La Définition V. 8 des *Eléments* d'Euclide[1]

Bernard Vitrac, CNRS UPR 21

O. Introduction

Les Définitions qui ouvrent le Livre V des *Eléments* d'Euclide — certaines d'entre elles du moins — ont suscité une abondante littérature et ce dès l'époque médiévale, au moins; c'est par exemple le cas des Définitions V. 3, 4, 5, 7[2]. Je me propose ici un objet plus modeste, à savoir l'examen de trois lignes de textes, soit une vingtaine de mots que l'on peut repérer comme suit :

* Df. V. 8 : « Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν »[3].

* Df. V. 3bis : « Ἀναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ταυτότης »[4].

* Df. V. 7bis : « Ἀναλογία δὲ ἐστιν ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης »[5].

Dans la mesure où les deux derniers énoncés sont unanimement reconnus comme des interpolations, dans la mesure aussi où l'authenticité de la Définition V. 8 est fortement questionnée, on peut se demander s'il y a un intérêt quelconque à les prendre en considération. Dans les débats historiographiques récents concernant le Livre V — en particulier la nature et le statut des objets fondamentaux dudit Livre[6] — la Définition V. 8 joue un rôle assez faible. Seul Jean-Louis Gardies lui fait jouer un rôle particulier, considérant qu'elle exclut la réflexivité de l'identité des rapports (autrement dit des proportions du type A : B :: A : B, voire A : A :: A : A), exclusion qui ruine l'idée que l'"objet rapport", construit comme classe d'équivalence, se trouve dans le Livre V des *Eléments* [Gardies, 1988, p. 76, 83].

En examinant cette Définition problématique en liaison avec les deux gloses qui proposent une définition de la proportion (ἀναλογία), je mettrai l'accent ailleurs : j'essaierai d'éclairer le problème de la terminologie touchant la proportionnalité dans les *Eléments,* et de montrer le rôle que celle-ci a pu jouer dans la compréhension, parfois délicate, des importantes Définitions V. 3, 4, 5, 7.

[1] Conférence présentée au Symposium international Zeuthen-Heiberg de Copenhage (01-05/08/94). Je remercie Jesper Lützen et Christian Marinus Taisbak pour leur chaleureuse invitation, ainsi que tous les participants de cette très stimulante réunion.

[2] Je suis la numérotation de l'édition de [Heiberg-Stamatis, 1970]. Voir pp. 1-2.

[3] « Et une proportion en trois termes est la plus petite ». Dans le Ms ***V*** (selon le *conspectus siglorum* de Heiberg), on trouve la variante « Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν » (Et la proportion est entre trois termes au moins).

[4] « Et une proportion est l'identité des rapports ». Cette Définition se trouve dans les Mss. ***B, p*** et chez Campanus. Elle a été copiée également en marge d'autres codices (***P, V, F***), par d'autres mains (v. éd. Heiberg-Stamatis, 1970, p. 1).

[5] « Et une proportion est la similitude des rapports ». Cette Définition se trouve dans les Mss. ***F, p, V.*** Elle est omise dans les Mss ***P, B***.

[6] Je pense au débat soulevé par F. Beckmann (1967), repris et développé par W. Knorr (1978, en particulier, pp. 219-220), D. Fowler (1979, en particulier p. 808), I. Mueller (1981) et récemment, par J. L. Gardies (1988). Fondamentalement, ce qui est en cause dans ce débat c'est la lecture rétrospective qui assimile trop facilement l'entreprise du Livre V et la construction des réels par R. Dedekind et que l'on trouve exposée par exemple dans Heath (1956, vol. II, p. 124-126). V. aussi [*Id.,* p. 187). J'ai traité de cette question de manière détaillée dans ma thèse. Voir [Vitrac, 1993], en particulier les pp. 56-64, 227-247, 271-272, 554-568.

1. Rapport (λόγος) *versus* proportion (ἀναλογία) : différents niveaux de langage.

Même en prenant pour point de départ la terminologie, il n'est pas inutile de reprendre les catégories dégagées par les débats récents que j'évoquai ci-dessus. Beckmann tout particulièrement a souligné la distinction qu'il fallait faire entre les termes qui désignent des objets — par exemple dans le Livre V, les grandeurs — de ceux qui expriment des relations. Sous cette rubrique on peut ranger les notions de rapport (λόγος), de proportion (ἀναλογία), et de proportionnalité (ἀνάλογον). Toujours en recourant à des concepts issus pour l'essentiel de la logique élémentaire, on a également proposé de distinguer entre une théorie des rapports, compris comme des relations (entre grandeurs) à deux places, et une théorie des proportions, entendues comme relations à 4 places. Un autre aspect me paraît important : celui du "niveau de discours" mathématique dans lequel ces notions interviennent. Pour préciser ce que j'entends par là, une sommaire comparaison avec ce que l'on fait dans une approche moderne élémentaire n'est peut-être pas inutile.

a — Dans celle-ci la notion de rapport est dérivée de celle de proportion. On suppose en effet un domaine d'objets G sur lequel on peut définir une relation tétraédrique P (a, b, c, d), autrement dit on peut répondre à la question «(a, b, c, d) satisfont-ils à la condition P ?». Bien entendu on suppose qu'il existe un moyen effectif de le vérifier. Par exemple si (a, b, c, d) sont des nombres entiers on peut définir P en posant P (a, b, c, d) $\Leftrightarrow$ a.d = b.c; on dira alors que (a, b, c, d) sont en proportion.

On peut ensuite raisonner sur les couples d'objets (a, b) et vérifier que P permet de définir une relation d'équivalence sur G x G par (a, b) $\approx$ (c, d) si et seulement si P (a, b, c, d). Les classes d'équivalence pour cette relation seront appelées "rapports"; dans notre exemple on dit aussi "nombres rationnels" et on notera a/b la classe du couple (a, b). C'est ce statut dérivé de la notion moderne de rapport qui fait dire à Beckmann que nulle part dans le Livre V on ne passe pas aux classes d'équivalence et qu'on se limite aux relations tétraédriques entre grandeurs.

b — L'analyse générale de Nicomaque[7]

Nicomaque[8] propose une approche différente mais qui lui permet également d'envisager les relations telles que les rapports et les proportions d'une manière abstraite : un rapport (λόγος) est une relation entre deux termes δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις) et la proportion (ἀναλογία) est une "unification" (σύλληψις) de deux ou plusieurs de ces rapports. Ce que l'on peut traduire symboliquement comme suit : un rapport entre deux termes (A, B) se représente par R (A, B) : le rapport qui existe entre A et B ne se limite pas à ce que nous désignons par A : B, mais peut être par exemple leur différence A - B ou autre chose. Une "analogie" désigne une relation d'ordre supérieur

[7] Je reprends ici un de mes commentaires dans [Vitrac, 1994], pp. 58-59.

[8] V. *Introduction arithmétique,* L. II, Ch. XXI, éd. Hoche, p. 120, l. 2-7 : « ἔστιν οὖν ἀναλογία κυρίως δυεῖν ἢ πλειόνων λόγων σύλληψις ἐς τὸ αὐτό, κοινότερον δὲ δυεῖν ἢ πλεόνων σχέσεων, κἂν μὴ λόγῳ τῷ αὐτῷ ὑποτάσσωνται, διαφορᾷ δὲ ἤ τινι ἑτέρῳ. λόγος μὲν οὖν ἐστι δύο ὅρων πρὸς ἀλλήλους σχέσις, σύνθεσις δὲ τῶν τοιούτων ἡ ἀναλογία, ὥστε ἐν ἐλαχίστοις ὅροις τρισὶν αὕτη συμμέμικται .... ».

A ($R_1(A_1, B_1)$, $R_2(A_2, B_2)$,…), en général une identité de rapports. Pour avoir une "analogie" non triviale il faut donc au minimum trois termes $A(R_1(A_1, A_2), R_2(A_2, A_3))$ et on dit alors que l'"analogie" est continue. Si $B_1 \neq A_2$, on dit qu'elle est disjointe.

