nous montrons comment en raisonnement sur les actions la fameuse solution de Reiter du problème du décor peut être modélisée en logique épistémique dynamique, et nous proposons une méthode de régression optimale. Notre méthode étend la solution de Reiter en intégrant des actions d'observation et des opérateurs modaux de connaissance, et traduit le formalisme de Reiter (le Calcul des situations) dans une logique des actions et des connaissances comprenant des opérateurs d'annonce et d'affectation. En étendant la méthode de réduction de Lutz de la logique des annonces publiques aux affectation, nous établissons des résultats de complexité pour la régression. Nous montrons que ces résultats sont optimaux : le problème de décider la satisfiabilité d'une formule est NP-complet pour un agent, PSPACE-complet pour plusieurs agents et EXPTIME-complet dans la présence de l'opérateur de connaissance commune.

Mots-clés : raisonnement sur les actions et changement ; logiques épistémique dynamique ; systèmes multi-agents ; régression.

Abstract:

We show how in the propositional case Reiter's well-known solution to the frame problem can be modelled in dynamic epistemic logic, and provide an optimal regression algorithm. Our method is as follows : we extend Reiter's solution by integrating observation actions and modal operators of knowledge, and encode the resulting formalism in a dynamic epistemic logic with announcement and assignment operators. By extending Lutz' recent satisfiability-preserving reduction for public announcement logic to assignments, we establish optimal complexity results for regression : satisfiability is NP-complete for one agent, PSPACE-complete for multiple agents and EXPTIME-complete when common knowledge is involved.

Keywords: reasoning about actions and change ; epistemic dynamic logics ; multiagent systems ; regression.

1 Introduction

Dans [14] Thielscher distingue deux versions du problème du décor. La version représentationnelle est le problème de concevoir un langage logique et une sémantique telle que les domaines peuvent être décrits sans expliciter l'interaction entre *toutes* les actions et les fluents : quand il y a n actions et m fluents, la description du domaine doit être beaucoup plus petite que $2 \times n \times m$. La version inférentielle du problème du décor est plus exigeante : étant donnée une solution pour la version représentationnelle, il s'agit du problème de concevoir une procédure de décision 'efficace', c'est-à-dire, dont la complexité n'est pas trop élevée.

Reiter [10] a résolu la version représentationnelle du problème du décor en utilisant ce qu'il appelle des axiomes de l'état suivant ("*successor state axioms*", SSAs). Dans le cas propositionnel, les fluents ont seulement des situations comme argument, et les SSAs prennent la forme :

$$\begin{aligned} \forall x \forall s (p(do(x, s)) \leftrightarrow (\neg Poss(x, s) \vee \\ (x = a_1 \wedge \gamma^+(a_1, p, s)) \vee \dots \\ \vee (x = a_n \wedge \gamma^+(a_n, p, s))) \vee \\ (p(s) \wedge \neg(x = a'_1 \wedge \gamma^-(a'_1, p, s)) \wedge \dots \\ \wedge \neg(x = a'_m \wedge \gamma^-(a'_m, p, s)))) \end{aligned}$$

où a_1, \dots, a_n sont les actions pouvant (potentiellement) rendre p vrai, et a'_1, \dots, a'_m sont les actions pouvant (potentiellement) rendre p faux. Pour une action donnée a_i , soit $Eff^+(a_i)$ l'ensemble des fluents qui peuvent devenir vrais par l'exécution

de a_i , et $E_{ff}^-(a_i)$ l'ensemble des fluents qui peuvent devenir fausse par l'exécution de a_i (dans [10] ces ensembles sont laissés implicites). Donc, pour tout fluent $p \in E_{ff}^+(a_i)$, la formule $\gamma^+(a_i, p, s)$ caractérise les conditions dans lesquelles a_i rend p vrai, et $\gamma^-(a_i, p, s)$ caractérise les conditions dans lesquelles a_i rend p faux. $\gamma^+(a_i, p, s)$ et $\gamma^-(a_i, p, s)$ doivent être *uniformes en s* , ce qui signifie en particulier qu'ils ne peuvent pas contenir la fonction *do*.¹

L'idée centrale de Reiter est que, grâce au principe de l'inertie, les ensembles $E_{ff}^+(a_i)$ et $E_{ff}^-(a_i)$ sont des 'petits' sous-ensembles de l'ensemble des fluents du langage. Pour cette raison la taille de l'ensemble de tous les SSAs peut être de même ordre que le nombre d'actions et donc, beaucoup plus petite que le produit du nombre d'actions par le nombre de fluents. Cela signifie que les SSAs à la Reiter comptent comme une solution du problème du décor. Cette solution a été étendu par [12] aux actions épistémiques.

Quand les SSAs sont disponibles pour tous les fluents p , on peut réduire ('régresser') toute formule φ à une formule équivalente $red(\varphi)$ qui ne contient pas d'opérateur d'action. Ceci fournit alors une procédure de décision dans le cas propositionnel. Cette procédure a été implanté dans le langage GOLOG. Cependant, la formule réduite peut être exponentiellement plus longue que celle d'origine ; en conséquence la version inférentielle du problème du décor n'a pas été résolu ni par Reiter ni par Scherl & Levesque.

Dans cet article, nous étendons la solution de Reiter et résolvons la version inférentielle du problème du décor. Pour l'extension à la connaissance, parmi les actions épistémiques nous considérons uniquement les *observations* : tous les agents

observent *que* une proposition donnée est vraie dans le monde, et mettent à jour leurs état de connaissance en fonction.² Nous proposons une transformation polynomiale qui préserve la satisfiabilité de formules et élimine les opérateurs d'action. Ceci nous permet de définir une méthode optimale pour raisonner sur les actions dans ce scénario : dans le cas de base sans l'opérateur de connaissance ainsi que dans le cas d'un seul agent, la procédure est dans NP ; dans le cas multi-agents, elle est dans PSPACE ; et dans le cas avec connaissance commune, elle est dans EXPTIME. Ces résultats sont optimaux puisqu'ils coïncident avec la complexité de la logique épistémique de base.

