

Identification robuste en présence de mesures aberrantes

José Ragot¹, Kamel Benothman², Didier Maquin¹ et Mohamed Benrejeb²

¹ Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039 - Nancy-Université, CNRS
2, Avenue de la forêt de Haye, 54516 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France
{Jose.Ragot, Didier.Maquin}@ensem.inpl-nancy.fr

² LARA Automatique
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunisie
BP 37, Le Belvédère 1002, Tunis Tunisie
Kamel.Benothman@enim.rnu.tn, Mohamed.Benrejeb@enit.rnu.tn

Résumé. *On souhaite estimer les paramètres d'un modèle de type ARX à partir de mesures corrompues simultanément par des bruits à caractère aléatoire de valeurs moyennes nulles et des erreurs systématiques. Pour prendre en compte les deux types d'erreur, on utilise une fonction de distribution de ces erreurs sous forme d'un mélange additif de deux distributions partielles, la première caractérisant les erreurs aléatoires de faibles amplitudes, la seconde permettant de prendre en compte la présence de biais où de valeurs aberrantes de grandes amplitudes.*

Mot clés. *Identification robuste, valeurs aberrantes, estimation paramétrique*

1 Introduction

Dans le domaine de l'identification des paramètres d'un système, la méthode des moindres carrés simples présente l'avantage d'une grande facilité de mise en œuvre. Les résultats obtenus peuvent cependant s'avérer très médiocres si les données utilisées ne respectent pas certaines hypothèses statistiques. En particulier, il est bien connu que la présence de valeurs aberrantes, ces dernières échappant à l'hypothèse de distribution normale, sensibilise fortement les valeurs numériques obtenues pour les paramètres du modèle. Dans sa version de base, la méthode en question est connue pour présenter très peu de robustesse vis-à-vis des valeurs aberrantes.

D'un point de vue pratique, cette situation est malheureusement assez fréquente, les mesures effectuées sur un système physique pouvant être contaminées par des erreurs accidentelles dues au protocole de mesure, à la transcription ou à la transmission des informations, au dérèglement momentané d'un capteur ou d'une chaîne d'acquisition de mesures. Pour cette raison, les techniques statistiques cherchent à s'adapter à la présence éventuelle de valeurs aberrantes [8], [12] et ceci en application de deux principes.

Le premier, sans doute le plus naturel, vise à développer des techniques qui, dans une première étape, permettent la détection et l'isolation des valeurs aberrantes [4], [7], [13], [14]. Dans une deuxième étape, les observations affectées par ces valeurs [11] sont supprimées ou éventuellement sont munies d'un poids "faible". Enfin, la procédure d'estimation est réitérée sur les données ainsi épurées des valeurs aberrantes.

La conséquence directe de cette sensibilité a été la motivation pour interpréter le lien entre valeurs aberrantes et amplitudes des erreurs d'estimation. De cette réflexion est née la définition de nouveaux critères d'estimation paramétrique conduisant aux régressions robustes. Notons que, outre l'insensibilité des estimations obtenues aux valeurs aberrantes, ces critères se sont trouvés aussi à la base de méthodes de diagnostic (recherche de dysfonctionnement), cette fois l'idée étant de mettre en évidence les valeurs aberrantes.

Avec l'hypothèse que la distribution des erreurs peut être assimilée à une loi normale, il existe plusieurs techniques de régression robuste qui peuvent satisfaire à la condition d'insensibilité des estimées par rapport aux valeurs aberrantes et en particulier celles connues sous le sigle *LMS* pour *Least Median of Square* et *LTS* pour *Least Trimmed Squares*.

Parmi les méthodes classiques, on peut citer [18] où les auteurs proposent une technique robuste à deux niveaux utilisant certains résultats de Hubert [10] sur les M-estimateurs. Dans [3], le problème de la régression orthogonale robuste est traité. Les auteurs introduisent en particulier la technique des moindres carrés orthogonaux à poids optimaux, qui est caractérisée par un point de rejet des valeurs aberrantes permettant de maintenir l'efficacité du principe des moindres carrés. De plus, la méthode rend explicite le calcul de ces poids optimaux, ces derniers représentant l'influence de chaque mesure à l'estimée des paramètres du modèle. Enfin les techniques classiques de régularisation s'appliquent aussi à cette régression robuste [5], leur utilisation permettant une réduction sensible de la variance des paramètres estimés.

Dans [1] les auteurs introduisent une méthode fournissant une estimée robuste des paramètres inconnus d'un modèle ARMA en reprenant le principe du maximum de vraisemblance, mais assorti de pondérations adaptées. Deux types de valeurs aberrantes sont traités, selon que leurs influences sont à effets additifs ou non, sans connaître *a priori* leur nombre, leurs positions et leurs amplitudes. La procédure proposée classe les données en séparant les *outliers* et borne leur influence.

