



La transmission des textes mathématiques : l'exemple des *Éléments* d'Euclide

Bernard VITRAC

Les textes de savoir, en particulier ceux qui ne sont pas restés historiquement "inertes", mais qui, au contraire, ont été objets d'enseignement et de commentaires, posent des problèmes particuliers quant à leur transmission, leurs utilisateurs ayant souvent prêté davantage attention aux contenus qu'à la stricte littéralité du texte. Celle-ci est certainement moins importante pour un écrit mathématique, par exemple, que pour un poème ou une tragédie. D'autres facteurs ont pu jouer en sens inverse, voire dans les deux sens, par exemple la fixité d'un certain style de composition et d'énonciation. Le cas des écrits de géométrie est assez net et l'on a pu souligner le caractère formulaire (et figé) de la langue géométrique¹ qui dépasse largement ce que l'on observe dans d'autres domaines de connaissance, eux aussi bien codifiés, comme la grammaire ou la philosophie. Joseph Mogenet, après avoir rappelé l'opinion traditionnelle selon laquelle il n'y a guère, pour les textes mathématiques, à « redouter une intervention passionnée du copiste pour en modifier la teneur... »² — sans doute par contraste avec les écrits philosophiques ou théologiques — souligne également les "risques" propres à la copie de ces textes au vocabulaire limité, aux formules figées et répétitives, et ce dans les deux sens : risques multipliés d'erreurs d'inattention par lassitude, facilité de corrections parfois abusives³.

I. Les *Éléments* d'Euclide

Le cas des *Éléments* d'Euclide, en treize Livres est, à bien des égards, exemplaire :

- le traité a connu une fortune considérable, et même unique si on se limite aux écrits mathématiques, fortune dont témoignent les nombreux manuscrits grecs qui en ont transmis le texte, les traductions et commentaires qu'il a suscités dès l'Antiquité, mais surtout au Moyen-Âge (en latin, arabe, syriaque, persan, arménien, hébreu), puis à la Renaissance, les divers et innombrables écrits (épitomés, recensions) qui en ont été dérivés⁴.
- la régularité de son style de composition, l'analyse du discours mathématique que sa composition présuppose, ont été poussées à un degré maximal dans le domaine grec ancien.

Exemplaire, le traité d'Euclide est aussi singulier dans ce qui est conservé de la production mathématique grecque ancienne, par la conjonction de ses caractéristiques, essentielles ou conjoncturelles. Sans doute composé au début du troisième siècle avant notre ère, il est le plus ancien ouvrage de géométrie et d'arithmétique grec intégralement conservé. Il relève d'un genre

¹ V. Aujac, G., Le langage formulaire dans la géométrie grecque. *Revue d'Histoire des Sciences*, 37, 1984, pp. 97-109.

² *Autolykos de Pitane*, Histoire du texte suivie de l'édition critique des traités de la sphère en mouvement et des levers et couchers. Louvain, 1950, p. 57.

³ *Ibid.*, p. 58.

⁴ Sur l'importance historique des *Éléments* v. Heiberg, J. L., *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*. Leipzig, 1882; Euclid, *The Thirteen Books of the Elements*. Trad. angl. et comm. T. L. Heath. New York, 3 vol., 1956, (réimpr. de la 2^e éd.); l'Introduction générale de M. Caveing dans Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*. Trad. franç. et comm. Bernard Vitrac. Paris, Vol. 1, 1990, pp. 13-148.

littéraire⁵ qu'ont particulièrement prisé les mathématiciens anciens (et moins anciens) : précisément le genre des "éléments", antérieur à Euclide et débordant largement du champ mathématique mais qui, si l'on s'en tient à l'arithmétique et à la géométrie "élémentaire", est illustré par un spécimen unique : le traité euclidien. Il n'est donc pas certain que les observations que nous pourrions faire dans ce cas valent pour les autres traités mathématiques grecs anciens, ni, *a fortiori*, pour d'autres catégories de textes.

Les *Éléments* d'Euclide combinent deux fonctions :

- ils présentent une sélection de définitions, de principes (Demandes, Notions communes) et de résultats accompagnés de preuves. Leur appropriation a manifestement paru essentielle pour l'apprentissage des mathématiques. Malgré d'innombrables discussions et critiques de détails, les commentateurs se sont plu à souligner la qualité globale des choix euclidiens, la pertinence qui caractérise sa *sélection d'éléments*.

- Cette présentation se fait dans le cadre d'un réseau de dépendances logiques entre lesdits résultats. La reconnaissance de l'existence d'un tel réseau, l'étude de son fonctionnement et de ses fondements dépassent le seul intérêt mathématique de l'ouvrage, au sens technique et monographique du terme.

De ce point de vue, la singularité du traité d'Euclide est triple :

- L'exposé est synthétique; autrement dit il procède des hypothèses vers les conclusions, des principes vers les résultats qui s'en déduisent. Il exclut donc toute recherche analytique ou heuristique. L'analyse a précédé la mise en place progressive des différents éléments et la commande; mais l'exposé lui-même s'efforce de la faire disparaître.

- Le répertoire des constructions admissibles — et donc des objets géométriques pris en considération — est délibérément limité. On parle souvent pour simplifier de "géométrie à la règle et au compas". Ce critère de limitation circonscrit l'un des sujets du traité : la géométrie élémentaire par opposition à la géométrie supérieure des coniques et autres courbes. Il est à rapporter au moment où Euclide a composé son traité après qu'une certaine accumulation de résultats et de méthodes s'était produite et avait suscité une démarche classificatoire.

- Enfin l'auteur s'est interdit de présupposer toute connaissance géométrique antérieure. Les résultats sélectionnés seront donc *fondamentaux* — on peut même dire *fondationnels* — pour une bonne part d'entre eux⁶. En conséquence le "jeu" des relations logiques est, si l'on peut dire, fermé, à la différence d'autres textes mathématiques qui présupposent des connaissances antérieures (dans le cas grec ce sont généralement celles que l'on acquiert précisément par l'étude d'Euclide).

