

*A propos des démonstrations alternatives
et autres substitutions de preuves dans les Éléments d'Euclide **

BERNARD VITRAC

Introduction

Dans une précédente livraison de cette même revue, Sabine Rommevaux, Ahmed Djebbar et moi-même sommes revenus sur l'histoire du texte des *Éléments*, notamment sur le débat qui avait opposé, il y a plus d'un siècle, Johann Ludwig Heiberg — le dernier éditeur du texte grec d'Euclide — et Martin Klamroth à propos de l'autorité relative de la tradition directe des manuscrits grecs d'époque byzantine et de la tradition indirecte des traductions médiévales arabes (IX^e s.) puis arabo-latines (XII^e s.)¹. L'issue de ce débat fut que, mis à part quelques dissonances ponctuelles, les spécialistes se rallièrent à la position de Heiberg lequel défendait la primauté de la tradition grecque directe. Cette opinion prévalut jusqu'à ce que Wilbur Knorr² la remette fortement en question pour adopter une position qui était à peu près celle de Klamroth : c'est la tradition indirecte qui est la moins éloignée de l'original euclidien hellénistique.

Dans notre travail à trois voix nous avons essayé de montrer en quoi ces deux positions tranchées nous paraissent extrêmement simplificatrices et, pour certaines de leurs argumentations, passablement subjectives. De notre analyse (partielle) du Livre X dans les différentes traditions nous avons tiré les conclusions suivantes :

- Il existe effectivement des divergences structurelles importantes entre les traditions directe et indirecte et ceci vaut en fait pour l'ensemble du traité, à des degrés divers selon les Livres³.
- Puisqu'un certain nombre d'indices suggèrent que les traducteurs médiévaux ont essayé d'être structurellement fidèles à leur(s) modèle(s), il faut donc rapporter ces divergences à des états du texte grec dont nous n'avons plus (sauf exception) la trace dans la tradition directe. Ce point confirme tout l'intérêt qu'il y a à prendre en compte la tradition indirecte ainsi que l'indiquait Knorr.
- En revanche, contrairement à lui, nous ne croyons pas à la possibilité de reconstruire un modèle grec commun à ladite tradition indirecte, tradition dont Knorr sous-estimait considérablement l'hétérogénéité.
- En outre, il faut remarquer que si, dans ce long processus de transmission, le texte des *Éléments* a subi de très nombreuses altérations⁴, celles-ci, contrairement à ce que suggérait notre collègue, n'ont eu que peu d'effets, du moins sur le plan mathématique, car elles n'ont introduit aucun nouvel objet mathématique, aucune théorie ou méthode

* Une première version de ce travail a été présentée dans le cadre du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, coordonné par S. Rommevaux, A. Djebbar et moi-même, à Lille, en 2002-2003. Que les participants à ces séances, notamment J. Ceylerette, A. Djebbar, C. Jauffret, A. Lernoùld, E. Mazet, soient remerciés pour leurs remarques et leurs encouragements. Je remercie également S. Rommevaux, M. Caveing et F. Acerbi qui ont accepté de lire une première version de ce texte et qui m'ont permis de grandement l'améliorer.

¹ [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001].

² V. [Knorr, 1996].

³ En ce qui concerne le L. V, v. [Acerbi, 2003]; pour les L. stéréométriques (XI-XIII), v. Eucl. *Él.*, vol. 4.

⁴ Les *Éléments* ont subi 3 grandes catégories d'altérations structurelles : (i) l'ajout ou la suppression d'unités textuelles (Définitions, Propositions, Lemmes, Corollaires ...); (ii) l'altération de l'ordre de présentation de certaines Définitions ou Propositions; (iii) l'altération des preuves. V. [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001], Partie I, II, pp. 235-238 + Tableau 1, pp. 284-285 et *infra*, Partie I avec le tableau 1 de la présente Annexe.

qui ne s'y trouvait déjà. Elles ont respecté la structure logique globale du traité, y compris dans ses particularités les plus fortes (par exemple les places du Livre V et des Livres arithmétiques), même quand cela ne correspondait plus aux attentes des utilisateurs du traité.

De fait la conséquence essentielle de ce long et répété travail d'altérations successives a été de faire émerger l'idée d'un *texte* euclidien passablement indépendant de son auteur quant à la littéralité, texte que nous ne confondons pas avec ses différentes réalisations matérielles (manuscrits, éditions imprimées, traductions ...) mais qui est censé rester fidèle, quant à l'esprit, au modèle déductif euclidien. Bien entendu cela est vrai pour toute tradition littéraire qui a une certaine continuité historique mais le phénomène est accentué dans le cas des textes géométriques hellénistiques parce que ceux-ci, de par leur forme, prétendent échapper à toute forme de subjectivité, et cela l'est davantage encore dans le cas des *Éléments*, à cause de la fortune éditoriale qui a été la leur.

Par conséquent, en l'état actuel de nos connaissances, il nous paraissait un peu inutile d'envisager une nouvelle édition du texte grec — des éditions des traductions arabes, en particulier celle d'Ishâq-Thâbit, seraient certainement plus immédiatement utiles — tout en indiquant que le phénomène des doubles preuves méritait un examen particulier, d'ailleurs en cours de complétion.

C'est ce travail complémentaire que je présente ici. Pour l'essentiel il s'agit donc d'analyser un dossier textuel, celui des démonstrations alternatives dans les *Éléments*, et même, dans un premier temps, de le circonscrire. En explorant les motivations du « prouver autrement », en constatant le silence relatif des sources anciennes à ce sujet, j'ai été conduit à m'interroger sur le rôle de certaines des activités lettrées des Anciens : le commentaire, l'annotation, la réédition ..., afin d'évaluer le rôle qui a pu être le leur dans l'élaboration des démonstrations alternatives. L'histoire traditionnelle du texte euclidien fait jouer un rôle décisif (mais difficile à préciser) à Théon d'Alexandrie, auteur d'une réédition des *Éléments* au IV^e siècle de notre ère. Même si beaucoup des considérations développées ici restent conjecturales, mes investigations me conduisent plutôt à souligner l'importance de Héron d'Alexandrie [I^{er}-II^e s. (?) de notre ère], le premier commentateur des *Éléments* connu de nous.

I. De l'altération des preuves en général et des preuves alternatives et autres substitutions de preuve en particulier

1. De l'altération des preuves nous pouvons certainement distinguer plusieurs espèces :

- *L'ajout* ou *la suppression* (peut-être la perte ?) *de cas de figures*. Il existe de tels cas dans le texte grec des Propositions III. 11, 20, V. 8, VI. 27, IX. 19 et XI. 23 qui ne se trouvent pas dans les traditions arabe et arabo-latine. Dans celles-ci, à l'inverse, le phénomène s'observe dans les propositions III. 35, 36, 37, mais pas dans le texte grec, du moins pas avec la même ampleur.
- *La subdivision d'une Proposition*, généralement à deux cas de figures, en deux Propositions distinctes. Ainsi chacune des Propositions X. 31, 32; XI. 31, 34 a donné naissance à deux Propositions distinctes dans les traductions médiévales arabes et arabo-latines.
- *La réunion de deux Propositions en une seule*, avec deux cas de figure. Ce qui apparaît comme l'opération inverse de la précédente, mais qui n'est peut-être qu'une autre façon de décrire les mêmes données textuelles en changeant de version de référence. Par exemple chacun des couples VIII. 11-12, VIII. 16-17 et X. 29-30 correspond à une seule Proposition dans une partie de la tradition arabe, celle que l'on qualifie de "hadjjâjienne".

Il y a enfin et surtout les deux catégories les plus importantes et les plus globales de l'altération des preuves, à savoir :

- Le phénomène des doubles preuves quand, dans une version donnée, il existe deux démonstrations successives différentes d'une même Proposition. Et :
- La substitution de preuve, lorsque la confrontation de deux versions ou de deux familles montrent qu'il existe, dans l'une d'elles, une preuve autre que celle de l'édition Heiberg, ou autre que la *première* preuve quand cette dernière en connaît deux.

2. Dans l'état actuel du dossier — tout à fait révisable pour des raisons que j'expliquerai ensuite — j'ai recensé 78 altérations structurelles, concernant 98 Propositions, soit 21 % du total des Livres I à XIII en prenant l'édition de Heiberg (465 Propositions) comme terme de référence. Leur liste constitue le Tableau I de l'annexe (*infra*, p. 00). Pour 40 d'entre elles, concernant 48 Propositions, il s'agit — selon *mes* critères — de substitutions de preuve et/ou de démonstrations alternatives, soit environ 10 % du traité, ce qui n'est tout de même pas complètement négligeable. Leur liste constitue le Tableau II.

Dans un certain nombre de cas il ne fait pas de doute qu'il s'agit du résultat d'une "contamination" par les commentaires⁵, sans doute par le biais de scholies, ou d'initiatives isolées que l'on trouve seulement dans tel ou tel manuscrit, par exemple la preuve alternative à IX. 22, attestée dans le seul manuscrit *F*⁶. Il s'agit donc de portions inauthentiques quand bien même elles peuvent avoir un certain intérêt mathématique ou donner des informations indirectes sur l'histoire du texte. Mais dans d'autres cas, on peut se demander si la preuve retenue par Heiberg dans son édition est bien la bonne — ou du moins la moins "mauvaise".

3. L'éditeur d'Euclide admet en effet comme principe que la version hellénistique des *Éléments* ne contenait qu'une seule preuve pour chaque Proposition. Si donc il y en a deux, l'une est nécessairement inauthentique. Dans certains cas on peut craindre qu'à strictement parler cela soit le cas des deux démonstrations conservées et que l'on soit en présence de deux remaniements distincts d'une preuve plus ancienne. Cela dit, on comprend que l'examen des preuves alternatives et autres substitutions de preuves puisse avoir, au moins pour certaines d'entre elles, quelques conséquences sur le texte même des *Éléments*, et, plus souvent, sur l'histoire du texte et celle de son exégèse.

4. Le lecteur aura certainement remarqué que j'ai constamment parlé de preuves "alternatives" comme s'il n'y avait jamais plus de *deux* preuves pour une même Proposition : le qualificatif "alternative" est alors réservé à la seconde. Cette manière de présenter les choses vient de la tradition du texte elle-même. Dans les manuscrits grecs on introduit la majorité des secondes preuves comme telles, à l'aide d'une expression figée comme "ἄλλως"⁷ ou "ἢ καὶ οὕτως"⁸ ou encore par une formule métatextuelle un peu plus développée⁹. Dans les manuscrits arabes de la version Ishâq ibn Hunayn, révisée par Thâbit ibn Qurra, on se réfère généralement à

⁵ Par exemple les démonstrations *aliter* des Prop. X. 85-90 et, très certainement la majorité des adjonctions de cas de figure (N°8, 10, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 23, 29, 33, 40, 68, 69 dans le Tableau I).

⁶ Pour désigner les différentes versions des *Éléments* que j'ai consultées, j'utilise une série d'abréviations que le lecteur trouvera au début de l'annexe; pour les manuscrits grecs j'emploie le *Conspectus siglorum* de Heiberg (lui aussi reproduit *infra* en annexe). Les numéros des Propositions sont, sauf mention explicite du contraire, ceux de l'édition de Heiberg.

⁷ II. 4; III. 8^P, 9, 10, 31; VI. 20, 27 (*ps-alit.* + cas⁺), 30, 31; VII. 31; IX. 22; X. 1, 6, 9, 115, 117*vulgo*; XI. 22; XIII. 5; XIII. 18^P; ainsi que III 24, VI. 9, IX. 1, IX. 2 dans les scholies.

⁸ III. 7^P, III. 8^P dans les scholies.

⁹ Par exemple : « Et il existe une démonstration de la découverte des six dites apotomés beaucoup plus courte » (X. 85-90*alit.*); « Il faut alors démontrer autrement, de manière plus expédiente, que ... » (XII. 17^P*alit.*).

d'autres copies ou à d'autres versions. Chez Gérard de Crémone c'est souvent devenu « *in alio libro* » ... Le point de départ de ces mentions médiévales, plutôt nombreuses, semble résider dans la révision de Thâbit et sa consultation d'autres manuscrits, en particulier grecs (mais pas seulement). A cause de ces modalités de présentation on ne nous signale jamais explicitement plus de *deux* démonstrations, mais la question de savoir si nous, Modernes, pouvons repérer, par confrontations des différentes versions existantes, davantage de preuves pour certaines Propositions n'est pas résolue pour autant. Au demeurant ces formules peuvent s'avérer trompeuses. Ainsi, dans GC I. 35, on a la formule : « Huius pretere theorematis probatio aliter invenitur disposita hoc modo, scilicet, ... »¹⁰. Or ce qui suit n'est rien d'autre que la simple remarque selon laquelle, dans une autre famille (celle d'Ad. I et de an-Nayrîzî), le début de la Proposition a été complétée par un rappel, suivi de l'énoncé général de I. 34. En aucun cas il ne s'agit d'une démonstration alternative.

5. Le cas des Propositions II. 4, VIII. 6, X. 6, 14, 29-30, 33, 91, 111, 115 est peut-être encore plus troublant : ce qui est introduit comme une démonstration *aliter* (qu'il s'agisse de grec, d'arabe ou de latin) est bien, à chaque fois, une démonstration, mais qu'il s'agisse vraiment d'une *autre* démonstration, rien n'est moins sûr. Il s'agit plutôt de deux états différents du texte d'une même preuve. Dans de tels cas je parle de « preuve *pseudo-aliter* ». Selon que l'on juge que la preuve la plus ancienne est la N°1 ou la *pseudo-aliter*, il faudra dire qu'il y a, dans le premier cas, simplement deux états différents du texte, dans le second qu'il y a eu substitution d'une pseudo-preuve¹¹ !

6. Y a-t-il toujours au plus deux preuves réellement distinctes par Proposition ? Si c'était le cas, il y aurait là quelque chose d'assez troublant qui mériterait d'être expliqué. On peut imaginer une explication plutôt matérielle : si toutes les secondes preuves ont initialement eu le statut d'annotations marginales, la place limitée dont on disposait alors pourrait expliquer l'unicité des secondes preuves qui seraient le résultat d'un choix, simplement destiné à signifier la possibilité de prouver autrement. Cependant, s'il existe bien des preuves alternatives sous forme marginale dans certains manuscrits¹², il se trouve aussi qu'elles sont souvent simplement insérées dans le texte, à la suite de la preuve première. Parfois elles figurent à la fin du Livre qui contient la Proposition à laquelle elles se rapportent¹³, là où il est facile d'intégrer du matériel additionnel. Dans ces deux situations on ne voit pas ce qui aurait empêché un copiste ou un éditeur de compiler toute une série de démonstrations différentes — s'il s'en trouvait¹⁴ — dans l'idée qu'une telle compilation dirait quelque chose du fait mathématique établi. Mais, à ma connaissance, cela n'existe pas dans l'Antiquité, mis à part le cas, un peu différent, des collections de solutions au problème des deux moyennes proportionnelles réunies par Pappus¹⁵ et Eutocius¹⁶.

¹⁰ V. GC, p. 27, l. 24-36. Même chose dans XI. 30, p. 357, l. 20-27. Les lignes encadrées par les formules : « In alio libro inveni quod ... », « Et sit figura alia que est huiusmodi » contiennent une construction plus détaillée du parallélépipède auxiliaire (*CO* en grec, *bh* chez GC). Dans la preuve principale de GC celle-ci manque; elle a sans doute été escamotée car elle existe dans Ad. I. Quoi qu'il en soit, il ne s'agit pas d'une preuve alternative. Le texte (à la différence de l'exemple de I. 35) ne le prétend d'ailleurs pas.

¹¹ La question se pose pour les N°44, 50, 51, 52, 53, 58, 60, 67, 70. J'ai choisi cette seconde désignation afin qu'ils apparaissent dans le Tableau I.

¹² V. *infra*, note 17.

¹³ Par exemple X. 105-106*alit.* dans les mss *PFV*.

¹⁴ Et tel est le cas dans le commentaire de Proclus qui donne deux preuves *alternatives* pour les Prop. I. 5, 23, 25, 32 et même trois pour I. 20, attribuées par lui à Héron et Porphyre. V. *infra*, Partie IV, § 2.

¹⁵ *Collection mathématique*, édition F. Hultsch, p. 56, l. 9—p. 68, l. 16. Pappus reproduit quatre solutions : celles d'Ératosthène, de Nicomède, de Héron et celle qu'il revendique comme sienne. Il ne donne aucune justification ni motivation de son choix. L'ordre suivi est chronologique.

7. Peut-être faudra-t-il donc ajouter une seconde explication, historique celle-là, selon laquelle les différentes versions que nous connaissons, quelque divergentes qu'elles puissent être, procèdent toutes fondamentalement d'un mixage de *deux* proto-versions et deux seulement. Il est alors évidemment très tentant de faire le rapprochement avec ce que l'on sait par ailleurs de l'histoire du texte des *Éléments*, à savoir que ceux-ci ont été réédités au IV^e siècle de notre ère, par Théon d'Alexandrie. Il se pourrait que la dualité des preuves soit à rapporter à l'existence de l'édition hellénistique et de la réédition. Ou que, pour le dire brutalement, quand nous avons deux preuves, l'une soit celle d'Euclide, l'autre celle de Théon, que ce dernier l'ait lui-même élaborée ou reprise à ses prédécesseurs commentateurs, par exemple Héron ou Pappus.

8. Très clairement, dans un certain nombre de cas, c'est ce qu'ont cru, chacun à leur manière, Simson et Heiberg. Quand il y a deux preuves et qu'il juge l'une mathématiquement supérieure à l'autre, Robert Simson pense qu'il s'agit de celle d'Euclide, l'autre ne faisant que mettre en évidence les faiblesses et limitations du rééditeur de l'Antiquité tardive. Pour Heiberg les choses ne sont évidemment pas aussi simples et le critère principal qu'il utilise est essentiellement codicologique. Il est fondé d'une part sur le primat que l'éditeur reconnaît au *Vaticanus gr.* 190 (**P**), d'autre part sur le fait que plusieurs des secondes preuves, présentes dans le texte principal des autres copies, n'existent, dans **P**, que dans les marges¹⁷, voire pas du tout¹⁸. Comme il est clair que le copiste de **P** confrontait au moins deux versions — lui-même parle de deux éditions, l'"ancienne" et la "nouvelle" — Heiberg considère que ces preuves alternatives marginales viennent de la comparaison avec la "nouvelle" édition ce qui, pour lui, signifie celle de Théon¹⁹. Son critère est donc de retenir comme (unique) preuve celle de **P** ou, quand ce manuscrit possède les deux, la première²⁰. Ajoutons que si cette interprétation s'avérait la bonne, toutes nos versions seraient au moins partiellement post-théoniennes, y compris la très maigre traduction d'Adélar d I, puisqu'aucune n'est épargnée par le phénomène des preuves alternatives.

II. Les difficultés de l'inventaire : nouvelles questions

1. Le lecteur quelque peu impatient se demandera : « mais enfin qu'en est-il vraiment de cette existence de plus de deux preuves réellement différentes pour certaines Propositions ? ». En fait l'inventaire des preuves alternatives et autres substitutions de preuves pose deux très délicats problèmes, ceux de savoir *comment* (i) et *où* (ii) peut-on et doit-on identifier deux

¹⁶ Commentaires à la Prop. II. 1 de la *Sphère et le cylindre* d'Archimède, ed. J. L. Heiberg, p. 54, l. 27 — p. 106, l. 24. Eutocius reproduit douze solutions : celle attribuée à Platon (!), celles de Héron, de Philon de Byzance, celle attribuée à Apollonius, celles de Dioclès, de Pappus, de Sporus, deux solutions de Ménechme, celle attribuée à Archytas, celle d'Ératosthène et enfin celle de Nicomède. Il souligne la parenté des solutions de Héron, de Philon et de celle attribuée à Apollonius, la parenté des solutions de Dioclès, Pappus et Sporus. En présentant celle de Nicomède, il s'exprime comme s'il s'agissait pour lui de faire un exposé complet (*op. cit.*, p. 98, l. 7-8) quoiqu'il précise, dès le début (*op. cit.*, p. 56, l. 2-10), qu'il a éliminé celle (sans doute corrompue) attribuée à Eudoxe de Cnide.