2 Méthode proposée

2.1 Description du système

Pour un système SISO d'entrée x , de sortie y^* , de paramètres vrais (mais inconnus) a_i^* et b_i^* , à chaque instant k , la loi d'évolution de la sortie est prise sous la forme :

$$y^*(k) = \sum_{i=1}^p a_i^* y^*(k-i) + \sum_{i=1}^q b_i^* x(k-i) \quad (1)$$

ou plus simplement en introduisant l'opérateur retard q^{-1} :

$$y^*(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i^* q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i^* q^{-i}} x(k) \quad (2)$$

L'entrée x est supposée parfaitement connue et la mesure \tilde{y} de la sortie est entachée d'erreur e , ces dernières ayant une influence additive à chaque instant :

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + e(k) \quad (3)$$

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que $e(k)$ est une réalisation particulière d'une variable aléatoire e pouvant recouvrir deux types d'erreur. Le premier type concerne des erreurs de faibles amplitudes centrées autour de l'origine, le second type concerne des grosses erreurs à caractère accidentel non nécessairement de valeur moyenne nulle. Compte tenu de la présence de deux types d'erreur, la loi de distribution de la variable e est choisie sous forme additive dépendant d'un facteur de mélange π (compris entre 0 et 1) :

$$p(e) = \pi p_1(e) + (1 - \pi) p_2(e) \quad (4)$$

avec les définitions des lois partielles où $\sigma_2 \gg \sigma_1$:

$$p_1(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_1}\right)^2\right) \quad (5a)$$

$$p_2(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{e}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (5b)$$

La loi de distribution des erreurs de mesure (4) est caractérisée par les paramètres de dispersion σ_1 et σ_2 et un paramètre de mélange π . On peut interpréter le rôle de ce paramètre comme la proportion du nombre de mesures saines par rapport au nombre total de mesures. Eventuellement, cette proportion peut être *a priori* fixée si l'on dispose d'informations sur le système de mesure et son environnement ; dans la suite, ce paramètre sera supposé inconnu et sa valeur sera estimée conjointement aux paramètres du modèle du système. L'objectif est d'identifier l'ensemble des paramètres du modèle en fonction des données disponibles.

2.2 Estimation des paramètres du modèle

Pour un échantillon de N mesures $\tilde{y}(k)$ disponibles, avec l'hypothèse d'indépendance des erreurs de mesure, on définit la fonction de log-vraisemblance de l'échantillon à partir de la distribution contaminée (4) :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log(\pi p_1(y(k)) + (1 - \pi) p_2(y(k))) \quad (6)$$

avec les définitions :

$$p_1(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_1}\right)^2\right) \quad (7a)$$

$$p_2(y(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{y}(k) - y(k)}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (7b)$$

$$y(k) = \frac{\sum_{i=1}^q b_i q^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k) \quad (7c)$$

Les équations d'optimalité de \mathcal{V} par rapport à a_j , b_j , σ_1 , σ_2 et π s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial a_j} = - \sum_{k=1}^N \left(\pi \frac{p_{1,k}}{p_k \sigma_1^2} + (1 - \pi) \frac{p_{2,k}}{p_k \sigma_2^2} \right) (\tilde{y}(k) - y(k)) \frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = 0 \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial b_j} = - \sum_{k=1}^N \left(\pi \frac{p_{1,k}}{p_k \sigma_1^2} + (1 - \pi) \frac{p_{2,k}}{p_k \sigma_2^2} \right) (\tilde{y}(k) - y(k)) \frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = 0 \quad (8b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \pi} = \sum_{k=1}^N \frac{p_{1,k} - p_{2,k}}{p_k} = 0 \quad (8c)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma_1} = \pi \sum_{k=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} \left(\frac{(\tilde{y}(k) - y(k))^2}{\sigma_1^3} - \frac{1}{\sigma_1} \right) = 0 \quad (8d)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \sigma_2} = (1 - \pi) \sum_{k=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} \left(\frac{(\tilde{y}(k) - y(k))^2}{\sigma_2^3} - \frac{1}{\sigma_2} \right) = 0 \quad (8e)$$

avec les notations pour les lois de distribution :

$$p_{1,k} = p_1(y(k)), \quad p_{2,k} = p_2(y(k)), \quad p_k = \pi p_{1,k} + (1 - \pi) p_{2,k}$$

et où la sensibilité de la sortie $y(k)$ par rapport aux paramètres du modèle est définie par :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial a_j} + y(k-j) \quad j = 1..p \quad (9a)$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^p a_i \frac{\partial y(k-i)}{\partial b_j} + x(k-j) \quad j = 1..q \quad (9b)$$

ou plus simplement avec l'opérateur q^{-1} :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial a_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} y(k) \quad (10a)$$

$$\frac{\partial y(k)}{\partial b_j} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i q^{-i}} x(k) \quad (10b)$$