⁵ En fonction de leurs intentions, des sujets traités, des modalités d'utilisation (enseignement, recherche, vulgarisation), des conditions de circulation envisagées par l'auteur (circulation restreinte, éditions ...), les auteurs anciens d'ouvrages mathématiques ont utilisé différentes formes littéraires : monographies, grandes synthèses (ou "syntaxes"), recueils de notes, commentaires, manuels, introductions. Le genre des "éléments" est certainement le plus impersonnel de tous, celui dans lequel l'auteur s'efforce au maximum de s'effacer derrière son sujet. En revanche, du point de vue structurel, c'est le plus exigeant

⁶ Bien entendu il est clair que ce caractère : "être élémentaire" — pour garder la terminologie ancienne — est historiquement variable, et la carrière ultérieure du traité témoigne en effet de telles fluctuations. D'où, au XVII^e-XVIII^e siècle des versions en huit Livres (I-VI + XI-XII) quand l'arithmétique, la théorie des grandeurs irrationnelles euclidiennes, la construction des cinq polyèdres réguliers (traitées aux Livres VII-X, XIII) n'ont plus été jugées suffisamment "élémentaires".

II. La transmission des *Éléments*

Deux données historiques connues de nous ont compliqué la transmission du texte des *Éléments*⁷ :

- Le fait qu'il y ait eu *au moins* deux publications : l'une, à l'époque hellénistique — que l'on est tenté de qualifier d'"édition originale" —; la seconde, mieux circonscrite, n'est autre que la réédition du texte par Théon d'Alexandrie, dans la deuxième moitié du IV^e siècle de notre ère.

Les philologues ont eu comme principal (et légitime) souci d'essayer de distinguer ce qui, dans les manuscrits conservés, se rattache à chacune de ces deux versions, ou, pour le dire autrement, ils ont tenté d'isoler les interventions éditoriales de Théon. C'est le principal objectif de Heiberg, auteur de la dernière édition critique à la fin du XIX^e siècle, édition essentiellement réalisée à partir de la seule tradition directe des manuscrits grecs. En les confrontant l'éditeur a distingué trois "états du texte" représentés par :

- le Vaticanus gr. 190 [**P** (en hommage à Peyrard) dans le conspectus siglorum de Heiberg];
- les manuscrits dits par lui théonins [**Th** (**BFVpq**)], car rattachés à la réédition de Théon;
- le Bibl. comm. Bononiensis 18-19 (**b**).

Ces versions divergent de manière significative dans certaines portions du traité quoiqu'il s'agisse globalement de témoins d'un même texte. L'édition de Heiberg repose fondamentalement sur l'exploitation des oppositions globales **P** \ **Th** dans l'ensemble du texte et **PTh** \ **b** pour la portion XI. 36-XII. 17. La primauté codicologique est attribuée à **P** qui, selon Heiberg, reproduirait souvent les leçons d'un modèle antérieur à la réédition de Théon. Quant à **b**, il procéderait de cette réédition sauf dans la partie du texte où il est vraiment divergent (XI. 36-XII. 17) : il suivrait alors un abrégé byzantin postérieur dont seraient également dérivés les modèles utilisés par les traducteurs arabes dont la valeur se trouve ainsi récusée.

Les conclusions de Heiberg sur ces oppositions ont été complètement remises en cause dans l'étude récente de W. Knorr. Celui-ci souligne également une double homogénéité textuelle : celle de **P** et **Th**; celle de **b** et des versions arabo-latines attribuées à Adélarde de Bath et Gérard de Crémone, du moins dans la portion du texte qu'étudie Knorr⁸. De cette seconde homogénéité il déduit qu'il faut postuler un modèle grec commun — il l'appelle **AG***. Les conclusions de Heiberg s'en trouvent renversées : d'une part **P** est rattaché lui aussi à la réédition théonienne; d'autre part la version désormais la plus proche de l'original euclidien est, selon Knorr, l'hypothétique **AG***, et,

⁷ Sur la question de la transmission du texte, outre les chapitres que les ouvrages cités n. 4 lui consacrent, on consultera les *Prolegomena critica* de l'édition de Heiberg (*Euclidis Opera omnia*, ed. I. L. Heiberg & H. Menge, Leipzig, vol. I-V, 1883-1888; les *Prolegomena critica* sont reproduites dans le volume V, 1, *Euclidis Elementa*, post Heiberg ed. E. S. Stamatis, Leipzig, 5 volumes, 1969-1977, pp. XVI-LXXXIX); Murdoch, J., article 'Euclid', *Transmission of the Elements*, in *Dictionary of Scientific Biographies*, Ed. C. C. Gillispie, Vol., IV, 1971, pp. 437-459; Folkerts, M., 'Euclid in Medieval Europe'. *Questio II, de rerum natura*. 1989. Pour les développements récents, v. Knorr, W. R., *The Wrong Text of Euclid: On Heiberg's Text and its Alternatives*. *Centaurus*, 36, n°2-3, 1996, pp. 208-276; Euclide d'Alexandrie, *Les Éléments*. Trad. franç. et comm. Bernard Vitrac. Paris, Vol. 3, 1998, en particulier pp. 381-399 et notre article, en collaboration avec S. Rommevaux et A. Djebbar, 'Le débat Klamroth \ Heiberg revisité' en préparation.

