



# Conception d'observateurs pour un modèle de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables

Dalil Ichalal, Benoît Marx, José Ragot, Didier Maquin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy  
UMR 7039, Nancy-Université, CNRS  
2, Avenue de la forêt de Haye. 54516 Vandoeuvre-les-Nancy, France  
[prenom.nom@ensem.inpl-nancy.fr](mailto:prenom.nom@ensem.inpl-nancy.fr)

**Résumé.** *Dans cet article, une méthode d'estimation d'état est proposée pour les systèmes non linéaires décrits par un modèle de Takagi-Sugeno ou multi-modèle. La particularité de cette étude réside dans le fait que les fonctions d'activation du modèle dépendent de variables non mesurables (état du système). Les conditions de convergence de l'observateur sont établies en utilisant la deuxième méthode de Lyapunov et une fonction quadratique. Ces conditions sont données sous forme d'inégalités linéaires matricielles.*

**Mot clés.** *Approche multi-modèle, Estimation d'état, Variables de décision non mesurables, Stabilité asymptotique, Placement des pôles, Inégalités linéaires matricielles (LMI).*

## 1 Introduction

L'estimation d'état constitue un champ de recherche très vaste ayant de nombreuses applications. Parmi ces applications, on peut citer l'utilisation des observateurs d'état pour estimer les états non mesurables d'un système ou pour remplacer des capteurs coûteux ou difficile à maintenir; ces observateurs sont utilisés pour la commande par retour d'état ou pour le diagnostic du système. Les méthodes de diagnostic de fonctionnement de systèmes à base de modèles linéaires ont atteint actuellement une certaine maturité, cependant, la linéarité des modèles de représentation du processus à surveiller constitue une hypothèse forte. L'extension directe des méthodes développées dans le contexte des modèles linéaires au cas des modèles non linéaires quelconques est délicate. En revanche, des résultats intéressants ont d'ores et déjà été obtenus dans le cas des multi-modèles où on utilise un ensemble de modèles de structures simples, chaque modèle décrivant le comportement du système dans une « zone de fonctionnement » particulière.

Dans le contexte des systèmes linéaires, la détection de défauts à base d'observateurs d'état [5] est efficace. Pour la phase d'isolation des défauts, les méthodes s'appuient le plus généralement sur des bancs d'observateurs pilotés par des jeux de grandeurs différentes. La technique précédente ne s'étend pas immédiatement

aux multimodèles en raison des couplages introduits dans la structure. Généralement, la conception d'un observateur pour un système multi-modèle passe par la conception d'observateurs locaux, puis par l'interpolation de ces derniers, grâce à des fonctions poids. Cette technique de conception permet alors l'extension des outils d'analyse et de synthèse développés pour les systèmes linéaires, au cas non linéaire. En effet, en se basant sur le mécanisme d'interpolation, Tanaka [7] a proposé une étude concernant la stabilité et la synthèse de multi-régulateurs et de multi-observateurs. On trouve aussi dans [4], [7] et [14] des outils inspirés directement de l'étude des systèmes linéaires pour l'étude de la stabilité et la stabilisation des systèmes non linéaires. Patton [6] a proposé un multi-observateur basé sur l'utilisation d'observateurs de Luenberger, qui a ensuite été utilisé pour le diagnostic. Dans [1] et [2] les observateurs à mode glissant développés pour les systèmes linéaires, ont été transposés aux systèmes décrits par des multimodèles. Le principal intérêt de ce type d'observateurs est la robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation. Les observateurs à entrées inconnues des systèmes linéaires, ont été transposés, de la même manière, au cas de modèles non linéaires.