Nicomaque propose deux exemples : la progression (1, 2, 4) qui est une proportion selon la qualité (être le double de)[9] - correspondant à une progression géométrique - et la progression (1, 2, 3), "analogie" selon la quotité[10] - correspondant à une progression arithmétique. Dans cette présentation le sens de "rapport" et de "proportion" est encore plus large que dans celle des *Eléments*. Les auteurs tardifs remarquent d'ailleurs que "proportion" est utilisé dans deux sens :

- un sens "large" d'analogie de relations;
- un sens étroit d'analogie de rapports, le sens "géométrique" (et euclidien; ce que nous appelons "proportionnalité").

Seul, précisent-ils, ce dernier usage est correct. Contrairement à l'approche moderne que nous avons présentée ci-dessus, c'est la notion de proportion qui présuppose ici celle de rapport. Quant à la portée très générale que lui donne Nicomaque, s'agit-il d'une généralisation philosophique tardive et propre aux commentateurs ? Rien n'est moins sûr : des textes plus anciens témoignent d'un usage très souple de l'expression "ἀνὰ λόγον" et du substantif "ἀναλογία". Aristote par exemple mentionne la proportion arithmétique (ἡ ἀριθμητική ἀναλογία)[11].

2. La terminologie de la théorie des médiétés[12]

Surtout le sens large d'"analogies" de relations est attesté et discuté à propos de la théorie des médiétés dont il me faut dire un mot. La théorie ancienne des médiétés nous est connue grâce à trois exposés tardifs dus à Nicomaque (L. II, XXI-XXIX, éd. Hoche, pp. 119, l. 19 - 147, l. 2), Théon de Smyrne (*Expositio,* Part. II, L-LII, Ed. Hiller, pp. 106, l. 12 - 111, l. 14 et LIV-LXI, pp. 113, l. 9 - 119, l. 16) et Pappus (*Coll.,* III, XI-XXIII, Ed. Hultsch, pp. 68, l. 17 - 104, l. 13). Le substantif "médiété" ("μεσότης") désigne soit une suite de trois termes (A, B, C), soit le terme médian de cette progression, B. On peut supposer $A > B > C$. Pour ce terme médian, les auteurs anciens utilisent le plus souvent "μέση", adjectif substantivé - que l'on peut traduire par moyenne. Mais les médiétés sont aussi souvent appelées "proportions" (ἀναλογίαι).

Dans son exposé, Nicomaque utilise indifféremment "proportion" pour "médiété" quoiqu'il remarque, en introduisant la médiété géométrique qu'elle seule est appelée proportion au sens propre, puisqu'il y a bien identité de rapports entre les termes (L. II, XXII, éd. Hoche, pp. 122, l. 11; 123, l. 20-22; XXIV, p. 126, l. 12-15.). Théon, citant Adraste, insiste sur la différence entre les

[9] Selon le même rapport (κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον) ou selon la qualité (κατὰ ποιότητα). *Op. cit.,* pp. 120, l. 9-10; 121, l. 3-4.

[10] Selon le même intervalle (κατὰ τὸ αὐτὸ διάστημα) ou selon la quantité (κατὰ ποσότητα). *Op. cit.,* pp. 120, l. 9; p. 121, l. 7-8.

[11] V. *Éthique à Nicomaque,* 1132 a30.

[12] Je reprends ici la première partie de la Notice que j'ai consacrée à la théorie des médiétés dans [Vitrac, 1994], pp. 497-508.

deux notions et signale l'abus de langage commis par certains (§ L, éd. Hiller, p. 106, l. 16-20). Toutefois, lui-même, lorsqu'il a cité auparavant le musicien Thrasylle (§ XXXIII, éd. Hiller, p. 85, l. 8-9), a utilisé "proportion" pour désigner les trois médiétés fondamentales et n'a donc pas recherché l'exactitude terminologique. Pappus signale que ce qui est proportion est médiété mais que la réciproque est fausse (éd. Hultsch, p. 70. 27-28)[13].

Enfin il faut citer le plus ancien témoignage conservé à propos des médiétés, rapporté à Archytas, et qui se rattache à la théorie pythagoricienne de la musique[14]. Ce passage est cité par Porphyre dans le contexte d'une discussion terminologique pour illustrer l'emploi ancien du mot "διάστημα" (intervalle) dans un sens équivalent à rapport ("λόγος"). Théon, citant le *Platonicos* d'Eratosthène, insiste sur la différence entre les deux notions : un même intervalle (musical) peut être associé à deux rapports, inverses l'un de l'autre (éd. Hiller, p. 81, l. 17 - 82, l. 5)[15]. Cela suppose une certaine confusion initiale des deux notions mais l'on remarquera que le témoignage d'Archytas traite de musique, donc d'intervalles ! Surtout il faut noter qu'Archytas utilise ἀνὰ λόγον pour décrire la médiété arithmétique (κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον) et désigne les trois médiétés fondamentales comme des ἀναλογίαι.

Il n'est donc pas certain que la terminologie était bien fixée dans la première moitié du IV^e siècle avant notre ère; peut-être n'était-elle simplement pas unifiée entre les différents domaines du quadrivium, par exemple entre la géométrie et la musique. Quoi qu'il en soit certains auteurs ultérieurs (Nicomaque, Théon de Smyrne, Porphyre, Jamblique) relèvent ce point; dans la mesure où ils semblent se référer à Eratosthène par l'intermédiaire du péripatéticien Adraste la discussion terminologique doit certainement remonter au III^e siècle avant notre ère, au moins. L'usage des termes ἀνάλογον et ἀναλογία y était très certainement questionné. L'analyse abstraite dont nous avons trouvé la formulation chez Nicomaque en est peut-être issue. Je crois aussi que cette discussion terminologique n'a pas été sans conséquences pour les *Eléments* eux-mêmes.

13 Encore faudrait-il préciser "proportion continue". Dans son exposé il réserve "proportion" à la médiété géométrique.

14 « Il y a trois moyennes (μέσαι) dans la musique : la première est l'arithmétique, la deuxième la géométrique, la troisième la sous-contraire, que l'on appelle harmonique (τρίτα δ' ὑπεναντία, ἃν καλέοντι ἁρμονικάν). [Il y a moyenne] arithmétique quand trois termes sont en proportion quant à leur excès (ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον) de la façon suivante : de ce dont le premier dépasse le deuxième, le deuxième dépasse le troisième. Et dans cette proportion (ἐν ταύτᾳ ‹τᾷ› ἀναλογίᾳ) il arrive que l'intervalle des termes les plus grands est plus petit, celui des plus petits [est] plus grand (τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον). [Il y a moyenne] géométrique quand [les trois termes] sont tels que le premier est relativement au deuxième comme le deuxième relativement au troisième (ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον). Dans ce cas l'intervalle produit par les plus grands [termes] est égal à [celui produit] par les plus petits (τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους). [Il y a moyenne] subcontraire, que nous appelons harmonique, quand ils sont tels que le premier dépasse le deuxième par une même partie de lui-même que la partie du troisième par laquelle le moyen dépasse le troisième (ὅκκα ἔωντι ‹τοῖοι· ᾧι› ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτωι ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει). Dans cette proportion (ἐν ταύτᾳ τᾷ ἀναλογίᾳ) il se produit que l'intervalle des plus grands termes est plus grand, et celui des plus petits, plus petit (τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον) ». Porphyre, *in Ptol. harm.*, 92 = Archytas, Fragment 2, DK 47 B2, [Diels & Kranz, 1985], t. I, pp. 435, l. 19 - 436, l. 13.

15 Pour notre part, nous distinguerions deux intervalles en précisant pour chacun d'eux s'il est ascendant ou descendant; l'intervalle serait associé à un "mouvement". Ici l'identité d'intervalle renvoie à une conception statique et spatiale de l'intervalle : l'écart entre deux sons; d'ailleurs Théon précise que l'unisson n'est pas un intervalle (éd. Hiller, 1878, p. 81, l. 9-10).