⁸ L'un des mérites essentiels de l'étude de Knorr est d'avoir clairement mis en évidence le profit à tirer des versions médiévales arabo-latines (en attendant les éditions critiques des différentes versions arabes). Quoi qu'on pense des conclusions de Knorr, une chose est sûre : on ne peut plus résoudre ces difficiles problèmes comme l'avait fait Heiberg en écartant simplement la foisonnante tradition indirecte médiévale.

hal-00175163, version 1 - 7 Feb 2010

dans une moindre mesure *b*⁹. L'un et l'autre spécialistes ont envisagé le problème d'une manière binaire : "Euclide" *versus* "Théon", en admettant la thèse de la contamination progressive ou de l'enrichissement continu du texte, de l'époque hellénistique à l'Antiquité tardive, laquelle permet d'"ordonner" linéairement les copies ou leurs modèles présumés. Il nous semble qu'ils ne tiennent pas vraiment compte d'un second fait qui a dû introduire d'importantes complications :

- Entre ces deux publications il y eut au moins deux commentaires importants (peut-être bien davantage) : ceux de Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle de notre ère ?) et de Pappus d'Alexandrie (vers 300).

Non seulement ces commentaires ont inspiré nombre d'annotations marginales qui se sont ultérieurement trouvées intégrées au texte — situation ordinaire des textes (en particulier mathématiques) qui ont été l'objet de commentaires — mais manifestement ces deux auteurs ont aussi proposé des interventions éditoriales tout à fait explicites et parfois assez importantes qui ont, elles aussi, laissé des traces dans certaines versions.

Les données de la chronologie font que Théon — dans son travail de réédition — a pu tenir compte de leurs suggestions et les intégrer dans son texte, ou, dans le cas où des versions comportant ces modifications circulaient déjà — c'est probable dans le cas des suggestions de Héron —, se proposer au contraire un retour « à l'original » hellénistique. Dans ces conditions il nous paraît difficile d'opter pour un schéma simple de transmission comme l'ont proposé Heiberg ou Knorr. Il nous paraît bien plus vraisemblable — et c'est l'une de nos hypothèses de travail — que dès le IV^e siècle de notre ère et même avant, des copies portant différents "états du texte" — pour ne pas parler d'"éditions" au sens strict — ont circulé, versions dont dépendent les manuscrits de la tradition directe et les modèles utilisés pour les traductions arabes.

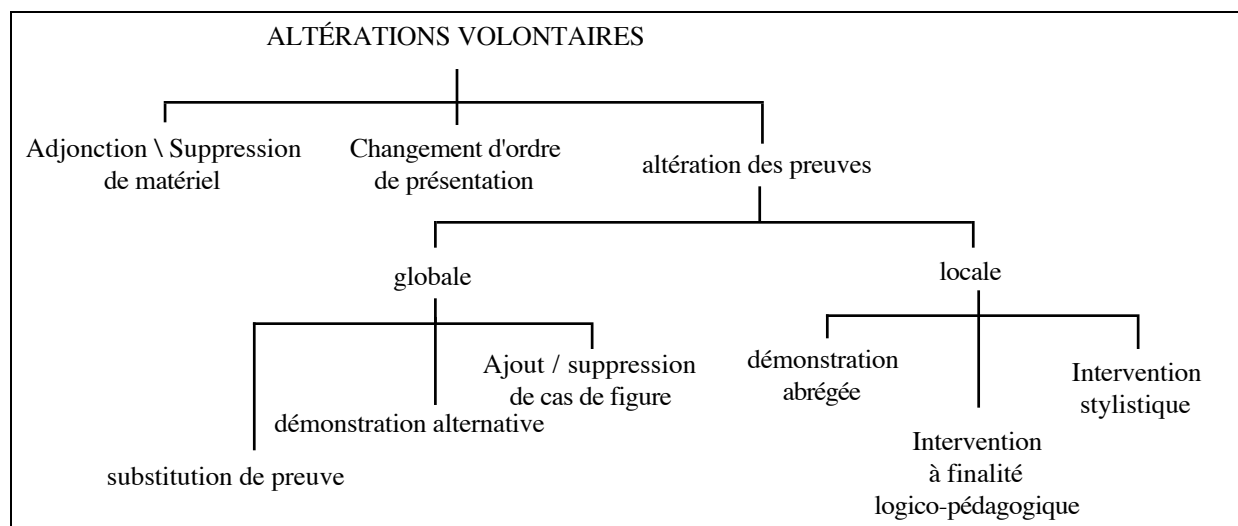
Nous voudrions aussi mettre l'accent sur un autre point. Nous avons répété, après d'autres, que la fixité de la langue et du style géométriques, les exigences de la forme déductive, la singularité du traité ont considérablement limité les avatars du texte — qu'il s'agisse de modifications éditoriales volontaires ou d'altérations accidentelles. Nous voudrions montrer que ces facteurs ont simultanément favorisé certains types d'altérations : une fois l'objectif de l'auteur considéré comme identifié (à tort ou à raison), ainsi que les moyens qu'il s'autorise pour le réaliser, on a pu vouloir être plus "euclidien" qu'Euclide, et introduire sans hésitation des altérations volontaires.

Il semble même que l'élaboration de ces altérations ait fait partie du travail sur le texte, de la part des commentateurs, des professeurs de mathématiques mais aussi de simples utilisateurs des manuscrits. Ces altérations ont agi fortement sur le texte transmis, sans que cela paraisse incompatible avec le maintien d'un souci global d'authenticité puisque toutes ces altérations ne se proposaient pas d'introduire de nouveaux objets, voire d'autres théories, à l'intérieur du cadre des *Éléments*.

⁹ Pour notre part nous avons entrepris une enquête du même genre que celle de Knorr, pour le Livre X cette fois, en ayant de surcroît un accès (partiel) aux versions arabes (référence *in* note 7). Nos conclusions divergent passablement aussi bien de Heiberg que de Knorr.