¹⁷ C'est le cas de II. 4*alit.* ; X. 1*alit.* ; X. 6*alit.* ; X. 9*alit.*

¹⁸ Par exemple VII. 31*alit.* ou IX. 22*alit.* (qui n'existe que dans **F**).

¹⁹ Compte-tenu de la date de copie de **P**, on peut tout aussi bien penser qu'il s'agit de confronter un exemplaire translittéré en minuscules ("nouvelle" édition) avec une copie en majuscules, tout naturellement qualifiée d'"ancienne", sans préjuger pour autant qu'elles procèdent de deux éditions différentes, hellénistique et tardive. Cette interprétation pourrait être écartée si l'on prouvait que **P** contient lui-même la version issue de la translittération. C'est chronologiquement possible mais, à ma connaissance, cela n'a pas été étudié.

²⁰ C'est le cas pour III. 9*alit.* ; III. 10*alit.* ; III. 11*alit.* ; VI. 30*alit.* ; VI. 31*alit.* ; X. 115*alit.* ; X. 105-106*alit.* (Cf. *supra*, n. 13); XI. 22*alit.* ; XIII. 5*alit.* (insérée après XIII. 6 !).

preuves du même résultat comme réellement distinctes. *Comment (i)*, cela ne va pas de soi dans une transmission par copies manuscrites. A strictement parler il y a quasiment autant de preuves différentes que d'exemplaires, à cause des nombreuses variantes observées.

Mais clairement la notion de « substitution de preuve » ne vise pas les divergences par écarts orthographiques ou stylistiques, les micro-lacunes ou les petits ajouts, les toilettes cosmétiques comme la modification de l'ordre des arguments partiels et diverses formes d'explicitation que l'on trouve très souvent dans les manuscrits des *Éléments*, et davantage encore quand on confronte les traditions grecque et médiévale. Selon la définition que je propose, par « substitution » j'entends désigner un changement significatif dans le noyau argumentatif mathématique. Autrement dit, il faut pouvoir distinguer l'essentiel de l'accessoire et ce n'est pas toujours aussi facile qu'il y paraît.

2. C'est notamment pour cette raison que j'ai introduit, dans mon commentaire aux *Éléments*²¹, la notion d'« item possiblement interpolé », ou *IPI*. En comparant les formules stylistiques du texte euclidien et celles que l'on trouve dans du matériel clairement identifié comme additionnel ou dans des scholies marginales, j'ai pu établir une typologie et un inventaire de toute une série de séquences textuelles, voire de simples mots, qui sont la trace d'(hypothétiques) altérations locales. Le caractère hypothétique (cf. *possiblement* interpolé) tient au fait que j'ai procédé par induction pour étendre, à l'ensemble des Livres, ce qui s'observe dans certaines portions (importantes) pour lesquelles nous avons la chance de disposer de différents témoins. La vraisemblance des conclusions tient au caractère très fortement formulaire de la langue euclidienne. Donnons un exemple.

Si l'on compare la première preuve du texte grec pour la Proposition X. 9 et celle contenue dans le très précieux ms Téhéran Malik 3586 (pour Is.Th. X. 7), la seule différence *structurelle* notable consiste en l'absence, dans le manuscrit arabe, des deux phrases suivantes :

- « ... car les figures semblables sont dans le rapport doublé [de celui] des côtés homologues ... »
- « ... car il y a un nombre moyen proportionnel entre deux nombres carrés et le carré a, relativement au {nombre} carré, le rapport doublé de celui du côté relativement au côté »,

formules que je décris comme la combinaison d'une citation d'un énoncé général antérieur (respectivement celui du Porisme à VI. 20 et celui de VIII. 11), non instanciée (c'est-à-dire sans référence au lettrage et aux objets de la Proposition X. 9) et d'une explication postposée (c'est à dire de la forme « **q** parce que **p** » au lieu de « puisque **p**, alors **q** »), destinées ici à expliciter la structure déductive. *Citations non instanciées* et *explications postposées* sont deux des catégories archétypiques de ce que j'appelle *IPP*²². Dans notre exemple, leur absence du ms Téhéran Malik 3586 me conduit à penser qu'il s'agit d'interpolations. Par conséquent je dirai que nous avons affaire à la même preuve (du point de vue mathématique) et d'une manière générale j'en conclus que l'on doit, dans la comparaison de deux preuves, laisser de côté les divergences qui portent seulement sur l'existence ou non de certains de ces *IPI*. Ce critère (négatif) n'est bien évidemment pas suffisant, car il y a bien d'autres façons d'altérer localement les preuves. Qui plus est, après plusieurs opérations de cette espèce, on peut avoir l'impression d'être en présence de deux preuves substantiellement différentes, voire davantage, alors qu'en fait — mathématiquement parlant — il n'en est rien. Dans ce cas, comme dans celui des preuves *pseudo-aliter*, je dis que nous sommes simplement en présence de différents états du texte.

²¹ V. Eucl. *Él.*, vol. 4, pp. 41-69.

²² V. Eucl. *Él.*, vol. 4, pp. 49-51.

3. Quant à la question locale (ii) elle pourrait paraître oiseuse. Le texte des *Éléments* nous est parvenu dans un nombre important de manuscrits grecs. Certes les plus anciens (**P** et **B**) ne remontent pas au-delà du IX^e siècle, mais si l'on compare ce qui est comparable, on constatera que le cas des *Éléments* est — sur le plan codicologique — l'un des plus favorables parmi l'ensemble des textes grecs anciens. Il suffirait donc d'examiner ce qu'il en est dans lesdits manuscrits, en particulier dans les sept utilisés par Heiberg pour établir son texte (c'est-à-dire tous les manuscrits antérieurs au XIII^e siècle, sauf un²³). C'est évidemment ce qu'a fait Heiberg lui-même et on peut ainsi repérer une trentaine d'altérations de preuves dont 5 adjonctions (ou perte) de cas, une contamination, 24 preuves alternatives, mais une seule substitution de preuve, dans la Proposition XI. 37 (N°73), pour laquelle le manuscrit **b** est l'unique témoin. Cela dit, comme je l'ai rappelé en introduction, il est désormais admis, à partir de travaux récents²⁴, que les traductions arabes et arabo-latines apportent des informations fiables, notamment du point de vue structurel, sur des états du texte qui, sauf exception (comme **b**, XI. 36-XII. 17), ne sont plus accessibles en grec. Il est donc impossible de ne pas prendre en compte cette tradition oblique des traductions médiévales, mais cela soulève évidemment un autre problème difficile : quelle portion de ladite tradition faut-il considérer pour ce dossier des preuves alternatives ?

4. Il paraît indispensable de se limiter à ce que l'on peut raisonnablement identifier comme des traductions des *Éléments* car la composition de preuves alternatives n'a certainement pas été interrompue par la réception du texte d'Euclide dans les domaines arabe puis latin. Démontrer un même résultat autrement, de même que réorganiser le texte différemment, c'est manifester une certaine capacité d'assimilation du Classique. Dans mon travail je me suis limité aux informations que j'ai pu obtenir sur la version Ishâq—Thâbit grâce à Ahmed Djebbar, à la consultation de la version latine de Gérard de Crémone, et, dans une moindre mesure, celle d'Adélarde de Bath, le tout complété par quelques indications du commentateur persan an-Nayrîzî. Cela suffit à plus que doubler la taille de l'échantillon. En particulier le nombre de ce que nous pouvons identifier avec vraisemblance comme des substitutions de preuve augmente de manière substantielle. Pour l'instant, et malgré quelques incertitudes, j'en ai dénombré plus de trente, dont une douzaine environ correspondent à des situations de doubles preuves dans les manuscrits grecs²⁵.

5. L'existence *solitaire*, dans une version médiévale, d'une preuve qui est *seconde* dans les manuscrits grecs, doit être rapportée au fait qu'il y a eu d'abord substitution de preuve — ce qui présuppose une action éditoriale explicite — puis compilation des versions divergentes dans la tradition des manuscrits grecs byzantins. Telle est l'explication qui me paraît la plus économique²⁶ mais, comme le montrent les grossières indications quantitatives précédentes, cette tradition byzantine n'est pas exhaustive, du moins en ce qui concerne les altérations de preuve²⁷.

²³ Le ms *Scolariensis gr.* 221, Φ, III. 5.

²⁴ Clairement des travaux comme [Knorr, 1996] et [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001] ont été rendus possibles grâce à la publication — respectivement par W. Engroff et G. de Young — de la traduction arabe de Ishâq ibn Hunayn révisée par Thâbit ibn Qurra pour les Livres V et VII à IX, et aux éditions des différentes versions arabo-latines d'Adélarde de Bath, d'Hermann de Carinthie et de Gérard de Crémone par H. L. L. Busard.

²⁵ Pour III. 7^{Palit.}, 8^{Palit.}, III. 31^{alit.} ; VI. 20^{Palit.} ; VI. 31^{alit.} ; X. 1^{alit.} ; X. 6^{alit.} ; X. 9^{alit.} ; X. 105^{alit.} ; X. 106^{alit.} ; X. 115^{alit.} ; XIII. 5^{alit.} et sans doute aussi XIII. 1-4.

²⁶ V. Eucl. *Él.*, vol. 3, pp. 391-392; [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001], pp. 253-255; Eucl. *Él.*, vol. 4, pp. 39-41.

²⁷ Elle l'est bien davantage en ce qui concerne les Définitions, Propositions et Lemmes ajoutés. Le cas des corollaires (porismes) est un peu plus partagé.

6. Ce qui nous conduit à une nouvelle question : peut-on rapporter — au moins dans certains cas — les démonstrations *aliter* de la tradition médiévale à un modèle grec disparu ? Ou bien, à l'inverse, faut-il considérer que les traducteurs arabes, éventuellement latins, ou encore le Réviseur Thâbit ibn Qurra, se sont abandonnés aux délices des preuves alternatives ? C'est très clairement ce que croit Gregg de Young au sujet d'al-Hajjâj, à propos des preuves alternatives des Propositions X. 68-70 + 105-107 (N°59, 64, 65) rapportées par la tradition arabe sous son nom²⁸. Comme nous aurons l'occasion de le voir, dans ce cas du moins, c'est fort peu probable.

7. En admettant que nous ayons satisfait cet ensemble de prérequis et que nous ayons donc pu faire l'inventaire des démonstrations réellement alternatives d'origine grecque dans une tradition élargie mais néanmoins circonscrite, il restera encore au moins deux problèmes à résoudre. L'un, expliquer pourquoi on a cru devoir démontrer autrement telle ou telle Proposition; l'autre, établir, pour chaque couple de preuves alternatives, laquelle doit être considérée, sinon comme authentiquement euclidienne, du moins la plus ancienne et la moins altérée des deux. Ou peut-être, reconstruire un modèle commun dont les deux seront interprétées comme les avatars postérieurs divergents. Si les choses se passent bien on pourra même se demander, au-delà de ce questionnement local, si l'on peut établir quelque ordre de priorité globale entre les versions, comme Heiberg avait cru pouvoir le faire entre *P* et les autres manuscrits grecs, ou Knorr, pour la tradition médiévale arabe et arabo-latine. Sinon, on devra en conclure que toutes les versions qui nous sont parvenues sont irrémédiablement composites, plus authentiques dans tel Livre, mais très remaniées dans tel autre ... C'est plutôt l'impression que j'ai pour l'instant.

III. L'exemple des preuves fausses

1. La chose n'est pas sans conséquence. Il y a, dans l'ensemble de la tradition euclidienne telle que je l'ai décrite précédemment, seulement deux ou trois Propositions (ou groupes de Propositions) dont on peut considérer la preuve comme défectueuse au regard des canons anciens (avec des critères formels modernes il va de soi qu'il y en a beaucoup plus), à savoir :

- celle de la Proposition IX. 19 :

« Trois nombres étant donnés, examiner quand il est possible de leur trouver un quatrième proportionnel »,

dans la seule version du manuscrit *P* ;

- celles des Propositions VIII. 22-23 :

« Si trois (resp. quatre) nombres sont continûment en proportion, et que le premier soit un carré (resp. un cube), le troisième (resp. le quatrième) sera aussi un carré (resp. un cube) »,

dans le texte grec et une partie de la tradition médiévale²⁹;

- celle de la Proposition XII. 17 :

« Deux sphères étant autour du même centre, inscrire dans la plus grande sphère un solide polyédrique qui ne touche pas la sphère la plus petite par sa surface »,

dans la seule tradition arabe et arabo-latine.

Le cas des Propositions du Livre VIII (N°37) n'est d'ailleurs pas aussi tranché que les deux autres car, contrairement à celles-ci, leurs démonstrations ne contiennent pas d'assertions qui pourraient s'avérer fausses. Cependant elles s'appuient sur une présupposition implicite³⁰.

²⁸ V. [De Young, 1991], pp. 659-661.

²⁹ V. *infra*, n. 31.

³⁰ V. Eucl. *Él.*, vol. 2, p. 407.

Peut-être n'étaient-elles pas considérées comme défectueuses au regard des canons anciens, mais elles le sont assez vite devenues comme le montre la tradition Ishâq—Thâbit³¹.

2. Deux démonstrations fausses sur 465 ce n'est pas énorme, mais pour un mathématicien c'est quand même deux de trop. Or, en maintenant le primat codicologique de **P**, Heiberg a retenu pour son édition la preuve défectueuse de IX. 19. De même Knorr affirme que la preuve médiévale de XII. 17, insuffisante, devait être la preuve authentiquement euclidienne, ultérieurement corrigée, y compris dans **b** il faut le noter. Clairement, c'est parce qu'il présuppose l'antériorité, sans exception, de la tradition indirecte et envisage l'histoire du texte d'une manière unilatérale : l'enrichissement de la matière censée traduire l'amélioration de la forme. Dans ces deux exemples il me semble qu'il y a erreur de la part de nos collègues, et je ne dis pas cela seulement pour sauver la réputation de mathématicien d'Euclide.

3. La séquence initiale de la démonstration de IX. 19 :

« Or (i) ou bien ils ne sont pas continûment en proportion et leurs extrêmes sont premiers entre eux, (ii) ou bien ils sont continûment en proportion et leurs extrêmes ne sont pas premiers entre eux, (iii) ou bien ni ils ne sont continûment en proportion ni leurs extrêmes ne sont premiers entre eux, (iv) ou bien ils sont continûment en proportion et leurs extrêmes sont premiers entre eux »³²

introduit quatre cas de figure produits par combinaison de deux critères (A : « être en proportion continue »; B : « leurs extrêmes sont premiers entre eux »). Dans la suite de la preuve ils sont traités dans l'ordre (iv), (i), (ii), (iii), le dernier étant libellé sous forme de démonstration potentielle. Le texte des mss **BVq** et celui des traductions médiévales, correct, ne distinguent que deux cas : A et B (iv); non (A et B). Heiberg interprète cette version comme une correction, plutôt que de considérer la preuve qu'il a retenue comme le résultat d'ajout de cas de figure³³ et ce, uniquement parce qu'il postule la priorité intangible de **P**.

Or, avec les progrès que nous avons fait dans la connaissance de l'histoire du texte nous savons qu'il existe d'autres exemples — sans ambiguïtés ceux-là —, où la leçon de **P** ne peut pas être la bonne, même en se limitant à la tradition grecque³⁴. Son autorité n'est donc pas absolue et l'ajout de cas de figure est chose courante. La preuve de **P** n'est pas seulement défectueuse parce qu'elle inclut des cas de figures non pertinents. La présentation formelle desdits cas n'est pas non plus très cohérente : l'ordre selon lequel ils sont examinés est étrange; le diorisme intermédiaire pour (ii) est contredit par celui inséré pour le second sous-cas de figure³⁵. Quant à l'examen du cas (i), il est tout simplement faux !

4. De même, les divergences considérables qu'il y a dans les différentes preuves de XII. 17 — un exemple où l'on peut certainement en identifier au moins trois — pour un résultat pourtant

³¹ Des preuves différentes pour VIII. 22-23 ont été proposées dans une partie de la tradition arabe (Is.Th, at-Tûsî, Pseudo-Tûsî) et arabo-latine (GC). Elles sont éditées et traduites en anglais dans [De Young, 1981]; les traductions sont reproduites dans [De Young, 1984] et [De Young, 1991], pp. 657-659. A ces preuves premières, les manuscrits dits andalous et Gérard de Crémone ajoutent des preuves *aliter*, rapportées à la version de al-Hajjâj, et qui ne sont autres que celles du grec, du ms Pétersg. 2145, de la recension d'Ibn Sînâ, de la version gréco-latine et de la tradition adélardienne.

³² *EHS*, III, p. 211, l. 1-6. J'ajoute une numérotation des cas de figure.

³³ Peut-être motivés par une ambiguïté de l'énoncé de la Proposition elle-même : les trois nombres donnés sont-ils supposés être en proportion continue ou non ? L'hypothèse n'est pas utile mais, si on l'envisage, il est naturel de faire le rapprochement avec IX. 17 (hypothèse « A et B ») et donc de commencer à distinguer des cas de figures. Il se pourrait donc que même la preuve connue par les mss **BVq** et les traductions médiévales soient déjà le résultat d'un premier enrichissement. En outre, dans le ms **F**, on trouve une situation intermédiaire entre celles de **BVq** et de **P**, avec trois cas : (iv); non (A et B), (iii). Quoi qu'il en soit, la preuve retenue par Heiberg est certainement encore plus éloignée de l'original que celle des mss **BVq** et des traductions médiévales.

³⁴ V. l'exemple des Prop. XII. 3-4 dans Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 271-287.

³⁵ Cf. *EHS*, III, p. 212, l. 15-16 et l. 24-25.

mathématiquement simple, mais difficile à rédiger, suggèrent que la preuve initiale devait être particulièrement laconique — ce qui ne veut pas nécessairement dire lacunaire — et que toutes les preuves que nous connaissons, sans oublier les très nombreuses scholies (pas moins de 30 dont 4 Lemmes), sont le résultat de travaux divergents de complétion. Celle de la tradition médiévale, qui n'est pas même en accord avec son lemme XII. 16 (ce que ne relève pas Knorr), n'a pas plus d'autorité — c'est à dire aucune — que les autres. J'ajoute que cette situation — aucune des preuves conservées n'est la preuve authentique mais toutes résultent d'enrichissements indépendants et divergents — se rencontre assez souvent dans les Livres stéréométriques³⁶. Elle n'est pas rare non plus dans les Livres I à IV.

5. Quoi qu'il en soit, on a déjà une idée de ce que peuvent être les réponses à notre premier problème, c'est-à-dire, pourquoi remplacer une preuve existante par une autre. Le premier critère c'est évidemment que celle-là soit reconnue comme *fausse*. Je viens d'expliquer qu'à la seule exception possible, mais incertaine, du cas des Propositions VIII.22-23, je ne crois guère à cette explication. Cela dit, il n'a pas fallu attendre très longtemps pour voir un certain nombre de lecteurs et de commentateurs des *Éléments* — peut-être même le rééditeur Théon — n'être pas satisfaits par certaines preuves euclidiennes. Quand bien même on pourrait, encore aujourd'hui, les juger globalement correctes, certaines portions ont pu paraître défectueuses, implicites ou, du moins, perfectibles. C'est ce que suggère le Commentaire de Proclus.