3. L'absence de définition de l'ἀναλογία dans les *Eléments*

a — Là où l'analyse moderne et celle de Nicomaque distingue trois "niveaux" de langage, les Définitions euclidiennes qui ouvrent le Livre V n'en suggère que deux :
- celui des objets, à savoir les grandeurs (la notion n'est d'ailleurs pas définie !)
- celui des relations, en l'occurrence des rapports (Df. V. 3, 4). Et de ceux-ci on peut dire s'ils sont identiques ou non (Df. V. 5-7).

Le rapport comme objet n'apparaît pas et sur ce point on peut être d'accord avec l'analyse de Beckmann. Mais il apparaît comme relation. La proportionnalité se dit soit comme identité de relations (Df. V. 5), soit elle s'énonce directement par "rabattement" dans le domaine des objets, marqué par le terme ἀνάλογον (Df. V. 6).

Il me paraît important de remarquer que si les grandeurs dans un même rapport ont été qualifiées (Df. V. 6), la nouvelle relation ainsi obtenue, la proportion ou "analogie" n'est pas elle-même définie. Le niveau des "relations de relations", celui où Nicomaque introduit la proportion n'est pas pris en considération. Deux choses restent à examiner : peut-on expliquer cette absence de thématisation de l'ἀναλογία ? Quelles en ont été les conséquences ?

b — En fait on doit d'abord remarquer que cette absence de thématisation n'est pas totale. Le terme intervient en effet dans les *Eléments,* et ce dès le Livre V, dans les Définitions 8, 10 et 18. Mais ce dernier cas est un peu différent : la Df. V. 18 introduit la «proportion perturbée» qui ne coïncide pas avec la proportionnalité même si cette dernière intervient dans sa Définition. Cet usage est trop particulier pour être pris en compte. A l'inverse on peut dire que, puisqu'Euclide n'a pas introduit le terme général d'ἀναλογία, il pouvait en disposer pour définir une relation plus complexe, ἡ τεταραγμένη ἀναλογία.

D'ailleurs la discussion terminologique que j'ai mentionnée à propos de la théorie des médiétés et l'usage assez "souple" du terme "ἀναλογία" que l'on peut repérer dans cette théorie ont peut-être dissuadé Euclide de le retenir parmi les termes à définir.

c — Dans le même ordre d'idées, un autre aspect peut être pris en considération pour enrichir notre dossier : dans son commentaire à l'*Introduction arithmétique* de Nicomaque, Jamblique indique que la proportion (ἡ ἀναλογία) et le proportionnel (τὸ ἀνάλογον) s'opposent, la première désignant normalement la proportion continue, le second s'appliquant aussi à la proportion discontinue en quatre termes[16].

[16] « ... διὸ καὶ δοκεῖ τὸ ἀνάλογον τῆς ἀναλογίας διαφέρειν· τὸ μὲν γὰρ ἀνάλογον καὶ ἐν διεζευγμένοις ὅροις γίνεται, ἡ δὲ ἀναλογία κυρίως ἐπὶ τῶν κοινὸν ἐχόντων ὅρον τάττεται » (… et c'est pourquoi on doit penser que la proportionnalité diffère de la proportion; car d'une part la proportionnalité se produit aussi dans des termes disjoints, tandis que "proportion", d'autre part, s'emploie proprement pour les termes dont un est commun). Jamblique, éd. Pistelli, 1894, pp. 99, l. 26 - 100, l. 3.

Si cette opposition est fondée, elle pourrait justifier l'absence d'ἀναλογία dans les *Eléments,* lesquels se contenteraient d'introduire ce qui, dans cette perspective, constitue le terme général. D'ailleurs, les notions de proportions continue et disjointe[17] ne sont pas définies en toute généralité dans les *Eléments.* Au Livre VIII où la proportion continue pourrait être d'emploi fréquent, Euclide préfère utiliser l'expression "nombres continûment en proportion" (ἑξῆς ἀνάλογον) comme une relation entre nombres - donc entre objets - facile à comprendre : l'adjectif "continûment" est donc clair - plutôt que d'introduire un nouvel objet d'ordre supérieur, la proportion. Là encore il préfère énoncer la relation par rabattement sur le domaine d'objets (les nombres) plutôt que d'introduire un niveau de langage d'"ordre 2".

Le problème est que le témoignage de Jamblique est quelque peu isolé. Ainsi, Nicomaque lui-même, que commente Jamblique, n'est pas à l'origine de cette opinion. Il utilise le terme "proportion" pour les proportions continues ou non, et pour une multitude quelconque de termes. Cela dit, on peut toutefois examiner la "pratique" des géomètres classiques. Ceux-ci rapprochent en effet les deux termes dans des expressions comme :

« … soit A, B, C, D quatre grandeurs en proportion (ἀνάλογον) selon une proportion continue (ἐν τῇ συνεχεῖ ἀναλογίᾳ) » (Archimède, *Equilibres-Plans, II,* Prop. 9, éd. Heiberg, vol. II, p. 190, l. 24),

ou « prendre deux moyennes proportionnelles en proportion continue (δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ) … »[18].

Dans les *Eléments* le seul usage comparable du substantif "ἀναλογία" se trouve dans la Proposition IX. 36 : il s'agit de nombres continûment en proportion dans la proportion double (« … ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ ») (éd. Heiberg-Stamatis, 1970, II, p. 225, l. 10-11) ! Une terminologie similaire est utilisée par Archimède dans son exposé du système d'écriture pour les grands nombres par le biais des "octades" (« … ἀπὸ μονάδος ἀνάλογον ἐν τᾷ τῶν δεκαπλασίων ὅρων αναλογίας ») (Archimède, *Arénaire,* III, éd. Heiberg, II, p. 244, l. 22-23

[17] "συνεχής" et "διηρημένη" chez Arstt (*Eth. Nic.,* V, 6, 1130 a 32-33) et Théon de Smyrne (*supra*); "συννημένη" et "διεζευγμένη" chez Nicomaque (éd. Hoche, 1866, p. 121, l. 1-15).

[18] Il s'agit d'une des formulations du problème dit des deux moyennes auquel est réduit le célèbre problème de la duplication du cube. Nous connaissons plusieurs solutions anciennes, conservées par deux auteurs : Pappus et Eutocius. On peut distinguer trois ou quatre formulations du problème des deux moyennes :

- celle que nous citons et qui apparaît dans la présentation générale d'Eutocius (Archimède, éd. Heiberg, 1972, vol. III, p. 54, l. 29-30), dans la méthode qu'il attribue à Platon (*Ibid.,* III, p. 56, l. 14-15), dans la préface de Pappus à son exposé du L. III de la *Collectio* (Pappus, éd. Hultsch, 1876, p. 30, l. 25); dans la solution de Sporus (Archimède, éd. Heiberg, 1972, vol. III, p. 76, l. 3-4), dans une démonstration alternative de la solution de Pappus (Pappus, éd. Hultsch, 1876, p. 172, l. 20.) et surtout dans l'exposé rapporté à Ératosthène (*Ibid.*, pp. 54, l. 28 et 58, l. 16; Archimède, éd. Heiberg, 1972, vol. III, pp. 88, l. 20-21, 90, l. 30-31, 94, l. 15-16).
- une formulation légèrement différente : « δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν κατὰ τὸ συνεχές » que l'on ne trouve que dans la solution de Nicomède, tant dans le compte-rendu de Pappus (Pappus, éd. Hultsch, 1876, III, 58, l. 24), que dans celui d'Eutocius (Archimède, éd. Heiberg, 1972, vol.III, p. 104, l. 7-8).
- une formule plus sobre : « les … ἑξῆς ἀνάλογον εἰσιν », que l'on trouve dans les solutions attribuées aux auteurs les plus anciens, Archytas (*Ibid.,* p. 86, l. 29-33) et Ménechme (*Ibid.,* p. 80, l. 23) qui coïncide avec la manière euclidienne d'exprimer la proportionnalité continue dans les Livres arithmétiques.
- Enfin des formes abrégées : « δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν », ou « δύο μέσας » que l'on trouve quasiment dans toutes les solutions.

et *passim*). Dans les deux occurrences il s'agit de proportion à la fois continue et de rapport déterminé : 2 : 1 dans le cas euclidien; 10 : 1 dans le cas archimédien.