Cependant, tous ces travaux suppose que la variable de décision  $\xi(t)$  dont dépendent les fonctions d'interpolation ou fonctions d'activation est mesurable i.e  $\xi(t) = u(t)$  ou  $\xi(t) = y(t)$ . Dans le domaine du diagnostic, cette hypothèse oblige à concevoir des observateurs dont les fonctions d'activation dépendent de l'entrée  $u(t)$ , pour la détection des défauts capteurs, ou de la sortie  $y(t)$  pour la détection des défauts actionneurs. En effet, si on utilise  $\xi(t) = u(t)$  par exemple, dans les bancs d'observateurs, même si le  $i^{eme}$  observateur n'est pas piloté par l'entrée  $u_i$ , cette dernière intervient indirectement dans la fonction d'activation et il est difficile de l'éliminer. Pour cette raison, il est donc intéressant de considérer le cas où les fonctions d'activation dépendent de variables non mesurables comme l'état du système. Cette hypothèse permet de représenter une large classe de système non linéaires. Dans ce contexte, on trouve peu de travaux, mais on peut néanmoins citer [3], [8] [10] et [11], qui ont proposé un observateur de type Luenberger, en utilisant l'hypothèse de fonctions d'activation lipschitziennes. Les conditions de stabilité de l'observateur sont formulées sous forme d'inégalités linéaires matricielles (LMI) [12]. Malheureusement, les constantes de lipschitz des fonctions d'activation apparaît dans les LMIs et réduit le domaine d'application de la méthode si cette constante a une valeur importante. Dans [9], l'observateur à mode glissant proposé compense les termes inconnus du système. L'étude de cet observateur est basée sur la même méthode que celle utilisée dans [3].

## 2 Préliminaires et position du problème

Considérons un modèle de Takagi-Sugeno où les fonctions d'activation  $\mu_i$  dépendent de l'état du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t))(A_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur des entrées,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représente le vecteur de sortie.  $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice d'état,  $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est une matrice d'influence de l'entrée et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  représente la matrice de sortie ou d'observation. Enfin, les fonctions d'activation  $\mu_i$  dépendent d'une variable non mesurable (état du système), et vérifient :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) = 1 \\ 0 \leq \mu_i(x(t)) \leq 1 \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (2)$$

Le modèle (1) a également été utilisé dans [3] où les fonctions d'activation satisfont des conditions de type lipschitz. Dans [3], l'observateur suivant est proposé :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{x}(t))(A_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i(y - \hat{y})) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (3)$$

L'erreur d'estimation d'état est donnée par :

$$\dot{e} = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{x}) (A_i - G_i C) e + \Delta(x, \hat{x}, u) \quad (4)$$

où :

$$\Delta(x, \hat{x}, u) = \sum_{i=1}^n (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})) (A_i x + B_i u) \quad (5)$$

où les gains  $G_i$  sont déterminés par la résolution d'un ensemble de LMI (voir [3]) faisant intervenir  $\mu$  la constante de Lipschitz de du terme (5). Malheureusement, pour une valeur élevée de la constante de Lipschitz  $\mu$ , le système de LMI à résoudre peut ne pas avoir de solution. Une autre méthode pour l'estimation d'état du système (1) est proposée dans [15]. Pour cela, on pose  $A_i = A_0 + \bar{A}_i$ , où  $A_0$  est définie par

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i \quad (6)$$

En remplaçant la structure de  $A_i$  dans les équations du modèle, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(x(t)) (\bar{A}_i x(t) + B_i u(t)) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (7)$$

A partir de ce modèle, on propose le multi-observateur suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_0 \hat{x}(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{x}(t)) (\bar{A}_i \hat{x}(t) + B_i u(t) + G_i(y - \hat{y})) \\ \hat{y}(t) = C \hat{x}(t) \end{cases} \quad (8)$$

L'avantage de cette méthode par rapport à [3] est d'obtenir des conditions d'existence moins conservatives.

Cet article présente une méthode de synthèse des gains de l'observateur (8), puis une extension améliorant les performances de ce dernier par un placement des pôles dans une région particulière du plan complexe ce qui permet de filtrer le bruit de mesure.

### 3 Synthèse de l'observateur

**Théorème 1.** *L'erreur d'estimation d'état entre le système (7) et l'observateur (8) tend asymptotiquement vers zéro s'il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  symétriques définies positives, des matrices  $K_i$ , et des scalaires positifs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\gamma$  tels que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :*

$$A_0^T P + P A_0 - K_i^T P - P K_i < -Q \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P \bar{A}_i & P B_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 > 0 \quad (11)$$

*Démonstration.* L'erreur d'estimation d'état est  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ . La dynamique de l'erreur d'estimation est obtenue avec les équations (7) et (8) :

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_i(\hat{x}(t)) \Phi_i e(t) + \sum_{i=1}^n \bar{A}_i \delta_i + B_i \Delta_i \quad (12)$$

où :

$$\begin{cases} \delta_i = \mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x} \\ \Delta_i = (\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x}))u \\ \Phi_i = A_0 - G_i C \end{cases} \quad (13)$$

Pour l'étude de la convergence de l'observateur, posons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse 1.** *les fonctions d'activation sont Lipschitziennes :*

$$|\mu_i(x) - \mu_i(\hat{x})| \leq N_i |x - \hat{x}| \quad (14)$$

$$|\mu_i(x)x - \mu_i(\hat{x})\hat{x}| \leq M_i |x - \hat{x}| \quad (15)$$

où  $N_i$  et  $M_i$ , scalaires positifs, sont les constantes de Lipschitz.

