

# ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT DE POISEUILLE – RAYLEIGH – BÉNARD (PRB) PAR LA MÉTHODE DE LATTICE BOLTZMANN

S. EDDAKIRI<sup>(1)</sup>, A. SEMMA<sup>(1,2,\*),</sup> M. EL GANAOU<sup>(2)</sup>, R. BENNACER<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> Laboratoire de Mécanique, FST de Settat, B.P. 577, Settat, Maroc

<sup>(2)</sup> Université de Limoges, SPCTS UMR 6638 CNRS, 123 Av Albert Thomas 87060 Limoges.

<sup>(3)</sup> LEEVAM/Dpt GC Univ. Cergy-Pontoise, 5 mail Gay Lussac, Neuville sur Oise, 95031, France.

(\*[semmaalama@yahoo.fr](mailto:semmaalama@yahoo.fr))

**Résumé :** Une méthode numérique basée sur l'équation de Boltzmann (LBE) à deux distributions est développée pour résoudre les équations de conservation (énergie et quantité de mouvement). La configuration considérée est un canal chauffé par le bas, refroidi par le haut et traversé par un fluide ( $Pr = 1$ ). L'étude est effectuée pour une gamme de nombres de Rayleigh ( $0 < Ra < 5000$ ) et de Reynolds ( $0 < Re < 500$ ). Pour  $Re=0$  et un  $Ra$  supérieur à la valeur critique (1707,76), il y'a apparition d'un écoulement de type RB. Cependant, pour des  $Re$  non nuls, la transition d'un écoulement de Poiseuille à un écoulement cellulaire s'effectue pour des  $Ra$  critiques plus importants (en domaine limité) et les caractéristiques des cellules dépend de l'intensité de l'écoulement à l'entrée du canal. L'évolution du transfert thermique à travers les parois horizontale a été étudiée.

**Mots-clefs :** Lattice Boltzmann, Poiseuille Rayleigh Bénard, Mécanique des Fluides Numérique.

## 1. INTRODUCTION

Les écoulements de Poiseuille– Rayleigh–Bénard (PRB) sont des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire horizontale chauffée uniformément par le bas et refroidie uniformément par le haut. Ils résultent de la superposition de deux sources convectives : un gradient de pression horizontal (moteur de la convection forcée) et un gradient de température vertical (moteur de la convection naturelle).

Plusieurs méthodes ont été utilisées pour simuler numériquement ce type de problèmes qui continuent à susciter de l'intérêt [1, 2]. La particularité de ce travail, réside dans l'utilisation d'un modèle de type Lattice Boltzmann (LBM). La méthode LBM est un nouveau modèle numérique utilisant des algorithmes simples et parallélisables pour résoudre des équations de Navier Stokes [3-5]. Elle est présente dans différents domaines impliquant des contraintes complexes comme l'hydrodynamique dans les milieux poreux, les phénomènes multiphasiques, les écoulements réactifs, ...etc.

La plus part des travaux récents utilisant la méthode LBM dans le domaine fluide se sont concentrés aux écoulements isothermes et il reste beaucoup d'efforts à déployer pour couvrir d'autres champs disciplinaires couplant les transferts de chaleur et de masse et l'écoulement des fluides.

Le problème de PRB est ici considéré dans une configuration géométrique de rapport de forme 4. L'effet de l'écoulement sur l'apparition des cellules convectives est étudié.

## 2. LE MODÈLE DE LATTICE BOLTZMANN (LBM)

Le modèle considéré est à deux populations pour traiter les deux champs thermique et dynamique.

La méthode LBM utilisée est basée sur le modèle carré [7] (figure 1). Elle consiste à déterminer la solution de l'équation suivante :

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i \quad (1)$$

avec  $f_i$  la fonction de distribution définie pour un ensemble de particule de vitesse  $\mathbf{c}_i$ . Le terme de collision  $\Omega_i$  utilise l'approximation dite de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK).