Le système d'équations (8a) à (8e), complété des définitions (10) doit être résolu par rapport aux paramètres a_i , b_i , π , σ_1 et σ_2 . Il s'agit d'un système non linéaire dont la structure particulière peut cependant être mise à profit pour proposer une résolution originale. En particulier, à partir de (8c), (8d) et (8e), on obtient :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{\pi + \frac{p_{2,k}}{p_{1,k} - p_{2,k}}} = 0 \quad (11a)$$

$$\sigma_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}}{p_k}} \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k} (y(k) - \tilde{y}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}}{p_k}} \quad (11b)$$

D'un point de vue formel, on remarque que si les quantités $p_{1,k}$ et $p_{2,k}$ sont connues, alors σ_1 et σ_2 revêtent des expressions analytiques simples tandis que le paramètre de mélange π n'est pas explicite, mais est solution d'une équation non linéaire que l'on peut résoudre par les techniques numériques classiques. Les deux équations restantes, (8a) et (8b), qui traduisent l'optimalité par rapport aux paramètres a_j et b_j du modèle, ne sont pas explicites en ces paramètres et doivent être résolues de façon itérative.

Ainsi, pour résoudre le système (8a)-(8e), on propose d'utiliser une procédure itérative basée sur une décomposition hiérarchique de ce système. Définissons au préalable les grandeurs suivantes :

$$\text{vecteur des paramètres} \quad \theta = (a_1 \dots a_p \ b_1 \dots b_q)^T = [\theta_\ell]_{\ell=1..p+q} \quad (12)$$

$$\text{vecteur des poids} \quad w_k = \left(\pi \frac{p_{1,k}}{p_k \sigma_1^2} + (1 - \pi) \frac{p_{2,k}}{p_k \sigma_2^2} \right) \frac{\partial y(k)}{\partial \theta_\ell} \quad (13)$$

$$\text{matrice des poids} \quad W = \text{diag}(w_k) \quad (14)$$

$$\text{vecteur des mesures} \quad \tilde{y} = (\tilde{y}(1) \dots \tilde{y}(N))^T \quad (15)$$

$$\text{vecteur des prédictions} \quad y = (y(1) \dots y(N))^T \quad (16)$$

$$\text{vecteur des erreurs} \quad e = y - \tilde{y} \quad (17)$$

$$\text{sensibilité} \quad s(k) = \left(\frac{\partial y(k)}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y(k)}{\partial a_p} \ \frac{\partial y(k)}{\partial b_1} \dots \frac{\partial y(k)}{\partial b_q} \right) \quad (18)$$

$$\text{matrice de sensibilité} \quad S = (s(1) \dots s(N))^T \quad (19)$$

$$\text{gradient} \quad G = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} = S^T W (y(k) - \tilde{y}(k)) \quad (20)$$

$$\text{hessien} \quad H = \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial \theta \partial \theta^T} = S^T W S \quad (21)$$

Comme (8a) et (8b) ne sont pas des équations explicites en a_j et b_j , l'estimation de ces paramètres est effectuée de façon itérative en utilisant un algorithme de type gradient. En notant (m) l'indice d'itération de cet algorithme, on a :

$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta (H^{(m)})^{-1} G^{(m)} \quad (22)$$

le pas Δ pouvant être pris égal à 1. Les équations (23) à (41) constituent l'algorithme de résolution permettant d'estimer les paramètres du modèle :

initialisation $m = 0$, choix de $a_i^{(m)}$, $b_i^{(m)}$, $\sigma_1^{(m)}$, $\sigma_2^{(m)}$, $y^{(m)}(0)$ (23)

simulation modèle
$$y^{(m)}(k) = -\sum_{i=1}^p a_i^{(m)} y^{(m)}(k-i) + \sum_{i=1}^q b_i^{(m)} x(k-i)$$
 (24)

erreur de prédiction
$$e^{(m)}(k) = y^{(m)}(k) - \tilde{y}(k)$$
 (25)

distribution 1
$$p_{1,k}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1^{(m)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{(m)}(k)}{\sigma_1^{(m)}}\right)^2\right)$$
 (26)

distribution 2
$$p_{2,k}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2^{(m)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{(m)}(k)}{\sigma_2^{(m)}}\right)^2\right)$$
 (27)

paramètre de mélange résoudre par rapport à $\pi^{(m)}$:
$$0 = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\pi^{(m)} + \frac{p_{2,k}^{(m)}}{p_{1,k}^{(m)} - p_{2,k}^{(m)}}}$$
 (28)

distribution mélange
$$p_k^{(m)} = \pi^{(m)} p_{1k}^{(m)} + (1 - \pi^{(m)}) p_{2k}^{(m)}$$
 (29)

écart-type 1
$$\sigma_1^{(m+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}^{(m)}}{p_k^{(m)}} (e^{(m)}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{1,k}^{(m)}}{p_k^{(m)}}}}$$
 (30)