III. Les altérations volontaires du texte des *Éléments*

Il ne peut être question ici d'entrer dans les détails de la très longue histoire du texte des *Éléments*, ni même de détailler les modalités assez complexes de repérage et d'identification de ces altérations volontaires, mais nous en exposerons une typologie¹⁰. On peut les répartir en trois genres principaux et quelques sous-espèces selon le schéma suivant :



Bien qu'il s'agisse le plus souvent d'ajouts de propositions, de lemmes, de définitions supplémentaires... plutôt que de suppressions, nous parlerons d'adjonction et/ou de suppression pour utiliser une terminologie neutre vis-à-vis de la question d'authenticité¹¹. Sont concernées par cet aspect de la question : environ 35 Définitions (le quart de l'ensemble), 2 Notions communes, 28 Propositions (sur un total de 465), la *totalité* des 29 Lemmes, 25 des 30 Porismes et une dizaine d'ajouts divers, parfois assez incongrus, mais parfois aussi mathématiquement très significatifs¹². L'intérêt pour le matériel contenu dans les textes mathématiques et son altération n'est pas nouveau. Adjonction et suppression constituent deux des modalités d'action fondamentales que Pappus d'Alexandrie reproche aux professeurs de mathématiques, peu soucieux de l'intégrité des textes¹³.

¹⁰ Dans l'état actuel de nos connaissances, en l'absence d'éditions critiques des versions arabes, et compte tenu de la multiplicité des recensions, épitomés et commentaires, nous ne pouvons pas prétendre déterminer l'extension exacte du corpus à prendre en considération, ni, *a fortiori*, produire un inventaire exhaustif des divergences. Notre échantillon est cependant suffisamment important pour proposer une typologie; en revanche les considérations quantitatives sont provisoires et dépendent évidemment de l'extension du corpus considéré.

¹¹ Plutôt que "ajouts", "lacunes", termes qui impliquent l'admission d'un point de référence souvent représenté — pour des raisons évidentes — par l'édition critique de Heiberg.

¹² Nos statistiques reposent sur l'exploration d'un corpus composé comme suit : les différentes composantes de la tradition directe grecque telles qu'elles ont été détectées par Heiberg; la version très littérale, directement traduite du grec en latin, dans l'Italie du Sud au XII^e siècle, appelée version gréco-latine, découverte et étudiée par J. Murdoch en 1966 et éditée par H. L. L. Busard en 1987; les versions arabes attribuées respectivement à al-Hajjāj et à Ishāq ibn Hunayn (révisée par Thābit Ibn Qurra) et les versions arabo-latines attribuées respectivement à Adélarde de Bath et à Gérard de Crémone.

¹³ V. *Coll. math.*, L. VI, préface, éd. Hultsch, p. 474, l. 3-5 : « Πολλοὶ τῶν τὸν ἀστρονομούμενον τόπον διδασκόντων ἀμελέστερον τῶν προτάσεων ἀκούοντες τὰ μὲν προστιθέασιν ὡς ἀναγκαῖα, τὰ δὲ παραλείπουσιν ὡς οὐκ ἀναγκαῖα » (Comme beaucoup de ceux qui professent le domaine astronomique se sont enquis avec trop peu de soin au sujet de ses propositions, ils en ajoutent certaines comme étant nécessaires et en

La motivation fondamentale — quand elle est perceptible — du changement d'ordre dans la présentation des Propositions est la volonté de renforcer la structure déductive du traité. Renforcer mais non modifier : à une ou deux exception près¹⁴ l'ordre déductif n'est pas altéré par ces changements, ce qui exclut qu'il s'agisse d'accidents de transmission (déplacement de cahiers ou de feuillets...). Compte tenu du nombre de tels changements d'ordre (une trentaine, mettant en cause près d'une trentaine de Définitions et 67 Propositions), de tels accidents auraient en effet bien peu de chances d'avoir pratiquement toujours respecté les exigences de l'ordre déductif.

De l'altération des preuves, il faut distinguer au moins deux espèces, en fonction de la portée de la modification introduite : globale ou locale. Par opposition aux variantes locales nous parlons de divergences globales lorsqu'elles concernent une unité textuelle complète (Définition, Principe, Proposition, Lemme, Porisme, Cas de figure). L'altération globale des preuves en constitue un cas particulier. L'adjonction ou la suppression d'un cas de figure est en quelque sorte une action de portée intermédiaire¹⁵.

Les divergences globales définissent des oppositions de structure entre les versions et permettent un premier regroupement en familles. Du point de vue historiographique elles ont joué un grand rôle car les copistes et les spécialistes médiévaux d'Euclide (par exemple Thâbit Ibn Qurra, Nasir at-Din at-Tûsî, Gérard de Crémone) ont souligné ce type de divergences qui pouvaient troubler un lecteur consultant deux versions différentes. Des relevés concernant d'ailleurs surtout le matériel existant et l'ordre de présentation plutôt que les preuves — l'équivalent de tables des matières ou de tables de correspondance — ont donc été produits pour faciliter les comparaisons. Ils se sont avérés fondamentaux dans les discussions, à la fin du siècle dernier, aussi bien pour l'établissement du texte grec que pour comparer les mérites des traditions directe et indirecte.

Au niveau des preuves l'altération globale est simplement une *substitution* : une autre démonstration du même résultat sera proposée. Quand il ne s'agit pas d'un simple exercice, les motivations peuvent être le rejet de certains aspects techniques (démonstrations indirectes; distinction de cas de figures...), la volonté de perfectionnement, l'amélioration (en l'occurrence le renforcement) de la structure déductive, le désir d'augmenter la portée d'un résultat (généralisation) ou d'infléchir la signification d'une Proposition (par exemple initialement présentée comme relevant de la géométrie des figures et rattachée ensuite à la théorie plus abstraite des proportions). Ce type d'altération agit sur le texte selon deux modalités distinctes :

— la *substitution de preuve* proprement dite (deux copies différentes présentent des preuves différentes de la même Proposition)¹⁶;

omettent d'autres comme n'étant pas nécessaires, trad. P. Ver Eecke, Paris/Bruges, 1933. Réimpr., Paris, Blanchard, 1982, p. 369). Cf. aussi le témoignage de Proclus cité *infra*, n. 21.