IV. Le témoignage de Proclus

1. Si l'on se fie à la présentation du Diadoque, la contestation aurait commencé avec Apollonius ! Au sujet de celui-ci, on pourrait évoquer le caractère agonistique de la tradition savante grecque, cher à G. Lloyd³⁷, et penser que chaque auteur ou commentateur devait se démarquer d'Euclide. Poussé à la limite une telle explication impliquerait que nous devrions trouver des preuves multiples — et pas seulement doubles — pour chaque Proposition, ce qui est quand même très loin d'être le cas dans les versions du texte lui-même.

2. Cela l'est un tout petit peu plus dans le Commentaire de Proclus qui inclut quand même 19 démonstrations alternatives concernant 13 Propositions (sur 47³⁸), avec deux particularités notables :

- Il y en a parfois 2 pour la même Proposition, et même 3 dans le cas de la Proposition I. 20, contrairement à ce que l'on observe dans les manuscrits byzantins du texte lui-même;
- Cinq seulement sur 19 sont anonymes (ou dues à Proclus lui-même ?)³⁹, les autres étant rapportées à des mathématiciens célèbres, à savoir les Pythagoriciens : 1 (I. 32b); Philon (de Byzance ?) : 1 (I. 8); Apollonius : 3 (I. 10, 11, 23); Héron : 5 [I. 19, 20 (3 en commun avec Porphyre⁴⁰), 25] et peut-être même 6 (I. 5); Ménélaos : 1 (I. 25); Ptolémée : 1 (I. 28b); Porphyre : 4 [I. 18, 20 (3 en commun avec Héron)], Pappus : 1 (I. 5).

³⁶ Dans Eucl., *Él.*, vol. 4, j'ai essayé de le montrer pour XI. 1, 3, 8, 15, 22, 23, 34, 37; XII. 4, 7, 17Por.; XIII. 7, 15.

³⁷ V. par exemple [Lloyd, 1996], en particulier pp. 20-24.

³⁸ Une lacune du texte fait que nous ne possédons plus la fin du commentaire à I. 41, celui à I. 42 et le début de celui à I. 43.

³⁹ In I. 2, 5 (peut-être due à Héron, v. *infra*, Partie XI, § 4), 17, 23, 32.

⁴⁰ Héron et Porphyre sont mentionnés ensemble par Proclus pour « d'autres démonstrations », sans prolongement. Les trois existent aussi chez an-Nayrîzî ce qui, comme je l'expliquerai plus loin (voir Partie XI, § 2 et § 3, n. 125), est un indice sérieux de ce qu'elles proviennent du commentaire de Héron. Il se peut que Porphyre les ait citées (avec leur provenance) et qu'il soit la source immédiate de Proclus.

3. Quelques-uns de ces exemples jettent un doute sur le fait que ces preuves aient été conçues comme *alternatives* à celles d'Euclide : cela paraît difficile pour la preuve pythagoricienne de I. 32, rapportée, sous l'autorité d'Eudème de Rhodes⁴¹. Celle de Ptolémée pour I. 28b est extraite, peut-être par Proclus, d'une monographie dont le but était la démonstration de la cinquième Demande. De même, les trois constructions alternatives rapportées à Apollonius pourraient être tirées d'un traité qui n'avait qu'un rapport lointain avec les *Éléments* — peut-être les *Lieux-plans* ou son *Traité général* (*καθόλου πραγματεία*)⁴² — mais que les commentateurs (Héron, Pappus, voire Proclus lui-même) se seraient proposés de confronter avec les constructions euclidiennes. Autrement dit, le caractère apparemment agonistique de la tradition exégétique est peut-être partiellement illusoire, en fait le résultat d'une construction des commentateurs, du moins en ce qui concerne les preuves alternatives. Car la thématique des objections et celle, conjointe, des ajouts de cas de figures, relèvent bien entendu d'un tel caractère agonistique (et sans doute scolaire). Au demeurant un mathématicien, au cours de son travail, peut bien utiliser un résultat connu et — pour que son traitement soit "self-contained" — en produire une démonstration⁴³, éventuellement différente de celle qu'on en propose habituellement. Cela a bien pu se produire pour certains résultats des *Éléments*, en particulier avant que ceux-ci ne soient devenus une référence textuelle quasi absolue⁴⁴. Ceci pourrait expliquer certaines des démonstrations alternatives rapportées par Proclus, parmi lesquelles il conviendrait donc sans doute de distinguer d'une part celles attribuées aux Pythagoriciens, à Apollonius, Philon, Ménélaos et Ptolémée et, d'autre part, celles proposées par les commentateurs d'Euclide (Héron, Porphyre, Pappus, Proclus lui-même).

4. Dernière remarque : on retrouve fort peu de ces preuves produites par les commentateurs dans le texte même des *Éléments*, qu'il s'agisse des manuscrits grecs ou de ceux des traductions médiévales. On peut même dire qu'aucune des 19 démonstrations alternatives recueillies ou composées par Proclus pour le Livre I ne se retrouve dans les manuscrits des *Éléments*. Une seule a eu toutefois une influence, mais sans doute médiate, sur une partie de la tradition grecque et sur la tradition médiévale, à savoir la seconde preuve alternative à I. 20 qui procède par élimination de cas de figure triviaux. On en a sans doute dérivé des annotations marginales — nous en avons la trace dans les scholies N°I, 79 (dans le ms *P*) et 80 (dans le ms *V*). Cette dernière est même passée dans le texte proprement dit et on retrouve quelque chose de très proche chez Adélarde, Gérard et an-Nayrîzî⁴⁵.

⁴¹ H. Mendell a montré que c'était certainement la preuve à laquelle le Stagiritte faisait allusion in *Met*, Θ, 9, 1051 a 21-26. V. [Mendell, 1984], pp. 360-361.

⁴² C'est l'opinion de [Heath, 1921], pp. 192-193. Je remercie Fabio Acerbi d'avoir attiré mon attention sur ce point.

⁴³ C'est la raison qu'invoque Pappus (*Coll. math.*, L. V, Prop. 3) qui, après avoir rappelé la Prop. 1 de la *Mesure du cercle* d'Archimède utilisée dans la suite de l'exposé, en inclut une preuve, pour la commodité de son lecteur. Celle-ci est d'ailleurs légèrement différente de celle contenue dans le traité du Syracusain tel qu'il nous est parvenu mais, comme me l'a fait remarquer F. Acerbi, la corruption textuelle de *MC* 1 est telle que l'on ne peut rien déduire de cette divergence. Pappus se contente peut-être de reproduire le texte archimédien dont il disposait.

⁴⁴ Et complétés à cet effet. Ainsi, un peu plus loin (Prop. V. 13), Pappus démontre à nouveau la Proposition d'Hippocrate sur les segments de cercle semblables à l'aide d'un préalable (V. 12) qui, substantiellement, n'est autre que l'extension de la Proposition VI. 33 des *Éléments* ajoutée ultérieurement par Théon dans sa réédition. Significativement la preuve de Théon est très différente de celle qu'en donne Pappus (avec distinction des cas selon que les arcs sont commensurables ou incommensurables).

⁴⁵ Un second cas est plus incertain : dans la Prop. I. 18 on utilise pour l'essentiel deux résultats antérieurs : I. 5 et I. 16, dans cet ordre dans la tradition médiévale, dans l'ordre inverse pour le texte grec. Or Proclus nous a transmis une démonstration *aliter* de Porphyre, pour un autre cas de figure, lequel suit lui aussi l'ordre 5 puis 16.

Pour la majorité de ces preuves, il y avait d'ailleurs de bonnes raisons à cette abstention, car les prendre en considération revenait à remettre en cause la structure déductive euclidienne⁴⁶ ou à amaigrir l'exposé des *Éléments*⁴⁷, ce qui ne correspondait certainement pas à la philosophie des commentateurs. Quoi qu'il en soit, grâce à leurs travaux, nous percevons un certain nombre de motivations justifiant la production d'une autre preuve. Certaines obéissent à un souci logique, d'autres relèvent davantage de considérations mathématiques ou métamathématiques.

V. Motivations : quelques critères de type logique

Les deux critères logiques les plus évidents sont :

1. Remplacer une preuve indirecte par une preuve directe. Trois témoins au moins, Proclus⁴⁸, an-Nayrîzî⁴⁹ et al-Khayyâm⁵⁰, confirment que tel était l'un des soucis de Héron d'Alexandrie et nous lui devons très certainement des preuves directes pour I. 19, 25 transmises par le Diadoque et an-Nayrîzî⁵¹. Ni l'une ni l'autre n'a interféré avec le texte euclidien. Toutefois, au début du Livre X, la confrontation des traditions grecque et médiévale met en évidence deux substitutions de preuve s'inscrivant dans ce registre :

- la Proposition X. 16 était considérée, jusque récemment, comme absente de la tradition arabe, avant qu'Ahmed Djebbar ne l'identifie dans le plus ancien manuscrit connu de la version Ishâq-Thâbit (ms Téhéran, Malik 3586). Mais la preuve qui en est donnée est une simple réduction logique à X. 15 par contraposition⁵², alors que la preuve grecque, curieuse⁵³, reproduit des séquences de la démonstration de X. 15.
- La même divergence s'observe pour X. 18 si l'on confronte la preuve grecque et celle de Gérard de Crémone (établie chez ce dernier par réduction à X. 17). Le texte grec, dans cette portion, cherche manifestement à éviter les réductions logiques, ce qu'on ne peut contester⁵⁴ en arguant des preuves des Propositions X. 7, 8, 13. Celles-ci n'existent pas dans les versions arabes et arabo-latines et sont certainement des interpolations postérieures à Pappus⁵⁵.

Soit l'ordre médiéval est dû à son influence, soit — et c'est l'hypothèse que je privilégierai — l'ordre initial dans le cas de figure d'Euclide était bien 5 puis 16, mais il a été inversé ensuite, dans le texte grec, pour souligner le lien déductif entre I. 16 et I. 18. Quoi qu'il en soit de cette hypothèse, le bilan est très maigre.

⁴⁶ Par exemple en acceptant I. *8alit.* (par distinction de cas de figure, sans utiliser I. 7); I. *19alit.* (preuve directe sans réduction à I. 18); I. *25alit.* (n°2 : preuve directe sans réduction à I. 24).

⁴⁷ Par exemple en préférant I. *5alit.* (sans considérer les angles *sous* la base); I. *28^balit.* (prouve seulement la seconde assertion de I. 28); I. *32alit.* (sans considérer les angles *extérieurs* au triangle).

⁴⁸ Il souligne le caractère direct de la preuve alternative proposée par Héron pour I. 25 (*Pr.*, p. 346, l. 12-15). En outre, trois des autres preuves alternatives que nous pouvons rapporter au célèbre Mécanicien (in I. 19 et in I. 20, n°1 et 2) sont également directes.

⁴⁹ Il mentionne le caractère direct (« sine reductione in absurdum », *an-N*, Partie I, fasc. II, p. 89) de la preuve alternative proposée par Héron pour I. 19 (également rapportée par Proclus, mais sans attribution). Il relève ce même caractère pour celle à I. 25 (*Ibid.*, p. 107), mais sans l'attribuer à Héron; cette fois c'est Proclus qui nous permet l'identification.

⁵⁰ Parmi les Anciens qui ont commenté les *Éléments* ou qui se sont attaqués à leurs difficultés, al-Khayyâm mentionne Héron et Eutocius, mais il leur reproche d'avoir dépensé leur énergie à ramener la démonstration directe à celle par l'absurde et celle par l'absurde à la directe, plutôt que d'avoir essayé de prouver le postulat des parallèles. V. [Vahabzadeh, 1999], p. 320 ou [Djebbar, 2002], pp. 91-92.

⁵¹ Il en va de même pour la première et la troisième de celles proposées pour I. 20. Pour la deuxième, les choses sont un peu plus compliquées comme nous venons de le voir.

⁵² Editée dans [Rommevaux, Djebbar, Vitrac, 2001], p. 286.

⁵³ V. Eucl., *Él.*, vol. 3, p. 140.

⁵⁴ L'analyse proposée dans Eucl., *Él.*, vol. 3, p. 147 n'est donc pas pleinement satisfaisante.

⁵⁵ V. Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 384-385. Il pourrait d'ailleurs en être de même de X. 16 mais, si tel est le cas, celle-ci est sans doute plus ancienne car elle existe dans le ms IsTh Malik et elle est citée par Pappus.

2. Renforcer la structure déductive du traité en proposant des démonstrations qui établissent des connexions logiques, là où le traité juxtaposait des résultats indépendants les uns des autres.

Là encore, le cas le plus éclatant est celui des Propositions II. 2-10 pour lesquelles Héron proposait des preuves qui, non seulement ne nécessitaient plus le tracé des figures planes en cause dans l'énoncé — on parle souvent de preuves plutôt "algébriques" —, mais elles constituaient une chaîne déductive en lieu et place d'une simple juxtaposition. Cette "amélioration" ne se retrouve pas dans le texte même des *Éléments* mais les démonstrations du même genre — concernant les Propositions XIII. 1-5 (N°75-77)⁵⁶ et qui ont massivement interféré avec le texte, aussi bien en grec qu'en arabe et en latin —, procèdent du même esprit.

Cela vaut aussi, au moins en partie, pour la preuve alternative partielle de VI. 20 (N°27) fondée sur VI. 19, partiellement seulement, car elle a en outre le mérite d'utiliser un langage plus abstrait, celui des rapports doublés de rapports (v. *infra*, Partie VI, §§ 2-3).

3. Toujours dans ce registre logique, ou plutôt structurel, on pourrait ranger les préoccupations concernant les cas de figures.

En principe les auteurs classiques ne multiplient pas les cas de figures considérés dans une preuve; ils se contentent généralement d'exposer le plus complexe. Cela dit, certains sont parfois nécessaires, à cause des variations de la construction (voir par exemple les cas supplémentaires introduits dans XI. 23, N°69) et il ne faudrait pas non plus que la Proposition ait été établie d'une manière trop particulière. On se rappelle que c'était précisément le reproche qu'Apollonius adressait à Euclide pour le problème à trois et quatre droites dans sa préface au premier Livre des *Coniques*. Comme pour les preuves indirectes, la non prise en considération de certains cas de figure peut traduire un manque d'aboutissement dans un éventuel double mouvement d'analyse et de synthèse, celle-ci impliquant qu'on s'interroge, au moins dans le cas des problèmes et des théorèmes de lieu, pour savoir quand la résolution est possible et, si oui, quel est le nombre de solutions.

4. Cela dit, la tradition d'exégèse a produit des quantités de cas supplémentaires, mathématiquement peu importants, mais témoins de l'appropriation du texte, une sorte d'exercice scolaire. Ainsi dans son *Commentaire* au Livre I, Proclus signale-t-il des cas de figure additionnels dans les Propositions I. 2, 3, 6, 9, 11, 12, 18, 24, 30, 35, 36, 38, 39, 41, 43. Quelques-uns sont à leur tour divisés en sous-cas, voire en sous-sous cas⁵⁷. Certains d'entre eux (in I. 2, 9, 11, 24, 35, 36, 38) sont aussi connus d'an-Nayrîzî, ce qui suggère qu'ils proviennent du *Commentaire* de Héron. Ainsi ceux à I. 35-36 — des théorèmes de lieux si l'on en croit Proclus — lui sont expressément attribués par le mathématicien persan. Aucun n'a contaminé le texte grec des *Éléments*.

5. Mais ce n'est pas le cas pour d'autres, qui font apparaître une dimension classificatoire, en particulier quand il est question du segment de cercle. Grâce à an-Nayrîzî, nous savons que Héron avait altéré certaines preuves du Livre III et ces opérations ont laissé des traces dans certaines versions : ajout d'un cas de figure à III. 11 dans la version Ishâq-Thâbit, cas additionnel devenue Proposition III. 12 du texte grec (N°8); même ajout de cas dans III. 20 en grec (N°10); discussion des cas de figures possibles dans III. 25 qui a entraîné leur insertion dans le texte, aussi bien en grec qu'en arabe (puis en latin), dans un texte qui en était initialement dépourvu (N°12). La même action paraît probable dans le cas de III. 33 (N°16) et de IV. 5 (N°19). *A contrario*, on peut imaginer que la "philosophie officielle" relative aux cas de figure, bien connue depuis l'époque hellénistique, a pu produire leur élimination dans

⁵⁶ V. Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 390-400.

⁵⁷ V. l'exemple pris par Proclus in I. 3 comm., *Pr.*, p. 228, l. 7 — p. 232, l. 9.

certaines versions. C'est ce qui semble s'être produit dans les Propositions III. 24 et 27 (N°11, 13). Ceci demanderait une étude détaillée.

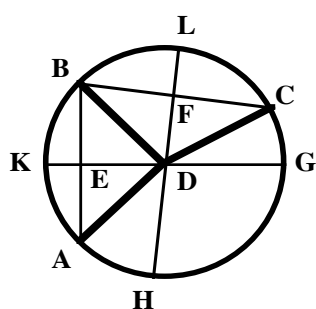
6. En principe ces critères devraient nous permettre de trancher la question de l'antériorité chronologique pour un couple de preuves d'une même Proposition :

- la preuve indirecte serait plus ancienne que la directe;
- celle sans cas de figures plus ancienne que celle avec;
- la structure déductive plus forte, postérieure à la plus relâchée.

Mais ce n'est pas toujours aussi simple car deux critères peuvent s'exercer en sens inverse. Prenons l'exemple de la Proposition III. 9 :

« Si un certain point est pris à l'intérieur d'un cercle, et qu'à partir de ce point plus de deux droites égales soient menées à la rencontre du cercle, le point pris est le centre du cercle ».

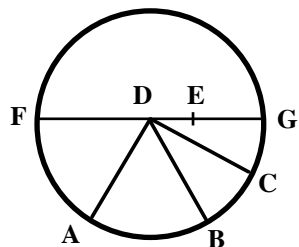
Nous disposons, dans le texte grec, d'une preuve directe qui reproduit le même genre de raisonnement que celui rencontré dans III. 1, III. 3 et qui le sera encore dans III. 10 :



On suppose que $DA = DB = DC$; on joint AB , BC et on prend leurs milieux E , F que l'on joint à D . Les droites DE , DF sont prolongées jusqu'à la circonférence; d'où KG , LH .

On montre (grâce à I. 8) que GK coupe AB non seulement en deux parties égales, mais aussi à angles droits. Et donc, grâce au Porisme à III. 1, le centre est sur GK . De même il est sur HL . Donc c'est D .

On peut y voir une confirmation d'authenticité, ou à l'inverse, l'indice d'un remaniement. Nous avons également une preuve *aliter* indirecte, assez astucieuse :



On suppose que $DA = DB = DC$ et que D n'est pas le centre, mais qu'il s'agit du point E . On joint DE , prolongée en FG , un diamètre.

Puisque D est sur ce diamètre et n'est pas le centre, on a :

$$DG > DC > DB > DA \text{ d'après III. 7.}$$

Mais $DA = DB = DC$ par hypothèse. D'où contradiction. Aucun point autre que D ne peut être le centre du cercle.

Comme nous savons que les Propositions III. 10 et 11 ont été l'objet de l'attention de Héron, on pourrait penser qu'il en est de même ici. Puisque nous avons rappelé sa préférence pour les preuves directes (critère 1), nous pourrions donc imaginer qu'il a conçu ici, non pas la démonstration alternative, comme dans III. 10, mais la première preuve, directe, qu'il y a eu substitution ou permutation, et que Heiberg s'y est laissé prendre. Mais, d'un autre côté, la seconde preuve, indirecte, a le mérite de renforcer la structure déductive. Elle s'appuie sur la très proche Proposition III. 7 à laquelle elle donne d'ailleurs un usage, alors que celle-ci en est dépourvue sinon. Selon le critère 2 on donnera donc raison au choix de Heiberg. La preuve *aliter* sera bien un perfectionnement. On voit qu'il est difficile de trancher dans certains cas. Ici j'aurai tendance à suivre Heiberg pour deux raisons :

- III. 9_{aliter} n'existe pas chez an-Nayrîzî;
- Adélar I a la même preuve que la première preuve grecque.