écart-type 2
$$\sigma_2^{(m+1)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}^{(m)}}{p_k^{(m)}} (e^{(m)}(k))^2}{\sum_{i=1}^N \frac{p_{2,k}^{(m)}}{p_k^{(m)}}}}$$
 (31)

sensibilité a_j
$$\frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial a_j^{(m)}} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p a_i^{(m)} q^{-i}} y^{(m)}(k)$$
 (32)

sensibilité b_j
$$\frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial b_j^{(m)}} = \frac{q^{-j}}{1 - \sum_{i=1}^p b_i^{(m)} q^{-i}} x(k)$$
 (33)

sensibilité θ
$$s^{(m)}(k) = \left(\frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial a_1} \dots \frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial a_p} \frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial b_1} \dots \frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial b_q} \right)$$
 (34)

poids
$$w_k^{(m+1)} = \left(\pi^{(m)} \frac{p_{1,k}^{(m)}}{p_k^{(m)} (\sigma_1^{(m+1)})^2} + (1 - \pi^{(m)}) \frac{p_{2,k}^{(m)}}{p_k^{(m)} (\sigma_2^{(m+1)})^2} \right) \frac{\partial y^{(m)}(k)}{\partial \theta_\ell}$$
 (35)

matrice des poids
$$W^{(m+1)} = \text{diag}(w_k^{(m+1)})$$
 (36)

matrice des sensibilités
$$S^{(m)} = (s^{(m)}(1) \dots s^{(m)}(N))^T$$
 (37)

gradient
$$G^{(m+1)} = S^{(m)T} W^{(m+1)} (y^{(m)}(k) - \tilde{y}(k))$$
 (38)

hessien approché
$$H^{(m+1)} = S^{(m)T} W^{(m+1)} S^{(m)}$$
 (39)

anciens paramètres
$$\theta^{(m)} = (a_1^{(m)} \dots a_p^{(m)} b_1^{(m)} \dots b_q^{(m)})^T$$
 (40)

mise à jour paramètres
$$\theta^{(m+1)} = \theta^{(m)} - \Delta (H^{(m+1)})^{-1} G^{(m+1)}$$
 (41)

3 Résultats pour un système du premier ordre

Les données utilisées sont celles d'un système du premier ordre :

$$y^*(k+1) = a^*y^*(k) + b^*u(k), \quad y^*(0) = 0$$

$$\tilde{y}(k) = y^*(k) + \varepsilon(k) + \delta(k)$$

avec $a^* = 0.9$ et $b^* = 0.1$. Aux valeurs vraies y^* de la sortie ont donc été superposés un bruit ε tiré selon une loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 0.1)$ et des grosses erreurs δ tirées selon une loi uniforme. Après estimation des paramètres a et b du modèle et des paramètres σ_1 , σ_2 et π des distributions des erreurs, on a calculé la sortie prédite par le modèle, puis les critères résiduels :

$$\hat{y}_{RLS}(k+1) = \hat{a}_{RLS}\hat{y}_{RLS}(k) + \hat{b}_{RLS}u(k), \quad \hat{y}_{RLS}(0) = 0 \quad (42a)$$

$$\tilde{\Phi}_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - \tilde{y}(k))^2 \quad (42b)$$

$$\Phi_{RLS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{RLS}(k) - y^*(k))^2 \quad (42c)$$

L'indice *RLS* rappelle qu'il s'agit de grandeurs calculées à partir de l'approche robuste. Ces différentes grandeurs (prédictions et critères) peuvent être comparées à celles obtenues en appliquant l'algorithme des moindres carrés aux écarts $y(k) - \tilde{y}(k)$, les critères précédents étant alors maintenant notés $\tilde{\Phi}_{LS}$ et Φ_{LS} :

$$\tilde{\Phi}_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - \tilde{y}(k))^2 \quad (43a)$$

$$\Phi_{LS} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_{LS}(k) - y^*(k))^2 \quad (43b)$$

Les quantités $\tilde{\Phi}_{(\cdot)}$ témoignent donc de l'aptitude du modèle à suivre la sortie mesurée du système alors que les quantités $\Phi_{(\cdot)}$ témoignent de cette aptitude vis-à-vis de la sortie du système sans bruit ni valeurs aberrantes (cette sortie est en général inconnue, sauf ici en simulation). Si le modèle est correctement identifié, c'est-à-dire sans avoir subi l'influence des bruits et des valeurs aberrantes, $\Phi_{(\cdot)}$ doit être proche de la valeur 0 (aux influences près des erreurs à caractère aléatoire de faibles amplitudes), alors que $\tilde{\Phi}_{(\cdot)}$ est sensiblement non nul car il traduit essentiellement la présence des valeurs aberrantes.

Afin de tester l'algorithme proposé, différentes situations sont présentées. L'essai 1 est relatif à l'application de l'algorithme à un seul jeu de données.