**Hypothèse 2.** *l'entrée  $u(t)$  du système est bornée :*

$$\|u(t)\| \leq \beta_1, \beta_1 > 0 \quad (16)$$

Pour démontrer la convergence asymptotique de l'erreur d'estimation d'état, considérons la fonction de Lyapunov quadratique  $V(e) = e^T P e$ ,  $P > 0$ , dont la dérivée par rapport au temps est :

$$\dot{V}(e) = \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \quad (17)$$

Puis, en utilisant (12) :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) = & \sum_{i=1}^n (\delta_i^T \bar{A}_i^T P e + e^T P \bar{A}_i \delta_i + \Delta_i^T B_i^T P e + e^T P B_i \Delta_i \\ & + \mu_i(\hat{x})(e^T \Phi_i^T P e + e^T P \Phi_i e)) \end{aligned} \quad (18)$$

Compte tenu de la définition (13) et des hypothèses 1 et 2, on a alors :

$$\begin{cases} |\delta_i| \leq M_i |e| \\ |\Delta_i| \leq N_i \beta_1 |e| \end{cases} \quad (19)$$

**Lemme 1.** *Pour toutes matrices  $X$  et  $Y$  de dimensions appropriées,  $\lambda$  étant une constante positive, la propriété suivante est vérifiée :*

$$X^T Y + Y^T X \leq \lambda X^T X + \lambda^{-1} Y^T Y, \lambda > 0 \quad (20)$$

En appliquant ce lemme ainsi que (19), on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_i^T \bar{A}_i^T P e + e^T P \bar{A}_i \delta_i & \leq \lambda_1 \delta_i^T \delta_i + \lambda_1^{-1} e^T P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P e \\ & \leq \lambda_1 M_i^2 e^T e + \lambda_1^{-1} e^T P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P e \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i^T B_i^T P e + e^T P B_i \Delta_i & \leq \lambda_2 \Delta_i^T \Delta_i + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e \\ & \leq \lambda_2 N_i^2 \beta_1^2 e^T e + \lambda_2^{-1} e^T P B_i B_i^T P e \end{aligned} \quad (22)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov (18) peut alors être majorée de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e) \leq & \sum_{i=1}^n e^T (\mu_i(\hat{x})(\Phi_i^T P + P \Phi_i) + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_1^2) I \\ & + \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P) e \end{aligned} \quad (23)$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est assurée si pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$\mu_i(\hat{x})(\Phi_i^T P + P \Phi_i) + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_1^2) I + \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0 \quad (24)$$

ce qui conduit aux conditions suivantes :

$$(A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) < -Q \quad (25)$$

$$-Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_1^2) + \lambda_1^{-1} P \bar{A}_i \bar{A}_i^T P + \lambda_2^{-1} P B_i B_i^T P < 0 \quad (26)$$

En faisant le changement de variables  $K_i = P G_i$ , et en appliquant le complément de Schur, on obtient les inégalités matricielles linéaires suivantes :

$$A_0^T P + P A_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + (\lambda_1 M_i^2 + \lambda_2 N_i^2 \beta_1^2) I & P \bar{A}_i & P B_i \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Plutôt que d'imposer a priori la borne sur l'entrée, on peut ajouter un degré de liberté en considérant cette borne comme une variable à déterminer qu'on appellera  $\rho$ . En utilisant le complément de Schur, l'inégalité (28) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P \bar{A}_i & P B_i & N_i \lambda_2 \rho I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \lambda_2 \rho I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (29)$$

$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Cette inégalité n'est plus linéaire en les inconnues (présence du produit  $\lambda_2 \rho$ ). Pour l'écrire sous forme LMI, on pose :  $\gamma = \lambda_2 \rho$ .