Qui plus est, dans la version latine de Gérard de Crémone, an-Nayrîzî précise qu'en ce qui concerne III. 9, Héron suivait Euclide⁵⁸. Mais je suis loin d'avoir des certitudes. La même

⁵⁸ Anar., p. 97. La preuve *aliter* à III. 9 doit cependant être assez ancienne car elle figurait dans certains des manuscrits grecs consultés par Thâbit ibn Qurra; v. [Engroff, 1980], pp. 22-23.

difficulté, la même indécision, se rencontre avec les préférences de caractère mathématique qui, elles aussi, peuvent s'exercer en sens contraire.

VI. Quelques critères de type mathématique ou métamathématique

1. On peut vouloir donner une forme plus générale à certains résultats, pour en étendre la portée, à la suite d'un développement historique — il s'agirait alors d'une sorte de mise à jour des *Éléments* —, ou, à l'inverse, considérer que ce traité doit contenir seulement les résultats les plus élémentaires, au sens technique du terme, ou seulement ceux qui sont utiles dans la suite de l'exposé, bref vouloir être plus réducteur, c'est à dire plus euclidien, qu'Euclide.

2. On peut opter pour un langage abstrait — par exemple celui de la théorie des proportions — ou s'en tenir le plus possible à un discours du premier ordre portant sur les objets eux-mêmes, nombres et figures. Cette tension existe d'ailleurs dans le traité, indépendamment du problème des preuves alternatives : elle manifeste la thématization explicite des relations entre objets mathématiques en tant que telles, thématization relativement limitée dans les *Éléments*. Donnons quelques exemples.

3. Pour VI. 22, X. 9 et XI. 37 une famille de preuves utilise le langage abstrait des rapports doublé et triplé d'un rapport; l'autre procède sur les figures ou les lignes droites en exhibant de manière constructive les figures, en particulier les moyennes proportionnelles, qui instancient spécifiquement les différents rapports impliqués dans les preuves. Ainsi, dans X. 9^{a,b}*aliter*, le rectangle contenu par A et B et le produit $F = C.D$ jouent le rôle de moyens entre le carré décrit sur A et celui sur B, entre E, le carré de C et G, celui de D, respectivement⁵⁹. On pourrait d'ailleurs leur rattacher les deux preuves de l'assertion médiane de VI. 20 et celles de VI. 31⁶⁰. Même si, dans ces cas, il n'est pas nécessaire de construire des objets supplémentaires, la question des deux "langages" s'y pose également⁶¹. Ce qu'il importe de noter ici c'est la manière dont les choses se répartissent dans les traditions directe et oblique :

	VI. 22	X. 9	XI. 37	VI. 20P	VI. 31
Preuves "abstraites"	Esc. 907 <i>aliter</i> . G <i>Calit.</i>	Grec (N°1) IsTh, GC	Grec <i>PTh</i>	Grec <i>aliter</i> . Malik 3586, GC	Grec <i>aliter</i> . IsTh, GC (N°1)
Preuves constructives	Grec + IsTh (N°1) GC (N°1), Ad. I	Grec <i>aliter</i> .	Grec <i>b</i> , IsTh GC, Ad. I	Grec (N°1), Ad. I	Grec (N°1), Ad. I Esc. 907 <i>aliter</i> , G <i>Calit.</i>

Sans doute faut-il en déduire qu'il a existé un modèle grec pour la preuve *aliter* de VI. 22, et donc deux familles complètes. Selon ce critère, aucune version, sauf peut-être Ad. I, n'est constante dans ses choix. A cela s'ajoute le fait que la preuve de XI. 37 dans une partie de la

⁵⁹ A noter que dans la preuve de la deuxième assertion les nombres E et G ne jouent aucun rôle.

⁶⁰ Dans la preuve N°1 de VI. 31 on utilise un présupposé implicite appartenant à la théorie des proportions combinant V. 24 et l'inversion comme l'explique an-Nayrîzî. Mais ce n'est pas pour s'en dispenser que l'on a conçu la preuve *aliter* : elle y recourt également ! Outre la "généralité" de son langage, elle a le mérite de généraliser I. 47 grâce à I. 47.

⁶¹ On trouve un exemple comparable dans la *Collection mathématique* de Pappus où un ensemble de lemmes du Livre VII, pour trois ouvrages au moins du Trésor de l'analyse (*Section déterminée* et *Coniques* d'Apollonius, *Porismes* d'Euclide), sont démontrés de deux manières. L'une, utilisant la notion de « rapport composé de rapports », semble constituer une sorte de "genre" démonstratif. V. Prop. VII. 22 (dém. n°1); 27-28 (deux dém. *aliter* de 26); 35, autrement; 36 (dém. n°1); 127, autrement; 129, autrement; 142 (dém. *aliter* de 136); 175, autrement; 182, 184, 202 (dém. n°1). Autre exemple : dans son *Commentaire aux Coniques* d'Apollonius (Ed. Heiberg, p. 292, l. 19—p. 294, l. 2), Eutocius mentionne que l'on trouve dans certaines copies une preuve de la Proposition II. 12 par composition des rapports ($\delta\iota\ \sigma\upsilon\upsilon\theta\acute{\epsilon}\sigma\epsilon\omega\varsigma\ \lambda\acute{o}\gamma\omega\nu$), mais qu'il l'a écartée, préférant une démonstration « plus simple ».

tradition médiévale semblent être une contamination des deux familles⁶². La version éditée par Heiberg est hésitante, le choix du Livre VI n'est plus celui de X. 9 et XI. 37. Faut-il, dans ce cas, comme dans bien d'autres, privilégier la leçon du manuscrit *b* ? Nous devrions en déduire que les preuves en termes de rapports doublés et triplés sont des perfectionnements, qu'Adélarde a été le plus "conservateur" et qu'il y a eu des substitutions de preuve pour VI. 20, 31 dont témoignent IsTh et Gérard de Crémone.

La solution est peut-être à chercher dans X. 9. Le début du Livre X est perdue dans la version Ad. I mais les autres composantes de la tradition adélarde (HC, RC, Ad. III) se réfèrent à une preuve de type "abstraite". Ajoutons encore que dans cette même tradition on ne trouve que la seconde moitié (b) de chacune des Prop. VIII. 11-12⁶³, combinée en une seule Proposition (VIII. 11)⁶⁴. Or c'est précisément sur VIII. 11b, entre autres, que repose la preuve "abstraite" de X. 9. On peut alors imaginer que la volonté de traiter de manière analogue nombres et figures rectilignes dans X. 9 — en termes de rapports doublés — est à l'origine de la construction des preuves "abstraites" du Livre VI puis, par analogie, de XI. 37. Dans cette hypothèse, X. 9*aliter* procéderait d'une intention inverse, de même que l'adjonction de VIII. 11a-12a, autrement dit la construction explicite des moyens proportionnels. Seul Adélarde (et la tradition dite *hajjâjienne*) aurait conservé la structure originale et, aux deux substitutions de preuve relevées dans la tradition IsTh (et Gérard de Crémone), il faudrait en ajouter une troisième, dans le grec cette fois, pour XI. 37. Le caractère éminemment conjectural de cette reconstruction n'échappe à personne⁶⁵.

4. Dans les deux preuves de la première partie de III. 31 (« Dans un cercle, ... l'angle dans le demi-cercle est droit ... »), l'une (celle retenue par Heiberg) utilise le prolongement d'une droite dans le segment de cercle, l'autre non. Or, nous savons par Proclus, à propos de I. 5, qu'un recours à un tel prolongement, s'il n'est pas indispensable, était critiquable. Le Diadoque propose pour I. 5 une démonstration alternative, également connue de an-Nayrîzî, et qui pourrait être due à Héron. C'est également ce que faisaient celui-ci et Porphyre, dans les trois démonstrations alternatives qu'ils proposent pour I. 20, explorant les différentes possibilités logiques : la première est directe et sans cas de figures; la deuxième est directe mais avec plusieurs cas de figures; la troisième est indirecte et comporte deux cas de figure ! La valeur que ces commentateurs leur reconnaissent était donc certainement décroissante. Appliqué à III. 31 ce genre de raisonnement conduit à considérer la preuve grecque comme l'authentique et la seconde comme un perfectionnement destiné à se dispenser du prolongement.

C'est possible, mais l'examen des textes montre que la première démonstration est bien plus élégante; elle évite la référence à I. 13 et une sorte de calcul sur les angles droits. Surtout la preuve *aliter* du grec est *première* dans la tradition médiévale et la seule chez Adélarde. Une substitution a bien pu avoir lieu.

⁶² V. Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 228-229.

⁶³ VIII. 11-12 : (a) « Entre deux nombres carrés (resp. cubes), il existe un (resp. deux) nombre(s) moyen(s) proportionnel(s), et (b) le carré (resp. cube) a, relativement au carré (resp. cube), le rapport doublé (resp. triplé) de celui du côté relativement au côté ». J'ajoute (a), (b) pour désigner chacune des deux assertions de la proposition. L'énoncé de la tradition adélarde est un peu différent : « Un nombre carré a ... au côté. Un nombre cube a ... au côté » [variante dans *GCalit*, p. 210 : « de tout deux nombres carrés (resp. cubes), le rapport de l'un à l'autre est le rapport ... »].

⁶⁴ At-Tûsî et une glose insérée dans la recension d'Avicenne attribue cette particularité à la version de al-Hajjâj; v. [Lévy, 1997], pp. 233-234 + nn. 77, 79.

⁶⁵ V. cependant *infra*, Partie VIII, § 1, un autre indice de ce que la version adélarde de VIII. 11+12 est plus authentique que celle du grec et de IsTh.

	Démonstration retenue par Heiberg	Démonstration alternative
	<p>BE = EA, CE = EA d'où :</p> <p>angle ABE = angle BAE (I. 5) et angle ACE = angle CAE. D'où :</p> <p>angle BAC = angles ABC, ACB.</p> <p>Or angle FAC, extérieur, est aussi égal aux angles ABC, ACB (I. 32a). Donc angle BAC = angle FAC. Donc chacun est droit (Df. I. 10).</p>	<p>angle AEC = 2.(angle BAE) et angle AEB = 2.(angle EAC) en combinant I. 5 et I. 32a. D'où :</p> <p>angles AEB + AEC = 2.(angle BAC)</p> <p>Or angles AEB + AEC = 2 droits par I. 13.</p> <p>Donc angle BAC = 1 droit.</p>

Ajoutons qu'Aristote fait allusion à la preuve de III. 31^a en deux occasions. En *An. post.*, II, 11 94 a 27-34 on pourrait croire qu'il s'agit de la preuve *aliter* (on utilise le fait d'être égal à un droit en étant la moitié de deux droits !), mais en *Met.*, Θ, 9, 1051 a 26-29, il faut certainement lire une allusion à une preuve encore différente et plus simple, basée sur I. 32b et non I. 32a⁶⁶. Après coup celle-ci s'avère également compatible avec le texte des *Analytiques*. Quoi qu'il en soit, il n'y a pas de prolongement dans les allusions du Stagirite⁶⁷, ce qui est un indice supplémentaire que la preuve ancienne pourrait bien être *l'aliter*.

5. Dans les Propositions X. 68-70 et 105-107 on prouve que 6 espèces d'irrationnelles de la classification, trois par adjonction, trois par retranchement, sont stables par commensurabilité. Une famille de preuves, linéaires, l'établit seulement pour la commensurabilité en longueur. L'autre, composée de preuves surfaciques, permet de l'étendre immédiatement au cas de la commensurabilité en puissance⁶⁸. On peut donc les considérer comme un perfectionnement mathématique : une généralisation (implicite) et, surtout, un renforcement de la structure déductive. D'un autre point de vue, elles rompent la similitude qui existe, dans le texte grec, pour les deux groupes de cinq démonstrations (X. 66-70 + 103-107). On pourrait donc envisager que les preuves linéaires aient été conçues pour exhiber ladite similitude dans un texte initialement hétérogène⁶⁹. Là encore il est difficile de trancher ce qu'il en est de l'antériorité : certes les preuves surfaciques constituent des améliorations mathématiques⁷⁰ mais d'une part l'introduction de preuves alternatives linéaires semble avoir été un "hobby" de Héron d'Alexandrie, d'autre part les 6 preuves d'Adélarde — la version qui, au bout du compte, paraît la plus "conservatrice" — sont surfaciques. Si elles s'avéraient authentiques, nous aurions là l'exemple d'une intervention éditoriale particulièrement maladroite du point de vue mathématique.

⁶⁶ Sur le figure ci-dessus : par I. 5 angles ABE = BAE et ACE = CAE; donc BAC = ABE + ACE. Or BAC + ABE + ACE = BAC + ABC + ACB = 2droits (I. 32b); donc BAC = (1/2)(2 droits) = 1 droit. Substantiellement c'est la même preuve *aliter* que l'on trouve, en passant, dans an-N, comm. à IV. 5, pars III, pp. 26-29.

⁶⁷ Selon H. Mendell, dont je m'inspire ici, il n'y a jamais allusion à I. 32a (angle extérieur à un triangle) chez le Stagirite, alors que celles à I. 32b sont fort nombreuses.

⁶⁸ V. Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 355-356.

⁶⁹ Il faut également remarquer que la même stabilité est établie pour l'espèce "médiale" dans le Porisme à X. 23 du texte grec cette fois, porisme qui n'existe pas dans la tradition médiévale (ce qui a suscité une remarque de la part de Thâbit ibn Qurra, v. [Engroff, 1980], pp. 34-35). Ce Porisme est d'ailleurs utilisé dans les preuves de X. 68-70 + 105-107. Mais ce n'est pas pour pallier son absence qu'on a introduit les preuves surfaciques. Car le même "fait" (« une aire commensurable avec une aire médiale est médiale » ou « une droite commensurable en puissance seulement avec une médiale est médiale ») est utilisé à plusieurs reprises (dans X. 33, 39, 61, 62, 75, 81, 98, 99), et en outre dans les Prop. X. 67 + 104 (bimédiales et apotomés d'une médiale = GC X. 64 + 102) lesquelles sont pourvues de preuves linéaires !

⁷⁰ Contrairement à la plupart des preuves alternatives rapportées par Proclus. Cf. *supra*, Partie IV, nn. 46-47.

6. Le même genre d'incertitude se retrouve, dans un contexte un peu différent, à propos de II. 14⁷¹ et V. 18⁷². Dans une partie de la tradition arabe, celle que l'on qualifie de "hajjâjienne", on trouve pour chacune d'elles, non pas le résultat général tel qu'il est établi dans le texte grec et la version Ishâq—Thâbit, mais une sorte de cas particulier :

a) la Proposition II. 14 (N°3) n'y est établie que pour un triangle et non pas pour une figure rectiligne quelconque;

b) dans les *deux* (?) démonstrations alternatives médiévales de V. 18 (N°24) on utilise le théorème de permutation, V. 16, ce qui implique de se limiter, pour la composition du rapport, à des quadruplets de grandeurs homogènes.

S'agit-il des versions primitives, de restitutions à partir de versions altérées ou de simplifications ? Dans le cas de V. 18 on pourrait imaginer qu'il s'agit de transposer une preuve arithmétique. Ainsi VII. 14 (version arithmétique du théorème $\delta\lambda' \text{ } \upsilon\sigma\omicron\upsilon$) utilise VII. 13 (version arithmétique du théorème de permutation) ce que ne faisait évidemment pas V. 22, son homologue dans les grandeurs⁷³. Il faut toutefois noter que la compatibilité de la composition du rapport avec la proportionnalité (le contenu de V. 18) n'est pas établie dans les Livres arithmétiques. Mais un commentateur a pu vouloir l'y ajouter.

Quant à II. 14 cela pourrait correspondre à deux stratégies différentes pour obtenir la quadrature des figures rectilignes quelconques. Dans la version "hajjâjienne" on se contente d'un triangle parce que l'on sait que toute figure rectiligne est décomposable en triangles pour chacun desquels on trouvera un carré équivalent. Et l'ensemble de ces carrés pourra être remplacé par un seul grâce à l'usage répété du théorème de l'hypoténuse (I. 47). La version ne contient alors que les résultats les plus élémentaires, car limités aux triangles. En particulier la preuve de II. 14 repose alors sur la Proposition I. 42 :

« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à un triangle donné »,

et non, comme c'est le cas en grec, sur sa généralisation, I. 45 :

« Dans un angle rectiligne donné, construire un parallélogramme égal à une figure rectiligne donnée »,

Proposition qui n'existait pas chez al-Hajjâj. Quoi qu'il en soit, l'origine de cette divergence est vraisemblablement grecque : Simplicius cite deux fois la Proposition II. 14; une fois il se réfère à la version générale mais, dans son Commentaire au *De celo*, il cite la version "triangle" en se référant à Euclide (le *Stoicheiôtês*) quoique sans numéro de Proposition⁷⁴.

VII. La volonté de perfectionner

Les cas où l'on propose une autre démonstration pour établir qu'un résultat ne dépend pas de telle hypothèse — qui y figure mais qui, au bout du compte, s'avère superflue —, ou d'une construction auxiliaire dont on peut, après réflexion, se passer devraient être plus tranchés quant à l'antériorité. La preuve *aliter* prétend clairement être un perfectionnement de la preuve première.

1. Ainsi Gérard nous signale une construction alternative (N°1) pour la Proposition I. 44, laquelle se permet, dans le texte grec (et dans la première construction de Gérard) de faire l'hypothèse que le parallélogramme construit égal à un triangle donné dans un angle donné grâce à I. 42 peut être placé de telle manière que l'un de ses côtés soit en alignement avec la

⁷¹ « Construire un carré égal à une figure rectiligne donnée ».

⁷² « Si des grandeurs sont en proportion par séparation, elles seront aussi en proportion par composition ».

⁷³ Ajoutons que le texte de V. 23 semble témoigner de l'existence d'une preuve qui faisait appel, elle aussi, à la permutation, preuve avec laquelle la démonstration principale aurait été contaminée.

⁷⁴ Version générale dans le comm in Arstt, *Phys.*, p. 62, l. 8; version "triangle" : in Arstt, *DC*, p. 414, l. 1.

droite donnée AB⁷⁵. Mais dans la construction alternative que rapporte Gérard — et qui est celle d'Adélarde (mais aussi celle d'an-Nayrîzi et d'Avicenne) — on commence par prolonger la droite AB et c'est sur ce prolongement que l'on construit le parallélogramme cherché grâce à I. 41, autrement dit en reproduisant la construction de la preuve de I. 42.

En un sens il s'agit d'un perfectionnement puisqu'on s'est dispensé d'une assomption injustifiée mais la structure déductive s'en trouve affaiblie : I. 42 n'est utilisée, dans le grec, que pour I. 44 et I. 45. Cette dernière manque dans ces versions dites "hajjâjiennes" et I. 42, à cause de la construction alternative, est sans usage dans le Livre I (mais appliquée dans II. 14). Je n'ai rien trouvé dans le grec qui permette de dire s'il s'agit là d'une initiative antique ou médiévale, en l'occurrence arabe.

2. La substitution de preuve dans V. 5, que nous connaissons grâce à une partie de la tradition arabe et arabo-latine (N°21), semble motivée par le recours, dans la preuve grecque, à un cas particulier du postulat de la quatrième proportionnelle. Manifestement, comme on le voit dans V. 18 et dans l'ensemble du Livre XII, Euclide n'avait pas d'état d'âme particulier quant à l'usage (implicite) de ce principe. Mais les choses ont changé ensuite, peut-être sous l'influence d'Archimède. Campanus, on le sait, énoncera explicitement ledit principe.