Ce sont certainement ces usages particuliers qui ont favorisé le rapprochement entre le substantif "proportion" et le qualificatif de "continue" indiqué par Jamblique. Ainsi, après avoir défini la proportion comme la similitude ou l'identité de plusieurs rapports, Théon développe lui aussi un commentaire qui suggère d'abord une proportion continue, mais introduit ensuite la distinction "proportion continue / proportion disjointe" (§ XXXI, éd. Hiller, p. 82, l. 6-12)[19].

Même s'il n'y a rien de très assuré, il me semble que les discussions terminologiques issues de la théorie des médiétés, autant que les usages mathématiques concernant l'opposition "proportion disjointe / proportion continue pouvaient dissuader Euclide de définir l'ἀναλογία. En fait je crois même que l'usage arithmétique que je viens de relever dans IX. 36 est pour ainsi dire le seul des *Eléments* — si l'on met de côté l'expression "proportion perturbée" de la Définition V. 18 et des Propositions V. 21-23. Autrement dit je pense que la Définition V. 8 et la clause finale de la Définition V. 10 sont des interpolations.

d — Très clairement l'absence d'une Définition de l'ἀναλογία a suscité certains ajouts durant la transmission du texte :

— Dans les manuscrits ***B, p*** ; dans la marge des manuscrits ***P, V, F*** par une autre main, après la Définition 3, on a inséré :

« ’Αναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ταυτότης »

(Et une proportion est l'identité des rapports).

— Dans les manuscrits ***F, p, V,*** après la Définition V. 7, s'intercale :

« ’Αναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ὁμοιότης »

(Et une proportion est la similitude des rapports).

Ces insertions ne sont pas dues au travail de Théon d'Alexandrie puisque les manuscrits qui procèdent de son édition divergent à cet égard. Il est cependant vraisemblable que la source, au moins la "source lointaine" de ces ajouts, soit identifiable : il pourrait s'agir d'une série de remarques qu'Aristote avait consacré à la notion de proportion dans l'*Ethique à Nicomaque*.

4. Le témoignage aristotélicien

a — Dans le Livre V de son traité Aristote (*Eth. Nic.,* V, 1130 b30 - 1133 b28) entreprend l'analyse de la justice (comme respect de l'égalité) à l'aide de notions mathématiques certainement dérivées de la théorie des médiétés et de ce que l'on appelle traditionnellement la théorie (politique) des deux égalités[20]. Pour simplifier disons qu'il distingue deux formes de justice : distributive et

[19] Voir le texte ci-dessous, § 5, b.
[20] Sur la théorie politique des deux égalités, v. [Harvey, 1965], pp.101-146, et mon travail Egalité politique, Egalité mathématique, à paraître.

réparatrice, qu'il rapporte à ce qu'il appelle les proportions géométrique et arithmétique. Au cours de cette analyse le Stagirite énonce un certain nombres de résultats de théories des proportions ainsi que certaines généralités sur la notion elle-même :

ἔστιν ἄρα τὸ δίκαιον ἀνάλογόν τι.
τὸ γὰρ ἀνάλογον οὐ μόνον ἐστὶ μοναδικοῦ ἀριθμοῦ ἴδιον, ἀλλ' ὅλως ἀριθμοῦ·
ἡ γὰρ ἀναλογία ἰσότης ἐστὶ λόγων, καὶ ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις.

ἡ μὲν οὖν διῃρημένη ὅτι ἐν τέτταρσι, δῆλον.

ἀλλὰ καὶ ἡ συνεχής·
τῷ γὰρ ἑνὶ ὡς δυσὶ χρῆται καὶ δὶς λέγει, οἷον ὡς ἡ τοῦ α πρὸς τὴν τοῦ β, οὕτως ἡ τοῦ β πρὸς τὴν τοῦ γ.
δὶς οὖν ἡ τοῦ β εἴρηται· ὥστ' ἐὰν ἡ τοῦ β τεθῇ δίς, τέτταρα ἔσται τὰ ἀνάλογα.

Donc le juste est une certaine proportionnalité. Car la proportionnalité n'est pas propre seulement au nombre monadique, mais au nombre, en général.
En effet la proportion est une égalité de rapports et en quatre [termes] au moins.

Et que la [proportion] disjointe soit effectivement en quatre [termes], c'est évident.
Mais aussi la [proportion] continue;
car on utilise l'un [des termes] comme deux et il est prononcé deux fois, par exemple comme est la [ligne ?] A relativement à B, ainsi est B relativement à C. Effectivement B est dite deux fois; de sorte que si B est posée deux fois, les [termes] analogues seront quatre.

(*Ibid,* 1131 a29 - 1131 b2).

La première partie de la remarque soulignée par moi évoque naturellement les deux ajouts que nous avons mentionnés à une petite différence près, l'utilisation de l'égalité : ἰσότης. Cet usage de l'égalité plutôt que de l'identité ou de la similitude (v. *supra*) n'est pas canonique; il ne faut sans doute pas en majorer la signification. C'est vraisemblablement le contexte général de la discussion : la distinction de deux justices mises en parallèle avec les deux sortes d'"égalité politique", qui en est la cause. Le terme ἰσότης n'est guère utilisé en mathématiques (Vitrac, 1990, pp. 503-505) et il serait donc étonnant qu'Aristote s'inspire ici d'une Définition mathématique trouvée dans un traité contemporain. Comme il le dit explicitement son analyse n'est pas seulement arithmétique ou mathématique mais générale.

b — Quant à la deuxième partie de la remarque il est difficile de ne pas la rapprocher de la Définition V. 8. Le rapprochement a d'ailleurs certainement été fait dans l'Antiquité puisque le manuscrit ***V*** porte "ἐλαχίστοις" et non "ἐλαχίστη" comme ***P*** que suit ici Heiberg. Le rapprochement est également fait par Heath (1956, vol. II, p. 131). Celui-ci considère que la remarque d'Aristote confirme justement l'authenticité de la Définition V. 8, remise en cause par Hankel. L'argument me paraît tout à fait réversible; à la suite de Hankel, on peut en effet remarquer que :
— cet énoncé n'a pas la forme d'une Définition (que définit-il ?) mais d'une glose.
— outre la divergence du manuscrit ***V***, la présence du terme "ὅρος", utilisé avec un autre sens dans le premier Livre des *Eléments* [21], renforce les doutes qu'on peut avoir sur cette authenticité.

[21] Au L. I, Df. 13 le terme "ὅρος" désigne la frontière d'une figure. V. [Vitrac, 1990), p. 161.

5. Les versions parallèles post-euclidiennes

Pour ma part je voudrai ajouter que la prise en considération des multiples parallélismes que l'on trouve chez les auteurs des premiers siècles de notre ère permet d'aller dans le même sens. On peut en faire l'inventaire suivant :

— deux extraits des *Definitiones* [n° 127 (éd. Heiberg, 1976, p. 82, l. 19-23) et 124. 3 (*Ibid.,* p. 80, l. 4-8)] attribuées à Héron d'Alexandrie.

— deux extraits de l'*Expositio* de Théon de Smyrne (§§ XIX-XXI (éd. Hiller, 1878, pp. 73, l. 16-17, 74, l. 8-9, l. 12-13) et § XXXI(*Ibid.,* p. 82, l. 6-12)).

— L'exposé de Nicomaque de Gérase (*Introduction arithmétique,* L. II, Ch. XXI) dont j'ai déjà parlé au début et sur lequel il est inutile de revenir.