$$A_0^T P + P A_0 - C^T K_i^T - K_i C < -Q \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P \bar{A}_i & P B_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

Connaissant  $\gamma$  et  $\lambda_2$ , on peut déduire la valeur  $\rho$  :

$$\rho = \frac{\gamma}{\lambda_2} \quad (32)$$

Pour s'assurer que les valeurs de  $\gamma$  et  $\lambda_2$  vérifient l'hypothèse 2 ( $\rho$  doit être supérieur ou égal à  $\beta_1$ ), on se propose d'ajouter une contrainte sur  $\gamma$  et  $\lambda_2$  pour garantir  $\frac{\gamma}{\lambda_2} \geq \beta_1$  :

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 \geq 0 \quad (33)$$

En utilisant la contrainte (33) avec les conditions (30) et (31), la valeur de  $\rho$  trouvée est supérieure ou égale à la borne de l'entrée  $\beta_1$ .  $\square$

Jusqu'à présent les conditions trouvées garantissent uniquement la convergence asymptotique. Pour assurer certaines propriétés temporelles on se propose d'assurer le placement des pôles des matrices  $(A_0 - G_i C)$  dans des régions spécifiques.

#### 4 Amélioration des performances de l'observateur

Dans cette section, considérons l'observateur (8). En utilisant la deuxième méthode de Lyapunov, on garantit la convergence de l'observateur tout en affectant les pôles des matrices  $(A_0 - G_i C)$  dans une région désirée  $\mathbb{D}$ .

**Définition 1.** Le sous ensemble  $\mathbb{D}$  du plan complexe est dit région LMI s'il existe une matrice  $\alpha \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et une matrice  $\beta \in \mathbb{R}^{n \times n}$  telles que :

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : f_D(z) = \alpha + \beta z + \beta^T \bar{z} < 0\} \quad (34)$$

La matrice  $A$  est dite  $\mathbb{D}$ -stable si toutes ses valeurs propres sont situées dans la région  $\mathbb{D}$  du demi plan gauche complexe. Une première idée consiste à placer les pôles dans une bande verticale (Fig.1) définie par :

$$S1 = \{z \mid -\sigma_{\min} < \Re(z) < -\sigma_{\max} < 0\} \quad (35)$$

Une autre idée, plus intéressante puisqu'elle limite les parties imaginaires des pôles, est de les placer dans une région (Fig.2) définie par :

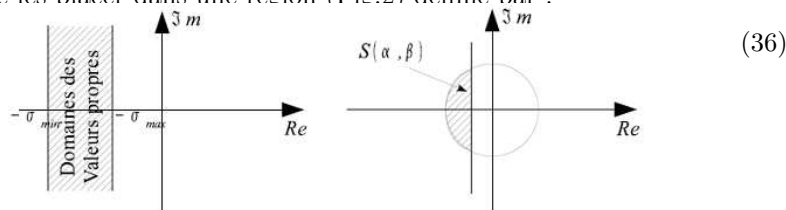


Fig.1 : Région S1

Fig.2 : Région S2

#### 4.1 Affectation des pôles à la région S1

**Théorème 2.** L'erreur d'estimation d'état entre le système (7) et l'observateur (8) tend asymptotiquement vers zéro et les pôles des matrices  $(A_0 - G_i C)$  appartiennent à la région LMI S1 (35), s'il existe deux matrices  $P$  et  $Q$  symétriques définies positives, des matrices  $K_i$ , et des scalaires positifs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\gamma$  tels que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :

$$A_0^T P + P A_0 - K_i^T P - P K_i + 2\sigma_{\max} P < -Q \quad (37)$$

$$-(A_0^T P + P A_0 - K_i^T P + P K_i + 2\sigma_{\min} P) < -Q \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P \bar{A}_i & P B_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (39)$$

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 > 0 \quad (40)$$

*Démonstration.* La condition (25) garantit la stabilité de  $(A_0 - G_i C)$ , pour de plus assurer que les pôles de cette matrice vérifient :

$$\Re(\lambda) < -\sigma_{\max}$$

il suffit que  $(A_0 - G_i C) + \sigma_{\max} I$  soit stable donc en remplaçant  $(A_0 - G_i C)$  par  $(A_0 - G_i C) + \sigma_{\max} I$  dans (9) on obtient :

$$(A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) + 2\sigma_{\max} P < -Q \quad (41)$$