3. Dans ce même registre du perfectionnement ou, du moins, ce qui fut perçu comme tel, on peut également placer les altérations qui visent à expliciter l'implicite. J'ai déjà mentionné le cas des preuves d'une partie de la tradition médiévale pour VIII. 22-23⁷⁶. On peut leur adjoindre :

- (i) — La preuve alternative à VII. 31 (N°32) qui explicite le recours au principe du bon ordre.
- (ii) — L'adjonction des Propositions IsTh IX. 30-31, la modification de la preuve de IsTh IX. 32 (= Heib. 30) et l'amélioration de celle de IsTh IX. 33 (= Heib. 31)⁷⁷.
- (iii) — La démonstration *aliter* pour X. 1 (N°43) qui constitue une explicitation détaillée des manipulations d'inégalités mises en œuvre dans la première preuve d'une manière quelque peu implicite⁷⁸.

4. La concision fait également partie des vertus à cultiver en mathématiques. Plusieurs démonstrations alternatives ont été proposées dans cet esprit :

- (i) — Les preuves *aliter* à X. 85-90 (N°62) et celles, partielles, à XII. 17 (N°74) et à XIII. 18 (N°78) qui affirment explicitement rechercher une plus grande concision.
- (ii) — Celle à XI. 22 (N°68) qui, à la différence de la preuve première, dispense de distinguer des cas de figure⁷⁹.
- (iii) — En revanche les preuves *aliter* partielles à III. 7 et 8 (N°4, 5), preuves premières de la tradition médiévale, sont certainement plus anciennes que les versions abrégées correspondantes du texte grec. Ici, comme pour III. 31^a (et peut-être X. 6), pour parler à la manière de Knorr, Heiberg a fait le mauvais choix !

⁷⁵ Ce point a d'ailleurs été souligné dans la discussion concernant le déplacement des figures chez Euclide. V. [Mueller, 1981], p. 23 et Eucl., *Él.*, vol. 1, p. 299.

⁷⁶ V. *supra*, Partie III, n. 31.

⁷⁷ IsTh IX. 30 (si A impair mesure B pair selon C, alors C est pair) correspond à la première partie de Heib. IX. 30; IsTh IX. 31 (si A impair mesure B impair selon C, alors C est impair) correspond plus ou moins à une affirmation sans justification dans Heib. IX. 31 (*EHS*, II, p. 220, l. 6-7).

⁷⁸ On ne peut toutefois pas écarter complètement la possibilité que le texte grec transmis soit le résultat d'une réparation quelque peu incertaine après la perte d'une partie de la preuve proprement dite.

⁷⁹ V. Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 160-164.

VIII. Abréger après avoir amplifié !

1. La brièveté peut aussi s'autoriser d'un enrichissement antérieur. Telles sont les démonstrations produites pour IX. 1-2 (N°38) dans des scholies grecques, une fois la Proposition VII. 20 *vulgo* admise dans le texte des *Éléments*. Pour la substitution de preuve dans IX. 2 (N°39), il s'agit également d'un perfectionnement à rattacher à l'insertion préalable (ou simultanée) des converses aux Propositions VIII. 26-27 (= IsTh. VIII. 24-25). Grâce à an-Nayrîzî, nous savons que lesdites converses ont été ajoutées par Héron. La preuve de IsTh. IX. 2 se réduit à une application de IsTh. VIII. 24 (= converse de Heib. VIII. 26). Celle de GC est une contamination de deux preuves, l'une comme celle du grec, l'autre comme IsTh.

A noter un dernier point, au début de la preuve grec : on a (D, C) nombres carrés et pour justifier qu'il existe entre eux un moyen proportionnel on utilise l'assertion intermédiaire qu'ils sont plans semblables (par Df.) en appliquant VIII. 18. Or cela était une conséquence immédiate de VIII. 11a. Ceci suggère que cette première assertion n'existait pas dans une version antérieure du texte, comme c'est le cas dans la tradition "hajjâjo-adélandienne" laquelle combine VIII. 11b-12b en une seule assertion. Après leur séparation et leur enrichissement le texte grec de IX. 2 n'a pas été "mis à jour". Celui de IsTh est plus conséquent sur ce point.

2. Les preuves grecques des Propositions X. 36-37, 73 (N°50, 61) relèvent peut-être de ce même registre de l'altération après enrichissement, en l'occurrence après l'insertion de la Proposition très certainement inauthentique X. 13.

Dans X. 36 et 73 (la rédaction de X. 37 est abrégée dans le grec) on fait un double usage de X. 13 pour établir l'incommensurabilité des aires $T(AB)+T(BC)$ et $2 \cdot \text{Rect}(AB, BC)$, sans évoquer la nature de ces aires⁸⁰. Dans la version de Gérard (qui, rappelons-le, ne contient pas X. 13) les preuves de X. 36-37, 73 (= GC 33-34, 71⁸¹) partent directement de la nature (connue) de ces aires — l'une est exprimable, l'autre est médiale — pour en déduire leur incommensurabilité, selon un modèle qui est d'ailleurs celui des Propositions X. 39-40, 76-77 dans l'ensemble des versions, y compris grecques. Cette même divergence se retrouve dans une partie des preuves de X. 54-55 (N°58) dans lesquelles, pour établir l'incommensurabilité des aires $\text{Rect}(AG, AB)$, $\text{Rect}(EF, AB)$, le texte grec a recours à VI. 1, X. 11b et à une double utilisation de X. 13 (afin d'établir l'incommensurabilité en longueur des droites AG, EF, là encore sans évoquer la nature de ces rectangles dont l'un est exprimable, l'autre médial)⁸². Dans ces Propositions (GC X. 51-52), Gérard de Crémone procède ici également à partir de la nature de ces aires⁸³. Mais ce n'est pas tout : le même écart constitue 4 preuves *pseudo-aliter partielles* dans les Propositions X. 26 (N°50), X. 60 (N°59), X. 71 (N°61) et X. 91 (N°64). Seule la dernière occurrence mérite vraiment le nom de « preuve *pseudo-aliter* » car elle est attestée en tant que telle par Gérard de Crémone. Ce qui est remarquable c'est que le texte principal de Gérard, comme le grec, y présente l'argument surfacique et c'est l'argument linéaire, basé sur X. 13, qui est dit avoir été trouvé "autrement"⁸⁴. Plus drôle encore, dans X. 71 c'est le *texte grec* qui présente cette fois l'argument surfacique et non Gérard⁸⁵. Je crois qu'il faut parler ici de preuves *pseudo-aliter* car la situation n'est pas la même que dans X. 36-37-54-55-73. Sans doute s'agit-il d'enrichissements divergents à partir d'un texte qui ne se préoccupait plus, à ce stade de l'exposé, de justifier explicitement une inférence élémentaire de la forme :

⁸⁰ V. *EHS*, III, resp. p. 60, l. 14—p. 61, l. 4; p. 127, l. 4-10.

⁸¹ V. GC, éd. Busard, resp. p. 259, l. 30-34; p. 259, l. 58—p. 260, l. 1; p. 296, l. 52-57.

⁸² V. *EHS*, III, resp. p. 92, l. 16-19; p. 95, l. 9-11.

⁸³ V. GC, éd. Busard, resp. p. 275, l. 38-41; p. 277, l. 23-30.

⁸⁴ Cf. *EHS*, III, p. 158, l. 7-12 et GC X. 89, éd. Busard, p. 312, l. 34-37 et l. 44-55.

⁸⁵ Cf. *EHS*, III, p. 121, l. 17-19 et GC X. 68, éd. Busard, p. 294, l. 15-17.

Si A et B sont commensurables mais A et C incommensurables,
alors B et C sont incommensurables.

C'est ce qui ressort de X. 26⁸⁶ et, plus encore, de X. 60 où la justification, chez Gérard de Crémone, apparaît dans une explication postposée introduite par "quoniam", en soi très suspecte⁸⁷. Ces variantes sont vraisemblablement d'origine grecque et, sur ce point du moins, nos versions semblent contaminées. Quoi qu'il en soit, il faudrait, si l'on accepte cette reconstruction, donner la préférence à la tradition médiévale pour les preuves de X. 36-37-54-55-73.

IX. Origine grecque ou initiative médiévale ?

Dans tous ces exemples, à une exception possible près, l'initiative a été prise déjà dans la tradition grecque. L'exception possible, c'est le N°42 auquel il faut peut-être adjoindre la substitution de preuve dans VIII. 22-23 (N°37) dont j'ai déjà eu l'occasion de parler. Certains cas restent indécidables, qu'il s'agisse de savoir dans quel sens on peut parler de perfectionnement ou de préciser l'origine, grecque ou médiévale, de l'altération⁸⁸. Cela dit, si l'on revient à la quantification initiale, on voit que sur 78 altérations de preuves, 31 sont connues par le grec et 47 par les traductions médiévales ou la confrontation des deux traditions. Mais sur ces 47 altérations, 27 au moins sont d'origine grecque :

- Une fois averti par les traductions, on se rend compte qu'il y avait bien la trace d'un autre état du texte grec dans les manuscrits byzantins, par exemple pour les subdivisions des Propositions XI. 31, 34 (insertion d'un CQFD à la fin du premier cas de figure).
- L'analyse mathématique conduit à la conclusion — probable — que telles preuves apparentées, seulement partiellement attestées dans la tradition grecque et/ou dans la tradition médiévale, constituent en fait une famille de démonstrations *aliter* qui a dû exister, complète, dans certaines versions grecques disparues. Nous l'avons vu avec les preuves alternatives aux Propositions VI. 20, 22, 31, X. 9 et XI. 37 (Partie VI, § 3) et le groupe des démonstrations surfaciques pour X. 68-70 + 105-107 (Partie VI, § 5).
- La tradition indirecte des témoignages peut aussi fournir un indice qui va dans le même sens, comme dans l'exemple de Simplicius à propos de II. 14 (Partie VI, § 6a), ou celui d'an-Nayrîzî, lequel permet d'identifier la preuve héronienne de III. 10 (Partie V, §6).
- Les scholies grecques, enfin, offrent également quelques ressources⁸⁹.

Si l'on se limite à ce que j'ai considéré comme de "vraies" démonstrations alternatives et substitutions de preuve, la part de l'initiative grecque est plus importante encore : 32 sur 40 concernant 39 Propositions sur 48, soit environ 80 % (Voir annexe, Tableau II). Cette inégalité n'est peut-être qu'un effet de ma prise en compte très limitée de la tradition médiévale mais, à l'inverse, si on disposait pour les Livres arithmétiques ou stéréométriques d'indications aussi précieuses que celles fournies par an-Nayrîzî pour les six premiers Livres, on verrait peut-être que pratiquement toutes les altérations structurelles dans les preuves des

⁸⁶ Cf. *EHS*, III, p. 41, l. 19-23 et GC X. 20, éd. Busard, p. 249, l. 7-8.

⁸⁷ V. GC X. 57, éd. Busard, p. 282, l. 60—p. 283, l. 4.

⁸⁸ Ainsi :

- Les constructions alternatives dans I. 44 (N°1; perfectionnement ?) et dans VI. 9 (N°26).
- Les démonstrations *aliter* à IV. 15 (N°20), IX. 22 (N°41); toutefois le fait que cette dernière n'existe que dans le ms *F* implique sans doute qu'il s'agit d'une élaboration tardive.
- La substitution de preuve dans V. 6 (N°22).

⁸⁹ V. les scholies N°III, 27 (cas dans III. 24), N°VI, 22 pour VI. 9*aliter*, N°IX, 34-35 pour IX. 30 et N°XII, 85 pour l'altération de la preuve de XII. 17.

Éléments (et dans leurs traductions) sont d'origine grecque⁹⁰. Pour ma part j'en suis convaincu.

X. Substitutions de preuve et rééditions

Des doubles démonstrations existent dans les manuscrits des textes mathématiques grecs et dans ceux de leurs traductions, des substitutions de preuve peuvent être mises en évidence quand nous comparons différentes versions, en particulier le texte grec édité par Heiberg et les traductions arabes et arabo-latines. Certains commentateurs, comme Proclus, ont recueilli un certain nombre de démonstrations alternatives dont certaines sont expressément rapportées à des exégètes antérieurs, notamment Héron et Pappus⁹¹. Mais qu'est-ce que les Anciens ont à dire précisément sur ce phénomène du « prouver autrement » ? En fait, très peu de choses, surtout en ce qui concerne les *Éléments* d'Euclide.

1. Un cas est moins mal documenté, c'est celui des quatre premiers Livres des *Coniques* d'Apollonius, réédités et commentés par Eutocius d'Ascalon, sans doute dans la première moitié du VI^e siècle de notre ère. Son commentaire (ses scholies, comme il le dit lui-même) lui donne l'occasion de préciser la nature de son travail éditorial et, même s'il est postérieur à Théon d'Alexandrie d'un bon siècle, même si les deux textes en cause (*Coniques* I-IV, *Éléments*) diffèrent quant aux enjeux impliqués par leurs rééditions⁹², nous avons là un très précieux témoignage⁹³ qui permet d'imaginer ce qu'a pu être le travail de Théon⁹⁴, travail sur lequel nous ne savons malheureusement presque rien. Trois indications d'Eutocius méritent toute notre attention :

- Lorsqu'il entrepris sa réédition certains manuscrits portaient des variantes de démonstrations. Autrement dit des substitutions de preuves s'étaient déjà produites pour certaines Propositions. Pour d'autres, il semble qu'Eutocius était confronté à un phénomène de doubles preuves⁹⁵. A chaque fois il s'est efforcé de n'en retenir qu'une — celle qu'il pense la plus claire — et il a conservé les autres dans son commentaire afin que le lecteur puisse juger ses choix⁹⁶.

⁹⁰ Il en va certainement autrement, non plus dans les traductions, mais dans les recensions et autres adaptations. C'est manifeste chez Campanus de Novare. V. [Rommevaux, 1999] et [Rommevaux, 2001].

⁹¹ Toutefois, cela ne veut pas dire que le commentaire mathématique se réduisait à la production de preuves alternatives ou à l'adjonction de cas de figure et de réciproques. Ainsi le Commentaire au Livre X attribué à Pappus, ne mentionne aucune démonstration alternative. Il faut dire que son auteur n'est guère concerné par l'explication des démonstrations euclidiennes dont il parle fort peu. Son Livre I, en particulier, doit être décrit comme une longue paraphrase des Définitions X. 1-4, la confrontation Euclide \ Théétète-Platon et l'exposé détaillé du plan du L. X. Il donne aussi des informations sur les développements de la théorie dus à Apollonius. Le Livre II, qu'il soit dû au même auteur ou non, procède également de cette recherche de compléments mathématiques.

⁹² En revanche, si l'on en croit Apollonius lui-même (dans sa lettre-préface au Livre I), le genre littéraire des deux traités est le même, celui des "éléments".

⁹³ Désormais facilement accessible grâce aux travaux de Micheline Decorps-Foulquier, v. [Decorps-Foulquier, 1997], [Decorps-Foulquier, 1998], [Decorps-Foulquier, 2000], notamment pp. 67-76 et 82-87.

⁹⁴ D'autant qu'Eutocius semble se conformer à une tradition philologique développée à Alexandrie depuis l'époque hellénistique. V. [Decorps-Foulquier, 2000], pp. 73-75.

⁹⁵ Pour ma part c'est de cette manière que j'interprète la différence entre deux des trois groupes de variantes de preuves distinguées dans [Decorps-Foulquier, 2000], pp. 83-84, à savoir les 2^e et 3^e, respectivement les preuves simplement introduites par ἄλλως et celles rapportées explicitement à des divergences entre manuscrits. Il est à noter qu'aucune des démonstrations alternatives du texte grec des *Éléments* n'est rapportée à un autre manuscrit. Heureusement les témoignages de la tradition médiévale supplée partiellement cette carence.

⁹⁶ V. sa préface (Ed. Heiberg, p. 176, l. 17-22), citée et traduite dans [Decorps-Foulquier, 2000], pp. 67-68.

- Il fait le lien entre l'intérêt (mathématique) porté à certaines portions du traité et la richesse du matériel exégétique qui s'y rapporte⁹⁷.
- Il reconnaît avoir lui-même proposé une nouvelle preuve, plus simple et plus claire, quand la tradition des manuscrits s'avérait trop foisonnante, comme dans le cas de la Proposition I. 32⁹⁸.

2. Il y a tout lieu de croire que la situation dans laquelle se trouvait Théon, les modalités de son action, quand il s'est agi de rééditer les *Éléments*, ont été à peu près les mêmes. L'activité exégétique s'était sans doute exercée davantage encore sur le traité d'Euclide. En revanche les interventions de Théon nous échappent presque complètement. Sans doute ont-elles consisté à introduire des ajouts — c'est ce qu'il reconnaît lui-même dans le cas de VI. 33 — et à altérer certaines démonstrations, à les rendre plus explicites. Mais, en ce qui concerne les substitutions de preuve, nous n'avons aucune information, directe ou indirecte. Les quelques témoignages explicites que j'ai pu collectés vont apparemment dans une autre direction : ils mettent en avant le nom de Héron d'Alexandrie, le plus ancien commentateur des *Éléments* connu de nous.

Ceci n'est d'ailleurs pas nécessairement contradictoire, car on peut parfaitement imaginer que Théon ait fait un usage massif du commentaire de l'illustre Mécanicien. Théon aurait également pu essayer de revenir au texte hellénistique, par delà ses commentateurs. Mais était-ce encore possible à son époque ? Était-ce même souhaitable ? Si l'on admet les scénarii que j'ai proposés à plusieurs reprises, il faut imaginer un texte antérieur à la divergence entre traditions directe et oblique nettement plus laconique que celui que nous connaissons aujourd'hui. Ceci ne correspondait sans doute plus aux attentes pédagogiques, mais aussi métamathématiques, des lecteurs et étudiants de l'Antiquité tardive qui recherchaient l'exhaustivité et la justification intégrale de chaque étape des démonstrations. Il n'y aurait rien d'étonnant non plus à ce que Théon ait préféré utiliser une version remontant peut-être au premier siècle de notre ère — les dates de Héron sont incertaines — plutôt que, par exemple, celle de son prédécesseur immédiat, Pappus. C'est un travers assez constant dans les travaux d'exégèse, y compris modernes, que de se référer à une autorité ancienne plutôt que de reconnaître une dette à l'égard de ses contemporains⁹⁹.

3. Qui plus est, même en admettant, à titre d'hypothèse, que notre quarantaine de substitutions s'explique par son action, il resterait à les interpréter : est-ce là l'essentiel des nouveautés introduites par le rééditeur ? Nous serons alors conduit à nous ranger au jugement passablement négatif émis à son encontre par Heiberg¹⁰⁰. Ou bien faut-il n'y voir, en quelque sorte, que la partie "émergée" de son travail éditorial et en conclure qu'aujourd'hui nous disposons, non pas de 90 % d'Euclide et de 10 % de Théon, mais seulement de 10 % d'Euclide et de 90 % de Théon ! Cela voudrait dire que pour la plus grande part du traité, nous n'en connaîtrions que la réédition tardive, y compris dans les traductions médiévales, lesquelles, par rapport à ce que nous font connaître les manuscrits grecs, sont pourtant passablement

⁹⁷ V. la préface de son commentaire au Livre III (Ed. Heiberg, p. 336, l. 3-8), citée et traduite dans [Decorps-Foulquier, 2000], p. 69.

⁹⁸ I. 32 comm., *ibid.*, p. 246, l. 15-17, cité et traduit dans [Decorps-Foulquier, 2000], p. 84. Cf. aussi son témoignage à propos de II. 12, mentionné *supra*, n. 61, cité et traduit dans [Decorps-Foulquier, 2000], p. 85.