Techniquement, notre approche est basé sur les avancées récentes en *logiques épistémiques dynamiques*. Dans cette famille de logiques, les situations sont laissées implicites, et il n'y a pas de quantification sur les actions. Donc, l'outil central de la solution de Reiter n'est pas disponible. Cependant nous montrons que nous pouvons transposer cette solution sans sa présence et reconstruire cette solution en logique épistémique dynamique DEL_N^C , proposé par [16, 6]. Les annonces peuvent être utilisées pour modéliser les observations, tandis que les affectations permettent de modéliser les actions de changement du monde (dites actions ontiques). DEL_N^C étant une extension de la logique des annonces publiques de Plaza, nous étendrons la procédure de décision optimale de Lutz pour la dernière ([7]) à DEL_N^C , et nous montrerons que nous pouvons préserver l'optimalité de la procédure : la vérification de satisfiabilité de formules dans DEL_N^C est démontré avoir la même complexité que la vérification de satisfiabilité dans la logique épistémique de base.

¹Plus tard, Reiter et col. généralisent SSAs à des équivalences $\forall x \forall s (p(do(x, s)) \leftrightarrow \psi(a, s))$. Nous ne considérons pas cette extension ici.

²Notons que les observations sont différentes des actions de perception (*sensing*) introduites dans [12]. En exécutant ces dernières, les agents observent *si* une proposition donnée est vraie ou non.

2 Base : logique épistémique

$$EL_N^C$$

Soit P un ensemble infini et dénombrable de lettres propositionnelles, et soit N un ensemble finie d'agents. Par commodité, nous abusons de la notation et identifiions N avec l'ensemble d'entier $\{1, \dots, |N|\}$. Le langage $\mathcal{L}_{EL_N^C}$ de la logique épistémique avec connaissance commune est définie par la BNF :

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathbf{K}_i\varphi \mid \mathbf{C}_G\varphi$$

où p est un élément de P , i est un élément de N , et G est un élément de $\wp(N)$. La formule $\mathbf{K}_i\varphi$ signifie : 'l'agent i sait que φ ', et $\mathbf{C}_G\varphi$ signifie : 'il est connaissance commune parmi les agents du groupe G que φ '. Nous utilisons les abréviations habituelles pour ' \vee ', ' \rightarrow ', ' \leftrightarrow ', et $\mathbf{E}_i\varphi$, pour sous-ensembles G de N . Nous rappelons que le dernier est définie par : $\mathbf{E}_G\varphi = \bigwedge_{i \in G} \mathbf{K}_i\varphi$. Le langage \mathcal{L}_{EL_N} est obtenu du langage $\mathcal{L}_{EL_N^C}$ par exclusion de l'opérateur de connaissance commune du dernier.

Un EL_N^C -modèle est une tuple $M = \langle W, K, V \rangle$ où :

- W est un ensemble non-vide des mondes possibles ;
- $K : N \rightarrow \wp(W \times W)$ associe une relation d'équivalence K_i à chaque $i \in N$.
- $V : P \rightarrow \wp(W)$ associe une interprétation $V(p) \subseteq W$ à chaque $p \in P$.

Par commodité, nous définissons $K_i(w) = \{w' \mid (w, w') \in K_i\}$. La relation K_i modélise la connaissance de l'agent i : $K_i(w)$ est l'ensemble des mondes que l'agent i considère possible en w .

La *relation de satisfaction* ' \Vdash ' est définie de façon habituelle :

$$\begin{array}{ll} M, w \Vdash p & \text{ssi } w \in V(p) \\ M, w \Vdash \neg\varphi & \text{ssi } \text{not } M, w \Vdash \varphi \\ M, w \Vdash \varphi \wedge \psi & \text{ssi } M, w \Vdash \varphi \text{ and } \\ & M, w \Vdash \psi \\ M, w \Vdash \mathbf{K}_i\varphi & \text{ssi } K_i(w) \subseteq \llbracket \varphi \rrbracket_M \\ M, w \Vdash \mathbf{C}_G\varphi & \text{ssi } (\bigcup_{i \in G} K_i)^*(w) \subseteq \llbracket \varphi \rrbracket_M \end{array}$$

où $\llbracket \varphi \rrbracket_M = \{w \in W \mid M, w \Vdash \varphi\}$ est l'extension de φ dans le modèle M et le ' $*$ ' dans la dernière clause signifie la clôture reflexive et transitive.

Comme d'habitude nous disons que φ est *valide dans M* (notation : $M \Vdash \varphi$) ssi $\llbracket \varphi \rrbracket_M = W$; φ est EL_N^C -valide (notation : $\models_{EL_N^C} \varphi$) ssi $M \Vdash \varphi$ pour tout EL_N^C -modèle M ; φ est *satisfiable dans EL_N^C* ssi $\not\models_{EL_N^C} \neg\varphi$. Des notions similaires sont définie pour la variante EL_N sans connaissance commune.

Nous rappelons que le problème de décider la EL_N -satisfiabilité d'une formule est NP-complet si $N = 1$, PSPACE-complet si $N \geq 2$, et que la EL_N^C -satisfiabilité est EXPTIME-complet [4].

3 Théories d'actions à la Reiter

Nous étendons [3], où les théories d'actions à la Reiter sont formulées en logique dynamique propositionnelle (PDL).

3.1 Descriptions d'action

Dans [10] et [12] plusieurs hypothèses de simplification sont faites. Les plus importantes sont :

- H1 : Toute les lois d'actions sont connu par tous les agents.
- H2 : Toute occurrence d'action est publique.
- H3 : Toute action est déterministe.
- H4 : Chaque action est ou bien ontique ou bien épistémique, mais jamais les deux à la fois.
- H5 : Une action ne peut pas changer la valeur de vérité d'un nombre infini de fluents.
- H6 : L'ensemble de fluents affectés par une action est beaucoup plus petit que l'ensemble P de tous les fluents du langage.