¹⁴ Les inversions des Prop. IX. 11-12 et X. 10-11.

¹⁵ On pourrait leur adjoindre les démonstrations abrégées (que nous considérons plutôt comme des phénomènes locaux, v. *infra*) car certaines visent précisément à éviter de traiter plusieurs cas de figure. Elles jouent alors le rôle d'une forme faible de l'ajout ou de la suppression de cas.

¹⁶ Par exemple les manuscrits *PTH*, d'une part, *b* et la tradition médiévale indirecte arabo-latine, d'autre part, présentent des preuves différentes pour la Prop. XI. 37.

— l'existence de *démonstrations alternatives*, autrement dit l'existence, dans une même copie, de deux, voire trois, démonstrations différentes pour un même résultat¹⁷.

L'inventaire des substitutions de preuve suppose évidemment que nous sachions toujours identifier ce qui fait que deux preuves sont réellement (*i.e.* mathématiquement) *distinctes*. C'est nécessaire si nous voulons rapporter l'existence de démonstrations différentes à la production d'éditions distinctes du traité d'Euclide, ou du moins à des interventions éditoriales volontaires. Or les aléas de la transmission manuscrite, en particulier les modifications qui peuvent altérer le texte à la suite d'une simple méprise sur le statut d'une glose marginale, interdisent de considérer comme distinctes deux démonstrations qui ne différeraient que par quelques *variantes locales*. Autrement dit il faut pouvoir distinguer, pour chaque preuve, un "squelette argumentatif" qui la caractérise, et une sorte d'"enrobage" non essentiel. La frontière entre les deux n'est pas toujours facile à tracer, mais on peut penser que le remplacement d'un "squelette argumentatif" par un autre relève effectivement d'une intervention éditoriale volontaire. On saisira d'autant mieux le noyau essentiel que l'on aura circonscrit les différentes modalités d'"enrobage"; c'est pourquoi il faut également proposer une typologie des altérations locales. Nous l'avons fait ailleurs¹⁸; nous nous contenterons ici de quelques indications sommaires.

On peut distinguer au moins deux sous-espèces d'altérations locales en fonction des motivations qui les animent :

— soit un souci logico-pédagogique : il s'agit essentiellement d'insérer un *rappel* ou plus généralement de *qualifier* une portion de texte, grâce à des marqueurs comme « il est évident que ... », « par hypothèse ... », « il a été préalablement démontré que ... », pour justifier son existence et la pertinence de son insertion à cet endroit précis du texte. A cette intention logique se superpose le souci pédagogique de suppléer la mémoire éventuellement défaillante des lecteurs.

— soit une préoccupation "littéraire" : l'altération n'a apparemment pas de portée mathématique mais seulement une motivation stylistique. C'est essentiellement le cas de l'introduction de différentes formules d'abréviations, ou, à l'inverse, d'explicitations.

Donnons un exemple d'altération à finalité logico-pédagogique. Au cours de la démonstration de la célèbre Proposition XII. 2 (« Les cercles sont l'un relativement à l'autre comme les carrés sur leurs diamètres ») Euclide procède par itération et fait appel au résultat contenu dans la Proposition X. 1 :

« Alors coupant en deux [parties égales] les circonférences restantes et joignant les droites, en faisant toujours cela, nous laisserons certains segments de cercle, lesquels seront plus petits que l'excès par lequel le cercle EFGH dépasse l'aire S » (I).

L'allusion à X. 1 est claire et sans ambiguïté pour le lecteur attentif du Livre X. Mais le texte enchaîne alors :

« Car il a été démontré dans le premier théorème du dixième Livre, que deux grandeurs inégales étant proposées, si de la plus grande est retranchée une [grandeur] plus grande que la moitié, et du reste une [grandeur] plus grande que la moitié, et que ceci soit toujours

¹⁷ Cette seconde modalité est bien plus fréquente que la substitution *stricto sensu* ; ceci doit être expliqué (v. *infra*). Selon notre inventaire provisoire ces altérations globales des preuves concernent environ 65 des 465 Propositions.

¹⁸ V. la notice sur cette question dans le Vol. 4 de notre traduction commentée.

poursuivi, une certaine grandeur restera, laquelle sera plus petite que la plus petite grandeur proposée » (II).

La séquence (II) cumule un certain nombre de traits stylistiques qui, par comparaison avec d'autres, la rendent éminemment suspecte. Il s'agit :

- du rappel d'un fait acquis — explicité par le recours au verbe "démontrer" — non pas dans une étape de la Proposition elle-même, mais antérieurement. Nous appelons *helping phrase*¹⁹ de *rappel externe* ce type de séquence textuelle.
- d'un rappel livresque explicite (« dans le premier théorème du dixième Livre ») phénomène qui, à l'inverse du précédent, est très rare dans les *Éléments* (trois occurrences seulement).
- de ce que nous appelons une *citation non instanciée*, autrement dit, la reproduction (ici mot à mot) de l'énoncé universel de la Proposition, *i.e.* sans objet spécifié, et non pas une *application particulière*, ou *citation instanciée*, de ladite Proposition, comme l'est (I).
- enfin il s'agit d'une explication postposée de la forme « **q**, parce que **p** » (ἐδείχθη **γὰρ** ἐν ...). La "cause" (**p**) est énoncée **après** ce dont elle est censée être la cause (**q**), ce qui implique le *non-respect local* de l'ordre déductif habituel (« si **p** alors **q** »).