3.1 Essai 1. Application de la méthode sur un jeu d'essai

Pour cet essai, les grosses erreurs $\delta(k)$ sont comprises entre 0 et 0.75, elles sont donc toutes positives. Les paramètres du système simulé sont : $a^* = 0.9$ et $b^* = 0.1$. L'entrée u est générée sur un horizon temporel de 500 points ; l'amplitude de l'entrée est issue d'un générateur de nombres aléatoires à distribution gaussienne centrée et d'écart-type unité. Un bruit issu d'une loi gaussienne centrée d'écart-type 0.1 et une série de valeurs aberrantes sont ajoutés à la sortie $y^*(k)$ du système simulé, le signal obtenu étant alors noté $\tilde{y}(k)$. On estime les paramètres a et b du système par la méthode standard des moindres carrés (LS) et par la méthode proposée (RLS). Pour les deux estimations obtenues, le système est simulé, ce qui fournit les signaux $\hat{y}_{LS}(k)$ et $\hat{y}_{RLS}(k)$. On peut alors évaluer les critères quadratiques définis en (42) et (43).

La figure 1 indique successivement de haut en bas, pour les 100 premières observations : les mesures de la sortie \tilde{y} avec les bruits et les valeurs aberrantes, la sortie non bruitée y , la sortie du modèle LS superposée avec la sortie non bruitée, la sortie du modèle RLS superposée avec la sortie non bruitée, l'erreur d'estimation vis-à-vis de la sortie sans valeurs aberrantes, l'erreur d'estimation en valeur relative. Contrairement au modèle LS , on constate que le modèle RLS permet de suivre fidèlement la sortie du système sans défaut, bien que l'identification de ses paramètres ait été effectuée à partir de la sortie mesurée avec les défauts.

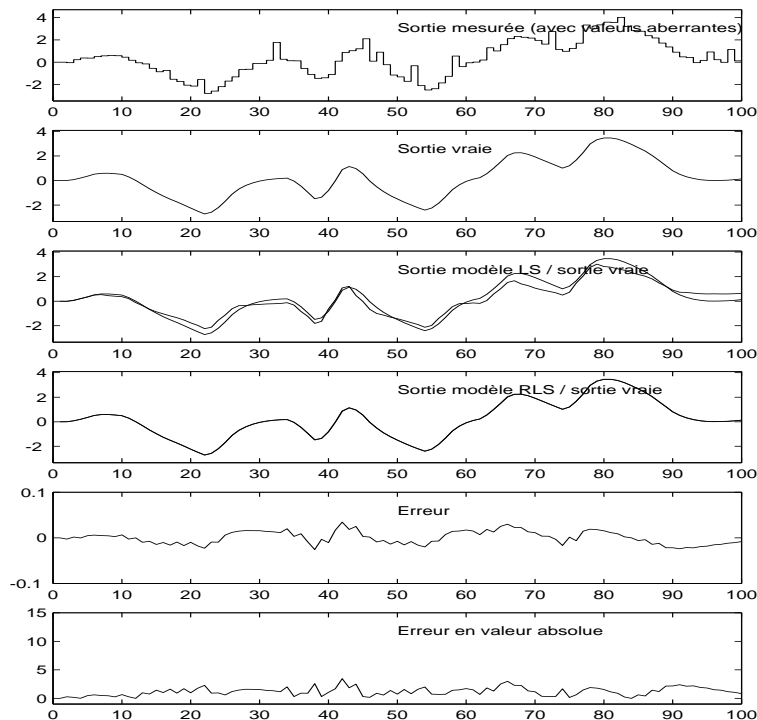


Fig. 1. Résultats de simulation sur un jeu d'essai

La figure 2 visualise l'erreur entre la sortie modèle \hat{y}_{RLS} et la sortie vraie y^* du système, l'écart entre la sortie modèle \hat{y}_{RLS} et la sortie avec bruit et valeurs aberrantes \tilde{y} du système, les valeurs aberrantes simulées δ affectant la sortie, la fonction poids w .

Les valeurs aberrantes sont donc correctement détectées, localisées et identifiées, la fonction poids jouant parfaitement son rôle de réduction de l'influence des valeurs aberrantes.