Les deux premières hypothèses garantissent que la connaissance des agents sur les types d'actions (H1) et ses instances (H2) sont correctes. H4 est basé sur la distinction entre actions ontiques et actions épistémiques : les actions du premier type modifient les faits, tandis que les actions du second type provoquent la mise à jour des états de connaissance des agents. Cette hypothèse est aussi basée sur le fait que chaque action peut être divisée en une action ontique et une action épistémique. Ce constat est du 'folklore' dans la littérature du raisonnement sur les actions (voir, par exemple, [13]). Les deux dernières hypothèses garantissent que le formalisme de Reiter résout la version représentationnelle du problème du décor. Elles sont justifiées par l'hypothèse de base de l'inertie : les actions (ontiques) ne changent qu'une petite partie du monde. Notons que Reiter n'énonce pas explicitement l'hypothèse H5 ; cependant elle est indispensable quand les fluents sont propositionnels.

En plus, Scherl & Levesque supposent qu'il n'y a qu'un seul agent. Nous ne faisons pas cette restriction dans le présent article, et considérons aussi le cas multi-agent.

Soit A un ensemble infini dénombrable de lettre d'actions (actions atomiques abstraites), et supposons $A = A_o \cup A_e$, où A_o et A_e sont des ensembles disjoints de lettres d'actions ontiques et épistémiques respectivement. Nous supposons que A_e ne contient que des *observations*.

Définition 1 Nous définissons une *description d'actions* comme étant une tuple

$$D = \langle Poss, Eff^+, Eff^-, \gamma^+, \gamma^-, Obs \rangle$$

tel que :

- $Poss : A \rightarrow \mathcal{L}_{EL_N^C}$ attribue une formule à chaque action qui décrit sa précondition d'exécutabilité ;
- $Eff^+ : A \rightarrow \wp(P)$ attribue un ensemble finie d'effets positives possibles à chaque action ;

- $Eff^- : A \rightarrow \wp(P)$ attribue un ensemble finie d'effets négatives possibles à chaque action ;
 - γ^+ est une famille de fonctions $\gamma^+(a) : Eff^+(a) \rightarrow \mathcal{L}_{EL_N^C}$. Elle attribue une formule à chaque pair (a, p) qui décrit la précondition pour que l'action a rende p vraie ;
 - γ^- est une famille de fonctions $\gamma^-(a) : Eff^-(a) \rightarrow \mathcal{L}_{EL_N^C}$. Elle attribue une formule à chaque pair (a, p) qui décrit la précondition pour que l'action a rende p fausse ; et
 - $Obs : A \rightarrow \mathcal{L}_{EL_N^C}$ attribue une formule à chaque action dont la valeur de vérité est connue après l'exécution de l'action.
- Nous convenons aussi que : si a est ontique (i.e., $a \in A_o$), alors $Obs(a) = \top$; si a est épistémique (i.e., $a \in A_e$), alors $Eff^+(a) = Eff^-(a) = \emptyset$; et si $p \notin Eff^+(a)$, alors $\gamma^+(a, p) = \perp$, ainsi comme pour $\gamma^-(a, p)$.

H1 et H2 garantissent que les fonctions dans D ne dépendent pas des agents. À cause de H3, pour toute action a , ses effets peuvent être caractérisés par $\gamma^+(a)$ et $\gamma^-(a)$. H4 justifie la partition de l'ensemble des actions en A_o et A_e . La finitude de Eff^+ et Eff^- est due à H5. Finalement, H6 permet d'affirmer que la version représentationnelle du problème du décor est résolu par ce type de description d'action.

En plus, Reiter (et nous) supposons :

H7 : Les formules $\gamma^+(a, p) \wedge \gamma^-(a, p)$ sont inconsistantes dans EL_N^C .

L'exécution d'une action épistémique a apprend à l'agent que $Obs(a)$ est vraie. Nous supposons que les observations sont fiables :

H8 : Les formules $Poss(a) \wedge \neg Obs(a)$ sont inconsistantes dans EL_N^C .

Notons que [12] restreint le codomaine de $Poss$, γ^+ , γ^- et Obs aux formules propositionnelles. Nous avons étendu ce codomaine aux formules dans $\wedge EL_N^C$. Ceci

permet la formalisation des actions comme ‘faire un appel téléphonique’, dont la pré-condition d’exécution est de connaître le numéro de téléphone de l’interlocuteur.

Pour illustrer ce nouveau type de description d’action, nous introduisons un exemple simple avec une action ontique et deux actions épistémiques.

Exemple 2 Un robot ne sait pas si la lumière est allumé ou non. L’action ontique disponible est d’appuyer sur le bouton de la lumière (“toggle”) avec $Poss(toggle) = \top$, $Eff^+(toggle) = Eff^-(toggle) = \{light\}$, $\gamma^+(toggle, light) = \neg light$, et $\gamma^-(toggle, light) = light$. Les observations sont $oDark$ et $oBright$, avec $Poss(oDark) = Obs(oDark) = \neg light$, et $Poss(oBright) = Obs(oBright) = light$.

3.2 Modèles pour les descriptions d’actions

Soit D une description d’actions pour les actions dans $A = A_o \cup A_e$. Les modèles pour D sont obtenus en rajoutant des relations de transition aux modèles de la logique épistémique.

Soit a un élément de $A_o \cup A_e$, et soient o et e respectivement des éléments de A_o et A_e .

Définition 3 Nous définissons un D -modèle comme étant une 4-uplet $M = \langle W, K, T, V \rangle$, où $\langle W, K, V \rangle$ est un EL_N^C -modèle et

– $T : A \rightarrow \wp(W \times W)$ associe une relation T_a à chaque $a \in A$.

La relation T_a modélise la relation de transition associée à l’action abstraite a : si nous posons $T_a(w) = \{w' \mid (w, w') \in T_a\}$, alors $T_a(w)$ est l’ensemble des résultats possibles de l’exécution de l’action a dans w .