Un raisonnement similaire sur la borne  $\sigma_{\min}$  permet d'obtenir :

$$-((A_0 - G_i C)^T P + P(A_0 - G_i C) + 2\sigma_{\min} P) < -Q \quad (42)$$

## 4.2 Affectation des pôles à la région S2

**Théorème 3.** *L'erreur d'estimation d'état entre le système (7) et l'observateur (8) tend asymptotiquement vers zéro et les pôles des matrices  $(A_0 - G_i C)$  appartiennent à la région LMI S2 (fig.2), s'il existe des matrices  $P$  et  $Q$  symétriques définies positives, des matrices  $K_i$ , et des scalaires positifs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\gamma$  tels que les inégalités matricielles suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{bmatrix} RP & P(A_0 - G_i C) \\ (A_0 - G_i C)^T P & RP \end{bmatrix} > 0 \quad (43)$$

$$A_i^T P + P A_i - C^T K_i^T - K_i C + 2\alpha P < -Q \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} -Q + \lambda_1 M_i^2 I & P \bar{A}_i & P B_i & N_i \gamma I \\ \bar{A}_i^T P & -\lambda_1 I & 0 & 0 \\ B_i^T P & 0 & -\lambda_2 I & 0 \\ N_i \gamma I & 0 & 0 & -\lambda_2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (45)$$

$$\gamma - \beta_1 \lambda_2 \geq 0 \quad (46)$$

où  $K_i = P G_i$

*Démonstration.* Le placement des pôles dans un disque de rayon  $R$  et de centre  $(0,0)$  est donné dans [13] par :

$$\begin{pmatrix} -RP & P(A_0 - G_i C) \\ (A_0 - G_i C)^T P & -RP \end{pmatrix} < 0, P = P^T > 0 \quad (47)$$

Le placement des pôles à gauche de la droite d'abscisse  $-\alpha$  est similaire à la preuve précédente.

## 5 Exemple

Soit le système suivant :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -4 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.25 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions d'activation sont choisies sous la forme :

$$\begin{cases} \mu_1(x) = \frac{1 - \tanh(x_1)}{2} \\ \mu_2(x) = 1 - \mu_1(x) = \frac{1 + \tanh(x_1)}{2} \end{cases} \quad (48)$$

et ne dépendent que de la première composante de l'état. La borne  $\beta_1$  sur l'entrée est choisie égale à 20. Avec les gains  $G_i$  trouvés à l'aide du théorème 1 Les pôles de la matrice  $(A_0 - G_1 C)$  sont  $[-4.97, -54.41, -29.80]$ , on remarque qu'il sont très loin de l'axe imaginaire ce qui augmente la bande passante de l'observateur et reconstruit le bruit de mesure. Avec un placement des pôles dans

la région S1 avec  $\sigma_{\min} = 0.1$  et  $\sigma_{\max} = 28$ , nous obtenons les valeurs propres  $[-5.97, -12.96, -13.79]$ . Dans le cas de l'affectation des pôles à la région S2 définie par le rayon  $R = 15$  et  $\alpha = 0.5$ , on obtient les pôles  $[-5.73, -13.78, -13.83]$ . En conclusion, la synthèse de l'observateur en utilisant un placement des pôles dans une région LMI améliore l'estimation d'état et permet de filtrer le bruit de mesure. De plus, le placement des pôles dans la région S2 permet de limiter les parties imaginaires des valeurs propres ce qui conduit à la limitation du phénomène oscillatoire.

La figure 1 illustre les erreurs d'estimation avec trois observateurs correspondant aux trois théorèmes 1, 2 et 3 pour l'exemple précédent avec une sortie bruitée.