— Le commentaire de Jamblique à Nicomaque dont il a été aussi question à propos de l'opposition "continue" // "disjointe" (éd. Pistelli, 1894, p. 98, l. 14-17; pp. 99, l. 19 - 100, l. 3).

a — Héron

Λόγος μὲν εἴρηται, ὅτι β ὁμογενῶν ἐστιν ἡ πρὸς ἄλληλα σχέσις. ἐπὶ δὲ τῶν μεγεθῶν λέξομεν ἰδίως, ὅτι λόγος ἐστὶν δύο μεγεθῶν ὁμοιογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις, ὡς εἶναι καὶ ἐπ’ αὐτῶν ἀναλογίαν τὴν τοιούτων λόγων ὁμοιότητα.	1. Il est dit qu'un rapport est la relation de 2 [choses] homogènes, l'une relativement à l'autre. Et pour les grandeurs nous dirons plus particulièrement qu'un rapport est la relation selon la taille [qu'il y a] entre deux grandeurs du même genre, de sorte aussi qu'à leur propos la proportion est la similitude de ces rapports
’Αναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν, ἐνταῦθα ὅρων λαμβανομένων ἤτοι τῶν μεγεθῶν ἢ τῶν ἐπικειμένων αὐτοῖς ἀριθμῶν· ὡς γὰρ κύκλου ὅρος ἐστὶν ἡ περιφέρεια καὶ τριγώνων αἱ πλευραί, οὕτω τοῦ τοῦ θ πρὸς τὸν ς λόγου ὅροι εἰσὶν οἱ αὐτοὶ ἀριθμοί.	2. Et une proportion en trois termes est la plus petite, dans laquelle les termes pris sont soit les grandeurs, soit les nombres placées au-dessus d'elles; de même en effet que du cercle, la circonférence est le "terme", et des triangles les côtés, ainsi, du rapport de 9 relativement à 6, ces mêmes nombres sont [les] termes.

Evidemment l'authenticité des *Definitiones* est encore plus problématique que celle de la Df. V. 8 mais il faut rappeler qu'Héron avait commenté Euclide. Nous faisons l'hypothèse que ces *Definitiones* dérivent des remarques que les compilateurs pouvaient trouver dans ce commentaire. Pour appuyer cette hypothèse on remarquera que dans le premier extrait, Héron "commente" la Df. V. 3 en justifiant en particulier l'expression « ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις » par le fait que l'énoncé s'applique aux grandeurs. Intéressant aussi est l'addition sur la notion d'ἀναλογία en terme de « similitude de rapports » à rapprocher de l'ajout qui précède la Définition V. 8[22]. Dans le second extrait on remarquera aussi qu'après avoir cité la Df. V. 8, il a essayé de faire le lien d'une manière assez artificielle avec l'autre sens de "ὅρος" dans les *Eléments,* ce qui suggère une problématique de commentaire euclidien.

[22] A comparer au cas de an-Nairîzî sur lequel je reviens *infra*.

b — Théon de Smyrne

1. λόγος δέ ἐστιν ὁ κατ' ἀνάλογον δυοῖν ὅρων ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἀλλήλους [αὐτῶν] ποιὰ σχέσις ...	1. Et un rapport - celui selon la proportionnalité - entre deux termes homogènes est la relation telle ou telle de l'un relativement à l'autre …
ὅρους δὲ λέγομεν τὰ ὁμογενῆ ἢ ὁμοειδῆ λαμβανόμενα εἰς σύγκρισιν...	Et nous disons "termes" [pour] les choses de même genre ou de même espèce prises en comparaison …
ἀναλογία δέ ἐστι λόγων ἡ πρὸς ἀλλήλους ποιὰ σχέσις ..	Et une proportion, [entre] des rapports, est la relation telle ou telle de l'un relativement à l'autre …
2. ἀναλογία δ' ἐστὶ πλειόνων λόγων ὁμοιότης ἢ ταυτότης, τουτέστιν ἐν πλείοσιν ὅροις λόγων ὁμοιότης, ὅταν ὃν ἔχει λόγον ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, τοῦτον ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον ἢ ἄλλος τις πρὸς ἄλλον. λέγεται δὲ ἡ μὲν συνεχὴς ἀναλογία, ἡ δὲ διῃρημένη, συνεχὴς μὲν ἡ ἐν ἐλαχίστοις τρισὶν ὅροις, διῃρημένη δὲ ἡ ἐν ἐλαχίστοις τέσσαρσιν.	2. Et une proportion est une similitude ou une identité de plusieurs rapports, autrement dit une similitude de rapports en plusieurs termes, quand, ce rapport que le premier a relativement au deuxième, le deuxième [a] le même relativement au troisième ou un certain autre [terme] relativement à un autre. Et l'une est dite proportion continue, l'autre disjointe; la [proportion] continue est en trois termes au moins et la disjointe au moins en quatre.

Le cas de Théon de Smyrne est significatif car son *Expositio* dissimule peu son caractère compilatoire. Théon traite des rapports et proportions à deux reprises; dans la première il cite le péripatéticien Adraste; dans la seconde il se réfère apparemment à Ératosthène, plus précisément au *Platonicos* de ce dernier;

Pour le premier extrait remarquons simplement que l'ajout "πρὸς ἀλλήλους" des manuscrits théonins à la Définition V. 3 se trouve ici[23] et qu'une Définition de la proportion a été calquée sur celle du rapport; ce qui confirme, s'il en était besoin, l'antériorité logique de celui-ci sur celle-là, du point de vue des Anciens.

Le second extrait est bien intéressant puisqu'il présente une autre version pour la proportion qui coordonne précisément les deux possibilités : "ταυτότης" ou " ὁμοιότης" que nous trouvons dans les ajouts des Manuscrits des *Eléments,* soit après la Df. V. 3, soit avant la Df. V. 8. A la suite il introduit la distinction proportion continue / proportion discontinue d'où une remarque comparable à celle d'Aristote et que nous rapprochons de la Définition V. 8.

c — Jamblique

Ἡ τοίνυν ἀναλογία λόγων ἐστὶ πλειόνων ὁμοιότης καὶ ταυτότης. τί δέ ποτ' ἐστὶ λόγος ὁ κατ' ἀναλογίαν, ἐπεὶ πολλαχῶς ὁ λόγος, ἐν τοῖς πρόσθεν διεσαφήσαμεν ὅτι δυεῖν ὅρων ὁμογενῶν ἡ πρὸς ἀλλήλους ἐστὶ σχέσις ...	Ainsi donc une proportion est une similitude ou une identité de plusieurs rapports. Et ce qu'est enfin un rapport selon la proportion - puisque le rapport [se dit] de manière multiple - nous avons montré clairement dans ce qui précède que c'est, entre deux termes homogènes, la relation de l'un relativement à l'autre …
τῶν οὖν ἐν ἀριθμοῖς λόγων τοιούτων τινῶν ὄντων ἡ ἀναλογία σύλληψις ἔσται πλειόνων ἐν ὁμοιότητι λόγων ἐν ἐλαχίστοις τρισὶν ὅροις· λέγεται γὰρ λόγος συνῆφθαι, ὅταν κοινὸς ὅρος ᾖ μέσος πρὸς ἑκάτερον τῶν ἄκρων λόγον ἔχων· ὁ γὰρ κοινὸς ὅρος τοῦ λόγου συνάπτει.	donc les rapports en nombres étant à peu près tels, la proportion sera compréhension de plusieurs rapports en similitude, en trois termes au moins; car un rapport est dit être conjoint quand un terme commun est moyen, ayant un rapport relativement à chacun des extrêmes; car le terme commun du rapport [les] conjoint.

[23] Au masculin, non au neutre. V. [Heiberg-Stamatis, 1970], II, p. 1.

διεζεῦχθαι δὲ λέγεται λόγος λόγου, ὅταν μὴ ἔχωσι κοινὸν ὅρον. τοῦτο δὲ ἐν τέτταρσιν ὅροις γίνεται, διὸ καὶ δοκεῖ τὸ ἀνάλογον τῆς ἀναλογίας διαφέρειν· τὸ μὲν γὰρ ἀνάλογον καὶ ἐν διεζευγμένοις ὅροις γίνεται, ἡ δὲ ἀναλογία κυρίως ἐπὶ τῶν κοινὸν ἐχόντων ὅρον τάττεται.