Les D -modèles doivent satisfaire les restrictions suivantes :

1. “No-Forgetting” : $(T_a \circ K_i)(w) \subseteq (K_i \circ T_a)(w)$.
2. “No-Learning” : si $T_a(w) \neq \emptyset$, alors $(K_i \circ T_a)(w) \subseteq (T_a \circ K_i)(w)$.
3. Déterminisme : si $v_1, v_2 \in T_a(w)$, alors $v_1 = v_2$.
4. Exécutabilité : $T_a(w) \neq \emptyset$ ssi $\langle W, K, V \rangle, w \Vdash Poss(a)$.
5. Préservation (épistémique) : si $v \in T_e(w)$, alors $v \in V(p)$ ssi $w \in V(p)$ for all $p \in P$
6. Pos-condition (ontique) : si $v \in T_o(w)$, alors
 - $p \notin Eff^+(o)$ et $w \notin V(p)$ implique $v \notin V(p)$;
 - $p \notin Eff^-(o)$ et $w \in V(p)$ implique $v \in V(p)$;
 - $p \in Eff^+(o)$ et $\langle W, K, V \rangle, w \Vdash \gamma^+(o, p)$ implique $v \in V(p)$;
 - $p \in Eff^-(o)$ et $\langle W, K, V \rangle, w \Vdash \gamma^-(o, p)$ implique $v \notin V(p)$;
 - $p \in Eff^+(o)$ et $\langle W, K, V \rangle, w \not\Vdash \gamma^+(o, p)$ et $w \notin V(p)$ implique $v \notin V(p)$;
 - $p \in Eff^-(o)$ et $\langle W, K, V \rangle, w \not\Vdash \gamma^-(o, p)$ et $w \in V(p)$ implique $v \in V(p)$.

La restriction 1 implante H1 et H2. Elle garantit que tous les mondes dans $(T_a \circ K_i)(w)$ ont un antécédent. Cette restriction est appelée “perfect recall” dans [4]. Cet-à-dire, il n’y a pas d’action capable de faire les agents oublier des faits. La restriction 2 est motivée par H1–H3 pour les actions ontiques. Pour les actions épistémiques, le fait d’apprendre l’occurrence d’une observation suffit pour faire évoluer l’état épistémique de chaque agent : l’exécution d’une action d’observation e élimine les mondes possibles où $Obse$ est fausse. 1 et 2 ensemble correspondent aux SSAs de Scherl & Levesque pour les actions ontiques. La restriction 3 est motivée

par l'hypothèse H3. La restriction 4 définit la condition pour qu'une action soit exécutable. La restriction 5 nous donne un SSA pour les actions épistémiques. La restriction 6 correspond au SSA de Reiter pour les faits (en opposition à la connaissance). Notons que sa consistance est garantie par H7 : sinon il pourrait y avoir un monde w où les deux $\gamma^+(a, p)$ et $\gamma^-(a, p)$ sont vraies, dans ce cas nous devrions avoir et $v \in V(p)$, et $v \notin V(p)$ pour tout $v \in T_a(w)$.

La sémantique des actions atomiques étant en termes d'une fonction totale T_a , il n'y a pas de concurrence. Néanmoins, les actions concurrentes pourraient être modélisée par entrelacement ("interleaving"), ce qui ne laisse pas de doutes pour leur interprétation.

3.3 Axiomes de réduction

Maintenant nous introduisons une combinaison de la logique épistémique et PDL dans laquelle on peut parler des validités pour D -modèles. Le langage \mathcal{L}_D étend $\mathcal{L}_{EL_N^C}$ avec des opérateurs dynamiques, et est définie par la BNF :

$$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathbf{K}_i\varphi \mid \mathbf{C}_G\varphi \mid [a]\varphi$$

où p est un élément de P , i est un élément de N et a est un élément de $A = A_o \cup A_e$. La formule $[a]\varphi$ signifie ' φ est vraie après toute exécution possible de a '. Nous utilisons l'abréviation habituelle $\langle a \rangle\varphi = \neg[a]\neg\varphi$. Donc $\langle a \rangle\top$ exprime que a est exécutable, et $[a]\perp$ exprime que a n'est pas exécutable.

Nous définissons la *relation de satisfaction* ' \Vdash ' comme pour EL_N^C , plus :

$$M, w \Vdash [a]\varphi \text{ ssi } T_a(w) \subseteq \llbracket \varphi \rrbracket_M$$

La formule $\varphi \in \mathcal{L}_D$ est *valide dans un D -modèle M* (notation : $M \Vdash \varphi$) ssi $\llbracket \varphi \rrbracket_M = W$. Une formule $\varphi \in \mathcal{L}_D$ est *D -valide* (notation : $\models_D \varphi$) ssi $M \Vdash \varphi$ pour tout D -modèle M .

1. $[e]p \leftrightarrow (Poss(e) \rightarrow p)$
2. $[e]\neg\varphi \leftrightarrow (Poss(e) \rightarrow \neg[e]\varphi)$
3. $[e](\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow ([e]\varphi_1 \wedge [e]\varphi_2)$
4. $[e]\mathbf{K}_i\varphi \leftrightarrow (Poss(e) \rightarrow \mathbf{K}_i[e]\varphi)$
5. $[o]p \leftrightarrow (Poss(o) \rightarrow p)$
if $p \notin Eff^+(o) \cup Eff^-(o)$
6. $[o]p \leftrightarrow (Poss(o) \rightarrow (\gamma^+(o, p) \vee p))$
if $p \in Eff^+(o)$ and $p \notin Eff^-(o)$
7. $[o]p \leftrightarrow (Poss(o) \rightarrow (\neg\gamma^-(o, p) \wedge p))$
if $p \notin Eff^+(o)$ and $p \in Eff^-(o)$
8. $[o]p \leftrightarrow (Poss(o) \rightarrow (\gamma^+(o, p) \vee (\neg\gamma^-(o, p) \wedge p)))$
if $p \in Eff^+(o) \cap Eff^-(o)$
9. $[o]\neg\varphi \leftrightarrow (Poss(o) \rightarrow \neg[o]\varphi)$
10. $[o](\varphi_1 \wedge \varphi_2) \leftrightarrow ([o]\varphi_1 \wedge [o]\varphi_2)$
11. $[o]\mathbf{K}_i\varphi \leftrightarrow (Poss(o) \rightarrow \mathbf{K}_i[o]\varphi)$

TAB. 1 – D -validités pertinentes.