⁹⁹ D'autres hypothèses sont envisageables. Les témoignages qui nous sont parvenus suggèrent que l'activité exégétique de Héron fut particulièrement importante sur les Livres I, III et VI; celle de Pappus est clairement attestée pour les Livres X et XII (mais aussi I). Il se pourrait que Héron n'ait commenté qu'une partie des *Éléments*, par exemple les neuf premiers Livres, et que Pappus ait poursuivi son travail pour l'essentiel sur les Livres X à XIII. Théon aurait pu tenir compte de ce commentaire composé à deux mains. Dans son commentaire à I. 47 (*Pr.*, 429, 13), Proclus mentionne conjointement Héron et Pappus. Une fois encore, il s'agit d'une pure conjecture.

¹⁰⁰ V. *EHS*, vol. V, 1, *Prolegomena critica*, p. LVIII.

divergentes, surtout *localement* divergentes. Dans un nombre important de Propositions nous disposons assez souvent de trois, quatre voire cinq, états du texte — différents mais construits autour d'un même noyau argumentatif. Dans l'hypothèse que je viens d'émettre, il faudrait pourtant leur assigner un même point de départ, relativement tardif, celui de la réédition de Théon. En ce qui concerne la tradition grecque, la plus grande part de son enrichissement devrait être rapportée aux V^e-VI^e siècles, période riche en travaux d'érudition, notamment à Athènes autour de Proclus, puis à Alexandrie et à Constantinople dans les cercles animés par les disciples d'Ammonius. L'ensemble aurait été compilé à Constantinople, aux IX^e-X^e siècles, avec quelques oublis en ce qui concerne les substitutions de preuve. C'est possible, mais toutefois assez peu vraisemblable. On ne peut pas exclure un autre scénario dans lequel Théon, peut-être en confrontant des versions déjà passablement divergentes, aurait introduit de nombreuses améliorations locales. Autrement dit, il serait partiellement responsable de l'un des états enrichis que nous connaissons pour le texte grec des *Éléments*.

XI. L'influence de Héron d'Alexandrie

1. Mais revenons à Héron d'Alexandrie. Grâce aux auteurs de langue arabe (notamment Ibn al-Nadîm et al-Bîrûnî), nous savons que Héron avait composé un ouvrage qui visait l'élucidation des difficultés (Shukûk) du Livre d'Euclide¹⁰¹. Il est apparemment perdu, mais cité à de nombreuses reprises par le commentateur persan an-Nayrîzî. Proclus emprunte également un certain nombre d'éléments d'exégèse à Héron. Celui-ci avait donc commenté (au moins partiellement) les *Éléments*. Il est raisonnable de croire que ce commentaire a été traduit et que nos auteurs de langue arabe se réfèrent à cette traduction, car certaines des citations de Proclus et d'an-Nayrîzî sont substantiellement identiques. Nos deux sources se complètent et tantôt l'une, tantôt l'autre permettent l'identification du matériel d'origine héronienne.

2. On peut même tenter d'aller un peu plus loin car la stratégie exégétique d'an-Nayrîzî paraît particulièrement simple. Dans le Livre I, en ce qui concerne les principes, il se réfère exclusivement au Commentaire de Simplicius. Quant aux Propositions, Héron est la seule autorité explicite, sauf pour I. 29 pour laquelle an-Nayrîzî cite à nouveau Simplicius (commentant en fait le 5^e postulat). En particulier l'auteur persan ne semble pas connaître le Commentaire de Proclus. Ainsi, pour la Proposition I. 25, il connaît la seconde preuve *aliter* rapportée par le Diadoque (et due à Héron), mais pas la première, que Proclus attribue à Ménélaus. De même, an-Nayrîzî ne mentionne pas les démonstrations alternatives que Proclus emprunte à Ptolémée, Porphyre et Pappus, bref à des auteurs postérieurs à Héron si l'on admet la chronologie traditionnelle¹⁰². L'hypothèse la plus économique, en ce qui concerne les Propositions des six (?) premiers Livres¹⁰³, est donc qu'an-Nayrîzî n'a utilisé, comme *source grecque*, que le seul Commentaire du célèbre Mécanicien (ce qui n'exclut pas qu'il ait consulté ses prédécesseurs de langue arabe).

¹⁰¹ *Kitâb Hall Shukûk Uqlîdis*; v. [Sezgin, 1974], p. 153. Le travail de Héron est également connu d'Ibn al Haytham et de 'Umar al Khayyâm.

¹⁰² Quand il cite l'ajout de Héron à I. 47, également signalé par Proclus, an-Nayrîzî nomme seulement Héron (Pars I, Fasc. II, pp. 174-175), là où le Diadoque mentionne conjointement Héron et Pappus (réf. *supra*, n. 99).

¹⁰³ Rappelons qu'en arabe nous ne possédons plus qu'une partie du Commentaire d'an-Nayrîzî, couvrant les six premiers Livres et les premières Définitions du Livre VII. Grâce à la traduction latine attribuée à Gérard de Crémone (*Anar.*), nous savons qu'il avait commenté au moins les huit premiers Livres des *Éléments*. Au cours du commentaire aux Livres arithmétiques "Anarithus" mentionne Héron seulement à trois reprises.

Par conséquent, lorsqu'un certain matériel exégétique existe à la fois chez an-Nayrîzî et dans la tradition grecque (Proclus ou les scholies anciennes), il y a toutes les chances qu'il provienne du Commentaire de Héron¹⁰⁴.

3. Celui-ci suit (ou fixe ?) les règles du commentaire des textes mathématiques, au sens technique du terme, règles que nous connaissons grâce à Proclus et Eutocius, règles que le Diadoque critique au passage : prise en compte et résolution d'objections, distinction de cas de figure, ajouts de quelques compléments mathématiques, notamment des lemmes, parfois un peu futiles, parfois intéressants ... Même en se limitant aux références explicites l'inventaire n'est pas si mince :

- Réponses à des objections *in* I. 12¹⁰⁵, I. 48¹⁰⁶, IV. 2, IV. 3¹⁰⁷;
- Ajouts de cas *in* I. 11, 35, 36; III. 11, 17 (= an-N. 16), 20 (= an-N. 19)¹⁰⁸;
- Discussion des cas dans III. 25 (= an-N. 24)¹⁰⁹.
- Ajouts ou compléments à I. 1 (construction des triangles non équilatéraux)¹¹⁰, à I. 24¹¹¹, à I. 47¹¹²; à II. 1 (une remarque sur l'analyse et la synthèse. A comparer à ce qu'on trouve en grec pour XIII. 1-5)¹¹³; à III. 13 (= an-N. 12)¹¹⁴, à III. 14 (= an-N. 13, deux preuves différentes de ce que le centre du cercle tombe nécessairement entre les droites égales)¹¹⁵, à III. 17 (= an-N. 16, ajout pour le tracé des *deux* tangentes issues d'un point)¹¹⁶; à IV. 1, 15, 16, à l'ensemble du Livre IV¹¹⁷; à VI. 19 (mentionne le cas où $BH > BG$)¹¹⁸, à VII. 2 (Héron ajoutait que si A mesure B et C, il mesure aussi leur somme et

¹⁰⁴ Beaucoup plus incertain est le cas du matériel exégétique attesté chez le seul an-Nayrîzî, même s'il procède de la même démarche, par exemple les preuves *aliter* de I. 14 et de I. 26a par superposition, un ajout à I. 31 destiné à couper un segment en trois parties égales et, surtout, des considérations de type analytique pour les Prop. IV. 5-11. Il est tentant de faire le rapprochement avec ce que Héron a proposé pour les Livres I et II, mais une source arabe antérieure ou une initiative d'an-Nayrîzî n'est pas à exclure. Seule une confrontation approfondie avec les scholies et les variantes de démonstration pourrait peut-être donner des indices sur l'origine de ce matériel.

¹⁰⁵ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 50-53. La réponse est insérée au cours d'un ajout à III. 13 (= an-N. 12) pour lequel I. 12 est une sorte de Lemme. Qu'il s'agisse d'une réponse à une objection se voit en comparant avec *Pr.*, 286, 13—289, 7 (sans mention de Héron).

¹⁰⁶ V. Pars I, Fasc. II, pp. 190-191. Qu'il s'agisse d'une réponse à une objection se voit en comparant avec *Pr.*, 430, 9—431, 14, plus complet, mais là aussi sans mention de Héron.

¹⁰⁷ V. Pars III, Fasc. I, respectivement pp. 10-11 et pp. 14-17.

¹⁰⁸ V. respectivement : an-N., Pars I, Fasc. I, pp. 72-75; Pars I, Fasc. II, pp. 148-149 (corrompu); Pars I, Fasc. II, pp. 150-153; Pars II, Fasc. II, pp. 46-19 (le cas additionnel est devenue la Prop. III. 12 du texte grec); Pars II, Fasc. II, pp. 74-75; Pars II, Fasc. II, pp. 80-81. Il existe des cas de figures pour I. 35 et I. 36 dans *Pr.*, respectivement 399, 4—400, 11 et 401, 4—402, 19, mais sans mention de Héron. L'existence de cas pour I. 36 est aussi mentionnée dans la scholie vaticane, N°I, 125.

¹⁰⁹ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 96-97. Selon an-Nayrîzî, Héron déplaçait cette Proposition après III. 31 et la traitait sans cas de figure. Or, ce que l'on trouve après III. 31 (an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 110-113), c'est seulement une discussion des cas de figure en termes angulaires, à l'aide de la Prop. III. 31 (= an-N. 30). En revanche dans GC on trouve, après GC III. 30, une preuve alternative GC 24*alit.* en un seul cas de figure.

¹¹⁰ V. an-N., Pars I, Fasc. I, pp. 44-47; existe *in Pr.*, 218, 12—220, 6, mais sans mention de Héron.

¹¹¹ V. Pars I, Fasc. II, pp. 154-161 (au cours du comm. à I. 38). Existe dans le comm. à I. 24 *in Pr.*, 339, 11—343, 13, mais sans mention de Héron.

¹¹² V. Pars I, Fasc. II, pp. 174-185 (seulement signalé *in Pr.*, 429, 12-14 et dans la scholie N°I, 149 (ms *P*)). V. aussi *supra*, n. 102.

¹¹³ V. Pars II, Fasc. I, pp. 8-9.

¹¹⁴ V. Pars II, Fasc. II, pp. 52-55.

¹¹⁵ V. Pars II, Fasc. II, pp. 56-65.

¹¹⁶ V. Pars II, Fasc. II, pp. 74-75.

¹¹⁷ V. respectivement : Pars III, Fasc. I, pp. 6-9; Pars III, Fasc. I, pp. 70-73; Pars III, Fasc. I, pp. 74-75; Pars III, Fasc. I, pp. 76-81.

¹¹⁸ V. Pars III, Fasc. II, pp. 142-143.

leur différence)¹¹⁹.

Outre l'ajout, et peut-être la suppression, de cas de figures, il n'hésitait pas à proposer un certain nombre d'autres modifications structurelles :

- Réduction des notions communes aux trois premières¹²⁰;
- Ajout de Propositions converses à II. 12, II. 13; VIII. 27-28¹²¹;
- Ajout d'un Porisme à VII. 3¹²²;
- Inversion des Propositions III. 5-6¹²³; déplacement de III. 25
- Preuves alternatives *in* I. 19¹²⁴, I. 20¹²⁵, I. 25¹²⁶; II. 11¹²⁷; III. 7¹²⁸, III. 8¹²⁹, III. 10¹³⁰; III. 20-22 (= an-N. 19-21)¹³¹;
- Réécriture de segments complets comme II. 2-10¹³² et, sans doute, XIII. 1-5¹³³.

4. A cette liste déjà abondante on peut raisonnablement adjoindre le matériel exégétique ou additionnel qui existe à la fois chez an-Nayrîzî et dans la tradition grecque. Aux preuves alternatives N°2 et 3 pour I. 20 déjà mentionnées, on ajoutera donc :

- Les ajouts à I. 6 (converse de I. 5b)¹³⁴, à I. 7 (réponse à une objection)¹³⁵, à I. 9 (réponse à une objection)¹³⁶, à I. 24 (cas de figure)¹³⁷;
- Les preuves *aliter* à I. 5 et à I. 8¹³⁸. Celle à I. 8 est la preuve en trois cas que Proclus rapporte à Philon (de Byzance ?)¹³⁹.

¹¹⁹ V. *Anar.*, p. 191.

¹²⁰ V. *Pr.*, 196, 15-17.

¹²¹ V. respectivement : an-N., Pars II, Fasc. I, pp. 70-73; Pars II, Fasc. I, pp. 74-77 (elle existe dans la scholie vaticane, n°II, 84 avec une démonstration, alors qu'an-Nayrîzî se contente de renvoyer à la preuve de la converse de II. 12. Les deux preuves procèdent de la même démarche mathématique); *Anar.*, pp. 194-195.

¹²² V. *Anar.*, p. 191.

¹²³ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 18-19.

¹²⁴ V. an-N., Pars I, Fasc. II, pp. 88-91; elle existe chez Proclus, sans mention de Héron.

¹²⁵ La première de celle rapportée par Proclus (*Pr.*, 323, l. 7). Elle existe chez an-Nayrîzî, mais sans mention de Héron. Les deux autres (*Pr.*, 323, l. 22—326, 5) existent également chez an-Nayrîzî (Pars I, Fasc. II, pp. 92-97) sans mention de Héron, mais d'après le principe que j'ai proposé *supra*, je crois que les trois preuves sont d'origine héronienne. V. aussi *supra*, n. 40.

¹²⁶ *Pr.*, 346, 13; elle existe chez an-Nayrîzî, mais sans mention de Héron.

¹²⁷ V. an-N., Pars II, Fasc. I, pp. 64-69.

¹²⁸ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 24-27.

¹²⁹ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 34-41.

¹³⁰ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 44-45. Cette preuve *aliter* existe dans les mss grecs du texte; elle avait été repérée par Thâbit ibn Qurra (v. [Engroff, 1980], pp. 23-24).

¹³¹ V. an-N., Pars II, Fasc. II, pp. 80-85.

¹³² V. an-N., Pars II, Fasc. I, pp. 12-13, 16-17, 20-23, 26-29, 32-33, 36-39 (sans mention de Héron, mais celui est nommé dans *Anar.*, p. 80), 42-45, 50-53, 58-61.

¹³³ Dans le cas de XIII. 1-3 (N°75) il s'agit du seul exemple de doubles preuves avérées dans la version d'Adélarde I. Il peut s'agir d'une coïncidence mais cela s'explique peut-être par l'ancienneté de l'altération. Compte tenu de la similitude avec ce qu'an-Nayrîzî nous fait connaître pour le Livre II, on peut penser que les démonstrations linéaires des Propositions XIII. 1-5 sont sans doute dues à Héron. V. Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 390-400.

¹³⁴ V. an-N., Pars I, Fasc. I, pp. 60-63; cela existe aussi chez Proclus (*Pr.*, 257, 4—258, 13), mais avec une preuve (directe) différente (indirecte chez an-Nayrîzî).

¹³⁵ V. Pars I, Fasc. I, pp. 64-65 (cf. *Pr.*, 262, 3—263, 8).

¹³⁶ V. Pars I, Fasc. I, pp. 70-71 (cf. *Pr.*, 273, 11—275, 2, beaucoup plus détaillée et suivie de la réponse à une autre objection, 275, 7—277, 4).

¹³⁷ V. Pars I, Fasc. II, pp. 102-105 [cf. *Pr.*, 338, 15—339, 10 qui précède donc l'ajout à I. 24 qu'an-Nayrîzî inclut dans son commentaire à I. 38 (v. *supra*, n. 111) et présente comme héronien].

¹³⁸ V. respectivement an-N., Pars I, Fasc. I, pp. 56-59 (cf. *Pr.*, 248, 16—249, 19) et Pars I, Fasc. I, pp. 66-69.

¹³⁹ *Pr.*, 266, 16sq.

Selon mon hypothèse de travail, il faut en conclure que celle-ci était déjà mentionnée par Héron dans son commentaire et que Proclus l'y a reprise.

- La proposition VII. 20 *vulgo*, attribuée par Heiberg¹⁴⁰ à Théon d'Alexandrie (parce qu'elle est seulement dans la marge de *P*, par une main récente) est mentionnée également par Anaritius (p. 191), ce qui implique, toujours selon le même principe, qu'elle soit au moins aussi ancienne que Héron.

5. Dans les termes de l'Antiquité — c'est-à-dire ceux des travaux philologiques d'inspiration alexandrine —, un ensemble aussi considérable de suggestions constitue une édition (ἔκδοσις)! Dans le cas des ἔκδοσεις hellénistiques de textes poétiques (Homère, Pindare, les Tragiques) il ne s'agissait pas de remplacer le (ou les) textes transmis par une nouvelle version en faisant disparaître les précédentes, mais de l'annoter, ce qui correspond, d'une certaine manière, aux apparats critiques de nos éditions. Cela dit, pour des traités scientifiques ou techniques, dont la transmission a manifestement emprunté des formes plus souples, les suggestions de Héron risquaient grandement d'interférer avec le texte lui-même et nous avons vu, dans un certain nombre d'exemples, que tel avait été le cas.

Là où nous pouvons l'appréhender (Voir annexe, Tableaux III, a), cette influence semble s'être exercée sur une bonne partie de la tradition, si du moins c'est bien à elle qu'il faut rapporter les preuves *aliter* pour XIII. 1-5, l'adjonction de cas dans III. 11, III. 25, 33 et IV. 5. Elle est mieux assurée dans le grec (avec l'ajout de cas III. 20), davantage encore dans la version Ishâq-Thâbit, avec, en plus, l'adjonction des converses à VIII. 27-28 et la modification de la preuve de IX. 2. Chez Gérard de Crémone il faut y ajouter le déplacement de III. 25. Peut-être s'est-elle exercée en deux fois : la première dans l'Antiquité, ce qui expliquerait que les divergences qui en procède n'ont pratiquement rien à voir avec la distinction *P \ Th* dégagée par Heiberg; la seconde, pour expliquer le clivage assez net sur ce point entre les deux composantes principales de la tradition médiévale — entre les versions de Gérard et d'Adélarde par exemple —, au moment de la révision de Thâbit ibn Qurra. Celui-ci a pu consulter, voire utiliser, le Commentaire de Héron; c'était un témoin ancien, sinon fiable, du moins utile quand il constatait une divergence entre manuscrits.

A cette influence héronienne on peut ajouter celle de la tradition scolaire qui ne se rattache pas nécessairement au Mécanicien et qui se manifeste dans les ajouts de cas des Propositions III. 35, 36, 37 — plus intempestifs encore dans la tradition "hajjâjo-adélarde" que dans le grec.

Conclusions

1. Finalement aucune version ne me paraît tout à fait cohérente dans son attitude vis-à-vis des preuves. Conservatisme et volonté de perfectionnement se retrouvent à des degrés divers dans l'ensemble de la tradition. Certes la tradition "hajjâjo-adélarde" semble être la plus conservatrice, mais elle n'ignore pas totalement l'innovation, du moins si l'on admet que les preuves surfaciques dans le Livre X sont bien une amélioration et que les cas de figures dans les Propositions III. 25, 33, 35, 36; IV. 5 ont bien été ajoutés. Peut-être faut-il leur adjoindre la construction alternative dans I. 44. Le grec est très partagé et quelque part le moins cohérent : volonté de perfectionnement, surtout littéraire, dans les Propositions III. 7, 8, 31, XI. 22, XII. 17, XIII. 18, il est conservateur pour VIII. 22-23, IX. 2 et peut-être X. 1. Finalement c'est la version Ishâq-Thâbit (du moins le groupe A) qui paraît la plus novatrice. Aux exemples déjà cités, procédant de Héron ou non, on peut ajouter la preuve alternative à V. 5, les preuves "abstraites" dans VI. 20 et 31, l'ajout de Is-ÿ. IX. 30-31 avec l'altération de

¹⁴⁰ V. *EHS*, II, p. 235.

la preuve de IsTh. IX. 32 (= Heib. 30). Mais c'est aussi la plus épargnée par la tradition scolaire des ajouts de cas de figure, tout particulièrement dans les Livres III et IV.