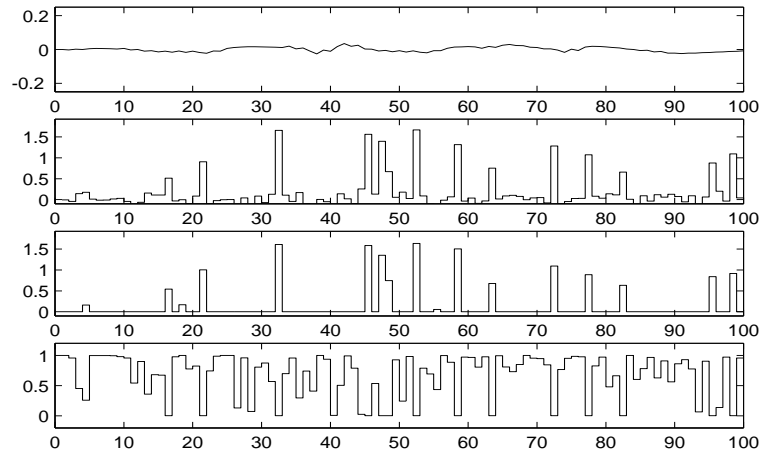


Fig. 2. Erreur, valeurs aberrantes identifiées et simulées et fonction poids

3.2 Essai 2. Application de la méthode à plusieurs essais

Une série de 10 essais a été effectuée dans les mêmes conditions que précédemment ; les entrées et les bruits sont des réalisations des distributions qui ont servi au premier essai. La table 1 regroupe les résultats d'identification sur ces 10 essais. Ces derniers ne diffèrent que par la séquence de bruit et de valeurs aberrantes. On a indiqué en colonnes 2 à 5 les paramètres a et b identifiés par les approches RLS et LS . Les 3 colonnes suivantes indiquent les valeurs des écart-types identifiés et du facteur de mélange. Les 4 dernières colonnes sont relatives aux critères précédemment définis. On constate que :

- l'approche RLS fournit des estimées proches des valeurs vraies, ce qui n'est pas le cas de l'approche LS ;
- les écart-types estimés témoignent bien de deux distributions distinctes des erreurs de mesure ;
- en ce qui concerne les critères, on a toujours $\Phi_{RLS} < \Phi_{LS}$. De plus Φ_{RLS} , relatif aux écarts entre la sortie non bruitée et la sortie du modèle est proche de la valeur 0 témoignant ainsi de l'aptitude du modèle RLS à bien reconstruire la sortie réelle du système.

	\hat{a}_{RLS}	\hat{b}_{RLS}	\hat{a}_{LS}	\hat{b}_{LS}	σ_1	σ_2	π	$\check{\Phi}_{LS}$	Φ_{LS}	$\check{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}
1	0.904	0.097	0.189	0.100	0.082	0.621	0.573	10.092	4.360	9.172	0.143
2	0.897	0.105	0.229	0.085	0.087	0.635	0.577	10.563	4.126	9.353	0.218
3	0.891	0.111	0.186	0.146	0.091	0.629	0.565	10.438	4.450	9.403	1.380
4	0.905	0.100	0.260	0.097	0.087	0.638	0.609	10.365	4.363	9.038	0.186
5	0.892	0.103	0.184	0.082	0.083	0.635	0.592	10.056	4.411	9.184	0.221
6	0.898	0.103	0.261	0.125	0.087	0.629	0.580	10.336	4.566	9.227	0.229
7	0.893	0.100	0.252	0.109	0.088	0.625	0.586	10.266	4.651	9.118	0.494
8	0.898	0.098	0.204	0.095	0.085	0.638	0.586	10.470	4.811	9.302	0.337
9	0.907	0.096	0.276	0.075	0.084	0.619	0.581	10.048	4.701	9.070	1.752
10	0.903	0.101	0.263	0.102	0.085	0.605	0.557	10.573	5.144	9.109	0.175

Table 1. Résultats de l'estimation sur une série de 10 jeux d'essai

3.3 Essai 3

Le tableau 2 présente douze résultats d'estimation, chacun résultant d'une moyenne sur 100 essais.

N	a_{RLS}	b_{RLS}	a_{LS}	b_{LS}	σ_1	σ_2	μ	$\check{\Phi}_{LS}$	Φ_{LS}	$\check{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}	η
1	0.905	0.097	0.583	0.131	0.1	2	0.5	15.86	9.7	12.5	0.43	0
	0.002	0.002	0.029	0.008								
2	0.900	0.100	0.284	0.159	0.1	2	0.5	24.11	11.89	20.9	0.16	1
	0.002	0.001	0.033	0.013								
3	0.899	0.101	0.162	0.190	0.1	2	0.5	33.70	13.11	31.14	0.26	2
	0.000	0.002	0.009	0.023								
4	0.904	0.098	0.590	0.130	0.1	2	0.1	15.93	9.7	12.5	0.36	0
	0.002	0.002	0.030	0.007								
5	0.900	0.100	0.276	0.159	0.1	2	0.1	24.01	11.7	20.95	0.18	1
	0.002	0.001	0.030	0.015								
6	0.900	0.101	0.149	0.154	0.1	2	0.1	33.90	12.67	31.49	0.21	2
	0.003	0.003	0.005	0.033								
7	0.906	0.097	0.589	0.130	0.1	10	0.5	15.94	9.86	12.54	0.52	0
	0.002	0.002	0.032	0.006								
8	0.900	0.100	0.280	0.159	0.1	10	0.5	24.11	11.86	20.97	0.15	1
	0.002	0.001	0.034	0.014								
9	0.901	0.099	0.135	0.189	0.1	10	0.5	33.15	11.96	30.87	0.07	2
	0.001	0.001	0.047	0.026								
10	0.904	0.098	0.586	0.130	0.1	10	0.1	15.83	9.82	12.48	0.35	0
	0.002	0.002	0.028	0.007								
11	0.898	0.101	0.279	0.159	0.1	10	0.1	24.05	11.84	20.95	0.21	1
	0.002	0.001	0.029	0.015								
12	0.898	0.101	0.142	0.163	0.1	10	0.1	33.59	12.63	31.22	0.24	2
	0.001	0.002	0.020	0.011								