Pour notre exemple nous avons

$$\begin{aligned} & \not\models_D [toggle]\mathbf{K}_i light \\ & \models_D [oDark][toggle]\mathbf{K}_i light \\ & \models_D \neg\mathbf{K}_i \neg light \rightarrow [toggle]\neg\mathbf{K}_i light \end{aligned}$$

Notons aussi que $[e]Obs(e)$ n'est pas D -valide. En effet, considérons une action e telle que $Obs(e)$ est la 'phrase de Moore' $p \wedge \neg\mathbf{K}_i p$: après avoir appris que $p \wedge \neg\mathbf{K}_i p$ l'agent sait que p , donc $\neg\mathbf{K}_i p$ n'est plus vraie.

Soit D une descriptions d'actions. Le Tableau 1 montre plusieurs équivalences D -valides.³ Dans chaque validité la complexité de la formule dans le champ de l'opérateur dynamique $[]$ décroît de gauche à droite. Pour les formules sans opérateur de connaissance commune, ceci nous permet de définir une procédure

³Notons que $\models_D Poss(a)$ implique $Obs(a)$ par H8.

reg_D , appelée régression par [11], qui applique récursivement ces validités jusqu'à ce que la formule résultante ne contienne plus d'opérateurs dynamiques. Donc, pour toute description D et formule φ sans l'opérateur \mathbf{C}_G nous avons :

$$\models_D \varphi \text{ ssi } \models_{\text{EL}_N^C} \text{reg}_D(\varphi)$$

Par exemple, $[\text{toggle}]\mathbf{K}_i \text{light}$ est tout d'abord réduit à $\text{Poss}(\text{toggle}) \rightarrow \mathbf{K}_i[\text{toggle}]\text{light}$ (par l'axiome 11) et après à $\mathbf{K}_i \neg \text{light}$ (par l'axiome 8); et $[\text{oDark}]\mathbf{K}_i \neg \text{light}$ est d'abord réduit à $\text{Poss}(\text{oDark}) \rightarrow \mathbf{K}_i[\text{oDark}]\neg \text{light}$ (par l'axiome 4) et ensuite à $\neg \text{light} \rightarrow \mathbf{K}_i(\neg \text{light} \rightarrow \neg \text{light})$ (par l'axiome 1). Comme le dernier est EL_N -valide, alors $\models_D [\text{oDark}][\text{toggle}]\mathbf{K}_i \text{light}$.

Notons que reg_D est sous-optimal, puisque il y a des formules tel que $\text{reg}_D(\varphi)$ est exponentiellement plus long que φ [11, Section 4.6].

4 Logique épistémique dynamique DEL_N^C

Une tradition différente dans la modélisation de connaissance et changement a été suivi par, par exemple, [9, 2, 15]. La logique de [16, 6] se situe dans cette tradition. Elle est basée sur les annonces publiques et les affectations publiques.

4.1 Syntaxe

Le langage de la logique épistémique dynamique avec connaissance commune $\mathcal{L}_{\text{DEL}_N^C}$ est définie par la BNF :

$$\begin{aligned} \varphi &::= p \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \varphi \mid \mathbf{K}_i\varphi \mid [!\varphi]\varphi \mid [\sigma]\varphi \\ \sigma &::= p := \varphi \mid p := \varphi, \sigma \end{aligned}$$

où p est un élément de P et i est un élément de N .

De nouveau, la formule $[\alpha]\varphi$ signifie ' φ est vraie après toute exécution possible

de α '. L'action $!\varphi$ est l'annonce publique de φ .⁴ L'action $p := \varphi$ est l'affectation publique de la valeur de vérité de φ à l'atome p . Par exemple, $p := \perp$ est une affectation publique, et $\mathbf{K}_i[p := \perp]\neg p$ est une formule. Quand des affectations sont faites en parallèle, le même atome ne peut apparaître qu'une seule fois à la gauche de l'opérateur ':='. Par commodité, nous identifions $(p_1 := \varphi_1, \dots, p_n := \varphi_n)$ avec l'ensemble $\{p_1 := \varphi_1, \dots, p_n := \varphi_n\}$. Nous utilisons aussi l'abréviation suivante :

$$[\alpha \text{ if } \varphi]\psi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi \rightarrow [\alpha]\psi$$

Le fragment de DEL_N^C sans affectations est la logique des annonces publiques de Plaza (PAL_N^C) [9], dont nous notons le fragment sans connaissance commune PAL_N .

Les annonces modélisent les actions épistémiques, tandis que les affectations modélisent les actions ontiques. Par exemple, l'action épistémique oDark de l'Exemple 2 est modélisée par $!\neg \text{light}$, et l'action ontique toggle par l'affectation $\sigma_{\text{toggle}} = (\text{light} := \neg \text{light})$. Cet-à-dire, la valeur de vérité de light est inversé.

4.2 Sémantique

Un DEL_N^C -modèle est un tuple $M = \langle W, K, V \rangle$ défini comme pour EL_N^C . La relation de satisfaction ' \Vdash ' est comme avant, plus :

$$\begin{aligned} M, w \Vdash [!\varphi]\psi &\text{ ssi } M, w \Vdash \varphi \text{ implique } \\ &M^!\varphi, w \Vdash \psi \\ M, w \Vdash [\sigma]\varphi &\text{ ssi } M^\sigma, w \Vdash \varphi \end{aligned}$$

⁴Notons que l'opérateur d'annonce est différent de l'opérateur de test de PDL (habituellement noté $\varphi?$) : le premier a des effets épistémiques, mais le second n'en a pas.