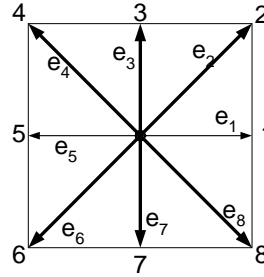


Figure. 1 : Exemple de Grille LBM (D2Q9)

Le principe de cette approximation est basé sur le fait que le terme de collision  $\Omega_i$  peut être remplacé par une approche linéaire :

$$\Omega_i = -\frac{f_i - f_i^{eq}}{\tau} + \delta_i F_i \quad (2)$$

avec  $\tau$  le temps de relaxation et  $f_i^{eq}$  la fonction de distribution à l'équilibre dépendant des propriétés hydrodynamiques locales.  $\delta_i F$  le champ des forces externes. La présente méthode est complètement définie par le choix de la fonction de distribution à l'équilibre [6] :

$$f_i^{eq} = \omega_i \rho \left[ 1 + 3 \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{c^4} - \frac{3}{2} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{c^4} \right] \quad (3)$$

avec  $\mathbf{u}$  et  $\rho$  les valeurs macroscopiques respectives de la vitesse et de la masse volumique et  $\omega_i$  les coefficients de pondération suivant chaque direction du réseau de Boltzmann. Les quantités hydrodynamiques macroscopiques sont déterminées à travers les moments dans l'espace de phase :

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (4)$$

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i f_i(\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

La procédure de Chapman-Enskog pour la fonction de distribution permet de retrouver les équations de Navier Stokes. La viscosité est reliée au temps de relaxation par la relation :

$$\nu = \left( \tau_v - \frac{1}{2} \right) c_s^2 \delta t \quad (6)$$

L'évolution de l'équation LBGK pour la température est donnée par :

$$g_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\tau_T} (g_i(\mathbf{x}, t) - g_i^{eq}(\mathbf{x}, t)) \quad (7)$$

avec  $g_i$  la fonction de distribution de l'énergie,  $\tau_T$  le temps de relaxation adimensionnel pour le champ thermique. La température est calculée par la sommation :

$$\rho\varepsilon = \sum_i g_i \quad (8)$$

la diffusivité thermique est reliée au temps de relaxation par :

$$\alpha = \frac{1}{3} \left( \tau_T - \frac{1}{2} \right) c^2 \delta t \quad (9)$$

### 3. RÉSULTATS ET DISCUSSION

#### 3.1 Validation du modèle LBM

Le modèle a été validé en considérant une cavité carrée différentiellement chauffée contenant un fluide de Prandtl ( $Pr=0,71$ ). L'étude a été effectuée pour des valeurs du nombre de Rayleigh allant de  $Ra=10^3$  à  $Ra=10^6$  (Figure 2). Les résultats numériques sont en bon accord avec les résultats de référence [9], voir tableau 1.

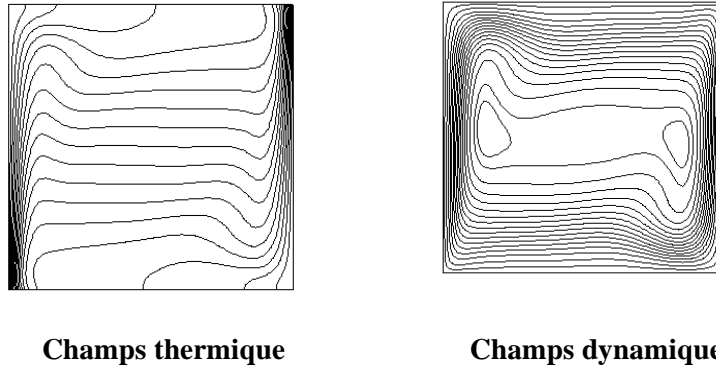


Figure 2. Champs dynamique et thermique dans une cavité différentiellement chauffée ( $Ra=10^6$ )

Table 1. Comparaison de nos résultats numériques (en gras) aux valeurs de référence [7] (soulignées) pour différentes valeurs de  $Ra=10^3-10^6$