Table 2. Moyennes sur 100 cas. Estimations RLS et LS : paramètres, critère

Ici, les écart-types σ_1 et σ_2 et le coefficient de mélange π ne sont pas optimisés, mais fixés *a priori* et l'amplitude des grosses erreurs varie entre 0 et 1.5. Chaque essai est caractérisé par des valeurs particulières de σ_1 , σ_2 et μ . Pour chaque essai sont indiqués les paramètres obtenus selon les approches *RLS* et *LS*. La dernière colonne fait apparaître un paramètre noté η qui représente le type de valeurs aberrantes affectant les mesures : $\eta = 0$ concerne des valeurs aberrantes d'amplitudes comprises entre -1.5 et 1.5 , $\eta = 1$ des valeurs aberrantes d'amplitudes toutes égales à 1.5 et $\eta = 2$, des valeurs aberrantes égales à -1.5 ou 1.5 . On note toujours la bonne qualité de l'estimée des paramètres obtenus par l'approche robuste (les valeurs des paramètres identifiés sont très proches des valeurs vraies), l'approche *LS* se révélant inadaptée.

3.4 Essai 4. Recherche de structure du modèle

Dans ce qui précède l'ordre du modèle a été choisi identique à celui du système, ce qui constitue une situation privilégiée, mais non réaliste, pour l'identification. Les essais suivants montrent comment estimer l'ordre du modèle. La démarche adoptée est expérimentale et consiste à tester différentes structures de modèle à ordre croissant. On peut alors analyser le pouvoir explicatif de chaque modèle obtenu (amplitude du critère résiduel) en fonction de son ordre et choisir ensuite, au vu des valeurs de ce critère résiduel, l'ordre approprié.

Avec la même entrée que pour les essais précédents, les résultats obtenus sont consignés dans le tableau 3. Les fonctions de transfert sont données en fonction des coefficients directement identifiés (colonne 2) et sous forme factorisée (colonne 3). La dernière colonne indique le gain des différentes fonctions de transfert. Les critères $\tilde{\Phi}$ et Φ témoignent de la qualité des modèles obtenus.

	F. de T.	F. de T. factorisée	$\tilde{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}	Gain
$S(z)$	$\frac{0.20}{z-0.70}$				0.667
$M_1(z)$	$\frac{0.2018}{z-0.6984}$		7.914	0.038	0.663
$M_2(z)$	$\frac{0.2z+0.1745}{z^2+0.1532z-0.5927}$	$\frac{0.2(z+0.873)}{(z+0.850)(z-0.697)}$	7.914	0.046	0.668
$M_3(z)$	$\frac{0.2124z^2+0.203z+0.1937}{z^3+0.3157z^2+0.2867z-0.6873}$	$\frac{0.1937(z+0.478)(z+0.478)}{(z+0.505)(z+0.505)(z-0.695)}$	7.949	0.501	0.666

Table 3. Système d'ordre 1. Fonctions de transfert identifiées

On peut noter que les trois modèles donnent des critères quadratiques résiduels comparables, le modèle à retenir est donc celui ayant la structure la plus simple, c'est-à-dire le modèle du premier ordre. Les modèles d'ordres 2 et 3 pourraient être simplifiés, des pôles et des zéros se compensant de façon approchée.

3.5 Résultats pour un système du deuxième ordre

Il s'agit d'essais semblables aux précédents, le système étant cette fois d'ordre 2. Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau 4. L'évolution des critères $\tilde{\Phi}$ et Φ indique sans ambiguïté que l'ordre à retenir est 2.

	F. de T.	F. de T. factorisée	$\tilde{\Phi}$	Φ	Gain
$S(z)$	$\frac{0.2}{z^2-1.6z+0.63}$	$\frac{0.2}{(z-0.9)(z-0.7)}$			6.667
$M_1(z)$	$\frac{0.3474}{z-0.9599}$		16.69	16.77	16.770
$M_2(z)$	$\frac{0.02554z+0.1672}{z^2-1.616z+0.645}$	$\frac{0.02554(z+40.122)}{(z-0.902)(z-0.690)}$	6.92	0.55	6.599
$M_3(z)$	$\frac{0.007944z^2+0.2019z+0.1937}{z^3-0.5736z^2-1.015z+0.6484}$	$\frac{0.007944(z-9.527)(z+0.691)}{(z-0.896)(z+0.944)(z-0.715)}$	7.27	0.45	6.780

Table 4. Système d'ordre 2. Fonctions de transfert identifiées

3.6 Influence des paramètres des distributions d'erreur

Les résultats de la table 5 montrent que les estimés sont peu sensibles aux valeurs des écart-types des distributions des erreurs.