$$\begin{aligned}
 [!\varphi]p &\leftrightarrow (\varphi \rightarrow p) \\
 [!\varphi]\neg\psi &\leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi) \\
 [!\varphi](\psi_1 \wedge \psi_2) &\leftrightarrow ([!\varphi]\psi_1 \wedge [!\varphi]\psi_2) \\
 [!\varphi]\mathbf{K}_i\psi &\leftrightarrow (\varphi \rightarrow \mathbf{K}_i[!\varphi]\psi) \\
 [\sigma]p &\leftrightarrow \sigma(p) \\
 [\sigma]\neg\varphi &\leftrightarrow \neg[\sigma]\varphi \\
 [\sigma](\varphi \wedge \psi) &\leftrightarrow ([\sigma]\varphi \wedge [\sigma]\psi) \\
 [\sigma]\mathbf{K}_i\varphi &\leftrightarrow \mathbf{K}_i[\sigma]\varphi
 \end{aligned}$$

 TAB. 2 – DEL_N^C -validités pertinentes.

où $M^{!\varphi}$ et M^σ sont des modifications du modèle M définies par :

$$\begin{aligned}
 M^{!\varphi} &= \langle W^{!\varphi}, K^{!\varphi}, V^{!\varphi} \rangle \\
 W^{!\varphi} &= W \cap \llbracket \varphi \rrbracket_M \\
 K_i^{!\varphi} &= K_i \cap (\llbracket \varphi \rrbracket_M \times \llbracket \varphi \rrbracket_M) \\
 V^{!\varphi}(p) &= V(p) \cap \llbracket \varphi \rrbracket_M
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 M^\sigma &= \langle W, K, V^\sigma \rangle \\
 V^\sigma(p) &= \llbracket \sigma(p) \rrbracket_M
 \end{aligned}$$

et où $\sigma(p)$ est une formule affecté à p dans σ . S'il n'y a pas d'occurrence de $p := \varphi$ dans σ , alors $\sigma(p) = p$.

Comme d'habitude, φ est *valide dans* M (notation : $M \Vdash \varphi$) ssi $\llbracket \varphi \rrbracket_M = W$, et φ est DEL_N^C -valide (notation : $\models_{\text{DEL}_N^C} \varphi$) ssi $M \Vdash \varphi$ pour tout modèle épistémique M . Par exemple, $\mathbf{K}_i p \rightarrow [q := p]\mathbf{K}_i q$ est DEL_N^C -valide.

Plusieurs DEL_N^C -validités pertinentes sont listées dans le Tableau 2.

Quand il n'y a pas d'occurrence de l'opérateur de connaissance commune, les équivalences du Tableau 2 permettent la définition d'une procédure de régression $\text{reg}_{\text{DEL}_N^C}$, qui élimine les opérateurs dynamiques de l'expression en question [16] :

$$\models_{\text{DEL}_N^C} \varphi \quad \text{ssi} \quad \models_{\text{EL}_N^C} \text{reg}_{\text{DEL}_N^C}(\varphi)$$

Pourtant, la DEL_N -régression a le même problème que la D -régression : la formule résultante $\text{reg}_{\text{DEL}_N}(\varphi)$ peut être exponentiellement plus longue que φ (un exemple est $\langle \langle \dots \langle \top \rangle \dots \rangle \neg \mathbf{K}_i \neg \top \rangle \neg \mathbf{K}_j \neg \top \rangle \neg \mathbf{K}_i \neg \top$). De plus, il n'existe pas d'équivalence de cet type pour l'opérateur de connaissance commune [2].

Dans les sections suivantes, nous proposons une solution alternative qui évite l'explosion exponentielle. Le premier pas est la formalisation de la liaison entre la description d'action à la Reiter D d'un coté, et DEL_N^C de l'autre.

5 Traduction des théories à la Reiter dans DEL_N^C

Les D -validités présentées dans le Tableau 1 sont similaires à celles du tableau 2. Nous observons aussi que (1) les préconditions d'exécutabilité P_{oss} dans \hat{D} peuvent être modélisées dans DEL_N comme la partie 'if' d'une action conditionnelle, comme dans α if $P_{\text{oss}}(a)$; (2) les actions d'observation e peuvent être vues comme des annonces publiques; et (3) les actions ontiques o peuvent être vues comme des affectations publiques.

La traduction δ_D de \mathcal{L}_D dans $\mathcal{L}_{\text{DEL}_N^C}$ est donc évidente.

Définition 4 Soit une D description d'action, soit $o \in A_o$ une action ontique, et soit $e \in A_e$ une observation. Alors nous définissons

$$\begin{aligned}
 \delta_D(e) &= !\text{Obs}(e) \text{ if } P_{\text{oss}}(e) \\
 \delta_D(o) &= \sigma_o \text{ if } P_{\text{oss}}(o)
 \end{aligned}$$

où σ_o est l'affectation complexe :

$$\begin{aligned} & \{p := \gamma^+(o, p) \vee p \mid \\ & \quad p \in \text{Eff}^+(o) \text{ and } p \notin \text{Eff}^-(o)\} \cup \\ & \{p := \neg\gamma^-(o, p) \wedge p \mid \\ & \quad p \notin \text{Eff}^+(o) \text{ and } p \in \text{Eff}^-(o)\} \cup \\ & \{p := \gamma^+(o, p) \vee (\neg\gamma^-(o, p) \wedge p) \mid \\ & \quad p \in \text{Eff}^+(o) \cap \text{Eff}^-(o)\} \end{aligned}$$

Notons que $\delta_D(o)$ est bien définie puisque $\text{Eff}^+(o)$ et $\text{Eff}^-(o)$ sont finis par H5. Par exemple, $\delta_D(o\text{Dark}) = \neg\text{light}$ if $\neg\text{light}$, et $\delta_D(\text{toggle}) = \text{light} := \neg\text{light} \vee (\neg\text{light} \wedge \text{light})$, ce qui peuvent être simplifié en $\delta_D(\text{toggle}) = \text{light} := \neg\text{light}$.

Nous étendons cette définition à toute formule dans \mathcal{L}_D .⁵

$$\begin{aligned} \delta_D(p) &= p \\ \delta_D(\neg\varphi) &= \neg\delta_D(\varphi) \\ \delta_D(\varphi \wedge \psi) &= \delta_D(\varphi) \wedge \delta_D(\psi) \\ \delta_D(\mathbf{K}_i\varphi) &= \mathbf{K}_i(\delta_D(\varphi)) \\ \delta_D([a]\varphi) &= [\delta_D(a)]\delta_D(\varphi) \end{aligned}$$

Soit $|\cdot|$ une fonction qui donne la longueur d'une expression (y compris les parenthèses, virgules, etc). Nous avons la correspondance suivante entre les formules dans $\wedge D$ et dans $\wedge \text{DEL}_N^C$ (cf. Tableaux 1 et 2).