Explications postposées et citations non instanciées sont deux espèces fondamentales de ces *helping phrases* dont la particularité est de ne pas être logiquement indispensable à la validité de la preuve. Elles sont parfois utiles parce qu'une démonstration mathématique n'est pas seulement une chaîne logique; dès qu'on la lit, c'est aussi un exercice de mémoire. Sans doute ces *helping phrases* ne sont pas toutes inauthentiques. Mais notre exemple cumule plusieurs traits suspects; de surcroît la séquence (II) est absente de la version du manuscrit *b* et des versions médiévales arabes et arabo-latines; il s'agit très certainement d'une interpolation.

Pour être complet revenons sur le cas déjà mentionné²⁰, en quelque sorte intermédiaire, des démonstrations dites analogiques et potentielles introduites par les formules du genre :

« Alors pour les mêmes raisons aussi ... » (analogique),

« Semblablement nous démontrerons aussi que ... » (potentielle).

Elles relèvent de la problématique de l'abréviation; la première est équivalente à notre *mutatis mutandis* ; sa portée est limitée : elle permet de ne pas reproduire un argument complètement similaire. La deuxième est une fausse "prophétie" : elle est invoquée justement pour ne pas *démontrer* en détail ce qu'elle introduit. Assez souvent elle est utilisée pour se dispenser d'examiner certains cas de figure; elle a donc une portée un peu plus grande que la précédente, à ses vertus abrégatives s'ajoute une fonction logique.

Les trois genres d'altérations *globales* que nous avons mentionnés mettent en cause, lorsqu'on les cumule, près de la moitié des Définitions et plus d'un tiers des Propositions. Quant aux modifications *locales*, elles se comptent par centaines. On en trouve dans tous les Livres mais elles ne sont pas uniformément réparties : certaines portions du traité ont été particulièrement travaillées de cette manière, en particulier les Livres qui combinent plusieurs objets antérieurement étudiés

¹⁹ Que l'on nous pardonne cet anglicisme, en hommage à nos prédécesseurs, J. W. Engroff et W. R. Knorr, qui, les premiers, ont attiré l'attention sur ces tournures.

²⁰ V. *supra*, n. 15.

(par exemple les Livres VI et IX), et surtout ceux qui exposent les questions plus complexes (Livres X à XIII).

Ces (multiples) altérations locales des preuves sont la conséquence de ce que la rédaction d'une démonstration dans les *Éléments* consiste toujours à naviguer entre deux écueils :

(i) la lacune déductive;

(ii) la superfluité²¹.

Dans les cas extrêmes, le premier danger est bien plus important : si la lacune est bien réelle, et si ce qui la précède ne permet pas facilement de l'annuler, le résultat n'est tout simplement pas établi. Une des manières de réagir à de telles situations (ou à des situations perçues comme telles) a été l'insertion de ce que nous avons appelé ailleurs des lemmes de complétude déductive²². La superfluité est peut-être moins grave, encore qu'elle puisse suggérer au lecteur de faux liens de dépendance, de fausses "causalités", et donc entraîner des désastres pédagogiques.

La principale difficulté est que la véritable lacune déductive — dans le cadre de mathématiques qui sont rédigées dans la langue naturelle et dans un style qui n'est que très partiellement formalisé — n'est pas toujours facile à détecter : le lecteur peut être trahi par sa mémoire plutôt que par la logique du texte; il peut être abusé par certaines propriétés visuelles de la figure qui l'accompagne ou des assomptions intuitives de l'auteur (n'oublions pas qu'il s'agit de géométrie)... S'efforcer de combler systématiquement ces lacunes, réelles ou imaginaires, par la multiplication d'apartés et d'incises, se révélera au bout du compte contradictoire avec l'exigence d'élégance et la concision requises dans la rédaction des preuves. Malgré cela, au fil du temps, la recherche de ces lacunes s'est poursuivie, en obéissant à des critères certes historiquement variables, mais produisant globalement un évident effet d'accumulation. L'utilisation du traité a été l'occasion de développer l'apprentissage de la reconnaissance des exigences déductives.

Pour conclure cet inventaire nous dirons que la volonté de faire disparaître les lacunes déductives a été l'une des trois motivations fondamentales dans la grande majorité des interventions éditoriales volontaires sur le texte des *Éléments*. Nous en avons déjà évoqué une autre, qui procède du même esprit, à savoir le désir de perfectionner la structure déductive, par le biais des changements d'ordre ou le recours à des substitutions de preuves. Il y a enfin le souci d'éclaircir la terminologie du traité. Le problème concerne alors davantage les Définitions que les Propositions, mais des explications complémentaires ont parfois été insérées sous l'intitulé "lemme"²³. Des questions de cet ordre se sont posées, à cause de la longue carrière littéraire du traité, de choix terminologiques parfois idiosyncrasiques de la part d'Euclide (en particulier dans les Livres V et X) et de l'évolution de la langue mathématique grecque, même si, dans l'ensemble, celle-ci a été remarquablement stable.

²¹ Cf. Proclus, in *Eucl.* I, p. 69, l. 27—p. 70, l. 1 : « ἢ καὶ τὸ τυχὸν προσθεῖς ἢ ἀφελὼν οὐκ ἐπιστήμης λαυθάνεις ἀποπεσὼν καὶ εἰς τὸ ἐναντίον ψεῦδος καὶ τὴν ἄγνοιαν ὑπενεχθεῖς; » (D'ailleurs ne sait-on pas qu'en leur ajoutant ou en leur retranchant quelque chose on s'éloigne de la science et qu'on est enclin à une erreur contradictoire et à l'ignorance, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1948, p. 63).

²² V. notre traduction des *Éléments*, vol. 3, pp. 389-391.

²³ Par exemple les Lemmes X. 13/14, X. 18/19, l'ajout à X. 23 Por.