N	a_{RLS}	b_{RLS}	a_{LS}	b_{LS}	σ_1	σ_2	μ	$\tilde{\Phi}_{LS}$	Φ_{LS}	$\tilde{\Phi}_{RLS}$	Φ_{RLS}	η
1	0.904	0.098	0.590	0.130	0.1	2.0	0.1	15.93	9.7	12.5	0.36	0
	0.002	0.002	0.030	0.007								
2	0.904	0.098	0.586	0.130	0.1	10	0.1	15.83	9.82	12.48	0.35	0
	0.002	0.002	0.028	0.007								
3	0.904	0.098	0.589	0.129	0.1	20	0.1	15.83	9.85	12.47	0.35	0
	0.002	0.001	0.027	0.006								
4	0.907	0.096	0.590	0.129	0.1	100	0.1	15.87	9.83	12.48	0.57	0
	0.002	0.002	0.026	0.007								

Table 5. Moyennes sur 100 cas. Influence des écart-types sur les estimés

4 Conclusion

La prise en compte de valeurs aberrantes dans les procédures d'identification de système est une difficulté courante lorsqu'on utilise des données expérimentales. La solution proposée ici fournit un élément de réponse dont la mise en œuvre est simple, quoique la procédure nécessite un calcul itératif des estimés. Parmi les perspectives, il est envisagé de développer une technique robuste sur horizon glissant.

Références

1. Agostinelli, C. : Robust time series estimation via weighted likelihood. In : International Conference on Robust Statistics, ICORS'2001, Vorau, Austria (2001)
2. Battaglia, F., Orfe, L. : Outlier detection and estimation in nonlinear time series. *Journal of Time Series Analysis*, **26**(1) (2005) 107-121
3. Calafiore, G.C. : Outliers robustness in multivariable orthogonal regression. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **30**(6) (2000) 674-679
4. Chambers, R., Hentges, A., Zhao, X. : Robust automatic methods for outlier and error detection. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, **167**(2) (2004) 323-339
5. Chen, C. : Robust regression and outlier detection with the robustreg procedure. In : 27th Annual SAS Users Group International Conference, SUGI'27, Orlando, Florida, USA (2002)
6. Dewallef, P., Lonard, O. : Robust validation of measurements on jet engines. In : 4th European Conference on Turbomachinery, Fluid Dynamics and Thermodynamics, Firenze, Italy (2001)
7. Ghosh-Dastider, B., Schafer, J.L. : Outlier detection and editing procedures for continuous multivariate data. Working paper 2003-07, Princeton University (2003)
8. Hong, X., Harris, C.J., Chen S., Sharkey, P.M. : Robust nonlinear model identification methods using forward regression. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A*, **33**(4) (2003) 514-523
9. Hong, X., Chen, S. : M-estimator and D-optimality model construction using orthogonal forward regression. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part B*, **35**(1) (2005) 155-162
10. Hubert, M., Vanden Branden, K. : Robust methods for partial least squares regression. *Journal of Chemometrics*, **17**(10) (2003) 537-549
11. Liu, H., Shah, S., Jiang, W. : On-line outlier detection and data cleaning. *Computers and Chemical Engineering*, **28** (2004) 1635-1647
12. Rousseeuw, P.J., Leroy, A.M. : *Robust Regression and Outlier Detection*, Wiley Interscience, New York, USA (1987)
13. Scott, D.W. : Partial mixture estimation and outlier detection in data and regression. In : *Theory and Applications of Recent Robust Methods*, Hubert, M., Pison, G., Struyf, A., Van Aelst, S. eds, Series: Statistics for Industry and Technology, Birkhauser, Basel (2004)
14. Tang, J., Chen, Z., Fu, A., Cheung, D. : A robust outlier detection scheme in large data sets. *Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, Taipei, Taiwan (2002)
15. Van Dijk, D., Franses, P.H., Lucas, A. : Testing for ARCH in the Presence of Additive Outliers. *Journal of Applied Econometrics*, **14**(5) (1999) 539-562
16. Viele, K., Tong, B. : Modeling with mixtures of linear regressions. (1999). <http://www.ms.uky.edu/statinfo/techreports/techreports.html>
17. Wang, Z., Gao, Y., Qin, P. : Detection of gross measurement errors using the grey system method. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **19**(11) (2002) 801-804
18. Yeap, B.Y., Davidian, M. : Robust two-stage estimation in hierarchical nonlinear models. *Biometrics*, **57**(1) (2001) 266-272