Théorème 5 Soit D une description finie d'action à la Reiter, et soit $\varphi \in \mathcal{L}_D$. Alors φ est D -satisfiable si et seulement si $\delta_D(\varphi)$ est DEL_N^C -satisfiable, et $|\delta_D(\varphi)| \leq |\varphi| \times |D|$.

La preuve est par induction sur la structure de φ . Observons que D est une tuple de 5 éléments, et donc $|D| \geq 9$.

Donc δ_D est polynomial, et le problème de décider si pour une D et φ , φ est D -satisfiable peut être transformé de façon

⁵Notons que les formules dans $\wedge D$ n'ont pas d'occurrence de l'opérateur de connaissance commune. Il n'y a donc pas de clause pour cet opérateur.

polynomiale dans un problème de DEL_N^C -satisfiabilité.

6 Une régression optimale pour DEL_N^C

Maintenant nous montrons une réduction polynomiale de DEL_N^C dans EL_N^C . L'idée est d'éliminer d'abord les affectations, et ensuite d'appliquer la réduction de Lutz pour éliminer les annonces [7].

6.1 Élimination des affectations

Nous appliquons une technique qui est standard en démonstration automatique [8].

Proposition 6 Soit

$[p_1 := \varphi_1, \dots, p_n := \varphi_n]\psi$ une sous-formule d'une formule χ dans $\mathcal{L}_{\text{DEL}_N^C}$. Soit ψ' une formule obtenue de ψ par substitution de toute occurrence de p_k par x_{p_k} où x_{p_k} est un nouveau atome qui n'apparaît pas dans χ . Soit χ' obtenue de χ par remplacement de $[p_1 := \varphi_1, \dots, p_n := \varphi_n]\psi$ par ψ' . Soit B l'abréviation de $\bigwedge_{1 \leq k \leq n} (x_{p_k} \leftrightarrow \varphi_k)$.

1. Si $\chi \in \mathcal{L}_{\text{DEL}_1}$, alors χ est DEL_1 -satisfiable ssi

$$\chi' \wedge \mathbf{K}_i B$$

est DEL_1 -satisfiable.

2. Si $\chi \in \mathcal{L}_{\text{DEL}_N}$, $N \geq 2$, alors χ est DEL_N -satisfiable ssi

$$\chi' \wedge \bigwedge_{\ell \leq \text{md}(\psi)} \mathbf{E}_N^\ell B$$

est DEL_N -satisfiable, où le degré modal $\text{md}(\psi)$ est le plus grand nombre d'opérateurs modaux enchâssés dans ψ , et $\mathbf{E}_N^n \varphi$ abrège ' $\mathbf{E}_G \dots \mathbf{E}_G \varphi$, $n \geq 0$ fois'.

3. Si $\chi \in \mathcal{L}_{\text{DEL}_N^C}$, alors χ est DEL_N^C -satisfiable ssi

$$\chi' \wedge \mathbf{C}_N B$$

est DEL_N^C -satisfiable.

Preuve. Pour simplifier supposons que la sous-formule de χ est $[p := \varphi]\psi$.

\Rightarrow : Supposons que $M = \langle W, K, V \rangle$ est un EL_N^C -modèle tel que $M, w \Vdash \chi$. Nous construisons un EL_N^C -modèle $M_{x_p} = \langle W, K, V_{x_p} \rangle$, où $V_{x_p}(p) = V(p)$ for all $p \neq x_p$, et $V_{x_p}(x_p) = \llbracket \varphi \rrbracket_M$. Nous démontrons que $M_{x_p} \Vdash [p := \varphi]\psi \leftrightarrow \psi'$, d'où les trois cas suivent.

\Leftarrow : Nous supposons que M est généré par w , et observons que \mathbf{K}_i est une 'modalité maître' (*master modality*) pour EL_N avec un seul agent, ainsi que \mathbf{C}_G pour EL_N^C , et ainsi que la conjonction des opérateurs \mathbf{E}_G jusqu'au degré modal de ψ pour EL_N multi-agents. Par exemple, quand $M, w \Vdash \mathbf{C}_G \chi$, alors $M \Vdash \mathbf{C}_G \chi$. ■

Le renommage évite l'explosion exponentielle. Ceci nous permet la définition des opérateurs de réduction $\text{red}_{\text{DEL}_1}$, $\text{red}_{\text{DEL}_N}$ et $\text{red}_{\text{DEL}_N^C}$ qui éliminent itérativement tous les affectations.

Par exemple, considérons la formule E_{DEL_N} suivante :
 $\neg[\neg \text{light}][\text{light} := \neg \text{light}]\mathbf{K}_i \text{light}$. Sa réduction est $\neg[\neg \text{light}]\mathbf{K}_i x_{\text{light}} \wedge \mathbf{K}_i(x_{\text{light}} \leftrightarrow \neg \text{light})$.

Proposition 7 $\text{red}_{\text{DEL}_1}$, $\text{red}_{\text{DEL}_N}$ et $\text{red}_{\text{DEL}_N^C}$ sont des transformations polynomiales, et ils préservent la satisfiabilité dans les logiques respectives.

Preuve. La préservation de la satisfiabilité est impliqué par la Proposition 6.