IV. *L'influence de la littérature exégétique et les modalités de composition des manuscrits de la tradition directe*

Il nous faut revenir sur l'origine de certaines catégories de divergences globales que nous venons d'énumérer, question qui éclaire la manière dont ont été composés les manuscrits euclidiens issus de la translittération (passage de l'écriture majuscule à la minuscule) des IX^e-X^e siècles . Il s'agit de l'ajout de cas de figures et de la production de démonstrations alternatives, deux espèces qui semblent devoir être rattachées au travail d'exégèse. Certes il se peut, dans quelques rares cas, qu'une démonstration *alternative* ait été le résultat de l'usage pédagogique de nos manuscrits, une sorte d'exercice, par un simple utilisateur testant ses connaissances, inséré dans les *marginalia*; cette démonstration (ajout manifeste par sa position) s'est trouvée insérée dans le corps principal du texte à une étape ultérieure de la transmission. On pourrait aussi croire qu'Euclide lui-même avait fourni différentes démonstrations pour la même Proposition : on connaît — à des époques postérieures — des spécialistes de ce genre d'activité mathématique, mais cette hypothèse est la moins vraisemblable. Elle paraît peu compatible avec le principe d'économie qui guide l'auteur des *Éléments*. Qui plus est, dans bon nombre de cas, il y a des raisons philologiques et codicologiques pour mettre en doute leur authenticité.

Au demeurant nous avons la chance de disposer du précieux témoignage d'Eutocius d'Ascalon (VI^e siècle), lui-même rééditeur et commentateur des Livres I-IV des *Coniques* d'Apollonius. Son témoignage est à peu près unique en ce qui concerne les modalités de réédition et la finalité du commentaire des textes mathématiques²⁴. Ainsi n'avons-nous rien de comparable de la part de Théon d'Alexandrie sur la manière dont il a réédité les textes euclidiens.

Eutocius dispose de plusieurs éditions divergentes quant aux preuves, en particulier à cause de différents cas de figures et de variantes de démonstrations. Il rapporte ces multiples états du texte entre lesquels il doit choisir au fait qu'Apollonius lui-même avait fait circuler deux versions au moins de son traité²⁵ et, dans le cas particulier du Livre III, à ce que les Anciens se sont passionnés pour ce genre de questions et ont produit une abondante littérature exégétique qui a interféré avec le texte²⁶. Dans son édition, Eutocius ne conservera qu'une seule preuve — la plus "sûre" — il éliminera parfois le traitement des cas de figures, mais il explique que le matériel ainsi rejeté ne sera pas complètement éliminé et sera préservé par le commentaire — Eutocius parle souvent des scholies, suggérant un commentaire inscrit dans les marges du texte principal — afin que le lecteur puisse juger des choix de l'éditeur²⁷.

²⁴ Nous utilisons ici les remarques de M. Decorps-Foulquier, dans sa Thèse, *Les Coniques d'Apollonius de Perge*, Lille, 1994, Vol. 1, Deuxième partie, Chapitre III, Sections B-E, pp. 100-131. V. aussi son article « L'édition d'Eutocius d'Ascalon des *Coniques* d'Apollonius de Perge : un exemple du rôle des écoles de l'Antiquité tardive dans la transmission des textes scientifiques grecs » dans *Perspectives arabes et médiévales sur la tradition scientifique et philosophique grecque*, A. Hasnawi, A. Elamrani-Jamal et M. Aouad (eds). Paris-Louvain, 1997, pp. 49-60.

²⁵ V. en particulier sa lettre préface au *Commentaire* du Livre I, Ed. Heiberg, II, p. 176, l. 17-22. La première version n'était pas une publication "officielle" mais une mise à disposition pour un groupe circonscrit de géomètres, amis et disciples.

²⁶ V. la lettre préface au *Commentaire* du Livre III, Ed. Heiberg, II, p. 314, l. 1-11.

²⁷ V. son comm. à Apoll., *Con.*, III, 23, Ed. Heiberg, II, p. 336, l. 1-8.

Du témoignage de l'éditeur d'Apollonius, deux points essentiels sont à retenir :

- les variantes de démonstrations, correspondant à ce que nous avons appelé des démonstrations alternatives ou alternatives partielles, sont, dans un nombre assez important de cas, rapportées à des divergences entre copies différentes²⁸, suggérant donc que l'on a opéré par substitution de preuves et non par accumulation.
- le travail d'un éditeur ancien de textes mathématiques consiste à *sélectionner* au sein d'une tradition foisonnante et *non pas à compiler ou à mélanger*, mais il consiste aussi à *ne pas éliminer* : le commentaire et/ou les annotations marginales permettent la conservation du matériel non retenu. La démarche est assez comparable à celle des grands éditeurs alexandrins qui n'ont, semble-t-il, pas retrancher matériellement les vers d'Homère dont ils proposaient pourtant l'athétèse, mais ont choisi de les signaler grâce à un système de signes diacritiques.

Bien qu'Eutocius n'ait apparemment pas commenté les *Éléments*, qu'il n'appartienne ni au même milieu ni à la même période que les commentateurs d'Euclide connus de nous, il est quasiment certain que ceux-ci ont produit un travail du même ordre. Ainsi, bien qu'il soit limité au Livre I, le témoignage de Proclus ne laisse aucun doute quant à l'existence d'une (trop) abondante littérature technique discutant les cas de figures et les preuves alternatives dont il reproduit lui-même plusieurs exemples²⁹. Plus explicite encore est le témoignage que le commentateur arabe an-Nayrîzî nous livre sur les modifications éditoriales prônées par Héron d'Alexandrie, qui fut sinon un éditeur des *Éléments*, du moins le commentateur le plus ancien qui nous soit connu. Dans ce cas, l'influence sur l'histoire du texte est manifeste³⁰.