2. La mise en évidence, ou plutôt la confirmation, d'une influence possible de Héron dans la transmission du texte des *Éléments* est l'une des conclusions positives que l'on peut tirer de cet examen du dossier des preuves alternatives. Il y a également quelques acquis concernant le texte lui-même et la remise en question possible des choix de Heiberg dans quelques cas au demeurant assez peu nombreux et d'une portée mathématique extrêmement limitée (III. 7^p, III. 8^p, III. 31^p; XI. 37). La prise en considération des traductions médiévales permet de leur adjoindre des portions plus ou moins importantes de X. 16, 18, 36-37, 54-55, 73¹⁴¹.

3. Enfin il faut signaler un aspect négatif dans ce dossier : la quasi absence de démarche réflexive sur le « prouver autrement ». Nous avons vu que les considérations d'Eutocius sont soit étroitement techniques (ici on peut utiliser une preuve indirecte; tel résultat peut être étendu à l'ellipse ...), soit éditoriale (dans certaines copies ...). Aucune réflexion philosophique. Pourtant, si l'on admet avec Aristote que la « science démonstrative part de prémisses vraies, premières immédiates, plus connues que la conclusion, antérieures à elles et dont elles sont les causes »¹⁴²; peut-être y avait-il une réflexion intéressante à mener sur la malléabilité de la matière mathématique qui se manifeste dans la topique des preuves alternatives. Les Anciens ne semblent pas avoir élaboré une théorie de la preuve mathématique en tant que telle¹⁴³, au-delà de considérations plutôt générale sur l'analyse et la synthèse, le raisonnement par hypothèse, l'utilisation des diorismes de possibilité. Dans la discussion des démonstrations alternatives nous avons vu seulement la thématization de deux méthodes de preuve : celle par réduction à l'impossible et celle dite « par la composition des rapports »¹⁴⁴. On pourrait croire que cela tient à la spécialisation étroite d'Eutocius. Mais, outre que cela n'est peut-être pas très charitable¹⁴⁵, on doit observer la même abstention chez Proclus dont l'engagement philosophique ne fait aucun doute.

4. Quand le Diadoque, après avoir mentionné les différentes parties de la proposition géométrique idéale, introduit les termes clés du commentaire mathématique il énumère le *lemme*, le *cas*, l'*objection*, la *réduction* ¹⁴⁶. La démonstration alternative n'y figure pas. Il se peut que celle-ci ait une valeur pédagogique : c'est ce que Proclus affirme pour celle à I. 23 dont il est peut-être l'auteur. Elle est διδασκαλικώτερον. Mais la mention est unique. Il ne cherche pas d'articulation historique, il compile, comme dans le cas de I. 25 : à la preuve proposée dans le commentaire de Héron et, de ce fait, également connue de an-Nayrîzî, il ajoute celle de Ménélaos, inconnue du commentateur persan. Et quand il s'agit de comparer deux preuves il a finalement bien peu à dire. La qualité principale d'une démonstration est sa brièveté, le défaut correspondant : la diversité (ποικίλη)¹⁴⁷.

¹⁴¹ Comme nous l'avons vu, le cas des preuves surfaciques dans les Prop. X. 68-70 + 105-107 reste difficile à trancher.

¹⁴² *An. Post*, I, 2, 71 b20-22 (trad. J. Tricot).

¹⁴³ La théorie aristotélicienne de la science démonstrative des *Seconds Analytiques* a manifestement un objectif bien plus large que celui-là.

¹⁴⁴ V. *supra*, n. 61.

¹⁴⁵ Il se pourrait bien qu'Eutocius ait été le successeur immédiat d'Ammonius sur la chaire de philosophie à Alexandrie. V. [Decorps-Foulquier, 2000], p. 65.

¹⁴⁶ V. *Pr.*, p. 210, l. 27-28. Que les ingrédients essentiels du commentaire mathématiques soient la position de lemmes et la distinction de cas de figure est presque un lieu commun. V aussi *Pr.*, p. 84, l. 10-11, p. 200, l. 16-17.

¹⁴⁷ C'est le cas de la preuve de Philon pour I. 8, de la construction d'Apollonius pour I. 11, de la preuve de Héron pour I. 19.

Aux yeux de Proclus, la preuve d'Euclide l'emporte en brièveté et simplicité sur les autres dans la plupart des cas mais, assez souvent (pour I. 17alit, 18alit, 20alit, 25alit, 28alit, 32alit), il ne fait aucun commentaire.

Quoiqu'il ait expliqué que les démonstrations par réduction à l'impossible n'établissent la vérité qu'accidentellement¹⁴⁸, il considère que c'est pourtant de cette manière que l'on doit établir les converses (par réduction à l'assertion directe)¹⁴⁹ pour préserver la continuité de l'exposé, autre qualité majeure du traité euclidien. Il semble donc que Proclus se soit accommodé des pratiques des mathématiciens en cette matière sans les questionner. Simplement, en tant que commentateur de l'Antiquité tardive, comme Pappus et Eutocius au sujet des solutions du problème des deux moyennes, il estime de son devoir d'assurer la conservation et la transmission d'une longue tradition. Les démonstrations alternatives ne sont qu'un élément de l'exégèse, parmi d'autres.

5. Autant que cette abstention de la part de philosophes férus de mathématiques est celle de leurs adversaires les plus redoutables : les Sceptiques. Ces derniers, dans leur contestation systématique de toute forme de dogmatisme n'épargnent évidemment pas les mathématiques. Ainsi Sextus Empiricus, au II^e siècle de notre ère, consacre une partie de son *Contre les Professeurs*, à combattre les sciences du quadrivium : géométrie, arithmétique, astronomie (en fait l'astrologie généthliologique) et la musique¹⁵⁰. Plus particulièrement dans son *Contre les géomètres* il s'en prend à la méthode mathématique du raisonnement par hypothèse (§§3-17) avant d'examiner successivement les différents objets fondamentaux de la géométrie. Dans cette critique de la démarche géométrique il n'y a là non plus aucune allusion à l'existence de différentes preuves, ce qui pouvait peut-être s'interpréter comme une forme de διαφωνία à partir de laquelle il conviendrait donc de suspendre son jugement¹⁵¹. En fait j'ignore à quelle époque on ne s'est plus contenté de la pratique mathématique des démonstratives alternatives pour s'interroger sur les implications logiques ou épistémologiques de cette possibilité du « prouver autrement ». Il ne semble pas que ce soit dans l'Antiquité.

¹⁴⁸ *Pr.*, p. 212, l. 1-4. Déjà Aristote, dans les *Seconds Analytiques* (I, Ch. 26), avait établi la supériorité de la démonstration directe sur la réduction à l'impossible.

¹⁴⁹ *Pr.*, p. 321, l. 9-20 (à propos de I. 19). Manifestement Proclus n'a pas été entendu par celui qui est responsable des substitutions de preuve dans X. 16 et X. 18.

¹⁵⁰ V. [Sextus Empiricus, 2002].

¹⁵¹ V. Sextus Empiricus, *Esquisses pyrrhoniennes*, L. I, 12 [26]. Dans cet autre traité Sextus se livre également à une attaque en règle contre la démonstration (L. II, 13-14) dont on ne peut dire si elle existe ou non. Là non plus il n'y a aucune allusion au « prouver autrement ». Mais il est vrai que le contexte est philosophique; ce sont les logiques stoïcienne et péripatéticienne qui sont visées et non pas les démonstrations mathématiques.

Bibliographie

1. Éditions

- Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis (Eutocius), I-II.* Ed. J.L Heiberg. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner. 1891-1893. Réimp. Stuttgart, Teubner, 1974.
- Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, I-III.* Iterum ed. I. L. Heiberg, Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1910-1915. Réimpr. Stuttgart, Teubner, 1972.
- Euclidis Elementa*, post Heiberg ed. E. S. Stamatis, Leipzig, Teubner : I. El. I-IV (1969); II. El. V-IX (1970); III. El. X (1972); IV. El. XI-XIII (1973); V,1. Prolegomena critica, El. XIV-XV, Scholia in lib. I-V (1977); V, 2. Scholia in lib. VI-XIII (1977).
- Pappi alexandrini collectionis quae supersunt*, ed. F. Hultsch, Berlin, Weidmann, 1876-1878: I. Lib. II-V, rel.; II. Lib. VI-VII, rel.; III. 1: Lib. VIII, rel., schol. suppl.; III. 2 : Indices. Réimp. Amsterdam, A. M. Hakkert, 1965.
- The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements*, Ed., trad. angl. W. Thomson, comm. C. Junge & W. Thomson, Cambridge (Massachusetts), Harvard University Press, 1930. Réimp. New York/London, Johnson reprint Co, 1968.
- Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*, ed. G. Friedlein, Leipzig, in aed. B. G. Teubner, 1873. Réimp. Hildesheim, 1967.
- Sextus Empiricus, *Contre les professeurs*. Introduction, glossaire et index par P. Pellegrin. Texte grec de l'édition Mutschmann-Mau. Traductions : Catherine Dalimier (*Contre les grammairiens*); Joëlle et Daniel Delattre (*Contre les géomètres; Contre les arithméticiens*); Daniel Delattre (*Contre les musiciens*); Brigitte Pérez (*Contre les rhéteurs et Contre les astrologues*). Paris, Editions du Seuil, 2002.
- The Arabic Tradition of Euclid's Elements : Book V.* Ed. et trad. angl. par J. W. Engroff. Cambridge Mass., Harvard University PhD. Dissertation, non publiée, 1980.
- The Arithmetic Books of Euclid's Elements.* Ed. et trad. angl. par Gregg De Young. Cambridge Mass., Harvard University PhD Dissertation, non publiée, 1981.
- The first Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath.* Ed. H. L. L. Busard. Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983.
- The Translation of the Elements of Euclid from the Arabic into Latin by Hermann of Carinthia (?)*. Ed. H. L. L. Busard. L. I-VI dans *Janus*, 54, 1967, pp. 1-140; L. VII-IX, *Janus*, 59, 1972, pp. 125-187; L. VII-XII, *Mathematical Centre Tracts*, 84, Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1977.
- Robert of Chester's (?) Redaction of Euclid's Elements the so-called Adelard II Version.* Ed. H. L. L. Busard, et M. Folkerts. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin, 1992.
- The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona.* Ed. H. L. L. Busard. Leiden, E. J. Brill, 1984.
- The Mediaeval Latin Translation of Euclid's Elements made directly from the Greek.* Ed. H. L. L. Busard. Stuttgart, Franz Steiner, 1987.
- Codex Leidensis 399/1* édité par R. O. Besthorn, J. L. Heiberg, puis G. Junge, J. Raeder et W. Thomson : *Euclidis Elementa ex interpretatione al'Hadschschaschii cum Commentariis al' Nayrizii*. Texte arabe et trad. latine, Haunia, Lib. Gyldendaliana : I, 1 et 2 (= L. I), 1893-1897; II, 1 et 2 (= L. II et III), 1900-1905; III, 1, 2 et 3 (=L. IV-VI), 1910-1932.
- Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii*, ed. M. Curtze (1899) in *Euclidis Opera omnia*, ed. I. L. Heiberg & H. Menge, Leipzig, in aed. B. G. Teubner, IX. *Supplementum*.
- Anaritiu's Commentary on Euclid.* The Latin translation I-IV. Ed. P.M.J.E. Tummies. Artistarium Supplementa IX. Nijmegen, Ingenium Publishers, 1994.
- 'Umar al İayyæm, *Risæla fî ʔarġ mæ aʔhkala min muŒadaræt Kitæb Uqlîdis*. Édition et traduction française par B. Vahabzadeh dans Rashed R. & Vahabzadeh, B., *Al-Khayyæm mathématicien*, Paris, Blanchard, 1999, pp. 271-390.
- Voir aussi [Djebbar, 1997\2002]

2. Traductions et ouvrages de référence

- Decorps-Foulquier, M., *Recherches sur les Coniques d'Apollonius de Pergé et leurs commentateurs grecs*. Paris, Klincksieck, 2000.
- Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*. Trad. franç. et comm. par Bernard Vitrac. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences. Vol. 1, 1990 : Livres I à IV (Géométrie plane) précédés de l'Introduction générale par Maurice Caveing. Vol. 2, 1994 : Livres V à IX (Proportions et similitude. Arithmétique). Vol. 3, 1998 : Livre X (Grandeurs commensurables et incommensurables. Classification des lignes irrationnelles). Vol. 4, 2001 : Livres XI à XIII (Géométrie des solides).

- Heath, T. L., *A History of Greek Mathematics*. Oxford, Clarendon Press, 1921. Réed. New York, Dover Pub., 2 vol., 1981 : I. From Thales to Euclid. II. From Aristarchus to Diophantus.
- Lloyd, G. E. R., *Adversaries and authorities*. Investigations into ancient Greek and Chinese science. Ideas in Context, Cambridge University Press, 1996.
- Mueller, I., *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambridge (Mass.) and London, M. I. T. Press. 1981.
- Sezgin, F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V. Leiden, Brill, 1974.

3. Quelques articles

- Acerbi, F., Drowning by Multiples. Remarks on the Fifth Book of Euclid's Elements, with Special Emphasis on Prop. 8. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 57, n°3, 2003, pp. 175-242.
- Decorps-Foulquier, M., « L'édition d'Eutocius d'Ascalon des *Coniques* d'Apollonius de Perge : un exemple du rôle des écoles de l'Antiquité tardive dans la transmission des textes scientifiques grecs ». In Hasnawi, A., Elamrani-Jamal, A. et Aouad M. (eds), *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*. Orientalia Lovaniensia Analecta, Leuven-Paris, Peters&Paris, IMA, 1997, pp. 49-60.
- Decorps-Foulquier, M., « Eutocius d'Ascalon éditeur des *Coniques* d'Apollonius de Pergé ». In Argoud G. et Guillaumin J.-Y., (eds.), *Sciences exactes et sciences appliquées à Alexandrie* (III^e siècle av. J. C.-I^e siècle ap. J. C.). Actes du Colloque International de Saint-Étienne (6-8 Juin 1996). Centre Jean Palerne. Publications de l'Université de Saint-Étienne, 1998, pp. 87-101.
- De Young, G., 'The arabic textual Traditions of Euclid's *Elements*. *Historia Mathematica*, 11, 1984, pp. 147-160.
- De Young, G., New traces of the lost al-Ĵajjaj arabic Translations of Euclid's *Elements*. *Physis*, 38, 1991, pp. 647-666.
- Djebbar, A., L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'Épître d'al-Khayyām (1048-1131). Sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide. Orsay, Université de Paris-Sud. *Mathématiques. Prépublications* 97—39, 1997. Contient une traduction française (basée sur l'édition du texte arabe par A. I. Sabra) de 'Umar al Ĵayyām, *Risāla fī ẓarĴ mā aḥkālā min muŌādarāet Kitāb Uqlīdis*. Rééditée avec corrections dans *Fahrang, Quaterly Journal of humanities and cultural Studies*. Vol. 14, N°39-40 (2002), pp. 79-136.
- Knorr, W. R., The Wrong Text of Euclid : On Heiberg's Text and its Alternatives. *Centaurus*, 36, n°2-3, 1996, pp. 208-276.
- Lévy, T., Une version hébraïque inédite des *Eléments* d'Euclide. In Jacquart, D. (ed.), *Les voies de la science grecque*. Études sur la transmission des textes de l'Antiquité au dix-neuvième siècle. Genève, Droz, 1997, pp. 181-239.
- Mendell, H., Two geometrical Examples from Aristotle's *Metaphysics*. *Classical Quarterly*, 34 (1984), pp. 359-372.
- Rommevaux, S., La proportionnalité numérique dans le Livre VII des *Éléments* de Campanus. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, Tome 5, Fascicule 1, 1999, pp. 83-126.
- Rommevaux, S., Rationalité, exprimabilité : une relecture médiévale du Livre X des *Éléments* d'Euclide. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, Tome 7, 2001, pp. 91-119.
- Rommevaux, S., Djebbar, A., Vitrac, B., Remarques sur l'histoire du texte des *Éléments* d'Euclide ». *Archive for History of Exact Sciences*, 55, 2001, pp. 221-295.

CNRS, UMR 8567
 Centre Louis Gernet
 10 Rue Monsieur le Prince
 75006 Paris, France
gernet@ehess.fr

Annexes

Abréviations

1. Abréviations générales

Eucl. : Euclide	<i>El.</i> : <i>Éléments</i>	ms, mss : manuscrit(s)
L. : livre	mg : marge	éd. : édition
"m. 1" : main du copiste principal d'un ms.	"m. rec". : main récente	V., v. : voir
Df. : Définition	Prop. : proposition	

2. Abréviations pour désigner les versions utilisées

J'utilise l'édition critique grecque de Heiberg (Heib.), révisée par E. S. Stamatis (abréviation : *EHS*), ainsi que ma traduction française commentée (Eucl., *Él.*, vol. N ($1 \leq N \leq 4$)). Les références complètes sont données dans la bibliographie.

Les manuscrits grecs sont désignés selon le *Conspectus siglorum* de Heiberg. Nous désignons par l'abréviation *Th*, la famille des manuscrits, dits théonins (*BFVpq*), rapportés par Heiberg à la réédition de Théon d'Alexandrie.

<i>P</i> : ms vat. gr. 190	<i>B</i> : ms Bodl. D'Orville, X, 1	<i>F</i> : ms Laurent. XXVIII, 3
<i>V</i> : ms Vindob. phil. gr. 31	<i>p</i> : ms Paris. gr. 2466	<i>q</i> : ms Paris. gr. 2344
<i>b</i> : ms Bibl. comm. de Bologne 18-19		

Pour désigner les versions médiévales, dans le corps du texte et dans les tableaux qui suivent, j'ai recours aux abréviations suivantes :

IsTh : version arabe de Ishâq ibn Hunayn, révisée par Thâbit Ibn Qurra	Ad. I : version arabo-latine d'Adélarde de Bath
Syr. : version syriaque	RC : version arabo-latine de Robert de Chester (Ad. II)
HC : version arabo-latine de Hermann de Carinthie	Gr.-lat. : version gréco-latine (XII ^e s.)
GC : version arabo-latine de Gérard de Crémone.	

Dans les tableaux, la mention "Grec" suppose l'unanimité des mss grecs utilisés par Heiberg; "arabo-latin" suppose l'unanimité des versions arabes et arabo-latines consultées par nous.

3. Autres abréviations d'éditions

Certaines éditions sont mentionnées à de multiples reprises. Je les désigne également par une abréviation. Les références complètes sont données dans la bibliographie.

Pr. : l'édition par Friedlein du *Commentaire* de Proclus au Livre I des *Éléments*.

an-N : l'édition, d'abord par R. O. Besthorn, J. L. Heiberg, puis par G. Junge, J. Raeder et W. Thomson, et en plusieurs fascicules, du *Commentaire* d'an-Nayrîzî (texte arabe et trad. latine).

Anar. : édition de la traduction latine du précédent (probablement par Gérard de Crémone).

4. Autres abréviations utilisées dans les tableaux

Cas ⁺ : cas de figure supplémentaire(s)	cas [−] : Cas sans doute supprimé(s)
x 2 : subdivision d'une Proposition	÷ 2 : réunion de deux Propositions en une seule
<i>alit.</i> : démonstration alternative, <i>i.e.</i> , doubles preuves	<i>subst.</i> : Substitution de preuve
<i>ps-alit.</i> : pseudo-preuve alternative ¹⁵²	NP: preuve alternative partielle ¹⁵³

Les altérations détectables à l'aide des seuls mss grecs sont indiquées par une astérisque.

¹⁵² Si, dans une version donnée il existe 2 preuves successives, littérairement distinctes, mais substantiellement (*i.e.* mathématiquement) identiques.