Pour les cas d'un seul agent et de connaissance commune nous montrons que la longueur de la réduction de χ est bornée par $|\chi| \times (|\chi| + 6)$, et pour le cas de DEL_N nous montrons que la longueur de la réduction de χ est bornée par $|\chi|^2 \times (|\chi| + 6)$. En plus, dans la Proposition 6 la longueur de χ' est bornée par $|\chi|$, la longueur de chaque équivalence dans B est bornée par $|\chi| + 4$, et le nombre des équivalences est borné par le nombre d'affectations (atomiques) dans χ , ce qui ne dépasse pas $|\chi|$. Dans le cas de l'opérateur \mathbf{E} , le nombre d'équivalences doit être multiplié par le degré modal de χ , qui est borné par $|\chi|$. ■

6.2 Élimination des annonces

Une fois les affectations sont éliminées, nous pouvons éliminer les annonces en utilisant la procédure de Lutz. Nous n'avons pas la place pour montrer les détails, alors nous mettons ici seulement le théorème le plus relevant.⁶

Proposition 8 ([7]) Le problème de la PAL_N -satisfiabilité est NP-complet si $N = 1$, et PSPACE-complet si $N \geq 2$. Le problème de la PAL_N^C -satisfiabilité est EXPTIME-complet.

Via le Théorème 5 nous obtenons :

Corollaire 9 Le problème de la D -satisfiabilité sans l'opérateur \mathbf{C}_G est NP-complet si $N = 1$, et PSPACE-complet si $N \geq 2$. Le problème de la D -satisfiabilité avec l'opérateur \mathbf{C}_G est EXPTIME-complet.

7 Conclusions

Nous avons modélisé le problème du décor dans la logique épistémico-dynamique par

⁶Pour une exposition extensive, le lecteur peut se rendre à [7].

la proposition d'une traduction des opérateurs d'actions ontiques et d'actions d'observation du calcul de situations, et nous avons également identifié la complexité du problème de satisfiabilité des formules traduite par cette méthode.

L'extension de la solution de Reiter proposée par Scherl & Levesque ne permet non seulement la formalisation des observations, mais aussi la formalisation des actions de perception (*sensing* $?\varphi$, qui testent si une proposition φ est vraie. Un tel type d'action peut être vu comme une composition non-déterministe, c'est-à-dire, une abréviation : $?\varphi = !\varphi \cup !\neg\varphi$. L'expansion de l'opérateur de choix non-déterministe 'U' provoque une explosion exponentielle de la formule qui ne permet pas l'intégration de cet type d'action comme primitive dans notre approche. Il n'est pas clair pour nous comment le SSA associé

$$\begin{aligned} & [?\varphi]\mathbf{K}_i\psi \\ & \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \mathbf{K}_i(\varphi \rightarrow [?\varphi]\psi)) \wedge \\ & \quad (\neg\varphi \rightarrow \mathbf{K}_i(\neg\varphi \rightarrow [?\varphi]\psi))) \end{aligned}$$

pourrait être intégré dans la transformation polynomial de Lutz. Une autre indice que la présence des actions de perception (*sensing*) augmente la complexité est donnée par le résultat de [5], qui affirme que la vérification de plan est Π_2^P -complet dans ce cas. Nous avons l'intention de généraliser nos résultats aux actions non-publiques, comme dans [2, 1].

Remerciements

Hans van Ditmarsch est soutenu par le projet 'Games, Action and Social Software' du NIAS (Netherlands Institute for Advanced Study in the Humanities and Social Sciences) et le NWO (Netherlands Organisation for Scientific Research) Cognition Program for the Advanced Studies (grant NWO 051-04-120).

Tiago de Lima est supporté par le Pro-

gramme AlBan, programme de bourses de haut niveau de l'Union Européenne pour l'Amérique latine, bourse numéro E04D041703BR.

Les auteurs remercient également les trois relecteurs anonymes pour leurs commentaires extrêmement pertinents.

Références

- [1] F. Bacchus, J.Y. Halpern, and H. Levesque. Reasoning about noisy sensors in the situation calculus. *Artificial Intelligence*, 111 :131–169, 1999.
- [2] A. Baltag, L. Moss, and S. Solecki. The logic of public announcements and common knowledge. In *Proc. TARK'98*, 1998.
- [3] R. Demolombe, A. Herzig, and I. Varzinczak. Regression in modal logic. *J. of Applied Non-Classical Logics*, 13(2) :165–185, 2003.
- [4] R. Fagin, J. Halpern, Y. Moses, and M. Vardi. *Reasoning about Knowledge*. The MIT Press, 1995.
- [5] Andreas Herzig, Jérôme Lang, Dominique Longin, and Thomas Polacsek. A logic for planning under partial observability. In *Proc. AAAI'2000*, Austin, Texas, August 2000.
- [6] B. Kooi. Expressivity and completeness for public update logic via reduction axioms. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 17(2), 2007. To appear.
- [7] C. Lutz. Complexity and succinctness of public announcement logic. In *Proc. of AAMAS*, pages 137–144, 2006.
- [8] A. Nonnengart and C. Weidenbach. Computing small clause normal forms. In *Handbook of Automated Reasoning*, pages 335–367. North Holland, 2001.

- [9] J. Plaza. Logics of public communications. In M. L. Emrich et al., editors, *Proc. of ISMIS*, pages 201–216, 1989.
- [10] R. Reiter. The frame problem in the situation calculus : A simple solution (sometimes) and a completeness result for goal regression. In V. Lifschitz, editor, *Papers in Honor of John McCarthy*, pages 359–380. Academic Press Professional Inc., 1991.
- [11] R. Reiter. *Knowledge in Action : Logical Foundations for Specifying and Implementing Dynamical Systems*. The MIT Press, 2001.
- [12] R. Scherl and H. Levesque. Knowledge, action and the frame problem. *Artificial Intelligence*, 144(1–2) :1–39, 2003.
- [13] S. Shapiro, M. Pagnucco, Y. Lespérance, and H. J. Levesque. Iterated belief change in the situation calculus. In *Proc. of KR*, pages 527–538, 2000.
- [14] M. Thielscher. From Situation Calculus to Fluent Calculus : State update axioms as a solution to the inferential frame problem. *Artificial Intelligence*, 111(1–2) :277–299, 1999.
- [15] J. van Benthem. One is a lonely number. In P. Koepke et al., editors, *Proc. of LC&CL*, 2002.
- [16] H. van Ditmarsch, W. van der Hoek, and B. Kooi. Dynamic epistemic logic with assignment. In *Proc. of AAMAS*, pages 141–148. ACM, 2005.