

## Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière

Jean-Baptiste HIRIART-URRUTY et Cyril IMBERT

Université Paul Sabatier Toulouse III, UFR de Math. Infor. Gestion,  
118, route de Narbonne, 31062 TOULOUSE Cedex.

---

**Résumé.** Etant donné  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  localement lipschitzienne et  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  sa jacobienne généralisée (au sens de Clarke) en  $\bar{x} \in \mathcal{O}$ , nous déterminons la fonction d'appui de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$ , c'est-à-dire :  $\max\{\langle X, M \rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$  pour tout  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . L'enveloppe plénière de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  est définie par  $\{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid Xu \in \mathcal{J}F(\bar{x})u \text{ pour tout } u \in \mathbb{R}^n\}$ ; c'est un convexe compact dont nous déterminons également la fonction d'appui.

*The support functions of Clarke's generalized jacobian matrix and of its plenary hull*

**Abstract.** Given a locally Lipschitz mapping  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  and its generalized jacobian matrix  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  at  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  (in Clarke's sense), we determine the support function of  $\mathcal{J}F(\bar{x})$ , that is :  $\max\{\langle X, M \rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$  for all  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . The plenary hull of  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  is defined as  $\{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \mid Xu \in \mathcal{J}F(\bar{x})u \text{ for all } u \in \mathbb{R}^n\}$ ; it is a compact and convex set whose support function is also determined.

---

## 1 Notations et préliminaires

**1.1** On note  $\langle, \rangle$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\langle\langle, \rangle\rangle$  celui dans l'espace matriciel  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  (c'est-à-dire  $\langle\langle A, B \rangle\rangle := \text{tr}(A^T B)$ ). Si  $\mathcal{O}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $F = (f_1, \dots, f_m) : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction (vectorielle) localement lipschitzienne sur  $\mathcal{O}$ , la (matrice) jacobienne généralisée au sens de Clarke de  $F$  en  $\bar{x}$  est l'ensemble convexe

compact non vide de  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  défini comme suit ([1]) :

$$(1) \quad \mathcal{J}F(\bar{x}) := \text{co}\{\lim JF(x_k) : x_k \rightarrow \bar{x}, x_k \in D_F\},$$

où  $D_F$  désigne l'ensemble des points de  $\mathcal{O}$  en lesquels  $F$  est différentiable, et  $JF(x_k)$  est la matrice jacobienne de  $F$  en  $x_k$ . Lorsqu'il s'agit d'une fonction à valeurs réelles  $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , le *gradient (ou sous-différentiel) généralisé* au sens de Clarke de  $f$  en  $\bar{x} \in \mathcal{O}$  est le convexe compact non vide de  $\mathbb{R}^n$  défini comme :

$$(2) \quad \partial f(\bar{x}) = \text{co}\{\lim \nabla f(x_k) : x_k \rightarrow \bar{x}, x_k \in D_f\},$$

où  $\nabla f(x_k)$  désigne le vecteur gradient de  $f$  en  $x_k$ . Cet objet  $\partial f$  a été énormément étudié, généralisé, et utilisé depuis son introduction par Clarke en 1973. Il n'en est pas de même de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  (pour les fonctions à valeurs *vectorielles*  $F$ ) et l'une des raisons est le manque d'une formule explicite de la fonction d'appui de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$ , analogue à (ou généralisant) celle connue pour  $\partial f(\bar{x})$  depuis son introduction il y a vingt cinq ans. L'objet  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  pour  $F = (f_1, \dots, f_m)$  est plus précis que (i.e. contenu dans)

$$(3) \quad \begin{aligned} \partial f_1(\bar{x}) \times \dots \times \partial f_m(\bar{x}) &:= \{X \in M_{m,n}(\mathbb{R}) : \text{la } j\text{-ème ligne de } X \text{ est dans } \partial f_j(\bar{x}) \\ &\text{pour tout } j = 1, \dots, m\}, \end{aligned}$$

car il prend en compte l'interdépendance éventuelle des fonctions-composantes  $f_j$ . Sont connus à propos de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  : le fait (démonstré par Warga, Yomdin, Fabian et Preiss) que sa définition est "insensible aux ensembles de mesure nulle" (i.e. on ne modifie pas  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  en imposant dans (1) que  $x_k \notin N_0$ , où  $N_0$  est de mesure de Lebesgue nulle) ; la fonction d'appui de ses *images*  $\mathcal{J}F(\bar{x})u$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$  ; son rôle dans des résultats d'Analyse non-différentiable comme le théorème des fonctions inverses ([1, 2]).