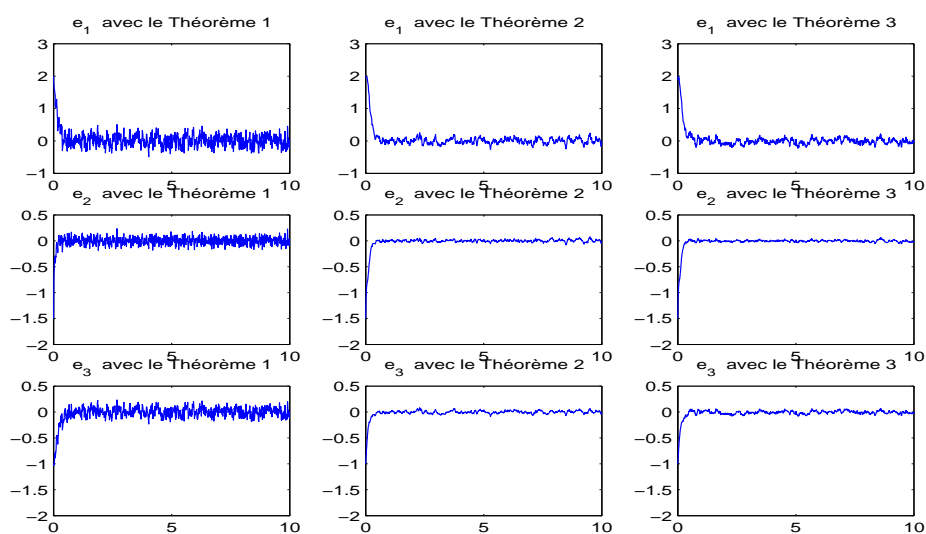


FIG.1. Erreur d'estimation d'état

## 6 Conclusion

Une méthode d'estimation d'état est proposé pour les modèles de Takagi-Sugeno à variables de décision non mesurables. Dans le but d'améliorer les performances de l'observateur proposé, nous avons mis en place deux nouvelles méthodes basées sur les techniques de placement des pôles de l'observateur dans une région LMI désirée. La suite de ce travail consiste à réduire le conservatisme des deux méthodes dans le cas où on a un système avec une borne importante sur l'entrée. Il serait de plus intéressant de transposer ces méthodes au cas des systèmes à temps discret.

## Références

1. Akhenak A. : Conception d'observateurs non linéaires par approche multi-modèle : application au diagnostic. Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 16 décembre 2004.
2. Akhenak A., Chadli, M., Ragot J., Maquin D. : Synthèse d'un multiobservateur robuste pour multi-modèle incertain à entrées inconnues : approche LMI. Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA'2006, Bordeaux, France, 30-31 mai - 1 juin 2006.
3. Bergsten P., Palm R. : Thau-Luenberger observers for TS fuzzy systems. 9th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, FUZZ IEEE 2000, San Antonio, TX, USA, May 7-10, 2000.
4. Chadli M. : Analyse des systèmes non linéaires décrits par des multi-modèles. Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, 9 décembre 2002.
5. Maquin D., Ragot J. : Diagnostic des systèmes linéaires. Collection Pédagogique d'Automatique, 143 p., ISBN 2-7462-0133-X, Hermès Science Publications, Paris, 2000.
6. Patton R.J., Chen J., Lopez-Toribio C.J. : Fuzzy Observers for non-linear Dynamic Systems Fault Diagnosis. 37th IEEE Conference on Decision and Control, Tampa, Florida USA, December 1998
7. Tanaka K., Ikeda T., Wang H.O. : Fuzzy Regulators and Fuzzy Observers : Relaxed Stability Conditions and LMI-Based Designs. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 6, No. 2, pp. 250-265, 1998.
8. Palm R., Driankov D. : Towards a systematic analysis of fuzzy observers. 18th NAFIPS Conference, New York, NY, USA, June 10-12, 1999.
9. Palm R., Driankov D. : Sliding mode observers for Takagi-Sugeno fuzzy systems. IEEE, 2000.
10. Bergsten P., Palm R., Driankov D. : Fuzzy Observers. IEEE International Fuzzy Systems Conference, Melbourne Australia, December 2-5, 2001.
11. Bergsten P., Palm R., Driankov D. : Observers for Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B : Cybernetics, Vol. 32, No. 1, pp. 114-121, 2002.
12. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. : Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. , SIAM, Philadelphia, 1994.
13. Chilali M. : Méthodes LMI pour l'analyse et la synthèse multi-critère. Doctorat de l'université Paris Dauphine, France, 19 Mars 1996.
14. Guerra T.M., Kruszewski A., Vermeiren L., Tirmant H. : Conditions of output stabilization for nonlinear models in the *Takagi – Sugeno's* form . Fuzzy Sets and Systems, Vol. 157, pp. 1248-1259, 2006.
15. Ichalal D., Marx B., Ragot J., Maquin D. : Conception de multi-observateurs à variables de décision non mesurables . JDMACS, Reims, France, 9-11 Juillet 2007