$Ra$	$u_{max}$		$v_{max}$		$Nu$	
$10^3$	<b>3,699</b>	<u>3,697</u>	<b>3,650</b>	<u>3,649</u>	<b>1,116</b>	<u>1,118</u>
$10^4$	<b>19,620</b>	<u>19,617</u>	<b>16,178</b>	<u>16,178</u>	<b>2,245</b>	<u>2,243</u>
$10^5$	<b>68,68</b>	<u>68,59</u>	<b>34,73</b>	<u>34,73</u>	<b>4,521</b>	<u>4,519</u>
$10^6$	<b>220,418</b>	<u>219,36</u>	<b>64,763</b>	<u>64,63</u>	<b>8,814</b>	<u>8,800</u>

#### 3.2 Ecoulement de Poiseuille – Rayleigh – Bénard

La méthode est appliquée à un canal horizontal de rapport de forme 4 traversé par un jet de fluide et chauffé par le bas. En absence du jet, l'écoulement convectif au sein du canal est de type Rayleigh Bénard qui se déclenche lorsque  $Ra$  dépasse une valeur seuil estimée dans cette étude à  $Ra_c=1707$  avec l'apparition de quatre cellules contrarotatives (Figure. 3).

Pour les faibles  $Re (<0,1)$ , l'écoulement n'a pas d'effet important sur le déclenchement des instabilités convectives. Les isothermes sont déformées par l'intensité

de l'écoulement à l'intérieur du canal. Le transfert convectif aux parois horizontales est amélioré.

L'augmentation de  $Re$  retarde l'apparition des instabilités convectives à l'intérieur du canal. En effet, pour  $Re=10$ , les rouleaux convectifs apparaissent pour  $Ra_c=8500$ . Ces rouleaux ne sont pas stationnaires et se déplacent sous l'effet de l'écoulement le long du canal donnant ainsi lieu à une variation périodique des différentes variables macroscopiques (Figure. 4). La figure 5.a montre la variation de la vitesse maximale sur le plan vertical en fonction du temps. Cette vitesse prend des valeurs très faibles en écoulement de Poiseuille. L'apparition des cellules de convection est indiquée par une augmentation importante de la valeur maximale de  $V$ , ceci entraîne aussi une amélioration du transfert thermique au travers des parois. Le nombre de Nusselt illustre la superposition des valeurs obtenue en Poiseuille et en RB (Figure 5-b).

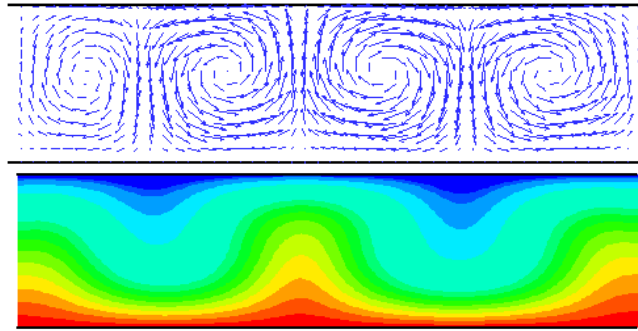


Figure 3 : Champs dynamique et thermique pour  $Re=0$  et  $Ra=1750$

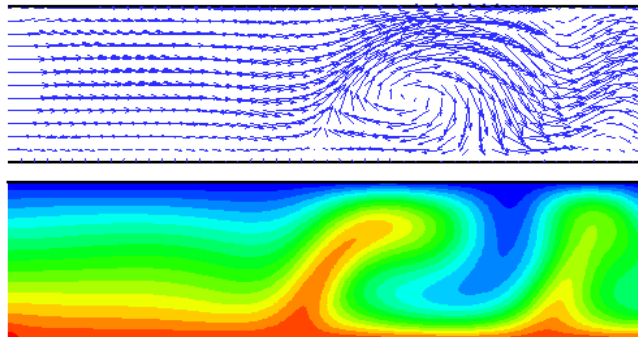


Figure 4 : Champs dynamique et thermique pour  $Re=10$  et  $Ra=5000$

#### 4. CONCLUSION

La simulation de l'écoulement de Poiseuille - Rayleigh - Bénard basée sur la méthode de Lattice Boltzmann est présentée. Les calculs concernant une cavité différentiellement chauffée montre un bon accord avec les résultats de référence. La méthode est utilisée pour simuler l'effet d'un écoulement horizontal dans un canal de rapport de forme 4 chauffée par le bas et du développement de la convection de type Poiseuille - Rayleigh - Bénard. On montre que l'intensité de l'écoulement retarde l'apparition des cellules convectives et influence le transfert thermique sur les parois isothermes.