Et un rapport est dit être disjoint quand ils n'ont pas de terme commun. Et ceci se produit en quatre termes et c'est pourquoi on doit penser que la proportionnalité diffère de la proportion; car d'une part la proportionnalité se produit aussi dans des termes disjoints, tandis que "proportion", d'autre part, s'emploie proprement pour les termes dont un est commun.

Le premier extrait paraît suivre Théon de Smyrne plutôt que Nicomaque lui-même; Théon et Jamblique précisent que, parmi les multiples sens du terme "logos", ils traitent du sens mathématique : ὁ κατ' *ἀνάλογον* pour l'un, ὁ κατ' *ἀναλογίαν* pour l'autre, que les termes doivent être homogènes. Tous deux coordonnent "similitude" et "identité".

Dans la suite il revient à la définition nicomaquéenne de la proportion avec un commentaire encore du même type que la Définition V. 8; c'est en expliquant ce que sont des rapports conjoints que Jamblique remarque que le proportionnel survient (aussi) dans des termes disjoints tandis que la proportion s'emploie proprement pour des termes conjoints.

Tous les textes que nous venons de citer sont post-euclidiens. On pourrait donc considérer qu'il y a là une série de commentaires qui puisent leur matière dans les *Eléments* et que les coïncidences que l'on peut relever, les rapprochements que l'on peut faire entre eux sont dus à cette référence commune. Ce serait plus vraisemblable s'il n'y avait :
— d'une part la divergence des manuscrits euclidiens, au moins pour ce qui est des Définitions de la proportion, tant par la place à l'intérieur des différents Manuscrits (après la Df. V. 3, après la Df. V. 7) que par le choix des termes " ὁμοιότης" ou "ταυτότης";
— d'autre part l'absence de la distinction continue / disjointe dans les *Eléments*.

A l'exception de la définition 127 de Héron tous ces commentaires témoignent d'un usage systématique du terme "ὅρος". Son usage vise semble-t-il selon les cas soit les nombres, soit un concept de portée très générale, antérieur à la distinction grandeurs / nombres, relevant de ce que l'on peut appelé une "théorie générale des proportions" telle que la conçoivent les commentateurs et les philosophes (Vitrac, 1993, pp. 219-220). Par exemple le terme apparaît à plusieurs reprises dans la suite de l'analyse aristotélicienne du "juste" dont j'ai cité un extrait ci-dessus. Son usage dans la Définition V. 8 — dans le contexte spécifié des grandeurs — nous paraît d'autant plus suspect[24]. Des remarques comparables à cette Définition, avec une terminologie voisine, apparaissent chez Héron, Théon de Smyrne, Nicomaque et Jamblique.

6. Reconstruction

a — Pour expliquer toutes ces coïncidences je propose la reconstruction suivante: Les *Eléments* dans leur(s) première(s) version(s) (?) ne contenaient en tête du Livre V que les actuelles Définitions V. 1-7 et 9-18. Le terme ἀναλογία était donc pratiquement absent de ces énoncés

[24] Le scholie n°17 à la Df. V. 3 utilise le terme "ὅρος" semble-il comme substitut de "nombre" par opposition à "grandeur". V. [Heiberg-Stamatis, 1970], V, 1, p. 216, l. 20-24.

liminaires[25], du moins dans son sens usuel, mais utilisé en composé dans un sens particulier : la proportion perturbée, dans la Définition V. 18.

Cet usage particulier, les discussions terminologiques qui pouvaient exister à cause de l'emploi "relâché" du terme dans la théorie des médiétés, le parti pris euclidien de s'en tenir à deux niveaux de langage (langage des objets, métalangage) et non à trois, parti pris que nous avons cru percevoir, peuvent expliquer cette absence de Définition de l'ἀναλογία.

b — Cela dit le terme était bien connu; dans la perspective platonicienne le concept de proportion (ἀναλογία) possédait même une dignité toute particulière.

Dans le *Timée* (31 c 1-5) Platon n'indiquait-il pas que la proportion est le lien le plus fort qui existe dans le cosmos ? Il y a aussi de bonnes raisons de croire qu'Eratosthène revenait sur l'importance de la notion de proportion dans son *Platonicos* [26]. Dans ce dialogue, si l'on en croit Théon de Smyrne (éd. Hiller, 1878, p. 2, l. 15-16), l'auteur évoquait l'histoire du problème de la duplication du cube. Parmi les différentes formulations que nous avons repérées pour le problème des deux moyennes, la plus complète («prendre deux moyennes proportionnelles en proportion continue ((δύο μέσας ἀνάλογον λαβεῖν ἐν συνεχεῖ ἀναλογίᾳ)…») pourrait avec vraisemblance être rapportée à Eratosthène.

c — Par ailleurs, en lisant la Définition V. 9 qui introduit le rapport doublé d'un rapport, on ne pouvait pas ne pas s'apercevoir qu'elle faisait implicitement référence à une proportion continue en trois termes, ce que la tradition pythagorico-platonicienne procédant d'Archytas appelle une proportion ou une médiété géométrique quand il s'agit de nombres ou de lignes droites. De plus comme l'avait déjà remarqué Aristote dans l'*Ethique à Nicomaque* (v. *supra*), il faut évidemment expliquer que le terme médian est "compté" deux fois :

$$(g_1 : g_2) :: (g_2 : g_3)$$

et qu'il y a en fait "quatre" grandeurs.

Qui plus est , si la clause "généralisante" de la fin de la Définition V. 10 : « καὶ ἀεὶ ἑξῆς ὁμοίως, ὡς ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ (et ainsi de suite continuellement, pour autant qu'il y ait proportion) » (Heiberg-Stamatis, 1970, II, p. 2, l. 15-16) est authentique, la situation de grandeurs continûment en proportion était rattachée dans les *Eléments* eux-mêmes à la notion de proportion (ἀναλογία). L'usage du terme ici n'a rien de choquant puisqu'il paraît conforme à l'usage de IX. 36 et à ce qu'en dit Jamblique. Au demeurant d'autres arguments suggèrent que l'on est certainement en présence d'une glose interpolée[27].

[25] Cette quasi-absence du terme ἀναλογία me conduit à penser que dans le débat historiographique récent auquel j'ai fait allusion en introduction la question « rapport *versus* proportion ? » est certainement mal posée. Il s'agit de confronter non pas deux termes mais trois : λόγος, ἀναλογία, ἀνάλογον, lesquels renvoient d'ailleurs peut-être à une seule notion, envisagée de plusieurs points de vue.

[26] Voir Proclus, in Eucl., El. I. Ed. Friedlein, 1873, p. 43, l. 22-23.

[27] Les *Eléments* n'utilisent que les notions de rapports doublé et triplé. Dans l'optique ancienne la conjonction du cas de trois puis quatre grandeurs pouvait suffire pour suggérer la généralisation possible, ainsi qu'on le voit souvent dans les Livres arithmétiques. Surtout : (a) le libellé diffère entre le Ms ***P*** et les Mss théonins; v.[Heiberg-Stamatis, 1970], II, p. 2. (b) Dans la traduction arabe attribuée à Ishâq ibn Hunayn, révisée par Thâbit ibn Qurra et éditée par J. W. Engroff (1980), les deux familles de manuscrits distinguées par l'éditeur divergent à propos de cette glose généralisante. Aucune

d —Quoi qu'il en soit il me paraît vraisemblable qu'un petit commentaire a été inséré en marge de la Définition V. 9. Sa source d'inspiration a pu être la remarque d'Aristote mais j'ai aussi une petite faiblesse pour le dialogue d'Eratosthène; on peut imaginer que ce commentaire mentionnait deux ou trois informations que nous retrouvons chez Théon de Smyrne et chez Jamblique :
(i) qu'une proportion est une identité ou une similitude de rapports;
(ii) qu'elle peut être continue ou disjointe;
(iii) qu'elle comporte au moins trois termes dans le premier cas, quatre dans le second.