¹⁵³ Pour les Prop. III. 7, 8, 31, VI. 20, XII. 17, XIII. 18, la démonstration alternative ne porte que sur une partie de la preuve; ce que j'indique par l'exposant "p".

Tableau I. liste des Propositions et versions concernées

	Lieu concerné	Versions d'attestation
1	I 44 constr. <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Constr. <i>alit.</i> . signalée par GC; c'est celle que l'on trouve dans Ad. I (+ an-Nayrîzi et Avicenne); d'où <i>subst.</i>
2*	II. 4 <i>ps.-alit.</i>	Preuve <i>ps. alit.</i> . existe dans Th. + IsTh + gr.-lat. + GC et dans P mais in mg. m. rec. Elle n'existe pas dans Ad. I
3	II. 14 <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> . signalée par GC; c'est celle que l'on trouve dans Ad. I
4*	III. 7 ^P <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> . signalée par le Grec + gr.-lat.; c'est celle de l'Arabo-latin
5*	III. 8 ^P <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> . signalée par le Grec + gr.-lat.; c'est celle de l'Arabo-latin
6*	III. 9 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> . existe dans Grec, IsTh, gr.-lat., GC, mais pas dans an-N, Ad. I
7*	III. 10 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> . existe dans Grec, IsTh, gr.-lat., GC, an-N, mais pas dans Ad. I
8*	III 11 (cas ⁺) + {III 12}	Cas ⁺ in 11 : existe dans Grec + gr.-lat. mais pas Arabo-latin; {III. 12} : existe dans Grec + gr.-lat. \ existe dans IsTh+GC comme cas ⁺ à III. 11 N'existe pas dans Ad. I (+ an-Nayrîzi)
9	III. 14 ^P <i>subst.</i> (?)	Trois preuves ≠ de III. 14a dans le grec \ an-Nayrîzi \ Ad. I + GC
10	III 20 (cas ⁺)	En confrontant Grec + gr.-lat. \ Arabo-latin
11*	III. 24 (cas ⁻)	En confrontant Grec + gr.-lat. \ Arabo-latin + Scholie n°III. 27.
12	III 25 (cas ⁺) + <i>subst.</i> + déplacement	3 cas de fig. in Grec + gr.-lat. et preuve <i>alit</i> à 3 cas de fig. attribuée à al-H in mss Thurston 11, Escor. 907; Rabat 1101 et 53. Elle existe dans GC (sans attrib.) et c'est l'unique preuve de Ad. I Preuve sans cas de fig. in autres mss IsTh (≈ <i>GCalit.</i>). Il y a eu <i>subst.</i> Selon an-Nayrîzi Héron déplaçait cette Prop. après III. 31; GC2 <i>alit.</i> après GC30
13	III. 27 (cas ⁻)	En confrontant Grec + gr.-lat. \ Arabo-latin
14*	III. 31 ^P <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	La preuve <i>alit.</i> . existe dans Grec, IsTh, gr.-lat., GC; c'est celle de Ad. I (<i>subst.</i>)
15	III. 33 (cas ⁺) + constr. <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	3 cas de fig. in Grec + gr.-lat. et preuve <i>alit</i> à 3 cas de fig. attribuée à al-H in mss Thurston 11, Escor. 907; Rabat 1101 et 53. Elle existe dans GC (sans attrib.) et c'est l'unique preuve de Ad. I Preuve sans cas de fig. in autres mss IsTh (≈ <i>GCalit.</i>). Il y a eu <i>subst.</i> constr. <i>alit.</i> : en confrontant Grec + gr.-lat. \ al-H + IsTh + GC + <i>GCalit.</i> + Ad. I
16	III. 35 (cas ⁺) + <i>subst.</i>	2 cas de fig. in Grec + gr.-lat. et preuve <i>alit</i> à 6 cas de fig. attribuée à al-H in mss Escor. 907; Rabat 1101 et 53; Elle existe dans GC (sans attrib.) et c'est l'unique preuve de Ad. I Preuve sans cas de fig. in autres mss IsTh (≈ <i>GCalit.</i>). Il y a eu <i>subst.</i>
17	III. 36 (cas ⁺) + <i>subst.</i>	2 cas de fig. in Grec + gr.-lat. et preuve <i>alit</i> à 3 cas de fig. (non attribuée à al-H) in mss Escor. 907, Rabat 1101 et 53; Elle existe dans GC (sans attrib.) et c'est l'unique preuve de Ad. I Preuve sans cas de fig. in autres mss IsTh (≈ <i>GCalit.</i>). Il y a eu <i>subst.</i>
18	III. 37 <i>alit.</i> + (cas ⁺)	2 cas de fig. in Grec + gr.-lat. (cas n°2 in DP) et preuve <i>alit</i> à 3 cas de fig. (non attribuée à al-H) in mss Escor. 907, Rabat 1101 et 53; Elle existe dans GC (sans attrib.) La Prop. n'existe pas dans Ad. I Preuve sans cas de fig. in autres mss IsTh (<i>GCalit.</i>). <i>alit.</i> : en confrontant Grec + gr.-lat. + IsTh + <i>GCalit.</i> avec preuve al-H in mss Escor. 907; Rabat 1101 et 53 + GC, n°1
19	IV 5 (cas ⁺) + constr. <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	3 cas de fig. in Grec + gr.-lat. et preuve <i>alit</i> à 3 cas de fig. attribuée à al-H in mss Thurston 11, Escor. 907; Rabat 1101 et 53. Elle existe dans GC (sans attrib.) et c'est l'unique preuve de Ad. I Preuve sans cas de fig. in autres mss IsTh (≈ <i>GCalit.</i>). Il y a eu <i>subst.</i> constr. <i>alit.</i> : en confrontant Grec + gr.-lat. + IsTh + <i>GCalit.</i> \ al-H + GC + Ad. I
20	IV 15 ^P <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.pars</i> signalée in mss Escor. 907; Rabat 1101; Rabat 53; GC
21	V. 5 <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> . signalée in GC; c'est celle de IsTh (groupe A); d'où <i>subst.</i>
22	V. 6 <i>subst.</i>	En confrontant Grec + IsTh (groupe B) + gr.-lat. + Ad. I \ IsTh (groupe A) + GC
23*	V. 8 (cas ⁺)	Il existe in Grec + gr.-lat. mais pas dans l'Arabo-latin
24	V 18 <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in GC; in Ad. I preuve ≠ du Grec et de <i>GCalit.</i> (<i>subst.</i>)
25*	V. 23 (contamination)	En confrontant P \ Th + gr.-lat. \ Arabo-latin

Tableau I (cont.)

26*	VI 9 <i>constr. alit. + subst.</i>	Constr. <i>alit.</i> signalée par GC; cf. Scholie n°VI. 22 c'est celle que l'on trouve dans Ad. I d'où <i>subst.</i>
27*	VI 20P <i>alit + subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Grec + gr.-lat. + an-Nayrîzî <i>subst.</i> in ms Téhéran Malik 3586; GC. Ad. I a la preuve 1 du Grec
28	VI 22 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in ms Escor. 907 + GC
29*	VI 27 (<i>ps.-alit. + cas⁺</i>)	<i>ps.-alit.</i> : en confrontant IsTh (ms. Malik 3586), GC et cas ⁺ du grec \ Grec cas ⁺ : existe dans Th. + gr.-lat, dans P (mg. m. rec), mais pas in Arabo-latin
30*	VI 30 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Grec + gr.-lat.
31*	VI 31 <i>alit. + subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Grec + ms Escor. 907 + gr.-lat. + GC; <i>subst.</i> : en confrontant Escor. 907, GC \ Grec, gr.-lat. (ordre inverse des preuves)
32*	VII 31 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Th. + gr.-lat.
33	VIII 4 <i>ps.-alit.</i> (cas ⁺ ou ⁻)	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in IsTh (mss. Copenh. 81, Istamb., Esc. 907) cas ⁺ ou ⁻ : Grec + gr.-lat. + IsTh (groupe B) + Ad. I + GC \ IsTh (groupe A)
34	VIII. 6 <i>ps.-alit.</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in IsTh (mss. Copenh. 81, Esc. 907)
35	VIII. 11-12 (÷2) + ajout de 11 ^a -12 ^a + <i>subst.</i>	(÷2) : in Pétersb. 2145 + Ad. I + GCalio ; preuve <i>alit.</i> signalée in GC <i>subst.</i> : en confrontant Grec + gr.-lat. + GC (N°1) \ Pétersb. 2145 + Ad. I
36	VIII. 16-17 (÷2)	in Ad. I + GCalio
37	VIII. 22-23 <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in mss Escor. 907; Rabat 1101 et 53 + GC <i>subst.</i> : en confrontant IsTh \ Grec + gr.-lat. + Pétersb. 2145 + Ad. I
38*	IX 1-2 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Scholies N° IX, 2 et 4 (ms <i>Paris. gr.</i> 2345).
39	IX 2 <i>subst.</i> + contamination	<i>subst.</i> : en confrontant IsTh \ Grec + gr.-lat. Contamination in GC
40*	IX. 19 (cas ⁺)	Existe dans le ms P uniquement
41*	IX 22 <i>alit.</i>	Existe dans le ms F uniquement
42	Ajout de IsTh IX. 30-31 et <i>subst.</i> in IsTh IX. 32 (= 30)	Existe dans IsTh + GC Cf. scholies N°IX, 34-35 (<i>Vindob.</i>)
43*	X 1 <i>alit. + subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Th. + gr.-lat. et P (mg. m. 1) C'est celle de l'Arabo-latin (<i>subst.</i>)
44*	X 6 <i>ps.-alit. + subst.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Th. + gr.-lat. + GC et P (mg. m. 1) C'est celle de IsTh (Téh. Malik 3586) (<i>subst.</i>)
45*	X 9 <i>alit.</i>	Preuve <i>alit.</i> signalée in Th. + gr.-lat. et P (mg. m. 1)
46	X 14 <i>ps.-alit + subst.</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in GC (X. 12); c'est celle du Grec, d'où <i>subst.</i>
47	X. 16 <i>subst.</i>	<i>subst.</i> : en confrontant Grec \ ms Malik 3586 (X. 12)
48	X. 17 <i>subst.</i>	<i>subst.</i> : en confrontant Grec \ GC (X. 13)
49	X. 18 <i>subst.</i>	<i>subst.</i> : en confrontant Grec \ GC (X. 14)
50	X. 26 <i>ps.-alit pars + subst.</i>	<i>ps.-alit pars + subst.</i> : en confrontant Grec \ GC (X. 20), HC (X. 21)
51	X. 27-28 <i>ps.-alit + subst.</i>	<i>ps.-alit + subst.</i> : en confrontant Grec \ GC (X. 21-22)
52	X. 29-30 (÷2)	Existe in ms Pétersb. 2145 + RC + HC
	X 29 <i>subst</i>	<i>subst.</i> : en confrontant Grec \ Pétersb. 2145 (X. 17) + RC (X. 17a)
	X 30 <i>ps.-alit + subst</i>	X 30 : Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in GC (X. 25); C'est celle de Pétersb. 2145 (X. 18) + RC (X. 17b) + HC (X. 17) d'où <i>subst.</i>
53	X. 31-32 (x2)	Existe in Arabo-latin
	X. 31-32 <i>ps.-alit + subst.</i>	<i>ps.-alit + subst.</i> : en confrontant Grec \ GC (X. 26-29)
54	X 33 <i>ps.-alit.</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in GC (X. 30)
55	X. 36-37 <i>subst.</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ GC (X. 33-34)
56	X. 44 <i>subst. ?</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ IsTh (ms. Téh. Majlis) + GC : Les preuves diffèrent. Peut-être simplement le texte grec est-il corrompu.
57	X. 54-55P <i>alit. + subst.</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ GC (X. 51-52)
58	X. 60P <i>ps.alit. + subst.</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ GC (X. 57)
59	X. 68-70 <i>alit.</i> + <i>subst.</i>	Preuves <i>alit.</i> signalées (attribuées à al-H.) in mss Escor. 907. Elles existent aussi in GC; ce sont celles de Ad. I, d'où <i>subst.</i>
60	X. 71P <i>ps.alit. + subst.</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ GC (X. 68)

Tableau I (cont.)

61	X. 73 <i>subst.</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ GC
62*	X 85-90 <i>alit.</i>	Preuves <i>alit.</i> existent in Grec + gr.-lat.
63	X. 91P <i>ps.alit.</i>	Preuve <i>ps.-alit</i> signalée in GC (X. 89)
64*	X 105-106 <i>alit. + subst.</i>	Preuves <i>alit.</i> signalées in Grec + gr.-lat.; ce sont celles de IsTh (groupe A) + Arabo-latin, d'où <i>subst.</i>
65	X. 107 <i>subst.</i>	En confrontant Grec + gr.-lat. \ IsTh (groupe A) + Arabo-latin
66	X 111 <i>ps.-alit.</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in GC (X. 109)
67*	X. 115 <i>ps.-alit. + subst</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in Grec + gr.-lat. + GC c'est celle de IsTh (groupe A), d'où <i>subst.</i>
68*	XI 22 <i>alit. + (cas⁺)</i>	Existe in Grec (mais pas dans la gr.-lat.)
69*	XI 23 (cas ⁺)	Existe in Grec + gr.-lat.
70	XI 30 <i>ps.-alit. + subst.</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in GC; c'est celle de Ad. I, d'où <i>subst.</i>
71	XI. 31 (x2)	Existe in Arabo-latin
72	XI. 34 (x2)	Existe in Arabo-latin
73*	XI. 37 <i>subst.</i>	En confrontant P + Th + gr.-lat. \ ms b + Arabo-latin
74*	XII 17P <i>alit.</i>	Existe in P + Th + gr.-lat. mais pas in b + Arabo-latin
75	XIII. 1-3 <i>alit.</i>	Existent in Arabo-latin
76*	XIII. 5 <i>alit. + subst.</i>	Preuve <i>ps.-alit.</i> signalée in mss Pbq (mais pas in mss BV + gr.-lat.); c'est celle de l'Arabo-latin, d'où <i>subst.</i>
77*	XIII 1-5 <i>alit.</i> (par analyse & synthèse)	Existent in Grec + gr.-lat.
78*	XIII 18P <i>alit.</i>	Existe in Grec + gr.-lat.

Tableau II. 40 "vraies" preuves aliter et/ou substitutions

N°1	I. 44	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Origine inconnue
N°3	II. 14	preuve al-H+Ad. I résultat d'une corruption ?	Origine grecque
N°4	III. 7	preuve grecque = perfect.; pr. <i>alit. pars</i> antérieure	Origine grecque
N°5	III. 8	preuve grecque = perfect.; pr. <i>alit. pars</i> antérieure	Origine grecque
N°6	III. 9	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Héron
N°7	III. 10	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Héron
N°14	III. 31 ^a	pr. <i>alit. pars</i> = perfectionnement ?	Origine grecque
N°18	III. 37	preuve grecque + IsTh + GCalit. = perfectionnement ?	Origine grecque
N°20	IV. 15	?	Origine inconnue
N°21	V. 5	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine inconnue
N°22	V. 6	?	Origine inconnue
N°24	V. 18	preuves <i>alit.</i> = cas part. Résultat d'une "arithmétisation ?	Origine inconnue
N°26	VI. 9	?	Héron
N°27	VI. 20	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Origine grecque
N°28	VI. 22	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Origine grecque
N°30	VI. 30	preuve <i>alit.</i> = exercice scolaire	Origine grecque
N°31	VI. 31	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Origine grecque
N°32	VII. 31	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine grecque
N°37	VIII. 22-23	preuves IsTh = perfectionnement	Origine inconnue
N°38	IX. 1-2	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine grecque
N°39	IX. 2	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Héron
N°41	IX. 22	indécidable mais preuve <i>alit.</i> tardif	Origine grecque
N°42	IX. 30	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Origine inconnue
N°43	X. 1	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine grecque
N°45	X. 9	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement ?	Origine grecque
N°47	X. 16	preuve grecque = refus de la réduction logique	Origine grecque
N°48	X. 17	?	Origine inconnue
N°49	X. 18	preuve grecque = refus de la réduction logique	Origine grecque
N°50	X. 36-37	preuve grecque = perfectionnement après insertion de X. 13 ?	Origine grecque
N°57	X. 54-55	preuve grecque = perfectionnement après insertion de X. 13 ?	Origine grecque
N°59, 64, 65	X. 68-70, 105-107	preuves surfaciques = perfectionnement ?	Origine grecque
N°61	X. 73	preuve grecque = perfectionnement après insertion de X. 13 ?	Origine grecque
N°68	XI. 22	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine grecque
N°73	XI. 37	preuve PTh = perfectionnement ?	Origine grecque
N°74	XII. 17	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine grecque
N°76-77	XIII.1-5	preuves linéaires = perfectionnement	Héron
N°78	XIII. 18	preuve <i>alit.</i> = perfectionnement	Origine grecque

Tableaux III

a. Critères discriminants dépendant de Héron	Trad. grecque	Trad. arabe et arabo-lat.	
3 NC seulement	Non	Non	
Cas in I. 20	In scholies; in <i>V</i>	Oui	
Pr. <i>alit</i> in II. 2-10	Non	Peut-être in al-Hajjâj	
Inversion de III. 5-6	Non	Oui in an-N.	Non in Ad. I, GC
Pr. <i>alit</i> . in III. 10	Oui	Oui in an-N., IsTh, GC	Non in Ad. I
Ajout de cas in III. 11 = 12	Oui	Oui in an-N., IsTh, GC	Non in Ad. I
Ajout de cas in III. 20	Oui	Non mais an-N le mentionne	
Déplacement de III. 25	Non	Oui in GC	Non in Ad. I
Ajout de cas in III. 25, 33 et peut-être IV. 5	Oui	Oui in an-N., al-Hajjâj, Ad. I, GC	Non in IsTh, GC <i>alit</i>
Cas où BG > BC in VI. 19	Non	Oui in IsTh, GC, Ad. I	Non in an-N mais an-N le mentionne
Ajout de VII. 3 Por.	Oui dans <i>p</i> , <i>B</i> (mg., m. 1) et <i>V</i> (mg., m. 2)	Non in IsTh, GC, Ad. I	Mention in an-N.
Ajout de VIII. 26-27 + Subst. de pr. in IX. 2	Non	Oui in an-N., IsTh, GC	Non in al-Hafifiæfi, Ad. I
Pr. <i>alit</i> . in XIII. 1-5	Oui	Oui	

b. Théon	Trad. grecque		Trad. arabe et arabo-lat.
Ajout à VI.. 33	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non (mg., m. 2)	Non

c. <i>P</i> \ <i>Th</i>	Trad. grecque		Trad. arabe et arabo-lat.	
Pr. <i>alit</i> . in II. 4	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non (mg., m. 2)	Oui in IsTh, GC	Non in an-N., Ad. I
Cas ⁺ in VI. 27	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non (mg., m. 2)	Non	
Ajout de VII. 20 <i>vulgo</i>	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non (mg., m. 2)	Non, mais an-N. la mentionne (origine Héron ?)	
Ajout de VII. 22 <i>vulgo</i>	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non (mg., m. 2)	Non	
Pr. <i>alit</i> . in VII. 31	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non	Non	
Pr. <i>alit</i> . in X. 1	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> mg., m. 1	<i>Alit.</i> = preuve médiévale	
Pr. <i>ps.-alit</i> . in X. 6	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> mg., m. 1	Pr. N°1 in Pét. et GC Pr. in Malik = <i>alit</i> .	Allusion à <i>alit</i> . in GC
Pr. <i>alit</i> . in X. 9	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> mg., m. 1	Non	
Ajout de X. 13 <i>vulgo</i>	<i>Th</i> Oui	<i>P</i> Non (mg., m. 2)	Non	
Existence de XIII. 6	<i>Th</i> Non	<i>P</i> Oui	Oui	