**1.2** Soit  $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$ . La connaissance de  $Au$ ,  $u \in \mathbb{R}^n$ , ne détermine pas  $\mathcal{A}$ , ce qui a conduit Halkin et Sweetser ([7, section3]) à proposer la notion d'ensemble *plein* :  $\mathcal{A} \subset M_{m,n}(\mathbb{R})$  est dit plein s'il contient tout  $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  tel que  $Bu \in \mathcal{A}$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ . L'*enveloppe plénière* de  $\mathcal{A}$ , notée  $\text{plen}\mathcal{A}$ , est le plus petit ensemble plein contenant  $\mathcal{A}$ . Dans notre contexte,  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  n'est pas toujours plein, excepté lorsque  $m$  ou  $n$  vaut 1 ; donc  $\text{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})$  est un nouvel objet, convexe et compact, intermédiaire entre  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  et  $\partial f_1(\bar{x}) \times \dots \times \partial f_m(\bar{x})$ , dont les images (de  $u \in \mathbb{R}^n$ ) sont les mêmes que celles de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  néanmoins.

## 2 La fonction d'appui de la jacobienne généralisée

Le résultat principal de ce paragraphe concerne l'évaluation de

$$\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) := \max\{\langle X, M \rangle \mid X \in \mathcal{J}F(\bar{x})\}$$

pour tout  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ .

**THÉORÈME 2.1** Soit  $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  localement lipschitzienne et  $M \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ . On désigne par  $P_\epsilon(x)$  l'hypercube de  $\mathbb{R}^n$  de sommet  $x$  dont les arêtes issues de  $x$  sont les éléments de la base canonique, i.e.

$$P_\epsilon(x) := \{x + \epsilon t_1 e_1 + \dots + \epsilon t_n e_n : t_i \in [0, 1] \text{ pour tout } i\},$$

$frP_\epsilon(x)$  sa frontière,  $n(y)$  le vecteur normal sortant en  $y \in P_\epsilon(x)$ , et  $\sigma$  la mesure (de surface) de Lebesgue sur  $frP_\epsilon(x)$ , c'est-à-dire sur les faces de l'hypercube.

Alors pour  $n \geq 2$  :

$$(4) \quad \sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{frP_\epsilon(x)} \langle F(y), Mn(y) \rangle d\sigma(y).$$

Dans le cas où  $n = 1$  :

$$(5) \quad \sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(v) = \langle v, F \rangle^\circ(\bar{x}; 1),$$

où  $\langle v, F \rangle^\circ$  désigne la dérivée directionnelle généralisée (au sens de Clarke) de la fonction "scalarisée"  $\langle v, F \rangle$ .

La démonstration se fait en trois étapes :

(1). On se ramène à  $m = n$  et  $M = I_n$  (matrice identité) en posant  $G = M^T F$ ; alors  $\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \sigma_{\mathcal{J}G(\bar{x})}(I_n)$ .

(2). On démontre (c'est l'étape-clé) :

$$(6) \quad \sigma_{\mathcal{J}G(\bar{x})}(I_n) = \limsup_{x \rightarrow \bar{x}, \epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^n} \int_{P_\epsilon(x)} \operatorname{div} G(y) d\mu(y),$$

où  $\operatorname{div}$  note la divergence et  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

(3). On applique la formule de Green-Stokes à la fonction localement lipschitzienne  $G$  sur l'hypercube  $P_\epsilon(x)$  pour  $n \geq 2$ .

**REMARQUES. 1.** La frontière de l'hypercube  $P_\epsilon(x)$  est la réunion de  $2n$  faces que l'on paramètre par  $[0, 1]^{n-1}$ . Si l'on note  $\hat{t}_i = t_1 e_1 + \dots + t_{n-1} e_{n-1}$ , somme dans laquelle n'intervient pas  $e_i$ , alors  $F_i^+ := \{x + \epsilon e_i + \epsilon \hat{t}_i : (t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}\}$  et  $F_i^- := \{x + \epsilon \hat{t}_i : (t_1, \dots, t_{n-1}) \in [0, 1]^{n-1}\}$  sont deux faces dont les vecteurs normaux sortant sont  $e_i$  et  $-e_i$  respectivement. On décrit ainsi les  $2n$  faces de  $P_\epsilon(x)$  quand  $i$  parcourt  $\{1, \dots, n\}$ . Par changement de variables dans (4) on obtient