Ce commentaire a pu s'insérer ensuite dans le texte entre les Définitions V. 7 et 9 selon la numérotation de l'édition de Heiberg. Mais ultérieurement il parut plus logique de dissocier les informations. Ainsi (i) devint une Définition de la proportion. La coordination de deux possibilités provoqua une divergence :
* la Définition en terme de similitude, restée avant la Df. V. 8;
** la Définition en terme d'identité placée dans certains manuscrits à la suite de celle de rapport pour respecter la hiérarchie des concepts que nous avons soulignée. A strictement parler elle ne faisait pas double emploi avec la Définition V. 6 qui définit l'expression "grandeurs en proportion" et non la "relation de relations" elle-même. Cependant, dans cette perspective, ce déplacement me paraît traduire une certaine prise de distances par rapport à la présentation euclidienne initiale; la distinction des niveaux de discours n'aurait apparemment plus été considérée comme très importante. Telle aurait été la destinée de l'information (i).

Bien entendu (iii) serait à l'origine de notre actuelle Définition V. 8, la version du manuscrit ***V*** correspondant peut-être mieux avec les versions de Théon, Nicomaque ou Jamblique, celle de ***P*** pourrait être le résultat d'une correction à partir du commentaire de Héron (df. n° 124. 3).

e — Un indice supplémentaire de la solidarité de ces différentes informations pourrait se trouver chez an-Nayrîzî : après la Définition V. 3 il introduit une définition de la proportion comme "similitude" des rapports — enchaînée avec l'équivalent de notre Df. V. 8. Suit un commentaire qui n'est pas sans rappeler l'alternative déjà présentée par Théon de Smyrne que l'on peut paraphraser ainsi :

> «La similitude des rapports intervient si les grandeurs sont plus de deux, le rapport de la première à la deuxième étant alors comme le rapport d'une autre grandeur à une autre grandeur, soit comme le rapport de la deuxième à la troisième et de la troisième à la quatrième et ainsi des grandeurs qui se suivent continûment, soit comme le rapport de la première à la deuxième et de la troisième à la quatrième et de la cinquième à la sixième

des deux ne comporte d'ailleurs le terme "proportion". (c) Cette formule est omise dans les extraits transmis dans les *Institutions* de Cassiodore (édité dans [Folkerts, 1970], pp. 189-191) ainsi que par Campanus.

et ainsi pour les grandeurs qui se suivent continûment. Le minimum dans lequel advient cette similitude est dans trois grandeurs…»[28].

Les deux possibilités : proportion continue / proportion discontinue sont clairement évoquées même si les termes ne figurent pas. En revanche la traduction latine de Gérard de Crémone semble privilégier seulement la "proportion continue" (éd. Curtze, 1899, p. 157)[29]. Tout ceci n'empêche d'ailleurs pas an-Nayrîzî de mentionner une seconde fois la "proportion minimale" en trois termes après les Définitions V. 6-7 (qu'il regroupe) (Codex Leidensis, p. 163).

7. Conclusion : les difficultés des commentateurs médiévaux

a — L'information (ii) n'aurait apparemment pas laissé de traces du moins dans la tradition grecque telle que nous la connaissons. Mais il faut mentionner ici la substitution *a priori* un peu étrange que l'on trouve dans une branche de la tradition médiévale d'Euclide : la Définition V. 4 est remplacée par celle de la proportion continue dans les versions dite adélardiennes (V. Murdoch, 1963, pp. 240-242). John Murdoch dit n'avoir trouvé aucune indication pouvant se rapporter à cette substitution dans les textes antérieurs (*Op. cit.,* pp. 241-242). Même si l'on n'admet pas tous les détails de ma reconstruction[30], je crois que le commentaire de Jamblique lequel n'est pas, rappelons-le, sans rapport avec la pratique terminologique des géomètres apporte un certain éclairage au sujet. Si on l'accepte, alors il a même pu exister des manuscrits grecs incluant une Définition introduisant la distinction "continue" /"disjointe", dérivée de ce que j'appelle l'information (ii).

b — Je crois pouvoir aussi expliquer partiellement de cette manière une donnée quelque peu paradoxale de la tradition euclidienne, ancienne et médiévale. Souvent les Anciens et Médiévaux ont discuté des mêmes thèmes fondamentaux : problème de la nature et du statut des principes (Df., axiomes…), théorie des parallèles, théorie des irrationnelles… Or il y a une différence étonnante, qui n'est peut-être que le résultat du caractère lacunaire de nos sources, mais qui mérite d'être relevée : il n'y a, dans les textes grecs, pas de traces d'incompréhension ou de contestation des Définitions V. 3-5, 7. Il faut être prudent car il s'agit d'un argument *a silentio,* mais l'absence de témoignages antiques, même indirects, contraste fortement avec l'abondante littérature médiévale, puis renaissante, consacrée aux Définitions fondamentales du Livre V[31]. Il me semble en effet que les ajouts de définitions de la proportion (Df. V. 3bis, Df. V. 7bis) témoignent davantage d'une

[28] Codex Leidensis 399/1, f° 60a. Ed. Besthorn-Heiberg, p. 6. Je remercie Ahmed Djebbar et Tony Lévy de m'avoir fourni des indications détaillées sur ce texte qui vont bien au-delà de ce dont je fais usage ici.

[29] Les éditeurs de la version arabe (Codex Leidensis 399/1, p. 7) mentionnent eux aussi cette lacune du texte de Gérard.

[30] D'ailleurs d'autres possibilités sont ouvertes : les Df. V. 9-10 ne sont pas très satisfaisantes non plus. Il est possible qu'elles aient perdu un "ἑξῆς" pour exprimer — en conformité avec l'usage du L. VIII — l'idée de proportion continue. Il se pourrait aussi qu'elles soient elles-mêmes des interpolations; après tout la Df. V. 10 manque dans le recueil de Héron et dans la tradition médiévale dite adélardienne (v. [Busard, 1983], p. 146).

[31] Pour quelques indications sommaires sur la postérité du Livre V, voir la notice que j'ai consacrée à cette question dans [Vitrac, 1994], pp. 539-553, en particulier 543-548 pour l'époque médiévale.

volonté de combler ce qui a pu être considéré comme une lacune, elle-même consécutive à une discussion terminologique sur la notion d'ἀναλογία, plutôt que d'une manifestation de l'incompréhension des Définitions V. 3-5.

c — Au contraire la série des Définitions, altérée de cette manière, devenait bien plus difficile à comprendre : l'interpolation, à la suite de la Définition V. 3, d'une définition de l'ἀναλογία n'a pas facilité la compréhension de la Définition V. 5 par les commentateurs médiévaux[32]. En particulier son statut même de Définition, devenait plus difficile à saisir. Certes la relation entre les interpolations et les incompréhensions peut s'analyser dans l'autre sens également, mais ceci me paraît valoir pour les commentateurs médiévaux latins (et hébreux) dont les textes dépendent de la tradition arabe (Murdoch, 1963, pp. 240-251).

Face à ces difficultés d'interprétation l'attitude des commentateurs médiévaux sera variable et il n'est pas de notre propos ni de notre compétence de traiter de cette question. Mentionnons simplement un exemple particulièrement significatif, celui du mathématicien andalou al-Gayyânî (XIe siècle) :

— Celui-ci déclare préférer l'exposé euclidien, quant à la clarté et à la rigueur, à ce que proposent ses détracteurs.

— Il a parfaitement saisi le lien qui existe entre la notion de rapport et le procédé des équimultiples ce qui n'est manifestement pas le cas de tous ses contemporains (Plooij, 1950, p. 16).

— Il a également rapproché cette façon de définir le rapport et l'extension de la notion de rapport au cas de grandeurs incommensurables.

On peut donc dire qu'il a une excellente compréhension technique de l'exposé du Livre V. Parmi les commentateurs médiévaux que nous connaissons il semble bien que ce soit l'un des tout premiers. Mais malgré cela et comme beaucoup d'autres, il estime que les Définitions V. 5-7 contiennent une assertion relative aux rapports susceptible d'être démontrée[33]. Il propose une formulation alternative pour le definiens de la Df. V. 5 en termes de "parties de grandeurs" (Plooij, 1950, pp. 18-20) et montre que cette formulation est équivalente à la formulation euclidienne (*Ibid.,* pp. 28-34). Il montre aussi qu'elle est une conséquence de ce que l'on peut appeler la "Définition aristotélicienne" : « La proportion est égalité de rapports »(*Ibid.,* pp. 18)[34] et que ceci est convertible (*Ibid.,* pp. 20-26).