Nul doute donc qu'une bonne partie des preuves alternatives soit due à l'activité des générations de commentateurs et de professeurs. Pour rendre compte du fait que ces preuves ont pris place dans le texte, que des cas de figure supplémentaires ont été pris en considération, l'hypothèse la plus simple est que l'auteur d'une réédition, en désaccord avec la méthode de démonstration retenue par la version précédente du texte, ou désirant sanctionner certains jugements des commentateurs antérieurs, en ait fait le choix. Il a pu substituer une telle preuve alternative à la preuve antérieure; il a pu simplement l'ajouter, d'où la présence, dans le texte, d'une double preuve pour un seul résultat.

Mais selon Eutocius le travail de l'éditeur concerne plutôt la *sélection* du matériel accumulé par la tradition du texte que sa *compilation*. C'est aussi ce que suggèrent les versions médiévales dans lesquelles nous trouvons des preuves solitaires correspondant — selon la version — à l'une ou

²⁸ V. l'inventaire présenté dans Decorps-Foulquier, *op. cit.*, 1994, pp. 115-120, partiellement repris (précisément pour la catégorie que nous venons de mentionner) dans Decorps-Foulquier, *op. cit.*, 1997, pp. 55-57.

²⁹ V. *Pr. in Eucl. I*, Ed. Friedlein, p. 84, l. 8-12; p. 200, l. 11-18; p. 432, l. 15-19. V. la trad. fr. de Ver Eecke, resp. p. 75; p. 178; p. 367. Malgré ses critiques Proclus expose de nombreux cas de figures additionnels (dans les Prop. I. 2, 3, 6, 11, 12, 18, 24, 30, 35, 36, 38, 39, 41, 43) et insère une vingtaine de démonstrations alternatives dont il compare généralement les mérites aux preuves euclidiennes.

³⁰ V. par ex. le cas de la preuve *aliter* à III. 10 (*Anar.*, p. 120, l. 5—121, l. 2; cf. [Tummers, 1994], p. 97, l. 23—p. 98, l. 10) et l'ajout d'un cas de figure à III. 11 (*Anar.*, p. 121, l. 3-7; cf. [Tummers, 1994], p. 98, l. 11-14) qui conduira à l'adjonction (peut-être par Théon) d'une Prop. supplémentaire, notre actuelle Prop. III. 12.

l'autre des doubles preuves des manuscrits grecs³¹. La conclusion qui en découle, c'est qu'à l'inverse de ce que prônait Eutocius, les responsables de la translittération et de la réalisation des plus anciennes copies conservées des *Éléments* (mss **PB**) ont cherché une préservation du matériel, maximale quant à l'extension, sans nécessairement se soucier d'en distinguer explicitement les composantes. D'ailleurs, avec le manuscrit **B**, commencent les versions des *Éléments* en 15 Livres *consécutifs* (les treize d'Euclide, le quatorzième d'Hypsiclès et le quinzième anonyme), lesquelles, au niveau global cette fois, témoignent d'une même indifférence relative aux questions d'authenticité ou, du moins, leur subordination à l'utilité technico-mathématique.

Conclusion

Les considérations qui précèdent nous conduisent à préférer l'hypothèse d'une pluralité d'états du texte des *Éléments*, en circulation dès les premiers siècles de notre ère, aux schémas de transmission simples, fondamentalement binaires, proposés par Heiberg et Knorr. Sans douter de l'importance historique de la réédition de Théon, il n'est pas certain que nous puissions circonscrire ses interventions éditoriales d'une manière simple et univoque dans les manuscrits grecs conservés ou dans les traductions arabes et arabo-latines, même si celles-ci sont plus discriminantes que les manuscrits grecs conservés.

Enfin l'une des conséquences du souci concernant la complétude logique des preuves que nous avons souligné, a été, au moins à long terme, de disjoindre en quelque sorte énoncés et preuves des Propositions, parfois de leur attribuer une origine différente : on connaît la théorie de Pierre de la Ramée au XVI^e siècle, pour qui les énoncés des *Éléments* sont dus à Euclide (en fait sont pour la plupart repris par ce dernier à ses prédécesseurs), et la majorité des démonstrations à Théon d'Alexandrie. Dès le Moyen-Âge ont existé des versions ne contenant que les énoncés, sorte de *fascicules de résultats* pour utiliser une expression chère à Nicolas Bourbaki³². On peut se demander si de telles considérations n'avaient pas déjà été faites dans l'Antiquité tardive³³, avec d'évidents effets de "dislocation" du texte en parties : Définitions, énoncés, démonstrations dont, non seulement le statut logico-mathématique est différent — cela va de soi —, mais aussi le statut textuel, voire la paternité littéraire.

³¹ V. notre traduction des *Éléments*, vol. 3, pp. 391-392. La version de Gérard de Crémone — qui procède de la traduction arabe d'Ishâq Ibn Hunayn révisée par Thâbit Ibn Qurra — contient elle aussi un important matériel additionnel issu de différentes versions. Mais cette origine multiple et le caractère additionnel et non authentique de ces ajouts y sont très souvent explicités. Ce n'est pas le cas dans le texte des manuscrits grecs : les historiens modernes ont eux-mêmes à faire ce travail de distinction. L'un des intérêts de la tradition indirecte arabe et arabo-latine, quelles que soient les difficultés que soulève son utilisation, réside en ce que certaines versions ont vraisemblablement été réalisées sur des modèles grecs antérieurs à (ou indépendants de) l'opération de translittération (et donc à la contamination que nous lui associons).

³² Pseudonyme utilisé par un groupe de mathématiciens français qui, depuis 1939, publie ses propres *Éléments de mathématiques*, censés couvrir, à terme, la totalité du savoir mathématique. Plusieurs dizaines de volumes sont parus; à certains d'entre eux est annexé un fascicule de résultats contenant l'essentiel des définitions et des résultats, sans démonstration.

³³ A l'appui de cette hypothèse mentionnons le résultat de la comparaison des deux versions grecques du Livre XII qui nous sont parvenues. Alors que les divergences sont considérables dans les démonstrations, les énoncés des Propositions communes aux deux versions sont quasi identiques.