$$(7) \quad \sigma_{\mathcal{J}f(x_0)}(M) = \limsup_{x \rightarrow x_0, \epsilon \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{[0,1]^{n-1}} \frac{\langle f(x + \epsilon e_i + \epsilon \hat{t}_i) - f(x + \epsilon \hat{t}_i), M e_i \rangle}{\epsilon} dt_1 \dots dt_{n-1}.$$

Cette forme technique ne fait intervenir que des quotients différentiels et nous permet de travailler plus facilement avec la fonction d'appui.

**2.** Lorsque  $n = 1$ , l'intégrale de surface disparaît dans (7), ce qui conduit à (5), résultat qui avait déjà été établi dans [4].

Le Théorème 2.1 permet d'accéder à la règle de composition pour les jacobiniennes généralisées (la plus générale)  $\mathcal{J}(F_1 \circ F_2)(\bar{x}) \subset \operatorname{co}\{\mathcal{J}F_1(F_2(\bar{x})) \circ \mathcal{J}F_2(\bar{x})\}$ ; le seul endroit à notre connaissance où cette règle a été établie dans toute sa généralité est [3].

### 3 La fonction d'appui de l'enveloppe plénière de la jacobienne généralisée

Pour  $u \in \mathbb{R}^n$  et  $v \in \mathbb{R}^m$ , on note  $u \otimes v$  la matrice (de rang 1) représentant l'application linéaire  $x \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, x \rangle v$  dans les bases canoniques. La fonction d'appui de  $\mathcal{J}F(\bar{x})$  ou de  $\text{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})$  dans les directions particulières  $M = u \otimes v$  est connue depuis [4] :  $\sigma_{\mathcal{J}F(\bar{x})}(u \otimes v) = (\langle v, F \rangle)^\circ(\bar{x}; u)$  ; le résultat qui suit généralise cette expression au cas de  $M$  quelconque.

THÉORÈME 3.1 *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 2.1 :*

$$(8) \quad \sigma_{\text{plen}\mathcal{J}F(\bar{x})}(M) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k (\langle v_i, F \rangle)^\circ(\bar{x}; u_i) : \sum_{i=1}^k u_i \otimes v_i = M \right\}.$$

Un corollaire immédiat de ce théorème est : si on considère  $u, u_1, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $v, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$  tels que  $u \otimes v = u_1 \otimes v_1 + \dots + u_k \otimes v_k$ , alors

$$(9) \quad (\langle v, f \rangle)^\circ(x_0; u) \leq (\langle v_1, f \rangle)^\circ(x_0; u_1) + \dots + (\langle v_k, f \rangle)^\circ(x_0; u_k),$$

ce qui constitue le résultat principal (le Théorème 7) de [6]. Par ailleurs, les cas où l'infimum est atteint dans l'expression (8) est élucidé dans [5].

### Références

- [1] F. H. Clarke. On the inverse function theorem. Pac. J. Math., 64 :97–102, 1976.
- [2] F. H. Clarke. Optimization and Nonsmooth Analysis. Wiley, New York, 1983.
- [3] F. H. Clarke. Analyse non lisse et optimisation. Cours de 3ème cycle, Ecole doctorale de mathématiques, Université Paul Sabatier, 1993-1994.
- [4] J.-B. Hiriart-Urruty. Characterizations of the plenary hull of the generalized Jacobian matrix. Mathematical Programming Study, 17 :1–12, 1982.
- [5] C. Imbert. Les fonctions d'appui de la jacobienne généralisée de Clarke et de son enveloppe plénière. Technical report, LAO 98-02, Laboratoire "Approximation et Optimisation", Université Paul Sabatier de Toulouse, 1998.
- [6] Zs. Páles and V. Zeidan. Generalized Hessian for  $C^{1,1}$  functions in infinite dimensional normed spaces. Mathematical programming, 74 :p. 59–78, 1996.
- [7] T. H. Sweetser. A minimal set-valued strong derivative for vector-valued Lipschitz functions. Journal of Optimization Theory and Applications, 23(4) :549–62, 1977.