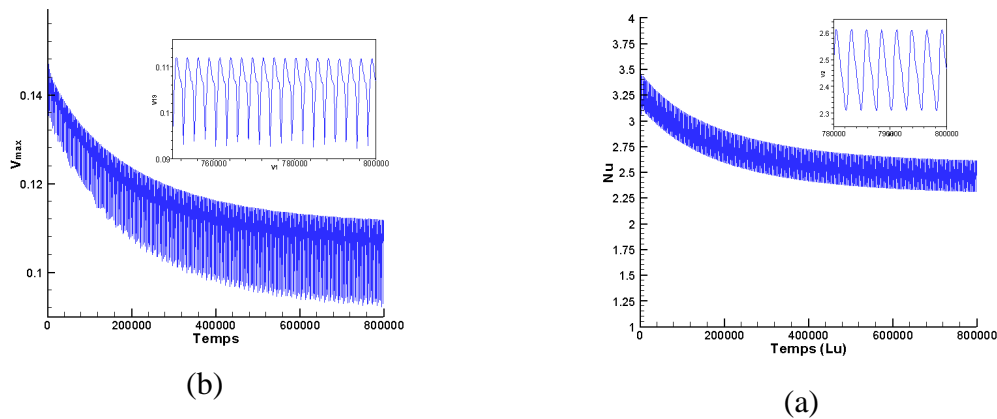


Figure 5. Evolution temporelle de la vitesse maximale (a) et du nombre de Nusselt (b) pour  $Re=10$  et  $Ra=8500$

### Nomenclature

$\mathbf{u}$	Vitesse	<i>Symboles grecs</i>	
$T$	température	$\tau$	temps de relaxation
$R$	constante de gaz parfait	$w$	poids nodal
$P$	pression	$\varepsilon$	Énergie
$t$	temps	$\nu$	viscosité cinématique
$f^{eq}$	fonction de distribution à l'équilibre	$\delta t$	pas de temps
$f$	fonction de la distribution	$\delta x$	constante du réseau
$D$	dimension de l'espace	$\Omega$	opérateur de collision
$c_s$	vitesse du son sur réseau lattice	$\rho$	masse volumique
$i$	indice du réseau	$\alpha$	diffusivité thermique
$F$	force externe		
$Nu$	Nombre de Nusselt		

### Références

- [1] Cheng et Wu (1976), ASME-JHT, 98, 564-569
- [2] X. Nicolas (2002), IJTS, 41 961-1016). Bibliographical review on the Poiseuille-Rayleigh-Bénard flows: the mixed convection flows in horizontal rectangular ducts heated from below . International Journal of Thermal Sciences, Volume 41, Issue 10, October 2002, P. 961-1016.
- [3] Succi S., (2001), The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond. Oxford Science Publications.
- [4] R.Benzi, S.Succi, and M.Vergassola, (1992), The lattice Boltzmann equation: Theory and applications. Physics Reports,
- [5] Clément Mouhot .Thèse : Etude mathématique de quelques équations cinétiques collisionnelles, ENS de Lyon, (2005).
- [6] Li-Shi Luo. (1993), Thesis : Lattice-Gaz Automata and Lattice Boltzmann Equations for two-dimensional Hydrodynamics. Georgia Tech .
- [7] U. Frisch, B. Hasslacher & Y. Pomeau, (1986), Lattice Gaz automata for the Navier Stokes equation, Phys. Rev. Lett. 56 pp. 1505-1508.
- [8] E. Semma, M. El Ganaoui, R. Bennacer and A. A. Mohamad. Melting and Solidification problem, The Lattice Boltzmann Method Submitted to Int. Journal of Thermal Sciences, in press 2007.
- [9] G. de Vahl Davis, (1983), Natural convection of air in a square cavity : a benchmark numerical solution, Int. J. Numer. Fluid Meth. Fluids 3.