Même pour un auteur dont l'appréhension mathématique n'est pas en cause, le statut de "principe" des Définitions fondatrices du Livre V n'est plus apparent. Très certainement la

[32] Sur les conséquences quant à l'incompréhension de la Df. V. 5, en particulier chez Campanus, de l'insertion d'une Df. de la proportion continue à la place de la Df. V. 4, v. [Murdoch, 1968], p. 79.

[33] Déjà Ahmed ibn Yûsuf (IXe siècle) tente de démontrer la Df. V. 5 de manière non conclusive; son texte sera traduit en latin par Gérard de Crémone. V. [Schrader, 1961]. An-Nayrîzî pour sa part considère que la propriété des équimultiples est bien un principe qui n'a donc pas à être démontré. Ceci ne l'empêche toutefois pas d'exposer le contenu de la "Df." de la proportionnalité (comme "ressemblance des proportions") dans les termes de la théorie anthyphérétique des proportions. V. [Curtze, 1899], pp. 158-161.

[34] *Ibid.,* p. 18.

complexité et la longueur des Définitions V. 5-7 n'expliquent pas tout. Les altérations que le texte a subi dans le processus de transmission, en particulier les ajouts que nous avons analysés, ont certainement joué un grand rôle.

*

Références

an-Nairîzî, *Commentaires aux* Eléments *d'Euclide* : Voir Codex Leidensis 1893-1932, Curtze 1899.

Archimède, *Opera* : voir Heiberg 1972.

Beckmann, F., 1967 : 'Neue Gesichtspunkte zum 5 Buch Euklids'. *Archive for History of exact Sciences,* 4, pp. 1-144.

Busard, H. L. L., 1983 : *The first Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath*. Edition du texte latin. Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies.

Codex Leidensis 399/1, 1893-1932 : *Euclidis Elementa ex interpretatione al'Hadschdschaschii cum Commentariis al' Nayrizii*. Texte arabe et trad. latine édité par R. O. Besthorn , J. L. Heiberg, puis G. Junge, J. Raeder et W. Thomson. Hauniae, Lib. Gyldendaliana : I, 1 et 2 (= L. I), 1893-1897; II, 1 et 2 (= L. II et III), 1900-1905; III, 1, 2 et 3 (=L. IV-VI), 1910-1932.

Curtze, M., 1899 : *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis Commentarii,* Edition du texte latin. In *Euclidis Opera omnia,* ed. I. L. Heiberg & H. Menge. Leipzig, Teubner, vol. IX. Supplementum.

Diels, H. & Kranz, W. (eds), 1903 : *Die Fragmente der Vorsokratiker*. Edition et traduction. 3 vol. Zürich, Weidmann. Réimpr. Hildesheim, 1985.

Engroff, J. W., 1980 : *The Arabic Tradition of Euclid's* Elements *: Book V.* Cambridge Mass. Harvard University PhD. Dissertation non publiée

Euclide, *Eléments…* : voir Heiberg-Stamatis 1970, Heath 1956, Engroff 1980, Busard 1983.Vitrac 1994.

Folkerts, M., 1970 :"*Boethius" Geometrie II*. Wiesbaden, F. Steiner Verlag.

Fowler, D. H., 1979 : 'Ratio in early Greek mathematics'. *Bulletin of the American Mathematical Society* (New Series), pp. 807-846.

Friedlein, G., 1873 : *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*. Edition du texte grec. Leipzig, Teubner. Réimpr. Hildesheim, 1967.

Gardies, J. L., 1988 :*L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Paris, Vrin.

Gérard de Crémone, *La lettre sur la théorie des proportions de Ahmed Ibn Yûsuf (traduction latine)* : voir Schrader 1961.

Harvey, F. D., 1965 : 'Two kinds of equality', *Classica and Medievalia,* XXVI, pp.101-146.

Heath, T. L., 1956 : Euclid, *The Elements*. Trad. angl. et comm. T. L. Heath. New York, Réed. Dover Pub., 3 volumes.

Heiberg, J. L., 1972 : *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii,* I-III. Edition du texte grec. Leipzig, Teubner, 1910-1915. Réimpr. Stuttgart, Teubner, 1972.

Heiberg, J. L., 1976 : *Heronis Alexandrini Opera quæ supersunt omnie*. Vol IV. Edition du texte grec. Trad. all. Leipzig, Teubner. 1912 Réimpr. Stuttgart, Teubner, 1976.

Heiberg, J. L. & Stamatis, E. S., 1969 : *Euclidis Elementa,* post Heiberg (vol. II. El. V-IX), Edition du texte grec. Leipzig, Teubner, 1884. Réimpr. Leipzig, Teubner, 1969

Héron d'Alexandrie (Ps.), *Definitiones* : voir Heiberg, 1912

Hiller, E., 1878 :*Theonis Smyrnaei Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium,* Edition du texte grec. Leipzig, Teubner.

Hoche, R., 1866 : *Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticæ Librii II*. Edition du texte grec. Leipzig, Teubner.

Hultsch, F., 1876-1878 : *Pappi alexandrini collectionis quæ supersunt*. Edition du texte grec. 3 volumes. Berlin, Weidmann. Réimpr. Amsterdam, A. M. Hakkert, 1965.

Jamblique, *Commentaire à l'* Introduction *de Nicomaque* : voir Pistelli 1894.

Knorr, W. R., 1978 : 'Archimedes and the pre-Euclidean Proportion Theory'. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences,* 28, pp. 182- 244.

Mueller, I., 1981 : *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's Elements*. Cambridge (Mass.) and London, M. I. T. Press.

Murdoch, J., 1963 : 'The Medieval Language of Proportions : Elements of the Interaction with Greek Foundations and the Development of New Mathematical Techniques' dans *Scientific Change,* éd. A. C. Crombie, Londres, pp. 240-242.

Murdoch, J., 1968 : 'The Medieval Euclid : Salient Aspects of the Translations of the Elements by Adelard of Bath and Campanus of Novara' dans *Actes du XIIe Congrès International d'Histoire des Sciences*. Paris 1968. Paris, A. Blanchard, 1970.

Nicomaque de Gérase, *Introduction arithmétique* : voir Hoche 1866.

Pappus d'Alexandrie, *Collection mathématique* : voir Hultsch 1876-1878.

Pistelli, H., 1894 : *Iamblichi in Nicomachi arithmeticam Introductionem Liber*. Edition du texte grec. Leipzig, Teubner. Réimpr. Stuttgart, Teubner, 1975.

Plooij, E. B.,1950 : *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticised by Arabian Commentators,* Rotterdam.

Proclus de Lycie, *Commentaires au Livre I des* Eléments *d'Euclide* : voir Friedlein.

Schrader, O. P., 1961 : *The 'Epistola De Proportione et Proportionalitate' of Ametus Filius Iosephi*. Traduction latine de Gérard de Crémone. Edition du texte latin , trad. angl. et comm. The University of Wisconsin, Ph. D. University Microfilm Inc., Ann Arbor, Michigan.

Théon de Smyrne, *Expositio…* : voir Hiller 1878.

Vitrac, B., 1990 : Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments*. Volume I. Introduction générale par Maurice Caveing. Livres I à IV : Géométrie plane, trad. franç. et comm. par Bernard Vitrac. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences.

Vitrac, B., 1993 : *De quelques questions touchant au traitement de la proportionnalité dans les Eléments d'Euclide*. Thèse de doctorat de l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences sociales, Paris. Dir. J. Dhombres. Soutenue le 17 / 12 / 93. Non publiée.

Vitrac, B., 1994 : Euclide d'Alexandrie, *Les Eléments*. Vol. 2 : Livres V à IX. trad. franç. et comm. par Bernard Vitrac. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences.