

THÈSE

préparée à

**L'INRIA Sophia Antipolis
Projet ICARE**

et présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS
SOPHIA ANTIPOLIS**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

Informatique Temps Réel, Automatique et Robotique

soutenue publiquement par

Mauro Eduardo MAYA MENDEZ

Sujet de la thèse :

Commande référencée capteur des robots non holonomes

le 5 avril 2007 devant le jury composé de :

M.	Yves	ROUCHALEAU	Président
MM.	François Florent	CHAUMETTE LAMIRAUX	Rapporteurs
MM.	Benoît Pascal Claude	THUILOT MORIN SAMSON	Examineur Co-directeur de Thèse Directeur de Thèse

À MON ÉPOUSE ALEJANDRA

Remerciements

Je souhaite remercier Monsieur Yves Rouchaleau d'avoir accepté la présidence du jury de soutenance, Messieurs François Chaumette et Florent Lamiroux d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs et Monsieur Benoît Thuilot d'avoir pris de son temps pour examiner cette thèse.

Je remercie Monsieur Claude Samson d'avoir accepté de diriger cette thèse et pour son esprit d'analyse et critique que j'ai beaucoup apprécié. Je remercie tout particulièrement Monsieur Pascal Morin mon Co-directeur de thèse qui a su m'encadrer avec rigueur scientifique mais aussi avec beaucoup de patience tout en se montrant toujours disponible.

Je tiens à remercier aussi les membres du projet ICARE que j'ai pu côtoyer et apprécier durant ces années : les permanents : Patricia, Ezio, et Patrick, ainsi que ceux de passage : Baptiste, Matthieu, Guillaume, Nicolas, Selim, Christopher, Alessandro, Geraldo, Doo-Jin, Vincent, Pierre, Andrew, Omar, Minh Duc, Adán, Gaby, Cyril, Hicham, Youssef, Benoît, Erwan et Tiago.

Je remercie la communauté latino-américaine de l'INRIA Sophia avec qui j'ai partagé des moments agréables, sociaux et sportifs, ainsi que de précieuses informations concernant les démarches inévitables dans l'administration française et à propos de la vie en général, en France. J'exprime un grand merci à Marie-Cécile pour ses aides fréquentes notamment à propos de la langue française et pour ses conseils dans des démarches diverses.

Je remercie le Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, du Mexique pour son aide financière sous la forme d'une bourse d'études.

Enfin, je remercie tout spécialement ma femme Alejandra car sans son soutien infailible cette aventure ne se serait ni commencée ni achevée.

Table des matières

Introduction	1
1 État de l'art et modélisation	9
1.1 Modélisation des robots mobiles non holonomes	9
1.1.1 Rappels sur la notion de nonholonomie	9
1.1.2 La contrainte de roulement sans glissement	10
1.1.3 Modèle cinématique d'un véhicule de type unicycle	11
1.1.4 Modèle cinématique d'un robot de type voiture	13
1.1.5 Modèle cinématique de la pose et propriétés	15
1.2 Propriétés du modèle cinématique	18
1.2.1 Commandabilité	18
1.2.2 Stabilisabilité	19
1.2.3 Propriétés de symétrie et modèles d'erreur	20
1.3 Commande par retour d'état des robots non holonomes	22
1.3.1 Définitions	22
1.3.2 Stabilisation de configurations fixes	23
1.3.3 Stabilisation de trajectoires admissibles non stationnaires	27
1.3.4 Stabilisation pratique de trajectoires générales	30
1.4 Rappels sur la commande référencée capteur des robots manipulateurs	35
1.4.1 Rappel sur le formalisme de commande par fonction de tâche	35
1.4.2 Synthèse de commandes dans les différents espaces	38
1.5 Conclusions	41
2 Commande référencée capteur via une estimation de la pose	43
2.1 Robustesse vis-à-vis de dynamiques non modélisées	45
2.2 Conditions suffisantes de stabilité vis-à-vis de l'estimation de la pose	49
2.3 Quelques techniques pour l'estimation de la pose	54
2.4 Résultats de simulation pour un capteur visuel	55
2.4.1 Estimation linéaire de la pose	55
2.4.2 Estimations non linéaires	67
2.4.3 Fonctions Transverses Généralisées	72

2.5	Résultats expérimentaux	75
2.6	Conclusions	77
3	Synthèse de commande dans l'espace capteur	79
3.1	Synthèse de stabilisateurs pratiques dans les coordonnées signal	79
3.2	Estimations de termes intervenant dans l'expression de la commande	82
3.3	Résultats de simulation pour un capteur visuel	85
3.3.1	Estimations basées sur des approximations linéaires	86
3.3.2	Estimations basées sur des approximations non-linéaires	87
3.3.3	Fonction transverse généralisée	92
3.4	Conclusion	94
4	Conclusion et perspectives	95
4.1	Conclusion	95
4.2	Perspectives	96
A	Preuves	99
A.1	Preuve du Lemme 1 (p. 48)	99
A.2	Preuve de la Proposition 6 (p. 49)	101
A.3	Preuve de la Proposition 7 (p. 51)	102
A.4	Preuve des Propositions 9 et 10 (pp. 52, 53)	103
A.5	Preuve du Lemme 2 (p. 79)	106
A.6	Preuve de la Proposition 12 (p. 81)	109
A.7	Preuve du lemme 3 (p. 83)	109
B	Reconstruction géométrique de la pose d'une caméra (p. 71)	111
C	Relations dans les groupes de Lie	115
C.1	Équivalences dans les groupes de Lie	115
C.2	Relations cinématiques sur les groupes de Lie	117
	Bibliographie	119

Notations, définitions et acronymes

Outre les notations particulières définies au cours et pour les besoins de l'exposé, les notations de base suivantes seront utilisées tout au long de ce mémoire :

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^*$ désignent respectivement *les nombres réels, les réels positifs, les entiers relatifs, les entiers naturels et les entiers naturels privés du zéro.*
- \mathbb{T}^n est le tore de dimension n , avec $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
- g^* désigne la valeur désirée ou de référence de la variable g .
- g' désigne l'opération de transposition du vecteur g .
- I_n est la matrice identité associée à \mathbb{R}^n .
- S est la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Géométrie différentielle

- Par abus de notation et dans le but de ne pas alourdir l'exposé, nous utiliserons indifféremment les mêmes symboles pour noter un élément d'une variété et sa représentation dans un système de coordonnées.
- Le groupe $SE(2)$ étant isomorphe à $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$, dans ce mémoire nous paramètrons un élément $g \in SE(2)$ par un vecteur $g = (p', \theta)'$ avec $p = (x, y)' \in \mathbb{R}^2$, $\theta \in (-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$.
- $\forall g \in SE(2)$, $R(g)$ est la matrice de rotation 2×2

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- $\forall g \in SE(2)$, $X(g)$ est la matrice de rotation 3×3

$$\begin{pmatrix} R(g) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne dans \mathbb{R}^n .
- avec un abus de notation, puisque $SE(2)$ n'est pas un espace normé, $\forall g \in SE(2)$, $\|g\| = \sqrt{\|p\|^2 + \theta^2}$.
- $B_g(\delta)$ est la "boule" dans $SE(2)$ de rayon δ , centrée sur 0, i.e. $B_g(\delta) = \{g \in SE(2) : \|g\| \leq \delta\}$.
- $\mathcal{C}^k(N; M)$ désigne l'ensemble des applications de N dans M , k fois différentiables, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et de dérivée k -ième continue. En particulier, $\mathcal{C}^0(N; M)$ désigne l'ensemble des applications continues de N dans M . Si $M = \mathbb{R}^n$, on écrira simplement $\mathcal{C}^k(N)$.
- $O^p(\cdot)$ désigne toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ telle que :

$$\exists \delta, K > 0, : \quad \|x\| \leq \delta \implies \|f(x, t)\| \leq K\|x\|^p.$$

- La différentielle de l'application $f \in \mathcal{C}^1$, évaluée au point g est notée $df(g)$.
- Étant donné l'ensemble de vecteurs $\{v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, p \in \mathbb{N}^*\}$, $\text{span}\{v_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, p \in \mathbb{N}^*\}$ désigne l'espace vectoriel engendré par cet ensemble.
- Une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ est dite de classe \mathcal{K} si elle est strictement croissante et $f(0) = 0$.
- Étant donné une variété différentielle V , T_pV désigne l'espace tangent à V en $p \in V$ et TV est le fibré tangent, i.e. l'ensemble $\bigcup_{p \in V} T_pV$. Pour plus de détails voir par exemple (Spivak, 1999; Warner, 1983).
- Un champ de vecteurs sur V est une application régulière¹ de V dans TV .
- $\mathcal{X}(V)$ est l'ensemble de champs de vecteurs sur V .

Groupes de Lie

- Un groupe de Lie G est une variété différentielle munie d'une opération de groupe régulière $(g_1, g_2) \mapsto g_1g_2$ et telle que l'application inverse $g \mapsto g^{-1}$ est aussi régulière. Rappelons que $g^{-1} \in G$ est défini par la relation $g^{-1}g = gg^{-1} = e$, avec e l'élément neutre du groupe, i.e. tel que $\forall g \in G$, $ge = eg = g$.
- Pour tout groupe de Lie G , $\forall g \in G$ nous notons l'opération de translation à gauche (resp. à droite) par $l : G \rightarrow G$ (resp. $r : G \rightarrow G$) définie par $l_g(h) = gh$ (resp. $r_g(h) = hg$).
- Nous noterons Ad la représentation adjointe de G , i.e. $\forall g \in G$, $\text{Ad}(g) = dI_g(e)$ avec $I_g : G \rightarrow G$ la bijection définie par $I_g(\sigma) = g\sigma g^{-1}$. Dans un système de coordonnées g nous noterons $\text{Ad}_g(g)$ l'opérateur adjoint, et l^g (resp. r^g) l'opérateur de translation à gauche (resp. à droite).
- Nous noterons $\text{Ad}^X(g)$ la représentation matricielle de l'opérateur adjoint par rapport à la base de champs de vecteurs définie par X_1, X_2, X_3 , i.e. $X(e)\text{Ad}^X(g) = \text{Ad}(g)X(e)$, avec $X(\cdot)$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont les champs de vecteurs X_i .

¹à moins d'indication contraire, par régulière nous entendrons de classe \mathcal{C}^∞

- Un champ de vecteurs X_i sur G est dit *invariant à gauche* si

$$\forall g, h \in G, dl_g^g(h)X_i(h) = X_i(gh)$$

ce qui est équivalent à la propriété suivante :

$$\forall g \in G, dl_g^g(e)X_i(e) = X_i(g).$$

- Étant donné des champs de vecteurs X_1, \dots, X_m sur G , le système

$$\dot{g} = \sum_{i=1}^m u_i X_i(g)$$

est dit invariant à gauche si les champs de vecteurs X_i sont invariants à gauche.

- Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire $[\ , \]$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(a) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identité de Jacobi)

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$

pour tout triplet $[X, Y, Z]$ d'éléments de \mathfrak{g} .

- Soit V une variété, et $\{ X_i \in \mathcal{X}(V), i = 1, \dots, p \subset \mathbb{N} \}$ un ensemble de champs de vecteurs. $Lie(X_i)$ désigne l'algèbre de Lie engendrée par cet ensemble, c'est-à-dire l'ensemble obtenu par "crochets de Lie" successifs (répétés éventuellement à l'infini) des champs X_i . Rappelons que le crochet de Lie de deux champs de vecteurs X_i, X_j est défini par

$$[X_i, X_j] = dX_j(X_i) - dX_i(X_j).$$

- $Lie(X_i)(g_0)$ est l'espace vectoriel engendré par l'ensemble de vecteurs $\{X(g_0) : X \in Lie(X_i)\}$.

Acronymes

- **CRC** Commande référencée capteurs.
- **FT** Fonctions transverses (approche de commande par).
- **CRAL** Condition de rang de l'algèbre de Lie (LARC en anglais).

Introduction

Cette thèse porte sur la commande référencée capteur (CRC) des robots non holonomes. Plus précisément, on étudie l'utilisation de signaux issus des capteurs dans des boucles de commandes stabilisantes pour les robots mobiles sur roues. Afin d'expliquer la motivation de cette étude, et la positionner par rapport aux travaux existants, nous allons faire quelques rappels sur i) la commande des robots non holonomes, ii) la CRC des robots holonomes et iii) quelques travaux existants sur la CRC des robots non holonomes.

- i) **Commande de robots non holonomes.** Plusieurs problèmes de commande ont été abordés dans la littérature consacrée aux robots mobiles non holonomes : planification de trajectoires (i.e. synthèse de commandes en boucle ouverte), commande par retour de sortie (pour des applications de platooning par exemple), suivi de chemin, et suivi de trajectoires. La présente thèse concerne ce dernier problème et plus spécifiquement la stabilisation de la configuration complète du système (i.e. position et orientation). Pour un aperçu des autres problèmes nous renvoyons le lecteur à (Laumond, 2001). Bien que commandables, les systèmes non holonomes sont des systèmes fortement non linéaires avec des caractéristiques qui les rendent difficiles à commander dans certaines situations. En particulier, les robots non holonomes sur roues sont sujets à des contraintes sur les vitesses qui relèvent de la contrainte mécanique de roulement sans glissement des roues. D'un point de vue pratique, cette contrainte se traduit par le fait que les robots non holonomes sur roues ne peuvent pas se déplacer latéralement de manière instantanée. Par contre, il est possible d'approximer des déplacements dans cette direction en faisant des manœuvres. Du point de vue de l'automatique ces contraintes ont plusieurs conséquences. Tout d'abord, le système obtenu en linéarisant les équations du mouvement de ces véhicules autour de tout point d'équilibre n'est pas commandable. Cela empêche en particulier l'utilisation de techniques linéaires pour stabiliser asymptotiquement une configuration fixe. Comme nous le détaillerons par la suite, c'est aussi l'origine d'importants problèmes de robustesse. Deuxièmement, un résultat démontré dans (Brockett, 1983), souvent appelé Théorème de Brockett, implique qu'il n'existe pas de retour d'état autonome (i.e. qui dépende seulement de l'état) régulier pouvant stabiliser asymptotiquement un point fixe. Cependant, le système obtenu en linéarisant les équations du système de départ le long de certaines trajectoires de référence est commandable, auquel cas, il est possible de construire des retours d'état

linéaires asymptotiquement stabilisants. Le résultat donné dans (Lizárraga, 2003), lié à cette dichotomie, indique qu'il n'existe pas de retour d'état capable de stabiliser asymptotiquement toute trajectoire de référence réalisable pour un système non holonome. En particulier, cela explique pourquoi des commandes différentes doivent être utilisées pour stabiliser asymptotiquement des trajectoires de référence différentes. Ceci conduit à envisager des stratégies de commutation entre différentes lois de commande avec des règles de commutation dépendant des propriétés des trajectoires de référence à stabiliser. Cependant, lorsque la trajectoire de référence et ses propriétés ne sont pas connues à l'avance, ce type de stratégie ne permet toujours pas d'assurer la stabilisation asymptotique de façon inconditionnelle. Nous rappelons ci-dessous quelques résultats dans la littérature sur la commande par retour d'état de systèmes non holonomes, classés en fonction de la trajectoire de référence.

a. Stabilisation asymptotique de points fixes et compromis entre robustesse et vitesse de convergence. Le problème de la stabilisation asymptotique de points fixes est difficile, ne serait-ce qu'en raison de l'obstruction énoncée dans le Théorème de Brockett. Différentes solutions proposées dans la littérature sont rapidement rappelées ci-dessous :

- Dans (Samson, 1990) un retour d'état *instationnaire* (i.e. de type $u(g, t)$) régulier, périodique par rapport à t , est proposé dans le cas d'un robot de type unicycle. Ce résultat est à l'origine de nombreuses études sur ce type de commande. Dans (Coron, 1992) il est montré que tout système sans dérive, (localement) commandable en un point, peut être (localement) asymptotiquement stabilisé par un retour d'état de ce type. Plusieurs méthodes de synthèse de telles commandes ont également été proposées (Pomet, 1992; Coron et d'Andréa Novel, 1992; Teel et al., 1995; Samson, 1995). Un inconvénient de ces commandes est qu'elles ne permettent pas d'obtenir une convergence exponentielle (Gurvits et Li, 1992; M'Closkey, 1994; Morin, 1996), mais seulement polynomiale (lente). Ces commandes ne garantissent pas a priori la robustesse de la propriété de stabilité par rapport à des erreurs provenant de dynamiques non modélisées. Néanmoins, cette propriété de robustesse a pu être montrée dans quelques cas particuliers (Maini et al., 1999).
- Afin d'obtenir une convergence exponentielle des solutions vers l'équilibre désiré, d'autres types de commandes ont été considérées. En particulier, la classe de retours d'état continus et homogènes fournit un cadre très général pour atteindre cet objectif (M'Closkey et Murray, 1997), (Morin et al., 1999). Malheureusement, ce type de retour d'état n'est pas robuste vis-à-vis de dynamiques non modélisées (Lizárraga et al., 1999).
- Il existe aussi des retours d'état "hybrides" impliquant des commandes en boucle ouverte itérées périodiquement. Ce type de commande permet l'obtention de la convergence exponentielle et la robustesse vis-à-vis des dynamiques non modéli-

sées (Bennani et Rouchon, 1995; Morin et Samson, 1999). Cependant, cette propriété de convergence peut être perdue en présence de retards dans l'application de la commande ou de fluctuations de la période d'itération.

Ces études ont mis en évidence le fait qu'il est très difficile, sinon impossible, d'obtenir un compromis satisfaisant entre vitesse de convergence rapide et robustesse de la propriété de stabilité vis-à-vis d'erreurs de modélisation.

- b. Stabilisation de trajectoires admissibles non stationnaires. Le système linéaire approximant les équations du véhicule le long de trajectoires de référence admissibles non stationnaires est génériquement commandable (Sontag, 1987; Sontag, 1992; Coron, 1994). Ceci permet la synthèse de retours d'état linéaires "génériquement stabilisants". Par exemple, dans (Samson et Ait-Abderrahim, 1991) il est proposé deux synthèses de commande, une linéaire et l'autre non-linéaire, basées sur le linéarisé le long de la trajectoire. Dans (Kanayama et al., 1990) une commande non linéaire est aussi proposée pour la stabilisation de trajectoires. Cependant ces méthodes ne garantissent la convergence de l'erreur de suivi à zéro que sous des conditions d'excitation persistante. Pour simplifier, le point courant de la trajectoire de référence ne doit pas tendre vers un point fixe (cf. le cas évoqué précédemment).
- c. Stabilisation pratique de trajectoires générales. Partant des constats précédents, il a été proposé dans (Morin et Samson, 2003) d'abandonner l'objectif de stabilisation asymptotique, trop contraignant pour les systèmes non holonomes, au profit d'un objectif de *stabilisation pratique*. Avec cette nouvelle approche, connue comme l'approche par Fonctions Transverses (FT), l'objectif n'est plus de stabiliser asymptotiquement la trajectoire de référence, mais seulement un "petit" voisinage du point courant de cette trajectoire. En particulier, il ne s'agit plus d'annuler l'erreur de suivi de cette trajectoire mais seulement de la borner par une valeur arbitrairement petite réglable via le choix des paramètres de commande. Cette relaxation de l'objectif de suivi permet, entre autres choses, de stabiliser pratiquement *toute trajectoire* dans l'espace d'état du robot (i.e. même les trajectoires qui ne sont pas une solution des équations du robot) avec une unique loi de commande.

Un des objectifs de cette thèse est d'évaluer les propriétés de robustesse de lois de commande issues de cette approche, dans le cadre de la CRC en particulier.

- ii) **CRC de robots holonomes.** Dans le contexte de la robotique, la CRC a été initialement développée pour les robots manipulateurs. Cette approche consiste en la synthèse de commandes basées sur l'utilisation d'informations issues de capteurs extéroceptifs. Une hypothèse classique pour ce type de capteurs est que leur signal varie *uniquement* en fonction de la position relative du capteur par rapport à son environnement. Parmi les capteurs extéroceptifs on trouve par exemple les capteurs à ultrasons, les télémètres laser, les caméras, les GPS ou capteurs d'effort.

Dans (Samson et al., 1990), un formalisme général pour la commande des bras manipulateurs, basé sur la notion de "fonction de tâche", est proposé. Dans ce forma-

lisme, un problème de commande est posé comme la régulation d'une fonction de sortie du système de commande appelée fonction de tâche. Ce cadre est donc particulièrement bien adapté à la CRC, en utilisant par exemple comme fonction de tâche la fonction associée au signal (ou une combinaison des composantes de celle-ci). Bien que des conditions suffisantes de stabilité assez génériques ont été proposées dans (Samson et al., 1990), la vérification analytique de ces conditions reste un problème délicat en général, voire impossible à résoudre. En raison de leur utilité dans les applications robotiques, les capteurs visuels (i.e. caméras) ont fait l'objet de nombreux travaux dans le domaine de la CRC. Les méthodes développées dans ce cadre, généralement qualifiées de "méthodes d'asservissement visuel", illustrent assez bien les divers moyens d'utiliser des données capteurs dans des boucles de commande, ce qui nous conduit à en faire une description un peu plus détaillée ci-dessous. Ces méthodes sont typiquement classées en fonction de l'espace de synthèse de la commande (voir par exemple (Chaumette, 1990; Malis, 1998)). Une première approche, l'asservissement visuel 3D (aussi appelé "position-based visual servoing") consiste à exprimer la commande dans l'espace cartésien. Pour ce faire, une estimée \hat{g} de la pose g du robot doit être calculée à partir des données capteurs s . Si le modèle 3D de l'objet par rapport auquel on souhaite commander le robot, et les paramètres intrinsèques de la caméra sont connus, on peut envisager une "reconstruction géométrique" de la pose (Safae-Rad et Tchoukanov, 1992; D. DeMenthon, 1995; Ansar et Daniilidis, 2002). Ces conditions ne sont toutefois pas toujours remplies en pratique. De plus, des biais sur le modèle d'estimation de g peuvent se traduire par des erreurs de positionnement final, en particulier lorsque la valeur de s^* du signal à la position de référence n'est pas connue. En l'absence de modèles géométriques de la caméra et de l'environnement, on peut envisager, si les conditions expérimentales le permettent, d'identifier le jacobien $\frac{\partial s}{\partial g}$ (i.e. la matrice d'interaction) à la position désirée afin de construire un modèle local de la pose. L'asservissement 3D présente l'avantage de l'utilisation de mesures directement dans l'espace cartésien, ce qui permet la synthèse de lois de contrôle simples. Des inconvénients de cette approche sont qu'aucun contrôle n'est effectué sur l'image, ce qui accroît le risque de sortie de l'objet du champ de vision de la caméra (particulièrement pour des larges erreurs dans le modèle capteur-environnement) et la difficulté à démontrer analytiquement la stabilité globale du système commandé. Une autre approche de CRC, l'asservissement visuel 2D (aussi appelé "image based" en anglais) consiste à synthétiser la commande dans l'espace image (Chaumette, 1990; Espiau et al., 1992). Par rapport à l'approche précédente, l'étape d'estimation de la pose n'est plus nécessaire. La synthèse de la commande nécessite cependant une estimation de la matrice d'interaction, ou au minimum une connaissance a priori sur ses caractéristiques (positivité par exemple). Par rapport à l'asservissement 3D, cette approche permet toutefois d'obtenir de très bonnes précisions de positionnement relatif du robot par rapport à l'environnement, et présente l'avantage de nécessiter peu d'information a priori. Quelques inconvénients de cette

approche résident toutefois dans les faits que la dynamique cartésienne du robot est difficilement prévisible à l'avance (puisque la commande n'impose que la dynamique du signal), la difficulté de la caractérisation de la stabilité du système commandé vis-à-vis des erreurs d'estimation de la matrice d'interaction ou encore la possibilité de convergence à des minimaux locaux (Chaumette, 1998). D'autres approches ont été développées plus récemment, comme par exemple l'asservissement $2D\frac{1}{2}$ (Malis, 1998; Malis et al., 1999; Malis et Chaumette, 2002) qui présente l'intérêt de ne pas nécessiter de modèle de l'objet, de permettre un découplage des dynamiques de translation et rotation, et de garantir un maintien de l'objet dans l'image. En raison du caractère non linéaire des équations associées, les analyses de robustesse des lois de commande obtenues via ces différentes méthodes d'asservissement s'avèrent délicates et peu nombreuses. Le cas de l'asservissement $2D\frac{1}{2}$ semble à ce jour le plus propice à ce type d'analyse (Malis et Chaumette, 2002).

- iii) **CRC de robots non holonomes.** Il n'est pas possible de localiser un robot mobile non holonome dans l'espace cartésien à partir de mesures issues de capteurs proprioceptifs (typiquement les codeurs optiques des roues). En effet, pour ce type de véhicule, le retour à la configuration proprioceptive initiale suite à un déplacement ne garantit pas le retour à la position initiale du robot dans l'espace cartésien. De plus, la moindre erreur sur le modèle du robot utilisé pour l'estimation odométrique (par exemple sur le rayon des roues ou la distance entre roues motrices) se traduit par une dérive de l'estimation de la posture du robot dans l'espace cartésien. Les simples irrégularités du sol et les glissements éventuels ne font qu'aggraver le problème. L'utilisation de capteurs extéroceptifs est nécessaire pour éviter ce problème de dérive.

On trouve dans la littérature quelques travaux sur la commande référencée vision pour les robots mobiles sur roues. Ils impliquent typiquement l'utilisation d'une caméra (généralement embarquée sur le robot) pour observer des objets dans l'environnement proche du robot. Dans (Pissard-Gibollet et Rives, 1995), un des premiers travaux sur le sujet, la condition de Brockett est contournée en ajoutant un degré de liberté au système via l'utilisation d'une tourelle montée sur le robot et à l'extrémité de laquelle est montée la caméra. Ceci permet formellement de se ramener au cas d'une caméra pouvant être déplacée dans toutes les directions et d'adapter les schémas de CRC classiques développés dans ce cas. Cependant, seule la pose de la caméra est alors asymptotiquement stabilisée avec cette approche. D'autres travaux se contentent de stabiliser asymptotiquement une partie de la posture du robot (la position d'un point du robot, généralement) (Das et al., 2001). Parmi les travaux traitant de la stabilisation asymptotique de la pose complète de la plateforme mobile, certains reposent sur la reconstruction explicite (non linéaire) de l'état à partir des signaux-capteurs alors que d'autres utilisent des approximations linéaires de la transformation faisant passer des signaux-capteur à la pose du robot. Un retour d'état est ensuite synthétisé à partir d'une des méthodes de commande évoquées précédemment, i.e. retours d'état Lipschitz continus (Fang et al., 2005), retours d'état homogènes (Tsakiris et al., 1996;

Tsakiris et al., 1997b) ou retours d'état hybrides (Tsakiris, 1999). Les schémas de CRC qui en résultent héritent au mieux des propriétés du retour d'état sur lequel elles sont basées, et elles héritent toujours de ses limitations.

L'approche par FT apporte des solutions nouvelles à la problématique de la commande de robots non holonomes. Pour cette raison nous cherchons à déterminer si la CRC basée sur cette approche peut être robuste vis-à-vis des incertitudes et erreurs de modèle concernant les transformations (fonctions) reliant les signaux capteurs à la configuration du robot dans l'espace cartésien, et de dégager des conditions suffisantes pour avoir cette robustesse.

Contributions

Les contributions de cette thèse se situent à trois niveaux :

- synthèse de lois de commande basée sur l'approche FT, à partir de mesures capteur,
- analyse des propriétés de stabilité et de robustesse de ces commandes,
- évaluation, par le biais de simulation et d'expérimentations, de ces stratégies de commande.

En ce qui concerne la synthèse des lois de commande, deux approches sont proposées. La première est basée sur une reconstruction de la pose, tandis que la seconde consiste à synthétiser la commande dans l'espace des signaux capteurs. Dans le cas particulier d'un capteur visuel, ces approches peuvent être assimilées aux méthodes d'asservissement 3D et 2D.

Afin d'établir les propriétés de stabilité et de robustesse des lois de commande proposées, nous proposons tout d'abord un résultat de robustesse de l'approche FT vis-à-vis de dynamiques non modélisées. Ce résultat, bien que relativement simple, met en évidence une condition suffisante de stabilité qui est ensuite exploitée pour établir des conditions suffisantes de stabilité vis-à-vis d'erreurs de mesure. Plus précisément, nous montrons que la stabilisation pratique de trajectoires arbitraires peut être garantie sous une hypothèse relativement peu contraignante sur l'estimation de la pose. Une analyse plus fine (mais aussi plus délicate) est aussi menée sur la dynamique asymptotique du système (i.e. la convergence vers un point fixe) pour des trajectoires de référence stationnaires.

L'évaluation des méthodes proposées est effectuée sur la base d'un robot mobile équipé d'une caméra. De nombreux choix de commande, liées en particulier au choix d'estimation de la pose ou de la fonction transverse, sont proposés et comparés.

Organisation du mémoire

Outre cette introduction et une conclusion, ce mémoire est constitué de trois chapitres. Le premier chapitre débute par des rappels sur la modélisation des robots non holonomes. Quelques approches de commande proposées dans la littérature et leurs caractéristiques les plus significatives, dont l'approche de commande par FT, sont ensuite rapidement décrites.

Le chapitre se termine par un rappel sur la CRC pour les robots manipulateurs et de ses caractéristiques.

Le second chapitre débute par la présentation d'un résultat de robustesse vis-à-vis de dynamiques non modélisées pour l'approche de commande par FT. Une première approche de commande basée sur une estimation de l'état du robot à partir de mesures issues d'un capteur extéroceptif embarqué est ensuite développée. Cette estimation est utilisée pour synthétiser une loi de commande basée sur l'approche par FT. Une analyse de robustesse est menée sur le système commandé et des conditions suffisantes de stabilité sont établies vis-à-vis de la fonction d'estimation. Plusieurs choix de l'estimation de la pose sont ensuite considérés, et leurs performances sont illustrées en simulation dans le cas d'un capteur visuel. Cette approche a été aussi validée expérimentalement pour un robot de type unicycle avec une caméra embarquée.

Le troisième chapitre présente une deuxième approche de commande consistant à effectuer la synthèse dans l'espace capteur. L'objectif est ici de voir l'intérêt que peut avoir ce type d'approche, en particulier par rapport à la méthode précédente. Il s'avère que le calcul de la commande est plus complexe que dans la méthode précédente dans le sens où l'on a besoin d'estimer plus de termes. Les possibilités d'approximation au niveau du calcul de ces différents termes de la commande sont assez larges. Certaines d'entre elles, sélectionnées pour leur généralité ou leur pertinence pour l'application de suivi de cible référencé vision considérée pour nos expérimentations, sont étudiées plus en détail. Afin de pouvoir la comparer avec la méthode précédente, cette méthode de synthèse a été validée en simulation pour les robots de type unicycle et voiture.

Chapitre 1

État de l'art et modélisation

1.1 Modélisation des robots mobiles non holonomes

1.1.1 Rappels sur la notion de nonholonomie

Les définitions que nous rappelons ici sont très classiques (pour plus de détails voir par exemple (Campion et al., 1991)).

Définition 1 *Étant donné un système mécanique dont l'espace de configuration est une variété différentielle Q de dimension n , on appelle **contrainte cinématique** une contrainte sur les vitesses du type*

$$\langle a(q), \dot{q} \rangle = 0, \quad \forall q \in \mathcal{U}(q_0)$$

avec $\mathcal{U}(q_0)$ un voisinage du point $q_0 \in Q$, et $a(\cdot)$ une forme différentielle (ou champ de covecteurs) de Q dans \mathbb{R}^n .

Parmi les contraintes cinématiques du système, il faut distinguer celles qui sont en fait intégrables et qui peuvent, de ce fait, se ramener à des contraintes sur l'état seulement.

Définition 2 *Une contrainte cinématique $\langle a(q), \dot{q} \rangle = 0$ est dite **contrainte intégrable** s'il existe une fonction régulière $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $dh = a$. Dans ce cas la contrainte est équivalente à la relation statique $h(q) = \text{cste}$.*

Remarquons que la propriété d'intégrabilité est une propriété locale. Dans la pratique, un critère qui permet de repérer l'existence de contraintes intégrables est donné par le résultat suivant.

Théorème 1.1.1 (Théorème d'intégrabilité de Frobenius) *Soient un système mécanique sur une variété Q de dimension n , soumis à $k \leq n$ contraintes cinématiques **indépendantes**¹*

$$\langle a_i(q), \dot{q} \rangle = 0, \quad \forall q \in \mathcal{U}(q_0), \forall i = 1, \dots, k$$

¹au sens où la matrice $A(q) = (a_1(q) \dots a_k(q))$ est de rang k pour tout $q \in \mathcal{U}(q_0)$

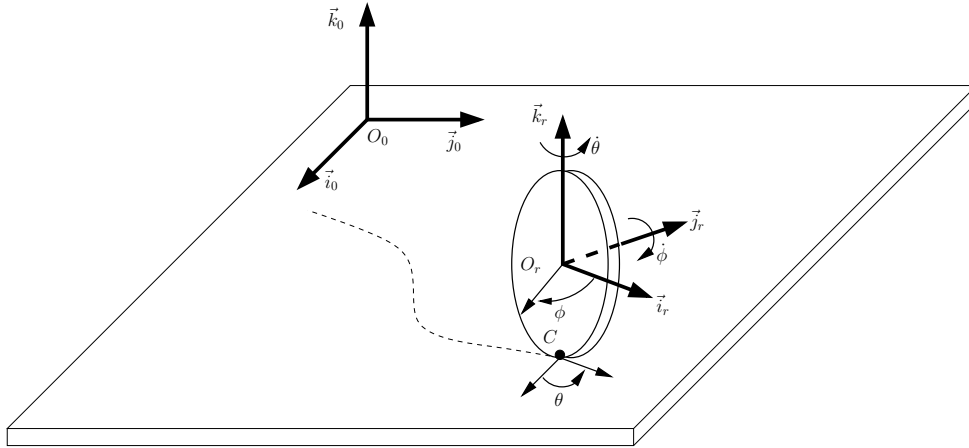


FIG. 1.1: Roue verticale qui roule sans glisser

et $\{X_1, \dots, X_{n-k}\}$ une famille de champs de vecteurs sur $\mathcal{U}(q_0)$ orthogonaux aux a_i . Si $\text{Lie}(X_i)(q)$ est de dimension $n - p$ pour tout $q \in \mathcal{U}(q_0)$ alors il existe p contraintes intégrables (au sens où l'on peut trouver des fonctions scalaires h_1, \dots, h_p indépendantes et des fonctions $\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{p,n}$ telles que $dh_i(q) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}(q)a_j(q)$).

(Voir par exemple (Warner, 1983), (Isidori, 1995)[ch. 1] pour une preuve).

Nous sommes à présent prêts à définir un système non holonome.

Définition 3 Un système non holonome est un système mécanique soumis à un ensemble de contraintes cinématiques

$$\langle a_i(q), \dot{q} \rangle = 0, \quad \forall q \in \mathcal{U}(q_0), \forall i = 1, \dots, k$$

indépendantes et non intégrables (au sens où il n'existe pas de contrainte intégrable). En particulier, on appelle **modèle cinématique** du système le modèle

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v := \sum_{i=1}^{n-k} X_i(q)v_i \quad (1.1)$$

avec $\{X_1, \dots, X_{n-k}\}$ une famille de champs de vecteurs telle que $\langle a_i(q), X_j(q) \rangle = 0, \quad \forall i = 1, \dots, k, \quad \forall j = 1, \dots, n - k$. La variable $v = (v_1, \dots, v_{n-k}) = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m$ est assimilable à une variable de commande en vitesse. On appelle m (la dimension de l'espace des vitesses instantanées possibles) le nombre de degrés de liberté du système.

Ces concepts seront illustrés sur des systèmes physiques dans les sous-sections suivantes.

1.1.2 La contrainte de roulement sans glissement

Considérons une roue qui roule sans glisser sur un sol plan, comme illustré sur la Figure 1.1. $F_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ est un repère fixe associé au sol. $F_r = (O_r, \vec{i}_r, \vec{j}_r, \vec{k}_r)$ est un repère

associé à la roue tel que son origine coïncide avec le centre de la roue. L'axe \vec{k}_r reste parallèle à celui du repère fixe (\vec{k}_0), l'axe \vec{j}_r coïncide avec l'axe de roulement de la roue et, finalement, l'axe \vec{i}_r est donné par le produit $\vec{j}_r \wedge \vec{k}_r$. L'angle signé entre \vec{i}_0 et \vec{i}_r est noté θ tandis que φ désigne l'angle entre \vec{i}_r et $\overrightarrow{O_r P_0}$, avec P_0 un point appartenant au périmètre de la roue. La vitesse angulaire de la roue autour de son axe central est notée $\dot{\varphi}$ et celle autour de l'axe vertical du vecteur directeur k_r est notée $\dot{\theta}$. On note x, y les deux premières coordonnées du centre O_r de la roue dans F_0 , et r le rayon de la roue. La configuration de la roue est donnée par $q = (x, y, \theta, \varphi)' \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Clairement $\dim(Q) = 4$. Finalement, C désigne le point de la roue en contact avec le sol. La contrainte de roulement sans glissement implique que la vitesse du point C par rapport au repère fixe F_0 est nulle ($\vec{V}(C/F_0) = 0$). Soit $\vec{w}_{r/0} = \dot{\theta}\vec{k}_r + \dot{\varphi}\vec{j}_r$ le vecteur vitesse angulaire de la roue par rapport au repère fixe F_0 . Par application d'un théorème classique de composition de vitesses :

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{V}(C/F_0) &= \vec{V}(O_r/F_0) + \vec{w}_{(r/0)} \wedge \overrightarrow{O_r C} \\ &= \vec{i}_0 \dot{x} + \vec{j}_0 \dot{y} + (\vec{k}_0 \dot{\theta} + \dot{\varphi}(-\vec{i}_0 \sin \theta + \vec{j}_0 \cos \theta)) \wedge (-r\vec{k}_0) \\ &= \vec{i}_0(\dot{x} - r\dot{\varphi} \cos \theta) + \vec{j}_0(\dot{y} - r\dot{\varphi} \sin \theta) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Il en résulte les deux contraintes cinématiques indépendantes

$$\begin{cases} \dot{x} - r\dot{\varphi} \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - r\dot{\varphi} \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

L'intégrabilité de ces contraintes est testée en appliquant le Théorème 1.1.1 avec

$$(a_1(q), a_2(q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (X_1(q), X_2(q)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

Après avoir vérifié que $Lie(X_i)(q) = \mathbb{R}^4 \forall q \in Q$ il en résulte que ces contraintes ne sont pas intégrables. On déduit également qu'un modèle cinématique de la roue verticale est donné par

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v, \quad \bar{X}(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

avec $v = (v_1, v_2)'$, $v_1 = r\dot{\varphi}$ la vitesse de roulement et $v_2 = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de la roue autour de l'axe vertical.

1.1.3 Modèle cinématique d'un véhicule de type unicycle

Considérons le robot mobile de type unicycle schématisé sur la Figure 1.2. Par simplicité, le robot est représenté par sa projection sur un plan parallèle au sol. L'unicycle est

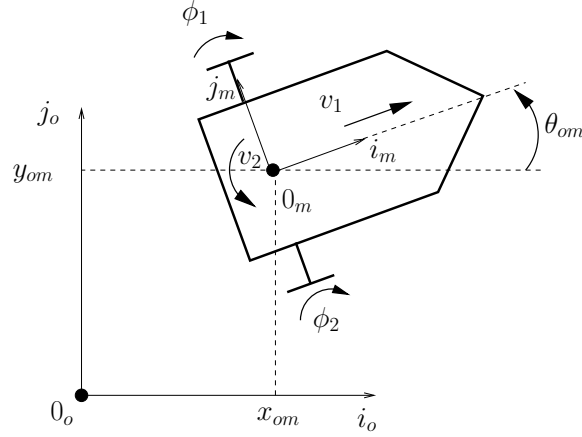


FIG. 1.2: Robot mobile de type unicycle

équipé de deux roues actionnées indépendamment. Pour modéliser ce système nous considérons le point O_m situé au milieu de l'essieu des roues. Un repère $F_m = (O_m, \vec{i}_m, \vec{j}_m)$ est associé à ce point, comme illustré sur la figure. Un repère inertiel $F_0 = (O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ est fixé au sol. Un vecteur de configuration de l'unicycle incluant le train moteur est donné par $q = (x, y, \theta, \varphi_1, \varphi_2)' \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, avec x, y les coordonnées du point O_m dans le repère F_0 , θ l'angle entre \vec{i}_0 et \vec{i}_m et φ_i les angles des roues autour de l'axe de roulement. Soit r le rayon des roues et R la distance entre le point O_m et chaque roue. L'application des contraintes (1.3) à chacune des roues donne :

$$\begin{aligned} \text{Roue gauche} & \begin{cases} \dot{x} - R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_1 \cos \theta = 0 \\ \dot{y} + R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_1 \sin \theta = 0 \end{cases} \\ \text{Roue droite} & \begin{cases} \dot{x} + R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_2 \cos \theta = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_2 \sin \theta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{cases} (c_1) & \dot{x} - R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_1 \cos \theta = 0 \\ (c_2) & \dot{y} - R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_1 \sin \theta = 0 \\ (c_3) & \dot{x} + R\dot{\theta} \cos \theta - r\dot{\varphi}_2 \cos \theta = 0 \\ (c_4) & \dot{y} + R\dot{\theta} \sin \theta - r\dot{\varphi}_2 \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Un examen rapide montre que ces contraintes ne sont pas indépendantes. En les écrivant sous la forme $\langle a_i(q), \dot{q} \rangle = 0$, on vérifie en effet que la matrice

$$A_4(q) = (a_1(q) \dots a_4(q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & R \cos \theta & R \sin \theta \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

est seulement de rang trois (car $\sin \theta a_1(q) - \sin \theta a_3(q) - \cos \theta a_2(q) + \cos \theta a_4(q) = 0$). Il suffit donc de ne considérer que trois de ces contraintes, les trois premières par exemple. Le test d'intégrabilité par application du Théorème 1.1.1 est réalisé avec

$$A_3(q) = (a_1(q) \dots a_3(q)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -R \cos \theta & -R \sin \theta & R \cos \theta \\ -r \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -r \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$(X_1(q), X_2(q)) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{r} & -\frac{R}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{R}{r} \end{pmatrix}.$$

Un rapide calcul permet de vérifier que $\dim(\text{Lie}(X_i)(q)) = 4 = n - 1$. Par application du Théorème de Frobenius, on en déduit l'existence d'une contrainte intégrable. En effet, à partir des contraintes $c_i = 0$ de (1.5) on a aussi $\cos \theta (c_3 - c_1) + \sin \theta (c_4 - c_2) = 0$, d'où la relation

$$2R\dot{\theta} + r(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) = 0$$

dont l'intégration est immédiate et donne

$$2R\theta + r(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{cste.}$$

Cette relation montre qu'il est par exemple possible d'exprimer φ_2 en fonction de φ_1 et θ . Dans la pratique, comme la valeur de l'angle φ_1 ne présente pas d'intérêt majeur, on ne retient que le vecteur $q = (x, y, \theta)' \in Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ pour caractériser la configuration du véhicule. Un modèle cinématique associé est donné par

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v, \quad \bar{X}(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

avec $v = (v_1, v_2)'$, $v_1 = r(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$ la vitesse longitudinale ou d'avancement du véhicule, et $v_2 = \dot{\theta} = \frac{r}{2R}(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1)$ sa vitesse de rotation autour de l'axe perpendiculaire au plan de roulement. La similarité de ce modèle avec le modèle (1.4) de la roue verticale, justifie l'appellation de véhicule de type unicycle.

1.1.4 Modèle cinématique d'un robot de type voiture

La détermination du modèle cinématique de la voiture est une extension du cas précédent. Avec les notations de la Figure 1.3, on obtient le modèle bien connu

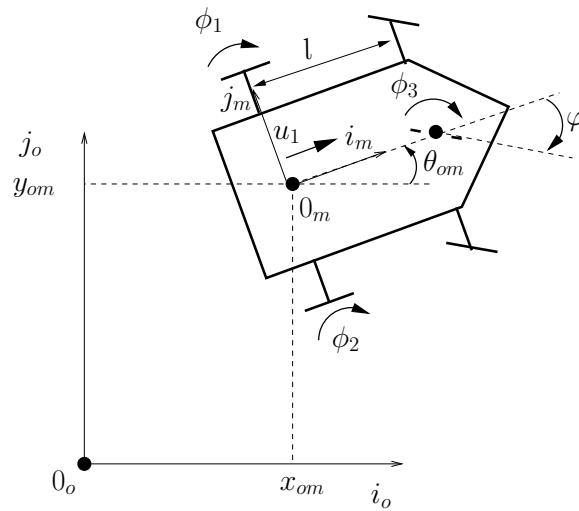


FIG. 1.3: Robot mobile de type voiture

(Murray et Sastry, 1993).

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = u_1 \frac{\tan \varphi}{\ell} \\ \dot{\varphi} = u_2 \end{cases} \quad (1.7)$$

avec $u_1 = \frac{r}{2}(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2)$ la vitesse d'avancement de la voiture, et $u_2 = \dot{\varphi}$ la vitesse de braquage des roues directrices. Un modèle équivalent, légèrement plus simple, est obtenu en posant dans (1.7)

$$\delta := \frac{\tan \varphi}{\ell}, \quad v_1 := u_1, \quad v_2 := \frac{u_2}{\ell \cos^2 \varphi}$$

Ceci donne le modèle :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_1 \cos \theta \\ \dot{y} = v_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = v_1 \delta \\ \dot{\delta} = v_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v \quad (1.9)$$

avec

$$\bar{X}(q) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 \\ \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } v = (v_1, v_2)'$$

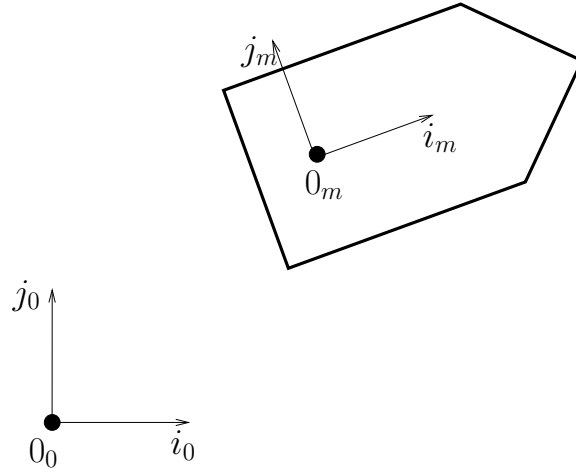


FIG. 1.4: Robot mobile (d) et repère de référence (g)

1.1.5 Modèle cinématique de la pose et propriétés

Un modèle unifié de la cinématique de la pose, pour les véhicules de type unicycle et voiture, nous permettra de mener dans les chapitres suivants des analyses de stabilité conjointes pour ces systèmes. La structure du modèle proposé est aussi utilisable pour des systèmes plus complexes (chariot ou voiture avec remorques, par exemple).

1.1.5.1 Le groupe de Lie $SE(2)$

Dans le cas plan, le groupe de Lie $SE(2)$ constitue un cadre mathématique naturel pour représenter la situation d'un repère, $\mathcal{F}_m = \{0_m, \vec{i}_m, \vec{j}_m\}$, par rapport à un autre, $\mathcal{F}_0 = \{0_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0\}$. En effet, cette situation peut être caractérisée par $g_{om} = (p'_{om}, \theta_{om})' \in SE(2)$, avec p_{om} le vecteur de coordonnées de $\vec{0_0 0_m}$ dans la base du repère \mathcal{F}_0 , et θ_{om} l'angle orienté entre \vec{i}_0 et \vec{i}_m .

$SE(2)$ est pourvu de l'opération de groupe définie par

$$(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2 := \begin{pmatrix} p_1 + R(g_1)p_2 \\ \theta_1 + \theta_2 \end{pmatrix} = g_1 + X(g_1)g_2 \quad (1.10)$$

avec $R(g)$ et $X(g)$ les matrices de rotation et homogène définies au début du document. L'élément neutre e de ce groupe (tel que $ge = eg = g$) est $e = (0', 0)'$ et l'inverse g^{-1} de g (tel que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$) est

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -R(g)^{-1}p \\ -\theta \end{pmatrix} = -X(g)^{-1}g \quad (1.11)$$

Par la suite, e sera aussi noté 0.

On déduit de ces relations que la situation g_{ab} d'un repère \mathcal{F}_b par rapport à un repère \mathcal{F}_a satisfait la relation $g_{ab} = g_{oa}^{-1}g_{ob}$. Remarquons aussi que $g_{ab} = g_{ba}^{-1}$ et $g_{ab}g_{ba} = 0$.

1.1.5.2 Modèle cinématique unifié

Considérons le robot mobile représenté dans la Fig. 1.4. Un repère $\mathcal{F}_m = \{0_m, \vec{i}_m, \vec{j}_m\}$ est attaché à la plateforme mobile, et on note $g_{om} \in SE(2)$ la situation de ce repère par rapport au repère inertiel $\mathcal{F}_0 = \{O_0, \vec{i}_0, \vec{j}_0\}$. L'équation cinématique de la plateforme mobile est donnée par

$$\dot{g}_{om} = X(g_{om})C(\zeta)v \quad (1.12)$$

avec

$$X(g_{om}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{om} & -\sin \theta_{om} & 0 \\ \sin \theta_{om} & \cos \theta_{om} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$C(\zeta)$ une matrice qui peut dépendre du vecteur ζ d'état interne (comme par exemple l'angle de braquage dans le cas d'une voiture), et v un vecteur de vitesses instantanées assimilé à un vecteur de commande.

- i. Lorsque la plateforme est omnidirectionnelle, $C(\zeta)$ est simplement la matrice identité et $\dim(v) = 3$, v_1 et v_2 correspondent aux composantes du vecteur de vitesses de 0_m exprimées dans la base de \mathcal{F}_m , et v_3 désigne la vitesse de rotation de \mathcal{F}_m .
- ii. Lorsque la plateforme mobile est de type unicycle, le vecteur de vitesse de 0_m est contraint à être parallèle à \vec{i}_m , de manière que

$$C(\zeta) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

et $\dim(v) = 2$, v_1 est l'intensité de la vitesse de 0_m , et v_2 désigne la vitesse de rotation de \mathcal{F}_m . L'équation (1.12) est alors équivalente à (1.6) après avoir posé $q = g_{om}$ et $\bar{X}(q) = X(g_{om})C(\zeta)$.

- iii. Lorsque la plateforme mobile est de type voiture, le vecteur ζ est réduit au scalaire δ et

$$C(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \delta \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

avec $\delta = (\tan \varphi)/\ell$, φ l'angle de braquage, et ℓ la distance entre les axes des roues avant et arrière. Dans ce cas $\dim(v) = 1$ avec $v = v_1$ l'intensité de la vitesse de 0_m . L'équation (1.12) est alors équivalente à (1.9) en posant $q = g_{om}$ et $\bar{X}(q) = X(g_{om})C(\zeta)$, modulo l'équation complémentaire, $\dot{\delta} = v_\delta = v_2/(\ell \cos^2 \varphi)$.

1.1.5.3 Modèle dynamique des véhicules sur roues et choix du cadre cinématique

Le modèle dynamique des robots mobiles est classiquement établi à partir du Lagrangien du système (voir par exemple (Campion et al., 1991; Morin, 2004) pour un développement

détaillé) et peut s'écrire comme

$$\bar{M}(q)\dot{v} + \bar{N}(q, v)v + \bar{G}(q) = X'_q(q)D(q)\Gamma \quad (1.16)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{M}(q) &= \bar{X}(q)'M(q)\bar{X}(q) \\ \bar{N}(q, v) &= \bar{X}(q)'N(q, \bar{X}(q)v)\dot{\bar{X}}(q) \\ \bar{G}(q) &= \bar{X}(q)'G(q) \\ N(q, \dot{q}) &= \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}'M(q)\dot{q}\right) \\ G(q) &= \frac{\partial V}{\partial q}(q) \end{aligned}$$

où $M(q)$ est la matrice d'inertie, symétrique, définie positive par construction, $V(q)$ l'énergie potentielle, $D(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ une matrice de rang plein (ce qui revient à supposer que le système a autant d'actionneurs m qu'il a de degrés de liberté), et $\Gamma \in \mathbb{R}^m$ correspondant aux forces extérieures. On peut réécrire (1.16) sous la forme d'un système de commande comme suit

$$\dot{v} = (\bar{M}(q))^{-1} (\bar{X}'(q)D(q)\Gamma - \bar{N}(q, v)v - \bar{G}(q)). \quad (1.17)$$

Le changement de variables linéarisant (aussi connu comme la méthode des couples calculés –ou “computed torques” en anglais–) donné par

$$\Gamma = [\bar{X}'(q)D(q)]^{-1} (\bar{M}(q)w + \bar{N}(q, v)v + \bar{G}(q)) \quad (1.18)$$

transforme (1.17) en

$$\dot{v} = w \quad (1.19)$$

avec w une nouvelle variable de commande. Rappelons que $\bar{X}(q) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $D(q)$ sont de rang plein et que, par définition, $M(q)$ est positive symétrique, donc inversible et de rang plein. Par suite, w est liée bijectivement à Γ pour tout (q, v, t) fixé. Un modèle dynamique simplifié, prenant implicitement en compte cette relation entre Γ et w , est donc donné par (1.1) et (1.19), c.a.d.

$$\dot{q} = \bar{X}(q)v \quad (1.20a)$$

$$\dot{v} = w \quad (1.20b)$$

Au même titre que le modèle dynamique complet (1.1)-(1.16), ce modèle peut être utilisé pour la synthèse de lois de commande en assimilant w à un vecteur de commande. Cependant, la plupart des études sur les véhicules sur roues se limitent au modèle cinématique (1.20a) en posant v pour vecteur de commande. C'est également l'option que nous avons retenue ici. Plusieurs raisons justifient ce choix :

- Après avoir déterminé une loi de commande v^* sur la base de (1.20a) (modèle cinématique), il n'est pas difficile de déterminer une commande en couples Γ permettant de réaliser cette vitesse v^* . En effet, la loi de commande

$$w = \dot{v}^* - k(v - v^*), \quad (1.21)$$

avec $k > 0$ un paramètre de gain défini par l'utilisateur, transforme (1.20b) en

$$\overline{\dot{v} - v^*} = -k(v - v^*); \quad (1.22)$$

et entraîne la convergence exponentielle de v vers v^* . Au vu de (1.18) et (1.21) il suffit donc d'appliquer la commande en couples

$$\Gamma = [X'_q(q)D(q)]^{-1} (\bar{M}(q)(\dot{v}^* - k(v - v^*)) + \bar{N}(q, v)v + \bar{G}(q)) \quad (1.23)$$

pour obtenir le même résultat.

- Les nonlinéarités “dures” (nonholonomie) du système se situent au niveau de la cinématique.
- La simplicité du modèle cinématique. En particulier, ce modèle ne fait pas intervenir un certain nombre de paramètres spécifiques à chaque véhicule tel que inertie, masse, etc. De plus, pour de nombreuses applications, il n'est pas nécessaire de connaître ces termes avec précision.
- Dans la pratique, les moteurs sont souvent dotés d'asservissements bas niveau qui permettent de réaliser approximativement le découplage obtenu avec la commande en couples (1.23), et donc de se ramener à un problème de commande en vitesse avec v^* devenant “in fine” l'objet de la synthèse de commande.

1.2 Propriétés du modèle cinématique

Ayant fait le choix de travailler avec un modèle cinématique, nous allons analyser quelques propriétés fondamentales de ce modèle du point de vue de la commande.

1.2.1 Commandabilité

Définition 4 Soit un système de commande

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m v_i X_i(q), \quad (m < n) \quad (1.24)$$

sur une variété Q de dimension n . On considère comme “commandes admissibles” l'ensemble \mathcal{V} des fonctions $v = (v_1, \dots, v_m)'$ définies et continues par morceaux sur un intervalle $[0, T_v]$ de \mathbb{R}_+ , et telles que $\|v(t)\| \leq 1 \forall t \in [0, T_v]$. On note $q_v(t, t_0, q_0)$ la valeur en t de la solution du système, pour la commande v et la condition initiale q_0 en $t = t_0$. Soit

q_0 un point d'équilibre du système associé à la commande $v = 0$. On dit que le système est **commandable** en q_0 , si l'ensemble

$$\{q_v(t, 0, q_0) : v \in \mathcal{V}, t \in [0, T_v]\}$$

contient un voisinage de q_0 . Si ce voisinage est Q tout entier, le système est dit **globalement commandable**.

Le résultat classique suivant (voir par exemple (Nijmeijer et Van der Schaft, 1991) pour une démonstration) fournit une condition suffisante (si les champs de vecteurs sont analytiques, la condition devient aussi nécessaire) pour qu'un système sans dérive soit commandable.

Théorème 1.2.1 ((Chow, 1939)) Soit le système sans dérive (1.24) sur une variété Q de dimension n . Alors, si

$$\dim \text{Lie}(X_i)(q_0) = n, \quad (1.25)$$

le système est commandable en q_0 . Si (1.25) est vérifiée pour tout q_0 et Q est une variété connexe, alors le système est globalement commandable.

La condition (1.25) est connue comme *condition de rang de l'algèbre de Lie (CRAL)*. Par application du théorème (1.2.1), on vérifie facilement que les modèles (1.6) et (1.9) associés aux véhicules de type unicycle et voiture sont globalement commandables.

1.2.2 Stabilisabilité

Le résultat suivant a été initialement établi dans (Brockett, 1983) et soulève une difficulté importante concernant la stabilisabilité asymptotique de configurations fixes pour les systèmes non holonomes.

Théorème 1.2.2 Soit un système $\dot{q} = f(q, v)$ avec $f(q_0, 0) = 0$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ dans un voisinage \mathcal{U} de $(q_0, 0)$. Une condition nécessaire pour qu'il existe un retour d'état $v(q) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ stabilisant asymptotiquement q_0 , est que l'application $(q, v) \mapsto f(q, v)$ soit surjective dans \mathcal{U} ; c'est-à-dire que $f(\mathcal{U})$ doit contenir un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$.

En utilisant le fait que $\bar{X}(q)$ est rectangulaire et de rang plein pour la classe de systèmes considérés ici, on déduit de ce théorème qu'il n'existe pas pour ces systèmes de retour d'état autonome continu $v(q)$ stabilisant asymptotiquement une configuration fixe. Néanmoins, le résultat suivant établit pour tout système sans dérive commandable, l'existence de retours d'état instationnaires $v(q, t)$ (i.e. dépendant explicitement du temps, généralement d'une façon périodique), originellement proposés par (Samson, 1990) dans le cadre de la stabilisation d'un robot de type unicycle, qui stabilisent asymptotiquement une configuration fixe donnée.

Théorème 1.2.3 ((Coron, 1992)) Soit le système sans dérive (1.24) sur \mathbb{R}^n avec $\text{Lie}(X_i)(0) = \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $T > 0$, il existe un voisinage \mathcal{U} de $0 \in \mathbb{R}^n$ et un retour d'état instationnaire $v(q, t)$ avec $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$ tels que

- i) $v(0, t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,
- ii) $v(q, t + T) = v(q, t)$ pour tout $(q, t) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}$
- iii) $q = 0$ est asymptotiquement stable pour le système commandé.

Si de plus $\text{Lie}(X_i)(q) = \mathbb{R}^n$ pour tout $q \in \mathbb{R}^n$, alors cette propriété est vraie avec $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ et $q = 0$ est globalement asymptotiquement stable.

1.2.3 Propriétés de symétrie et modèles d'erreur

Une propriété caractéristique du système (1.12) est son invariance à gauche par rapport à l'opération de groupe dans $SE(2)$. Cette propriété signifie que les équations du système sont les mêmes quel que soit le repère inertiel par rapport auquel elles sont exprimées, i.e. $\dot{g}_{ap} = X(g_{ap})C(\zeta)v$ pour tout repère inertiel \mathcal{F}_a . D'un point de vue mathématique, la notion de "symétrie", que nous rappelons ci-dessous (Grizzle et Marcus, 1985), permet de préciser cette propriété.

Définition 5 Soit le système (1.24) défini sur une variété V de dimension n , et $\Phi : V \rightarrow V$ un difféomorphisme. On dit que Φ est une **symétrie** pour (1.24) si, pour toute solution $q(t)$ de (1.24) associée à une commande $u(t)$, $\Phi(q(t))$ est aussi une solution de (1.24) associée à la même commande $u(t)$.

Soit $\bar{\Phi} : G \times V \rightarrow V$, avec G un groupe de Lie. On suppose que pour tout $q \in V$ et tout $g, h \in G$, $\bar{\Phi}(e, q) = q$ et $\bar{\Phi}(g, \bar{\Phi}(h, q)) = \bar{\Phi}(gh, q)$. Alors, si pour tout $g \in G$ $\bar{\Phi}(g, \cdot)$ est une symétrie pour (1.24), on dit que $\bar{\Phi}$ est un **groupe de symétries** pour (1.24).

Dans le cas où $V = G$ on dit que (1.24) est un **système sur un groupe** ou qu'il est **invariant à gauche** sur G si l'opération de groupe $\bar{\Phi} : G \times G \rightarrow G$ définie par $\bar{\Phi}(g, h) = gh$ est un groupe de symétries pour (1.24).

Pour les robots mobiles (et plus généralement les véhicules), les propriétés de symétrie que l'on vient de rappeler peuvent être mises à profit pour l'obtention de modèles d'erreur par rapport à un repère mobile. Plus précisément, dans (Bloch et al., 1996) les auteurs proposent une modélisation dans laquelle ils décomposent le modèle cinématique des véhicules sur roues en deux sous-systèmes. On commence par décomposer l'espace de configuration Q des véhicules comme le produit $Q = G \times S$ avec G le groupe de Lie associé à la situation du corps principal du véhicule et S un espace associé à des variables internes (par exemple l'angle volant dans le cas de la voiture). Ceci conduit à écrire

$$q = \begin{pmatrix} g \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \text{avec } g \in G, \zeta \in S$$

et à décomposer le modèle cinématique $\dot{q} = \sum_{i=1}^m X_i(q)v_i$ comme suit

$$\begin{cases} \dot{g} = \sum_{i=1}^m v_i X_i^g(g, \zeta) \\ \dot{\zeta} = \sum_{i=1}^m v_i X_i^\zeta(\zeta) \end{cases} \quad (1.26)$$

Remarquons que les modèles cinématiques (1.6) de l'unicycle et (1.9) de la voiture sont clairement de la forme (1.26) avec $G = SE(2)$, $g = (x, y, \theta)'$ et $S = \emptyset$, pour l'unicycle et $S = \mathbb{R}$ pour la voiture, avec $\zeta = \delta$. Il est facile de vérifier que l'application $\bar{\Phi} : SE(2) \times Q \rightarrow Q$ définie par

$$\bar{\Phi}\left(g_1, \begin{pmatrix} g_2 \\ \zeta \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

est un groupe de symétries pour ce système. Dans ce cas, (1.12) n'est autre qu'une réécriture du premier sous-système de (1.26). Il découle de cette propriété qu'étant données deux courbes régulières $g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in G$ avec $\dot{g}_i = X(g_i)c_i$, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(g_1^{-1}g_2) &= \frac{d}{dt}(g_{12}) = X(g_{12})(c_2 - \text{Ad}^X(g_{21})c_1) \\ \frac{d}{dt}(g_1g_2^{-1}) &= X(g_1g_2^{-1})\text{Ad}^X(g_2)(c_1 - c_2) \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec, dans le cas du groupe $SE(2)$ et $g = (x, y, \theta)'$:

$$\text{Ad}^X(g) = \begin{pmatrix} R(\theta) & \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

qui n'est autre que la représentation matricielle de l'opérateur adjoint par rapport à la base de champs de vecteurs définie par $\{X_1, X_2, X_3\}$. Le détail de calcul de ces relations est donné dans l'annexe C.

1.2.3.1 Système d'erreur

On déduit de (1.12) et (1.28) que la situation relative $g := g_{or}^{-1}g_{om}$ ($= g_{rm}$) du repère associé à la plateforme mobile \mathcal{F}_m par rapport à un repère de référence mobile \mathcal{F}_r satisfait l'équation suivante :

$$\dot{g} = X(g)(C(\zeta)v - \text{Ad}^X(g^{-1})c_r(t)) \quad (1.30)$$

avec $c_r(t)$ le vecteur de vitesse du repère de référence (au temps t) défini par

$$\dot{g}_{or}(t) = X(g_{or})c_r(t)$$

Il est clair que (1.30) est une généralisation de (1.12). Une propriété remarquable liée au choix de g_{rm} et à la propriété de symétrie de groupe, est que les champs de commande associés à (1.30) sont les mêmes que ceux du système (1.12). La situation relative g_{rm}

peut être vue comme une “erreur de suivi” que la commande est chargée de stabiliser à zéro. La relation (1.30) met en évidence qu’il n’est pas possible de maintenir cette erreur à zéro quand la trajectoire de référence n’est pas réalisable par la plateforme non holonome, lorsque, par exemple, la deuxième composante de $c_r(t)$ est non nulle.

Pour ce qui est du sous-système de variables internes, étant donné que S est en général un groupe abélien, on peut choisir simplement comme erreur pour ce sous-système $\zeta_{rm} := \zeta_m - \zeta_r$ et l’équation cinématique correspondante peut être écrite comme $\dot{\zeta}_{rm} = \sum_{i=1}^m v_i X_i^\zeta(\zeta_{rm} + \zeta_r) - \dot{\zeta}_r$. Dans le cas d’un véhicule de type unicycle, nous avons vu que $S = \emptyset$ (pas de variable interne). Dans le cas d’un véhicule de type voiture, on a $S = \mathbb{R}$ et $\zeta = \delta = \frac{\tan \varphi}{l}$.

1.3 Commande par retour d’état des robots non holonomes

L’objectif de cette section est de rappeler quelques résultats sur la stabilisation par retour d’état des véhicules non holonomes, en mettant l’accent sur les problèmes de robustesse sous-jacents. Pour préciser les problèmes de commande de robots non holonomes abordés dans la littérature, nous avons besoin de quelques définitions préliminaires.

1.3.1 Définitions

1.3.1.1 Trajectoires admissibles et trajectoires générales

Définition 6 On appelle trajectoire admissible (ou réalisable) d’un système de commande $\dot{q} = f(q, v)$ sur une variété V , toute fonction $q : \mathbb{R} \rightarrow V$ qui vérifie l’équation du système pour une commande donnée v_r de classe \mathcal{C}^0 , i.e. $\dot{q}_r = f(q_r, v_r)$.

On vérifie aisément que les points fixes sont des trajectoires admissibles pour les systèmes non holonomes (1.12) pour lesquels $f(q, 0) = 0 \forall q$.

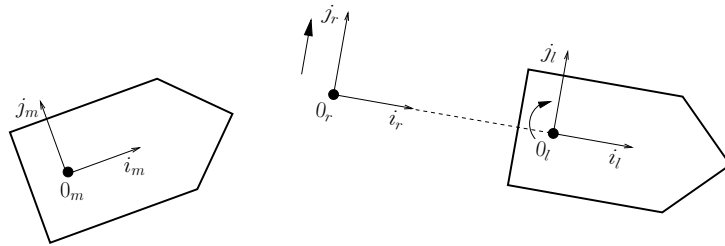


FIG. 1.5: Suivi d’un véhicule non holonome (d) par un robot commandé du même type (g).

Bien que ce problème puisse paraître exotique de prime abord, on peut être amené en pratique à considérer le suivi de trajectoires non réalisables. Par exemple, considérons le suivi d’un véhicule non holonome par un robot commandé, illustré sur la figure 1.5. Il ne suffit pas que les deux véhicules soient du même type pour que le problème de commande soit posé en termes de suivi d’une trajectoire de référence réalisable. En effet, dans la

pratique, pour éviter des collisions entre les deux véhicules, on est obligé de déporter le repère de référence d'une certaine distance derrière le véhicule de tête. Dès que le véhicule de tête tourne, un déplacement latéral (dans la direction \vec{j}_r) est généré dans le repère déporté, donnant lieu à une trajectoire non réalisable par le robot commandé. La définition suivante généralise donc les trajectoires auxquelles on est confronté dans la commande des robots non holonomes.

Définition 7 *On appelle trajectoire générale sur une variété V , toute fonction de \mathbb{R} dans V régulière (i.e. non nécessairement une trajectoire admissible).*

1.3.2 Stabilisation de configurations fixes

La stabilisation asymptotique des points fixes constitue un des problèmes de commande les plus difficiles pour les robots non holonomes. Au moins deux faits justifient cette assertion : a) le système obtenu en linéarisant les équations (1.24) autour d'une configuration fixe n'est pas commandable (car $m < n$), ce qui empêche en particulier la synthèse de commandes par des techniques linéaires, et b) le résultat de Brockett implique qu'il n'existe pas de retour d'état autonome continu $v(q)$ stabilisant asymptotiquement une configuration fixe q_0 , ce qui exclut l'utilisation de techniques non linéaires classiques. Pour contourner la difficulté soulevée par Brockett, plusieurs solutions ont été proposées. Elles peuvent être classées en trois catégories :

- I. Retours d'état (autonomes) discontinus $v(q)$. Ces retours d'état sont discontinus précisément au point que l'on cherche à stabiliser ; de ce fait, on est amené à préciser le sens donné aux solutions du système commandé et à la propriété de stabilité asymptotique. Une possibilité consiste à définir les solutions au sens établi dans (Filippov, 1964). Mais l'impossibilité soulevée par Brockett concerne aussi ce type de retour d'état, qui ne permettent donc pas de stabiliser asymptotiquement les configurations fixes. Une difficulté additionnelle réside dans le passage de la commande en vitesse synthétisée par cette approche à une commande en couples, via le modèle dynamique. En particulier, la question se pose quant à la définition des propriétés de stabilité et convergence que l'on peut obtenir sur cette partie du modèle. Cette approche ne semble donc pas adaptée pour obtenir les propriétés de stabilité, convergence, et robustesse aux erreurs de modèle que l'on peut souhaiter pour un retour d'état stabilisant.
- II. Retours d'état instationnaires (non autonomes) continus $v(q, t)$. Cette approche a été initialement proposée par (Samson, 1990) dans le cadre de la stabilisation d'une configuration fixe d'un robot mobile de type unicycle. On distingue essentiellement deux classes dans ce type de retour d'état :
 1. les retours d'état Lipschitz-continus et
 2. les retours d'état homogènes
- III. Retours d'état hybrides. L'idée sous-jacente de ce type de commande est d'itérer périodiquement des commandes en boucle ouverte, ce qui revient à combiner des

aspects temps continu et temps discret, comme par exemple via des retours du type $v(q(kT), t)$ avec $t \in [kT, (k+1)T]$, $k \in \mathbb{N}$.

Nous allons ci-dessous résumer quelques propriétés des deux dernières catégories de commandes (II et III), en particulier en ce qui concerne leurs propriétés de robustesse vis-à-vis de “dynamiques non modélisées”. Pour cela il est nécessaire de préciser ce que nous entendons par cette propriété.

Définition 8 Soit le système sans dérive (1.24) commandé sur \mathbb{R}^n , possédant une propriété \mathcal{P} . On dit que cette propriété est **robuste vis-à-vis de dynamiques non modélisées**, si pour toutes fonctions $Y_1, \dots, Y_m \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ telles que $Y_i(0, \cdot) = 0 \forall i$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, \mathcal{P} est aussi vérifiée pour le système perturbé

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m v_i(X_i(q) + Y_i(\varepsilon, q)) \quad (1.31)$$

1.3.2.1 Retours d'état instationnaires Lipschitz-continus

Ce retour d'état de type $v(q, t)$, introduit dans (Samson, 1990), est supposé Lipschitz-continu par rapport à q , continu et périodique par rapport à t . De nombreuses méthodes de synthèse de ce type de commandes ont été proposées dans la littérature, en particulier pour les systèmes sous la forme chaînée (Pomet, 1992; Coron et d'Andréa Novel, 1992; Teel et al., 1995; Samson, 1995).

Caractéristiques principales

- i) Faible sensibilité aux bruits de mesure, due à la régularité de la commande.
- ii) La convergence obtenue avec ces commandes est très lente (polynomiale). D'ailleurs, comme l'indique le résultat obtenu dans (Gurvits et Li, 1992) et rappelé ci-dessous, ce retour d'état ne permet pas d'obtenir la stabilité exponentielle du système commandé.

Proposition 1 Considérons le système non holonome (1.24) et un retour d'état $v(q, t)$ avec $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$, $v(0, \cdot) = 0$, et $v(q, \cdot)$ T -périodique. Alors, si $v(\cdot, t)$ est $k(t)$ Lipschitz-continue pour tout t , avec k bornée, l'origine du système commandé ne peut pas être exponentiellement stable, i.e. il n'existe pas de constantes $K, \gamma > 0$ telles que le long des trajectoires du système commandé $|q(t)| \leq K|q(t_0)|e^{-\gamma(t-t_0)}$.

Voir par exemple (Morin, 1996) pour une preuve. En pratique, cela se traduit par une impossibilité d'assurer un positionnement précis, dans un laps de temps raisonnable, du véhicule commandé.

- iii) Pour la majorité des commandes de ce type, la propriété de stabilité asymptotique n'est pas robuste vis-à-vis de dynamiques non modélisées. Toutefois, certains choix de commande permettent d'obtenir cette robustesse, en particulier pour les véhicules de type unicycle et voiture (Maini et al., 1999).

1.3.2.2 Retours d'état instationnaires homogènes

Afin d'améliorer la propriété de convergence obtenue avec les retours Lipschitz-continus, des retours d'état seulement continus ont été considérés. En particulier, la classe de retours d'état homogènes constitue une possibilité intéressante pour deux raisons :

1. Elle généralise en quelque sorte, pour les systèmes non holonomes, la classe des retours d'état linéaires pour des systèmes linéaires. De nombreuses propriétés des systèmes linéaires sont ainsi étendues aux systèmes non holonomes. Par exemple, la stabilité asymptotique d'un point d'équilibre du système commandé via de tels contrôleurs, implique la convergence exponentielle dès lors que le système est homogène de degré zéro (Rosier, 1992).
2. De nombreux systèmes non linéaires, et en particulier tous les systèmes non holonomes commandables peuvent être exponentiellement stabilisés via ce type de commande (Morin et al., 1999).

Afin de préciser les concepts associés à ce type de retour d'état, nous rappelons les définitions et résultats suivants (voir par exemple (M'Closkey, 1994; Morin, 2004) pour plus de détails et des résultats complémentaires).

Définition 9

- i) On appelle un vecteur de poids sur \mathbb{R}^n , un vecteur $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $r_i > 0$.
- ii) Étant donné un vecteur de poids sur \mathbb{R}^n , une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ est dite fonction Δ^r -homogène de degré d si

$$\forall \lambda > 0, \forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, f(\Delta_\lambda^r x, t) = \lambda^d f(x, t)$$

avec $\Delta_\lambda^r := (\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n)$. Comme cette propriété ne dépend pas de t , la définition est valable pour f indépendante de t .

- iii) Un champ de vecteur X sur \mathbb{R}^n est dit champ de vecteur Δ^r -homogène de degré l si, pour tout $i = 1, \dots, n$, X_i est une fonction Δ^r -homogène de degré $l + r_i$.

La proposition suivante, qui découle du résultat de (Pomet et Samson, 1994) (lui même une extension au cas instationnaire du résultat de (Rosier, 1992)), fait le lien entre l'homogénéité de degré $l = 0$ et la propriété de convergence exponentielle.

Proposition 2 Soient le système (1.24) et un vecteur de poids r tels que X_1, \dots, X_m soient Δ^r -homogène de degré $-l_1, \dots, -l_m < 0$. Soit $v(q, t)$ un retour d'état périodique par rapport à t , avec v_i Δ^r -homogène de degré l_i ($i = 1, \dots, m$). Alors, si l'origine du système bouclé est asymptotiquement stable, cet équilibre est globalement \mathcal{K} -exponentiellement stable, au sens où il existe $\gamma > 0$ et une fonction $k(\cdot)$ de classe \mathcal{K} tels que, pour toute solution $q(\cdot)$ du système bouclé,

$$|q(t)| \leq k(|q(t_0)|)e^{-\gamma(t-t_0)} \quad (1.32)$$

Notons que l'inégalité (1.32) implique une convergence exponentielle de $|q(t)|$ vers zéro, mais la propriété de stabilité \mathcal{K} -exponentielle n'est pas équivalente, en général, à la propriété de stabilité exponentielle classique où

$$|q(t)| \leq K|q(t_0)|e^{-\gamma(t-t_0)}$$

du fait que la fonction $k(\cdot)$ dans (1.32) n'est pas nécessairement Lipschitz-continue à l'origine.

De nombreuses méthodes de synthèses de telles commandes homogènes ont été proposées à la fin des années 90, pour les systèmes non holonomes ainsi que pour certains systèmes mécaniques sous-actionnés, afin d'obtenir des retours d'état exponentiellement stabilisants (M'Closkey, 1994; Pomet et Samson, 1994; M'Closkey et Murray, 1997; Morin et al., 1999). Malheureusement, la propriété d'homogénéité nécessaire à l'obtention de la convergence exponentielle implique, pour ces systèmes, que la commande est nécessairement non Lipschitz-continue à l'origine. Ceci est la cause d'un certain nombre de problèmes.

Caractéristiques principales

- i) Stabilité exponentielle lorsque le modèle et l'état sont parfaitement connus.
- ii) La propriété de stabilité asymptotique obtenue avec ce type de commande n'est pas robuste vis-à-vis de dynamiques non modélisées (Lizárraga et al., 1999). En pratique, des erreurs de modèle arbitrairement petites (i.e. ε petit dans (1.31)) entraînent des oscillations sur un cycle limite autour de l'équilibre à stabiliser. Cela implique l'impossibilité d'obtenir une stabilisation précise.
- iii) Forte sensibilité aux bruits de mesure, liée au fait que ces commandes reviennent grosso-modo à utiliser des gains infinis à l'origine.

1.3.2.3 Retours d'état hybrides

L'appellation *retour d'état hybride* regroupe plusieurs types de commandes, qui ont pour caractéristiques communes de combiner des approches temps continu et temps discret. Très souvent, elles se situent à mi-chemin entre la boucle ouverte et le retour d'état, dans le sens où l'état n'est pas remis à jour en continu mais seulement périodiquement, à une fréquence beaucoup plus faible que la fréquence d'échantillonnage de la commande. Par exemple, dans (Bennani et Rouchon, 1995), des commandes de type $v(q(kT), t)$, avec $k \in \mathbb{N}$ et $t, T \in \mathbb{R}$, consistent donc à itérer une commande en boucle ouverte, sont proposées. Dans ce travail, il est montré qu'avec ces commandes on peut obtenir la convergence exponentielle et la robustesse de cette propriété vis-à-vis de dynamiques non-modélisées. Ce résultat a été généralisé dans (Morin et Samson, 1999) à tous les systèmes précédents analytiques sans dérive, vérifiant la CRAL. Pour préciser les propriétés de ce type de commande, introduisons la définition suivante.

Définition 10 On dit qu'un retour d'état hybride $v(q(kT), t)$ ($k \in \mathbb{N}, t, T \in \mathbb{R}$) est un **stabilisateur $\mathcal{K}(T)$ -exponentiel** pour le système sans dérive (1.24), s'il existe des constantes $\gamma < 1$ et $K, \eta > 0$ telles que, pour tout q_0 , la solution $q(\cdot, 0, q_0)$ du système défini par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [kT, (k+1)T), \quad \dot{q}(t) = \sum_{i=1}^m v_i(q(kT), t) X_i(q(t))$$

avec $q(0) = q_0$ satisfait, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, T)$,

$$|q((k+1)T, 0, q_0)| \leq \gamma |q(kT, 0, q_0)| \quad \text{et} \quad |q(kT + s, 0, q_0)| \leq K |q(kT, 0, q_0)|^\eta \quad (1.33)$$

La relation (1.33) implique une convergence exponentielle des solutions vers zéro. Par contre on ne peut pas en déduire la stabilité de ce point. En particulier, par comparaison avec la définition de stabilité \mathcal{K} -exponentielle donnée dans la Proposition 2, l'inégalité (1.32) n'est pas nécessairement satisfaite pour tout t_0 , bien qu'elle le soit pour tout $t_0 = kT$ ($k \in \mathbb{N}$). La propriété de stabilité n'est donc pas satisfaite au sens strict du terme.

Caractéristiques principales

- i) Stabilité $\mathcal{K}(T)$ -exponentielle du point d'équilibre.
- ii) Robustesse de cette propriété vis-à-vis de dynamiques non modélisées.
- iii) Forte sensibilité aux bruits de mesure, comme pour les commandes homogènes et pour la même raison.
- iv) La propriété de stabilité $\mathcal{K}(T)$ -exponentielle n'est pas robuste vis-à-vis de retards dans l'application de la commande. En effet, par exemple, la robustesse obtenue avec les lois de commande de (Bennani et Rouchon, 1995) et (Morin et Samson, 1999), repose sur le fait que certaines intégrales s'annulent exactement sur chaque intervalle de temps $[kT, (k+1)T]$. Toutefois, en pratique, les commandes vont aussi être échantillonnées par rapport à t , et elles risquent aussi de subir des retards au niveau de leur application. De ce fait, il se peut que les intégrales en question ne soient plus nulles sur chaque intervalle $[kT, (k+1)T]$. Ainsi, le moindre retard sur l'application de la commande peut suffire à perdre la propriété de convergence asymptotique.

En conclusion, aucune technique de commande ne semble à ce jour, avoir permis de résoudre efficacement et de façon robuste le problème de stabilisation asymptotique de points fixes, par les véhicules non holonomes. Nous retrouverons cette difficulté sous une forme légèrement différente lorsque nous aborderons la CRC de ces systèmes.

1.3.3 Stabilisation de trajectoires admissibles non stationnaires

Les difficultés rencontrées pour la stabilisation asymptotique de configurations fixes viennent du fait que le système linéaire approximant le système de départ autour de ces configurations n'est pas commandable. Cependant, pour des trajectoires de référence admissibles non stationnaires, les systèmes linéaires associés peuvent être commandables, ce

qui permet d'envisager la stabilisation locale du système d'erreur via des retours d'état linéaires (mais à gains variables dans le temps). Les matrices d'état et de commande de ces systèmes linéaires étant fonction du temps, les analyses de stabilité sont en général difficiles et souvent basées sur certaines hypothèses sur les trajectoires de référence. L'utilisation de techniques non linéaires peuvent permettre de relâcher les hypothèses en question ou de garantir un plus grand domaine de stabilité.

Dans cette sous-section, nous rappelons d'abord quelques propriétés de commandabilité des linéarisés de systèmes non linéaires le long de trajectoires. Nous mentionnons ensuite des résultats de synthèse pour la stabilisation asymptotique de certaines trajectoires admissibles non stationnaires de robots mobiles.

1.3.3.1 Propriétés de commandabilité des linéarisés de systèmes non linéaires le long de trajectoires

Rappelons tout d'abord quelques définitions et propriétés de commandabilité des systèmes linéaires instationnaires (voir (Chen, 1984, Sec. 5.3) pour plus de détails).

Définition 11 *Un système*

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (1.34)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$ est dit

- **commandable** sur $[t_0, t_f]$ si, pour tout couple $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande $u(t)$ définie et continue par morceaux sur $[t_0, t_f]$, pour laquelle la solution de (1.34) avec $x(t_0) = x_0$ vérifie $x(t_f) = x_f$.
- **différentiellement commandable** au temps t_0 si, pour tout couple $x_0, x_f \in \mathbb{R}^n$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une commande u définie sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$ pour laquelle la solution de (1.34) avec $x(t_0) = x_0$ vérifie $x(t_0 + \varepsilon) = x_f$.

Proposition 3 *On suppose que les matrices $A(t)$ et $B(t)$ dans (1.34) sont de classe \mathcal{C}^{n-1} en la variable t . Soit $M_0(t), \dots, M_{n-1}(t)$ les matrices définies par*

$$\begin{cases} M_0(t) & := B(t) \\ M_{k+1}(t) & := \dot{M}_k(t) - A(t)M_k(t) \quad (k = 0, \dots, n-2) \end{cases}$$

Alors, si

$$\text{Rang}(M_0(t_f) \cdots M_{n-1}(t_f)) = n$$

le système (1.34) est commandable sur tout intervalle $[t_0, t_f]$ avec $t_0 < t_f$. Si de plus les matrices $A(t)$ et $B(t)$ sont analytiques, (1.34) est différentiellement commandable en tout temps.

Considérons maintenant le système de commande (1.24).

Définition 12 *Étant donné le système (1.24) sur \mathbb{R}^n , on dit que $\bar{v} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une commande non-singulière en q_0 , s'il existe $T_0 \leq T$ tel que le linéarisé du système le long*

de la solution $q_{\bar{v}}(t, 0, q_0)$ associée à \bar{v} est commandable sur $[0, T_0]$. Si \bar{v} est non-singulière en tout $q_0 \in \mathbb{R}^n$, on dit que \bar{v} est une **commande non-singulière universelle**

Les commandes non-singulières ont été particulièrement étudiées par Sontag (voir par exemple (Sontag, 1987; Sontag, 1992)). Le résultat suivant montre la généricité de ces commandes (voir aussi (Coron, 1994) pour des résultats complémentaires).

Théorème 1.3.1 (Sontag, 1992) *On suppose que les champs $\{X_1, \dots, X_m\}$ du système (1.24) sont analytiques et que le système vérifie la CRAL en tout point, i.e.*

$$\dim \text{Lie}(X_i)(q) = n, \quad \forall q \quad (1.35)$$

Alors, il existe des commandes non-singulières universelles pour ce système. De plus, l'ensemble des commandes non-singulières universelles de classe C^∞ est générique² dans $C^\infty([0, T]; \mathbb{R}^m)$ pour tout $T > 0$.

Puisque les modèles cinématiques de nos robots mobiles non holonomes (unicycle, voiture,...) vérifient la CRAL, leurs linéarisés le long de “presque toute” trajectoire de référence admissible est commandable. Cette propriété a été exploitée (la plupart du temps implicitement) pour la stabilisation asymptotique de trajectoires admissibles non stationnaires. Une première approche consiste à synthétiser des retours d'état linéaires stabilisant le système d'erreur linéarisé, avec l'espoir que ces commandes stabilisent également (localement) le système de départ (voir par exemple (Samson et Ait-Abderrahim, 1991)). Une autre approche consiste à travailler directement sur le système d'erreur initial, i.e. non-linéaire. Les retours d'état synthétisés avec cette approche sont en général non-linéaires. Deux techniques assez classiques en commande non linéaire ont principalement été utilisées : l'approche de type Lyapunov (Kanayama et al., 1990; Samson et Ait-Abderrahim, 1991; Morin et Samson, 2001) et la linéarisation par retour d'état dynamique qui tire profit des propriétés de platitude des systèmes non holonomes (Fliess et al., 1995). Toutes ces approches (qui conduisent à la synthèse de retours d'état “localement linéaires” pour des systèmes dont le linéarisé est localement commandable) ne souffrent pas des limitations propres aux méthodes de stabilisation de points fixes : elles permettent d'obtenir des convergences de type exponentielle et une marge de robustesse par rapport aux erreurs de modèle dès lors que la “dynamique” de la trajectoire de référence est suffisante (on parle aussi de conditions “d'excitation persistante”). Mais si, par exemple, cette trajectoire tend vers un point fixe, on se retrouve alors confronté aux problèmes mentionnés dans la section précédente. Cela conduit à repenser la question du choix de la commande lorsque la trajectoire de référence n'est pas connue a priori. Doit-on utiliser une commande dédiée à la stabilisation de trajectoires non-stationnaires, sachant qu'elle ne permet pas de stabiliser asymptotiquement (ni même “pratiquement”) les configurations fixes ? Doit-on utiliser des commandes synthétisées pour la stabilisation asymptotique de points fixes, connaissant leurs limitations intrinsèques de point de vue de la robustesse, et sachant qu'elles ne

²Il contient une intersection dénombrable d'ouverts denses pour la topologie C^∞ .

sont probablement pas bien adaptées à la stabilisation de la plupart des trajectoires non-stationnaires ? Afin de mieux appréhender cette difficulté, Lizárraga a voulu répondre dans (Lizárraga, 2003) à la question suivante : existe-t-il une loi de commande v , dépendant de l'état q , de l'état de référence q_r , de la vitesse de référence v_r et du temps t , qui permette de stabiliser asymptotiquement des trajectoires de référence admissibles arbitraires ? Une réponse affirmative à cette question aurait permis d'envisager la synthèse d'un contrôleur utilisable sans connaissance a priori sur la trajectoire de référence. Malheureusement, il est montré dans (Lizárraga, 2003) que de tels contrôleurs n'existent pas pour les robots non holonomes auxquels nous nous intéressons dans ce mémoire (unicycle, voiture, etc). Cette difficulté, ainsi que les problèmes de robustesse associés aux stabilisateurs de points fixes, ont conduit Morin et Samson à proposer une autre approche de commande basée non pas sur un objectif de stabilisation asymptotique, mais sur un objectif de stabilisation pratique (i.e. dans un petit voisinage du point de référence considéré). Étant donné que notre travail a porté essentiellement sur cette approche, nous la présentons brièvement dans la section suivante.

1.3.4 Stabilisation pratique de trajectoires générales

L'approche par fonctions transverses. L'approche par fonctions transverses (FT), développée dans (Morin et Samson, 2003), établit un cadre général pour la stabilisation pratique de systèmes non holonomes. Nous rappelons par la suite quelques éléments de cette approche pour des systèmes modélisés par (1.12)³, et renvoyons le lecteur intéressé à (Morin et Samson, 2003) pour plus de détails et des résultats complémentaires.

Définition 13 Une fonction $f = (f'_g, f'_\zeta)' \in C^\infty(\mathbb{T}^p; SE(2))$ avec \mathbb{T}^p le tore de dimension p ($\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$) est appelée fonction transverse pour le système (1.12) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{T}^p$, la matrice

$$\begin{pmatrix} X(f_g(\alpha))C(f_\zeta(\alpha)) & \frac{\partial f_g}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

est de rang trois ($= \dim(SE(2))$).

Remarque 1 Comme $X(g)$ est une matrice inversible pour tout g , il existe une matrice $A(\alpha)$ telle que $\frac{\partial f_g}{\partial \alpha}(\alpha) = X(f_g(\alpha))A(\alpha)$. Avec cette notation, la matrice (1.36) est de rang trois si et seulement si la matrice

$$\bar{C}(\alpha) = (C(f_\zeta(\alpha)) \quad -A(\alpha)) \quad (1.37)$$

est elle aussi de rang trois.

³Nous supposons implicitement que la variable ζ , quand elle existe, peut être considérée comme une variable de commande. Remarquons que c'est essentiellement le cas pour un véhicule de type voiture car $\dot{\zeta}$ est directement commandé par la vitesse de braquage.

Exemple (unicycle) : (Artus et al., 2004) Considérons la fonction $f = f_g = (f_x, f_y, f_\theta)'$ définie sur \mathbb{T} par

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon \sin \alpha \\ \frac{\varepsilon^2}{4} \eta \sin 2\alpha \\ \arctan(\varepsilon \eta \cos \alpha) \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

À partir de (1.13)-(1.14) et de la définition 13, f est une fonction transverse pour le modèle cinématique de l'unicycle si la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos f_\theta(\alpha) & 0 & \frac{\partial f_x}{\partial \alpha}(\alpha) \\ \sin f_\theta(\alpha) & 0 & \frac{\partial f_y}{\partial \alpha}(\alpha) \\ 0 & 1 & \frac{\partial f_\theta}{\partial \alpha}(\alpha) \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout α . On peut facilement vérifier que cette condition est satisfaite avec la fonction f définie par (1.38) pour tout $\varepsilon, \eta > 0$.

Exemple (voiture) : (Morin et Samson, 2004b) Considérons maintenant la fonction $f = (f'_g, f'_\zeta)' = (f_x, f_y, f_\theta, f_\zeta)'$ définie sur \mathbb{T}^2 par

$$f(\alpha) = (\bar{f}_1(\alpha), \bar{f}_4(\alpha), \arctan(\bar{f}_3(\alpha)), \bar{f}_2(\alpha) \cos^3(f_\theta(\alpha)))' \quad (1.39)$$

avec

$$\bar{f}(\alpha) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\sin \alpha_1 + \eta_2 \sin \alpha_2) \\ \varepsilon \eta_1 \cos \alpha_1 \\ \varepsilon^2 \left(\eta_1 \frac{\sin 2\alpha_1}{4} - \eta_3 \cos \alpha_2 \right) \\ \varepsilon^3 \left(\eta_1 \frac{\sin^2 \alpha_1 \cos \alpha_1}{6} - \eta_2 \eta_3 \frac{\sin 2\alpha_2}{4} - \eta_3 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \right) \end{pmatrix}$$

D'après (1.13), (1.15) et la définition 13, f est une fonction transverse pour le modèle cinématique de la voiture si la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos f_\theta(\alpha) & \frac{\partial f_x}{\partial \alpha_1}(\alpha) & \frac{\partial f_x}{\partial \alpha_2}(\alpha) \\ \sin f_\theta(\alpha) & \frac{\partial f_y}{\partial \alpha_1}(\alpha) & \frac{\partial f_y}{\partial \alpha_2}(\alpha) \\ f_\zeta(\alpha) & \frac{\partial f_\theta}{\partial \alpha_1}(\alpha) & \frac{\partial f_\theta}{\partial \alpha_2}(\alpha) \end{pmatrix}$$

est inversible pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. On peut vérifier que cette condition est satisfaite avec la fonction f définie par (1.39) pour tout $\varepsilon > 0$, et tout $\eta_1, \eta_2, \eta_3 > 0$ tels que $6\eta_2\eta_3 > 8\eta_3 + \eta_1\eta_2$. Le résultat suivant montre que la connaissance d'une fonction transverse permet de synthétiser des lois de commande qui garantissent *a)* la convergence de l'erreur de suivi g vers un voisinage de l'origine pour des trajectoires de référence *arbitraires*, et *b)* la convergence de g vers une valeur fixe lorsque $c_r = 0$ (i.e. lorsque la trajectoire de référence est réduite à un point fixe).

Proposition 4 Soit $f = (f'_g, f'_\zeta)'$ une fonction transverse pour le système (1.12), soit $\zeta = f_\zeta(\alpha)$, et $z = g f_g(\alpha)^{-1}$. Alors,

i) le long des solutions du modèle d'erreur (1.30), et pour toute courbe régulière $\alpha(\cdot)$,

$$\dot{z} = X(z) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) (\bar{C}(\alpha)\bar{v} - \text{Ad}^X(g^{-1})c_r(t)) \quad (1.40)$$

avec $\bar{v} = (v', \dot{\alpha}')'$ et $\bar{C}(\alpha)$ définie par (1.37).

ii) La matrice $\bar{C}(\alpha)$ étant de rang trois pour tout α , le changement de variable

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger (\text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1})v_z + \text{Ad}^X(g^{-1})c_r(t)) \quad (1.41)$$

avec $\bar{C}(\alpha)^\dagger$ une inverse à droite de $\bar{C}(\alpha)$, transforme le système (1.40) en $\dot{z} = X(z)v_z$.

iii) Pour toute matrice Hurwitz-stable K , et pour v_z défini par

$$v_z = X(z)^{-1}Kz \quad (1.42)$$

a) $\|g\|$ est ultimement borné par $\varepsilon_f := \max_\alpha \|f_g(\alpha)\|$ pour toute trajectoire de référence $g_r(\cdot)$,

b) si $c_r = 0$, g converge exponentiellement vers un point fixe de $f_g(\mathbb{T}^p)$.

La propriété *i)* est une conséquence de (1.28), (1.30), et (1.37). La propriété *ii)* est directement déduite de *i)*. En utilisant le fait que, pour tout g , $\text{Ad}^X(g^{-1}) = (\text{Ad}^X(g))^{-1}$, la propriété *iii.a)* est facilement déduite de la convergence (exponentielle) de z vers zéro. La propriété *iii.b)* est déduite, elle aussi, de cette propriété de convergence. En effet, lorsque $c_r = 0$, \bar{v} converge vers zéro exponentiellement, et ceci implique que les dérivées de g et g_{om} convergent aussi exponentiellement vers zéro. Il en résulte que g et g_{om} sont contraints de converger vers des valeurs fixes. Nous nous permettons de signaler que l'intérêt majeur de cette approche est de fournir une loi de commande unique permettant de stabiliser pratiquement n'importe quelle trajectoire de référence (point fixe, trajectoire réalisable non stationnaire, trajectoire non réalisable) et, en particulier de contourner le problème soulevé par (Lizárraga, 2003) des lors que l'on accepte de remplacer l'objectif de stabilisation asymptotique par celui, un peu moins ambitieux (mais plus réaliste), de stabilisation pratique.

Remarquons finalement que la dérivée $\dot{\alpha}$ du vecteur de variables (réduit à une variable scalaire dans le cas de l'unicycle et avec la fonction transverse (1.38)) dont la fonction transverse dépend joue le rôle d'un vecteur de commande complémentaire.

1.3.4.1 Exemple : application de l'approche par fonctions transverses à la stabilisation de trajectoires générales pour un robot de type unicycle

Le but de cette section est d'illustrer, sur l'exemple d'un robot de type unicycle, les performances (en termes de la qualité de suivi, de la convergence, et des trajectoires du robot) que l'on peut obtenir avec la commande par fonctions transverses.

Suivant la proposition 4 appliquée à l'unicycle, considérons la fonction transverse donnée par (1.38) (i.e. $f = f_g$). Posons $z = gf^{-1}(\alpha)$ d'où \dot{z} est donné par (1.40) avec $X(\cdot)$ définie par (1.13), $\text{Ad}^X(\cdot)$ définie par (1.29), $\bar{v} = (v', \dot{\alpha}')'$ et $\bar{C}(\alpha)$ définie par (1.14)-(1.37). Avec

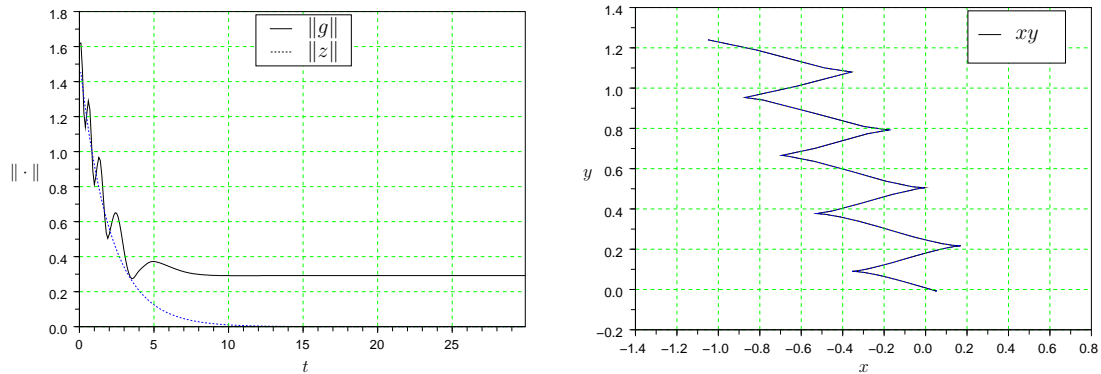


FIG. 1.6: Stabilisation pratique d'une configuration fixe pour un robot de type unicycle

ces définitions, nous pouvons observer sur la figure 1.6 les résultats de simulation pour la stabilisation d'une configuration fixe ($c_r(t) = 0$) obtenus avec la loi de commande (1.41)-(1.42) avec $K = -0.5I$ où I est la matrice identité 3×3 . Les paramètres de la fonction transverse utilisés dans cette simulation sont $\varepsilon = 0.3$ et $\eta = 1$. Avec ces paramètres, la borne ultime de l'erreur de suivi est donnée par $\varepsilon_f = 0.3008$. La condition initiale est donnée par $g(0) = (-1.05, 1.24, 0)'$. Sur la figure de gauche sont représentés les normes de l'erreur de suivi g (ligne continue) et de z (ligne pointillée). Nous constatons que 1) la borne ultime est respectée $\|g(30)\| \leq \varepsilon_f$, et 2) z converge exponentiellement vers zéro (et donc $g(t)$ converge exponentiellement vers un point fixe). Sur la figure de droite est représentée la trajectoire suivie par le véhicule sur le plan xy . On peut observer que le véhicule est obligé de faire quelques manœuvres pour s'approcher de la position de référence comme résultat du choix des paramètres de commande et de la condition initiale. Le nombre de ces manœuvres peut être réduit significativement, par exemple en planifiant une trajectoire de référence menant de la position initiale du robot à la position désirée, ou en utilisant un gain non linéaire comme celui proposé dans (Artus, 2005). Nous avons choisi un exemple simple pour illustrer l'application de l'approche.

Sur la figure 1.7 nous pouvons observer les résultats de simulation de la stabilisation pratique d'une trajectoire générale ie. comportant des phases où la trajectoire est réalisable et d'autres où elle ne l'est pas. La trajectoire de référence est donnée par la vitesse du repère de référence $c_r(t)$ comme suit

$$c_r(t) = \begin{cases} (0, 0, 0)' & \forall t \in [0, 15) \\ (0.2, 0, 0)' & \forall t \in [15, 30) \\ (0, 0.2, 0)' & \forall t \in [30, 45) \\ (-0.2, 0, 0)' & \forall t \in [45, 60) \\ (0, 0, 0.2)' & \forall t \in [60, 75) \\ (0, 0, 0)' & \forall t \in [75, 90] \end{cases} \quad (1.43)$$

Pour $t \in [0, 15)$ la trajectoire de référence est réduite à un point fixe. Pour $t \in [15, 30)$

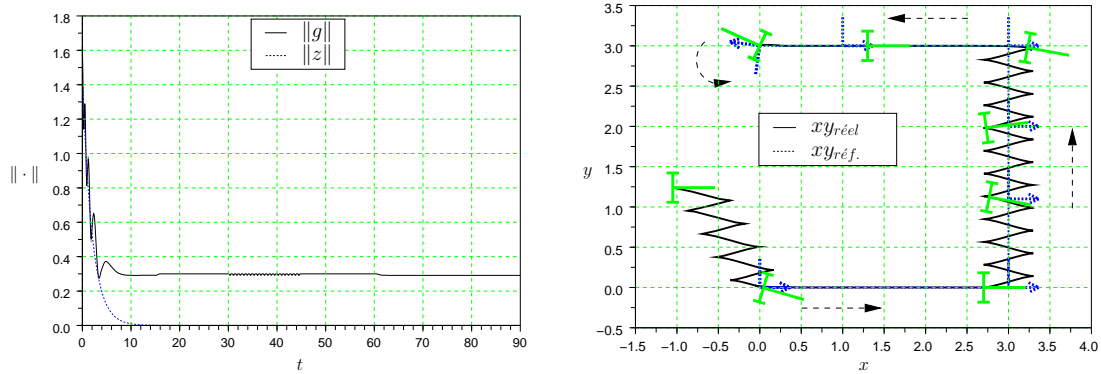


FIG. 1.7: Unicycle : stabilisation pratique d'une trajectoire générale

elle consiste en un mouvement rectiligne en marche avant (dans la direction \vec{i}_r du repère de référence \mathcal{F}_r), ce qui constitue une trajectoire réalisable par le robot. Pour $t \in [30, 45)$ la trajectoire de référence consiste en un mouvement complètement non réalisable par le robot : un déplacement latéral (dans la direction \vec{j}_r du repère de référence \mathcal{F}_r). Pour $t \in [45, 60)$ le mouvement est à nouveau réalisable : un déplacement rectiligne en marche arrière (dans la direction \vec{i}_r du repère de référence \mathcal{F}_r). La trajectoire de référence est encore réalisable pour $t \in [60, 75)$: une rotation pure. Finalement, pour $t \in [75, 90)$, la trajectoire de référence est à nouveau réduite à un point fixe.

Les paramètres de commande et la condition initiale sont les mêmes que pour la simulation précédente. Sur la figure de gauche sont représentés les normes de l'erreur de suivi g (ligne continue) et de z (ligne pointillée). Nous constatons que 1) la borne ultime sur la norme de l'erreur de suivi est respectée : $\|g(t)\| \leq \varepsilon_f, \forall t > 10$, et 2) z converge exponentiellement vers zéro, quelle que soit la trajectoire de référence (réalisable ou pas).

Sur la figure de droite sont représentées la trajectoire suivie par le véhicule (en ligne continue) et celle de référence (en pointillé) sur le plan xy . On remarque que le robot réalise beaucoup de manœuvres pour $t \in [30, 45)$. Ceci est lié au fait que la trajectoire de référence n'est pas réalisable dans cet intervalle de temps car $c_{r,2} \neq 0$. Pour $t \in [0, 15)$ la trajectoire et le résultat sont les mêmes que pour la simulation précédente et donc les mêmes remarques s'appliquent. On remarque en outre que lorsque la trajectoire de référence comporte un point fixe, $g(t)$ converge exponentiellement vers un point fixe proche de celui de référence.

Pour résumer cette section, nous nous permettons d'insister sur les caractéristiques principales de l'approche de commande par fonctions transverses, à savoir :

- la convergence de l'erreur de suivi g vers un voisinage de l'origine pour des trajectoires de référence *arbitraires*,
- la convergence de g vers une valeur fixe lorsque $c_r = 0$ (i.e. lorsque la trajectoire de référence est réduite à un point fixe) et
- le fait que les propriétés précédentes sont obtenues avec une *unique* loi de commande.

1.4 Rappels sur la commande référencée capteur des robots manipulateurs

1.4.1 Rappel sur le formalisme de commande par fonction de tâche

Le rappel de commande de robots manipulateurs qui suit est tiré de (Samson et al., 1990). Le lecteur intéressé est invité à consulter cet ouvrage pour un exposé plus approfondi.

Le système de commande considéré dans cette section correspond au modèle cinématique du robot :

$$\dot{q} = v \quad (1.44)$$

avec $q \in Q$ le vecteur de configuration articulaire du robot ($\dim(Q) = n$) et $v \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des vitesses articulaires assimilé au vecteur de commande. Ce choix de modèle est fait principalement pour établir un cadre comparatif avec la commande des systèmes non holonomes et aussi pour ne pas alourdir inutilement l'exposé. Ce modèle trouve sa justification dans le fait que les moteurs utilisés dans beaucoup de robots disposent d'un asservissement bas niveau en vitesse. Ceci permet d'exprimer directement la consigne du robot en termes de vitesses articulaires. L'hypothèse sous-jacente est que cet asservissement est capable d'assurer l'égalité entre la vitesse réelle des moteurs et la vitesse désirée (i.e. $\dot{q} = \dot{q}^*$). Cette hypothèse est réaliste pour des accélérations faibles avec un découplage dynamique des articulations du robot (ce qui n'est pas nécessairement le cas en pratique) (Samson et al., 1990). Finalement, remarquons que les concepts rappelés ci-dessous sont également applicables au modèle dynamique du robot.

Dans la théorie classique du contrôle de robots, un problème de commande est exprimé comme la régulation d'une fonction de sortie du système robotique ; ce dernier étant défini comme l'ensemble robot plus capteurs. Les *fonctions de tâche* constituent une classe particulière de fonctions de sortie de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, à valeurs dans \mathbb{R}^n , qui dépendent du vecteur q de configuration articulaire du robot et du temps en tant que paramètre indépendant, i.e. $e(q, t)$ avec e la fonction de tâche. L'approche de commande par fonctions de tâche, développée dans (Samson et al., 1990), fournit un cadre général pour la synthèse des lois de commande pour les robots manipulateurs. Plus précisément, cette approche consiste à exprimer une tâche robotique comme la régulation à zéro sur un intervalle de temps $[0, T]$, d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 appelée fonction de tâche, qui est définie en termes de la sortie choisie et la référence correspondante. Par exemple, nous pouvons trouver des fonctions de tâche exprimées dans

- l'espace articulaire du robot $e(q, t) = q(t) - q^*(t)$,
- l'espace euclidien $e(q, t) = g(q) - g^*(t)$, avec $g \in G \subseteq SE(3)$, $\dim(G) = n$,
- l'espace d'un capteur $e(q, t) = s(q, t) - s^*(t)$, avec s le signal du capteur.

où $x^*(t)$, $x \in \{q, g, s\}$ désigne la trajectoire de référence dans l'espace considéré.

Définition 14 Une application $e(q, t)$ de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, d'un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R}^n est une fonction ρ -admissible sur un ensemble $C_{\rho, T}$ et sur l'intervalle de temps $[0, T]$

si et seulement si la fonction $F(q, t) = (e(q, t), t)$ est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^k de $C_{\rho, T}$ dans la boule fermée $B_{\rho} \times [0, T]$, centrée en 0 et de rayon ρ .

Pour bien résoudre un problème de commande avec cette approche, la tâche associée doit être bien posée. Ceci se traduit par un nombre de conditions qui doivent être vérifiées.

- La condition initiale. Une fois le problème de contrôle posé comme la régulation de la fonction de tâche $e(q, t)$, il est nécessaire de spécifier la condition initiale $q_0 \mid e(q_0, 0) = 0$ (i.e. $q^*(0) = q_0$) ⁴ pour pouvoir assurer l'unicité de la solution du problème de régulation. La tâche de contrôle est alors donnée par le couple $e(q(t), t), q_0$
- L'existence et l'unicité locale de la solution $q^*(t)$ (i.e. telle que $e(q^*(t), t) = 0$). Cette dernière est garantie par l'inversibilité du jacobien J_e de la tâche le long de la trajectoire de référence $q^*(t)$ (i.e. $J_e = \frac{\partial e}{\partial q}(q^*(t), t)$).
- la tâche est ρ -admissible, i.e. la fonction $e(q, t)$ est ρ -admissible, pour un certain $\rho > 0$.

Synthèse de la commande. Considérons la dérivée par rapport au temps de la fonction de tâche

$$\dot{e}(q(t), t) = J_e(q(t), t)\dot{q}(t) + \frac{\partial e}{\partial t}(q(t), t) \quad (1.45)$$

où $J_e(q(t), t) = \frac{\partial e}{\partial q}(q(t), t)$ est le jacobien de la tâche. Suivant l'espace où est définie la fonction de tâche, ce jacobien peut être décomposé de différentes façons. Par exemple, lorsque la tâche est définie dans l'espace articulaire, nous avons simplement $J_e = I$. Dans l'espace euclidien nous avons $J_e = \frac{\partial g}{\partial q}(q) = J$, qui est le jacobien classique du robot exprimant le passage entre les vitesses dans l'espace articulaire et euclidien. Pour les tâches définies dans l'espace capteur nous avons $J_e = \frac{\partial s}{\partial q}(q)$ (égal à la matrice d'interaction L).

À partir des équations (1.44) et (1.45) on déduit que

$$\dot{x} = Bv + p \quad (1.46)$$

avec

$$\begin{aligned} x &= e \\ B &= J_e(q, t) \\ p &= \frac{\partial e}{\partial t} \end{aligned}$$

Le changement de variable

$$v = J_e^{-1}(q, t)(u - p) \quad (1.47)$$

transforme le système (1.46) en

$$\dot{x} = u \quad (1.48)$$

⁴remarquons que q_0 ne correspond pas forcément à la position initiale du robot

en choisissant $u = -Kx$, avec K une matrice Hurwitz-stable, l'origine du système (1.48) est exponentiellement stable, ce qui garantit la convergence de la fonction de tâche vers zéro. Avec cette commande, la dynamique en boucle fermée de la fonction de tâche est donnée par

$$\dot{e}(q, t) = -Ke(q, t) \quad (1.49)$$

Finalement, la commande équivalente envoyée au système physique de départ (1.44) est donnée par

$$v = -J_e^{-1}(q, t)(Ke(q, t) + \frac{\partial e}{\partial t}) \quad (1.50)$$

L'implémentation de cette loi de commande, dans le cas idéal, nécessite la connaissance des termes $J_e, e(q, t), \frac{\partial e}{\partial t}$. Dans la pratique nous ne disposons le plus souvent, que des approximations de ces termes, d'où la loi de commande

$$v = -\widehat{J_e^{-1}}(\hat{q}, t)(K\hat{e}(\hat{q}, t) + \frac{\partial \hat{e}}{\partial t}) \quad (1.51)$$

où les "chapeaux" désignent des approximations. Nous rappelons ci-dessous quelques éléments déterminants dans l'analyse de stabilité de ce schéma de commande.

Analyse de stabilité. Pour simplifier l'analyse –et aussi car ce cadre est suffisamment significatif pour nous donner les conditions fondamentales de stabilité–, nous faisons les hypothèses que K est une matrice diagonale et que l'objet (environnement) est immobile (i.e. $\frac{\partial e}{\partial t} = \widehat{\frac{\partial e}{\partial t}} = 0$ ce qui correspond à une tâche de positionnement). Nous considérons deux cas de figure par rapport aux erreurs de mesure :

1. nous faisons l'hypothèse que les mesures sont perturbées par des fonctions du temps, bornées i.e. $\hat{e}(\hat{q}, t) = e(q, t) + p_e(t)$ et $\hat{q}(t) = q(t) + p_q(t)$ avec $\sup_t \|p_i(t)\| \leq p_i^m$. Le système (1.46) bouclé avec la loi de commande (1.51) est donné par

$$\dot{e} = -KJ_e(q, t)\widehat{J_e^{-1}}(\hat{q}(t), t)(e(q, t) + p_e(t)) \quad (1.52)$$

La condition (suffisante) fondamentale pour garantir la bornitude asymptotique de e est donc

$$J_e(q, t)\widehat{J_e^{-1}}(\hat{q}, t) > 0. \quad (1.53)$$

La fonction de tâche $e(q, t)$ est alors bornée asymptotiquement par un nombre proportionnel à p_e^m . L'impact principal de la perturbation $p_q(t)$ est sur la condition de stabilité. En effet, si l'on fait un développement au premier ordre de $J_e(q, t)$ nous pouvons écrire $\widehat{J_e^{-1}} = (I_n + \Delta(t))^{-1}$ avec $\Delta(t) = \left(\sum_{i=1}^n p_{q,i}(t) \frac{\partial^2 e}{\partial q^2}(q, t) \right) J_e^{-1}(q, t)$ et $p_{q,i}$ la i ème composante de p_q . Donc si p_q est grand ou si $\|J_e^{-1}\|$ croît (par exemple près d'une singularité du jacobien de la tâche, alors $\Delta(t)$ peut grandir suffisamment pour détruire la condition de positivité $\widehat{J_e^{-1}} > 0$.

2. $\hat{e} = \varphi(e)$ avec $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme. De ce fait on peut écrire $\hat{e} = \hat{e}(q, t)$ et on obtient

$$\dot{\hat{e}} = -K J_{\hat{e}}(q, t) J_{\hat{e}}^{-1}(\hat{q}(t), t) \hat{e} \quad (1.54)$$

avec $J_{\hat{e}}(q, t) = \frac{\partial \hat{e}}{\partial q}$ et $J_{\hat{e}}^{-1}(\hat{q}, t)$ l'approximation de son inverse disponible en pratique. Dans ce cas la condition (suffisante) fondamentale pour garantir la stabilité asymptotique du système bouclé est $J_{\hat{e}} J_{\hat{e}}^{-1} > 0$ et $\hat{e}(q, t)$ converge asymptotiquement vers zéro. Si de plus $\varphi(0) = 0$ (mesure précise de la tâche à l'origine) $e(q, t)$ converge vers zéro.

En général, pour bien réaliser une tâche de positionnement, il y a deux conditions principales à satisfaire, d'abord la condition de stabilité mentionnée ci-dessus, et ensuite la condition de précision de la tâche $\hat{e}(q, t)$ donnée par sa correcte mesure à l'origine $\hat{e}(q, t) = e(q, t) = 0$. Nous allons maintenant discuter les caractéristiques de la synthèse (1.51), vis-à-vis de ces conditions, suivant l'espace dans lequel la fonction de tâche est définie.

1.4.2 Synthèse de commandes dans les différents espaces

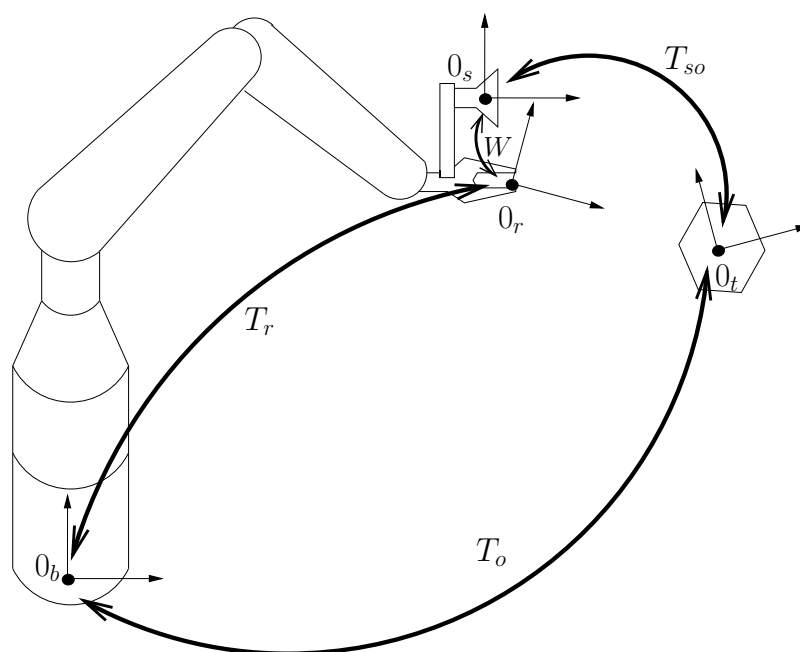


FIG. 1.8: Reconstruction de la pose relative d'un robot par rapport à un objet

Afin d'illustrer les différentes façons d'utiliser des données capteur dans des boucles de commande, considérons le problème classique de positionnement d'un robot manipulateur par rapport à un objet (Figure 1.8). Cette tâche robotique est présente dans beaucoup d'applications comme par exemple la prise et dépose d'objets ("pick and place"), les tâches d'assemblage, etc. Elle peut être représentée via différentes fonctions de tâche définies dans différents espaces. La question maintenant est de savoir quelles sont les avantages

et inconvénients de travailler dans un espace en particulier par rapport aux conditions de stabilité et à la précision du positionnement. Avant tout, effectuons un bref rappel sur la distinction capteurs proprioceptifs / capteurs extéroceptifs.

1.4.2.1 Rappel sur les capteurs.

- Capteurs proprioceptifs. Les capteurs proprioceptifs fournissent des informations sur l'état interne du robot et sur lui seul. Par exemple pour le cas des codeurs, omniprésents dans les bras manipulateurs, leur sortie s_i est un signal qui peut être vu comme une fonction linéaire de la variable articulaire q_i associée, i.e. $s_i = \lambda_i q_i$. La connaissance de λ_i et la mesure de s_i permettent donc d'obtenir directement, aux bruits de mesure près, la valeur de q_i . Ce type de capteur est donc très adapté pour les tâches et synthèse de commande dans l'espace articulaire.
- Capteurs extéroceptifs. Le signal des capteurs extéroceptifs est fonction de l'interaction du robot avec son environnement. Ce dernier est généralement représenté par un objet physique. L'hypothèse classique sur ce type de capteur est que les signaux sont fonction *uniquement* de la position relative *du capteur* par rapport à l'objet (i.e. $s = \varphi(g_c)$ avec g_c la position relative capteur-objet) et, si le capteur est fixe sur le robot, on peut dire qu'ils dépendent uniquement de la position relative du robot par rapport à l'objet ($s = \varphi_s(g)$) dans le cas d'un capteur embarqué. Parmi les capteurs extéroceptifs les plus utilisés en robotique, on trouve les caméras, les lasers, ou les capteurs d'effort. L'utilisation de ces capteurs dans des boucles de commande se fait typiquement de deux façons, ou bien en synthétisant directement la commande dans l'espace des signaux capteurs, auquel cas la connaissance de φ ou φ_s n'est pas nécessaire (mais une estimation du Jacobien d'une de ces deux fonctions peut être nécessaire pour l'estimation du jacobien de la tâche), ou alors en synthétisant la commande dans l'espace cartésien, auquel cas une estimation de φ^{-1} ou φ_s^{-1} est nécessaire. Pour de nombreux capteurs, une estimation précise de ces fonctions est difficile.

1.4.2.2 Mesure et précision de la tâche

Outre le choix de l'espace de synthèse de la commande, discuté plus bas, l'espace dans lequel la valeur de référence (i.e. à laquelle on souhaite stabiliser le robot) est exprimée joue un rôle important dans la précision de positionnement qui peut être obtenue. Dans le cas du problème illustré par la fig. 1.8, il s'agit essentiellement de savoir si cette valeur de référence est exprimée dans l'espace euclidien, i.e. comme une valeur g^* , ou dans l'espace capteur, i.e. comme une valeur s^* . Dans le premier cas, que la commande soit synthétisée dans l'espace euclidien ou dans l'espace capteur, toute erreur sur le modèle du capteur risque de se traduire par un biais de positionnement final. Ce problème ne se pose pas lorsque la valeur s^* est connue. Toutefois on est ramené à la question de déterminer s^* . Pour cela on a essentiellement deux possibilités :

- i. Une possibilité est de “positionner le robot à la position désirée” dans l'espace opérationnel et acquérir la valeur de référence du signal s^* à cette position (technique connue comme “teaching by showing”, très utilisée en asservissement visuel, par exemple).
- ii. Une autre possibilité est de se baser sur une estimation de φ et une connaissance a priori de g^* .

1.4.2.3 Synthèse de commandes dans l'espace articulaire.

Dans cet espace $J_e = I$ et $e(q, t) = q - q^*$ de façon que l'expression de la commande est réduite à

$$v = -K(q - q^*) \quad (1.55)$$

Les caractéristiques principales de cette synthèse sont :

- stabilité globale car le jacobien de la tâche est égal à l'identité
- simplicité de la commande car il n'y a pas besoin d'estimer un jacobien
- pour connaître la valeur de référence dans cet espace (directement liée à la précision de la tâche) on dispose essentiellement de deux approches :
 - “teaching by showing”, avec l'inconvénient de devoir réapprendre q^* à chaque nouvelle configuration de l'objet.
 - utilisation du modèle géométrique inverse du robot $\Lambda^{-1}(g)$ pour déterminer $q^* = \Lambda^{-1}(g^*)$ à condition que la pose relative objet-robot soit connue et sachant que toute erreur sur Λ^{-1} se traduira par une erreur de positionnement.

Aucune de ces deux approches n'est robuste par rapport à des changements de positionnement de l'objet (au sens où tout changement de positionnement de l'objet se traduit par une erreur sur la réalisation de la tâche).

1.4.2.4 Synthèse de commandes dans l'espace euclidien.

Dans cet espace $J_e = \frac{\partial g}{\partial q}(q) = J(q)$ et $e(q, t) = g - g^*$ de sorte que l'expression de la commande est donnée par

$$v = -\widehat{J(q)^{-1}}K(\hat{g} - g^*) \quad (1.56)$$

Les caractéristiques principales de cette synthèse sont :

- besoin d'une estimation du jacobien inverse du robot,
- domaine de stabilité dépend du domaine où $J(q)\widehat{J(q)^{-1}} > 0$,
- comme en général dans la pratique, on ne mesure pas directement g , il faut en déterminer une estimation (reconstruction) à partir des signaux capteur. Suivant le type de capteur différentes informations sont nécessaires :
 - dans le cas d'un capteur proprioceptif (mesurant q), il nous faut le modèle géométrique direct du robot (qui permet d'établir T_r) et la position de l'objet par rapport à la base du robot (T_0), cf. Figure 1.8. À partir de ces deux transformations on retrouve alors la pose relative du robot par rapport à l'objet. Cette approche n'est

pas robuste aux erreurs de modèle géométrique du robot et de positionnement de l'objet.

- dans le cas des capteurs extéroceptifs ($s = \varphi_s(g_{so})$), il faut le modèle inverse $\varphi_s^{-1}(s)$ du capteur pour trouver la pose du capteur par rapport à l'objet (g_{so} associée à la transformation T_{so}), ainsi que la pose du capteur par rapport à l'organe terminal (déterminée à partir de la matrice homogène de transformation W , cf fig. 1.8). Cette approche est robuste par rapport à des déplacements de l'objet, mais ne l'est pas par rapport aux erreurs de modèle du capteur.

1.4.2.5 Synthèse de commandes dans l'espace capteur.

Dans cet espace $J_e = \frac{\partial s}{\partial q}(q) = J_s$ et $e(q, t) = s - s^*$ ($\dim s = n$) de sorte que l'expression de la commande est donnée par

$$v = -\widehat{J_s(q)}^{-1}K(s - s^*) \quad (1.57)$$

Les caractéristiques principales de cette synthèse sont :

- besoin d'une estimation du jacobien inverse de la tâche. Cette estimation peut être obtenue par exemple :
 - (a) à partir d'une estimée du jacobien du robot $\frac{\partial g}{\partial q}$ et de la matrice d'interaction $L = \frac{\partial s}{\partial g}$,
 - (b) par estimation directe en ligne du jacobien $\frac{\partial s}{\partial q}$ à une position "de référence", à partir des mesures de q et s ;
- le domaine de stabilité dépend du domaine où $J_s(q)\widehat{J_s(q)}^{-1} > 0$,
- robustesse par rapport à des erreurs de modèle géométrique du robot,
- robustesse par rapport aux mouvements de l'objet du fait que la valeur de référence s^* est invariante à la position de l'objet. La valeur de s^* peut être obtenue par :
 - la méthode du "teaching by showing",
 - l'utilisation du modèle du capteur $\varphi_s(g)$ pour déterminer $s^* = \varphi_s(g^*)$, dès lors que g^* est connue. Dans ce cas, des erreurs sur ce modèle conduisent à des erreurs de positionnement.

1.5 Conclusions

En conclusion de ce chapitre, résumons ci-dessous quelques points clé.

- La stabilisation asymptotique de robots nonholonomes, en position *et* orientation, le long de trajectoires de référence admissibles se heurte à plusieurs difficultés. En ce qui concerne la stabilisation asymptotique de points fixes, aucune solution de commande ne semble à ce jour avoir permis de garantir la stabilité exponentielle et la robustesse de cette propriété vis-à-vis d'erreurs de modèles omniprésentes en pratique (dynamiques non modélisées, retards, etc). La conséquence pratique de cela est l'impossibilité de positionner avec précision un robot non holonome à partir de ces lois de commande stabilisantes.

Quant à la stabilisation de trajectoires non stationnaires, elle peut être obtenue, pour de nombreuses trajectoires de référence, via de commandes linéaires conduisant à de bonnes propriétés de convergence et de robustesse, mais ces propriétés sont fonction de la trajectoire de référence et ne peuvent être garanties sans connaissances a priori sur celle-ci ; la stabilité elle-même n'est pas garantie pour toutes les trajectoires de référence.

- L'approche par fonctions transverses fournit une solution nouvelle pour la commande de systèmes non holonomes. Dans cette approche, l'objectif de stabilisation asymptotique est relâché au profit d'un objectif de stabilisation pratique, où l'idée est de stabiliser un "petit ensemble" défini autour de la trajectoire de référence. Les synthèses de commande par cette approche présentent plusieurs caractéristiques intéressantes comme la possibilité de stabiliser *toute trajectoire* (i.e. pas nécessairement réalisable) dans l'espace de configuration du robot, et ce avec une unique loi de commande. Elle permet aussi la convergence exponentielle vers des configurations fixes lorsque la trajectoire de référence est elle-même réduite à un point fixe. Cependant, l'évaluation de la robustesse des lois de commande ainsi obtenues, vis-à-vis d'erreurs de modèle, reste à déterminer.
- Les études de CRC pour les robots manipulateurs ont montré l'importance que peut avoir le choix de l'espace de synthèse de la commande (articulaire / cartésien / capteur) en termes *i)* de robustesse de la commande aux erreurs de modèle, *ii)* de la quantité d'information nécessaire à la synthèse de la commande, *iii)* de la facilité qu'il peut y avoir à mener les études de stabilité. En particulier, la synthèse dans l'espace capteur est dotée de propriétés de robustesse intéressantes vis-à-vis d'incertitudes sur le modèle géométrique du robot et sur le modèle du capteur.
- La CRC des robots non holonomes a été peu étudiée jusqu'à présent. Les études existantes *i)* ou bien considèrent la stabilisation d'une partie de l'état seulement (contrôle en position), *ii)* ou bien se limitent à des trajectoires de référence le long desquelles les techniques de commande de type linéaire peuvent être appliquées (trajectoires de type "cruising mode"), *iii)* ou alors n'abordent pas les problèmes de robustesse sous-jacents à l'incertitude sur les modèles des capteurs.

L'objectif des deux prochains chapitres est de proposer des approches de CRC dans le cadre de la stabilisation de la pose complète des robots non holonomes le long de trajectoires de référence générales, et d'en évaluer les performances.

Chapitre 2

Commande référencée capteur via une estimation de la pose

Afin d'illustrer la problématique générale qui nous intéresse, considérons le schéma de la Figure 2.1 ci-dessous.

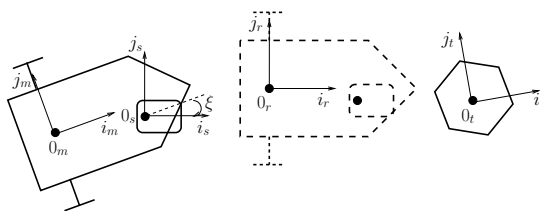


FIG. 2.1: Robot mobile (gauche), situation de référence (milieu), cible (droite)

Le robot mobile (représenté à gauche), que l'on supposera de type unicycle ou voiture, est équipé d'un capteur (une caméra par exemple) qui fournit une information sur sa situation relative par rapport à une cible mobile (qui peut par exemple être un autre véhicule que l'on souhaite suivre). Un repère $\mathcal{F}_m = \{0_m, \vec{i}_m, \vec{j}_m\}$ est associé à la plateforme du robot, et g_{om} désigne la situation de ce repère par rapport à un repère inertiel \mathcal{F}_0 . Un autre repère, $\mathcal{F}_s = \{0_s, \vec{i}_s, \vec{j}_s\}$, est associé au capteur et g_{os} désigne la situation de ce repère par rapport à \mathcal{F}_0 . La situation relative g_{ms} du capteur par rapport à la plateforme est paramétrée par un angle ξ , mesuré et dont on supposera qu'on peut le contrôler à partir d'un modèle cinématique simple $\dot{\xi} = v_\xi$, avec v_ξ la variable de contrôle en vitesse associée. Le capteur fournit un signal $s \in \mathbb{R}^3$ qui dépend seulement de la situation relative g_{ts} du repère capteur par rapport au repère $\mathcal{F}_t = \{0_t, \vec{i}_t, \vec{j}_t\}$ associé à la cible, i.e. $s = \varphi(g_{ts})$. On supposera que g_{ts} est déterminé de façon unique par s , au moins dans un certain domaine opérationnel. En fait, nous ferons même l'hypothèse un peu plus forte que φ est un difféomorphisme d'un ouvert de $SE(2)$ dans un ouvert de \mathbb{R}^3 . L'objectif de commande est de stabiliser la plateforme "devant la cible", i.e. à une situation de référence g_{or} comme celle représentée au milieu de la figure, avec g_{tr} (la situation relative du repère de référence

par rapport au repère cible) prédéfinie et constante. Il est clair que ce problème revient à stabiliser à zéro la situation relative $g = g_{rm}$ du repère \mathcal{F}_m par rapport au repère \mathcal{F}_r . Rappelons que g est solution du modèle d'erreur (1.30), avec c_r les composantes de la vitesse du repère de référence \mathcal{F}_r (i.e. $\dot{g}_{or} = X(g_{or})c_r$), et qu'il n'est évidemment pas possible de maintenir g à zéro dans tous les cas (c'est-à-dire quel que soit le mouvement de la cible), à cause des contraintes non holonomes.

Si l'erreur de suivi g était connue, ainsi que la vitesse de référence c_r , on pourrait directement appliquer la solution de commande (1.41)-(1.42) fournie par l'approche par fonctions transverses, afin d'obtenir une stabilisation pratique de g au voisinage de zéro. En particulier, cette méthode nous permet dans ce cas ¹,

1. d'assurer la stabilisation de trajectoires de référence quelconques,
2. de pouvoir régler la précision de suivi via le choix des paramètres de la fonction transverse,
3. d'obtenir une convergence exponentielle vers une situation fixe lorsque la situation de référence g_r est constante.

Malheureusement, g n'est connue que de façon implicite via la mesure de s , et il s'agit de savoir comment utiliser cette mesure pour résoudre notre problème de suivi. Une première approche consiste à calculer une estimée \hat{g} de g à partir de s afin de l'utiliser dans le calcul de la loi de commande (1.41)-(1.42). La difficulté est qu'en général, à cause notamment de la connaissance approximative que l'on a des modèles des capteurs, il est souvent difficile d'obtenir une estimation précise de g . Au vu des problèmes de robustesse que pose la commande des véhicules non holonomes, il n'est pas évident a priori qu'une telle approche donnera des résultats satisfaisants. L'objectif de ce chapitre est d'apporter des réponses à cette question. Une autre approche, suggérée par les techniques de commande des robots manipulateurs, consiste à essayer de définir la loi de commande "directement" dans l'espace capteur, c'est-à-dire sans remonter à une estimation de g . Cette approche sera étudiée dans le chapitre suivant.

Le chapitre présent est constitué de trois sections. Nous présentons dans la première section un résultat de robustesse vis-à-vis de dynamiques non modélisées, et illustrons sur un exemple simple comment il peut être utilisé pour établir des conditions de stabilité vis-à-vis d'erreurs de mesure. Cet exemple permet également de mieux comprendre les principaux résultats d'analyse de ce chapitre, présentés dans la deuxième section, qui fournissent des conditions de stabilité pour des fonctions d'estimation de g génériques. Enfin, dans la troisième section, nous proposons différentes possibilités pour le calcul de l'estimation \hat{g} et essayons de dégager, à partir de résultats de simulation et d'expérimentation, des choix de paramètres de commande pour une bonne utilisation de cette approche.

¹nonobstant les limitations classiques dues aux saturations et à la dynamique des actionneurs, et aux aspects numériques de la mise en œuvre de la commande (échantillonnage, retards, etc)

2.1 Robustesse vis-à-vis de dynamiques non modélisées

Avant d'aborder plus spécifiquement la commande référencée capteur des robots mobiles dans les sections suivantes, nous allons d'abord présenter un résultat de robustesse concernant l'approche de commande par fonctions transverses. L'intérêt de ce résultat est multiple. Tout d'abord, il établit un résultat fort de robustesse qui montre, de ce point de vue, l'intérêt de cette approche par rapport aux approches plus classiques basées sur un objectif de stabilisation asymptotique (voir Sec. 1.3 du chapitre précédent). En second lieu, de par sa simplicité, il permet de mieux comprendre l'origine de ces propriétés de robustesse. Enfin, ce résultat est très lié (et complémentaire) à ceux que nous établirons dans la section suivante.

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre précédent, le problème de robustesse vis-à-vis de dynamiques non modélisées consiste, pour des robots mobiles non holonomes, à étudier les propriétés de stabilité de systèmes commandés du type

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m v_i (X_i(q) + Y_i(\varepsilon, q))$$

avec X_1, \dots, X_m les champs de vecteurs "nominaux" (i.e. connus), et les $Y_i(\varepsilon, \cdot)$ de "petites" perturbations de ces champs, inconnues. Dans le cas particulier de robots de type unicycle et voiture (ou plus généralement de tout autre véhicule), au lieu de considérer des perturbations $Y_i(\varepsilon, \cdot)$ arbitraires, il est plus significatif d'un point de vue physique de considérer des perturbations qui respectent la propriété de symétrie de groupe dans $SE(2)$. En effet, quelles que soient les erreurs que l'on peut faire sur la géométrie du robot, cette propriété d'invariance (qui signifie physiquement que pour une entrée de commande donnée, le déplacement relatif du véhicule par rapport à sa configuration initiale ne dépend pas de cette configuration) sera toujours respectée. Ceci conduit naturellement à considérer le problème de stabilisation de systèmes du type

$$\dot{g} = X(g)C_{\Delta}(\zeta)v \quad (2.1)$$

où C_{Δ} est une fonction matricielle, continue, inconnue, mais supposée proche de la fonction nominale C du modèle cinématique (1.12). Le résultat suivant établit une propriété de robustesse des lois de commande basées sur l'approche par FT vis-à-vis de ce type d'erreurs de modèle.

Proposition 5 Soit $f = (f'_g, f'_\zeta)'$ une fonction transverse pour le système nominal $\dot{g} = X(g)C(\zeta)v$, et $\bar{v} = (v', \dot{\alpha}')'$ la loi de commande définie par (comparer avec (1.41)-(1.42))

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger \text{Ad}^X(f_g(\alpha))' X(z)' K z \quad (2.2)$$

avec $\bar{C}(\alpha)$ définie par (1.37), $\text{Ad}^X(\cdot)$ définie par (1.29), $z = g f_g(\alpha)^{-1}$, et K une matrice symétrique définie négative. Si

$$\bar{C}_{\Delta}(\alpha) \bar{C}(\alpha)^\dagger > 0 \quad \forall \alpha \quad (2.3)$$

avec

$$\bar{C}_\Delta(\alpha) := (C_\Delta(f_\zeta(\alpha)) - A(\alpha)) \quad (2.4)$$

alors z converge exponentiellement vers zéro et g converge exponentiellement vers un point fixe.

Preuve : La preuve de ce résultat est relativement directe. D'après (1.28) (voir aussi (1.40)),

$$\dot{z} = X(z)\text{Ad}^X(f_g(\alpha))\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{v}$$

Par application de la loi de commande (2.2), on obtient donc en boucle fermée

$$\dot{z} = M(z, \alpha)Kz$$

avec

$$M(z, \alpha) = X(z)\text{Ad}^X(f_g(\alpha))\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{C}(\alpha)^\dagger\text{Ad}^X(f_g(\alpha))'X(z)' \quad (2.5)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov candidate $V(z) = z'(-K)z$ le long des solutions de ce système est donc donnée par

$$\dot{V}(z) = -2z'K'M(z, \alpha)Kz \quad (2.6)$$

Il est clair, d'après (2.3), que la matrice $M(z, \alpha)$ est définie positive pour tout z, α . En utilisant en outre le fait que $X(z)$ est une matrice de rotation et la compacité de \mathbb{T}^p , on montre qu'il existe une constante $\delta > 0$ telle que

$$M(z, \alpha) > \delta I_3 \quad \forall z, \forall \alpha \quad (2.7)$$

La convergence exponentielle de z vers zéro découle alors de (2.6). Ceci implique, d'après (2.2), que v converge exponentiellement vers zéro, et par conséquent que g converge exponentiellement vers une valeur fixe. ■

Avant de commenter la Proposition 5, indiquons quelques variations possibles de ce résultat (dont les preuves sont tout à fait similaires à la précédente). Tout d'abord, on peut aussi utiliser au lieu de (2.2) la loi de commande

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)' \text{Ad}^X(f_g(\alpha))' X(z)' Kz \quad (2.8)$$

La condition de stabilité (2.3) doit alors simplement être remplacée par la condition

$$\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{C}(\alpha)' > 0 \quad \forall \alpha \quad (2.9)$$

Il est aussi possible de considérer le cas plus général où C_Δ dépend non seulement de ζ mais aussi de la variable exogène t . Dans ce cas, les conclusions de la proposition restent valides si

$$\bar{C}_\Delta(\alpha, t)\bar{C}(\alpha)^\dagger > \bar{\delta}I_3 > 0 \quad \forall \alpha, \forall t \quad (2.10)$$

où $\bar{C}_\Delta(\alpha, t)$ est définie par (2.4) (en remplaçant $C_\Delta(f_\zeta(\alpha))$ par $C_\Delta(f_\zeta(\alpha), t)$). Nous verrons dans la section suivante quelques applications de ces généralisations pour l'étude des propriétés de robustesse vis-à-vis d'erreurs de mesure.

La condition suffisante "de stabilité" (2.3) est à rapprocher des conditions du type

$$J_e \hat{J}_e^{-1} > 0$$

que l'on rencontre dans l'étude de stabilité des fonctions de tâche pour les robots manipulateurs (voir Éq. (1.53)). Elle en constitue le pendant. La propriété sous-jacente, importante d'un point de vue applicatif, est que pour toute fonction transverse, on dispose d'une marge de robustesse pour la propriété de stabilité exponentielle globale de $z = 0$. Par exemple, en raison du fait que α est un élément de l'espace compact \mathbb{T}^p , la condition (2.3) sera toujours satisfaite lorsque la fonction C_Δ résulte de petites variations paramétriques de la fonction C . Nous verrons cependant qu'en général, la marge que l'on peut ainsi garantir est commensurable à la taille de la fonction transverse. Autrement dit, plus on souhaite obtenir un positionnement précis, moins on peut a priori garantir de marge de robustesse. Étant donné que la condition (2.3) est seulement une condition suffisante de stabilité, la marge de stabilité réelle peut évidemment être beaucoup plus importante.

Nous allons maintenant montrer sur un cas relativement simple comment la Proposition 5 peut être utilisée pour établir des propriétés de robustesse vis-à-vis d'erreurs de mesure. Cette étude de cas permet en outre de mieux comprendre l'analyse plus générique qui sera conduite dans la section suivante.

Supposons que l'on dispose d'une estimation \hat{g} de g de la forme

$$\hat{g} = \psi(g) = \begin{pmatrix} \hat{p} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda R(\gamma)p + b_p \\ \theta + b_\theta \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

avec $R(\gamma)$ la matrice de rotation d'angle γ . On souhaite déterminer des conditions suffisantes sur les paramètres λ, γ, b_p , et b_θ , garantissant la stabilité de la loi de commande (2.2). On suppose dans un premier temps que ces paramètres sont constants. Les termes b_p et b_θ représentent des biais de mesure. Le terme λ correspond à un facteur d'échelle sur la norme du vecteur de position p , et γ représente une erreur sur la direction de ce vecteur. On montre facilement, à partir de l'équation d'erreur (1.28), que \hat{g} satisfait l'équation suivante :

$$\dot{\hat{g}} = X(\hat{g})\Delta(C(\zeta)\bar{v} - \text{Ad}^X(g^{-1})c_r) \quad (2.12)$$

avec Δ la matrice constante définie par

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda R(\bar{\gamma}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma} = \gamma - b_\theta \quad (2.13)$$

Considérons tout d'abord le cas où $c_r = 0$ (i.e. la cible est immobile). Dans ce cas, le système (2.12), simplement donné par $\dot{\hat{g}} = X(\hat{g})\Delta C(\zeta)\bar{v}$, est de la forme (2.1) avec

$$C_\Delta(\zeta) := \Delta C(\zeta) \quad (2.14)$$

Par application de la loi de commande (2.2) (resp. (2.8)), avec z remplacée par son “estimée” $\hat{z} = \hat{g}f(\alpha)^{-1}$, on garantit donc la stabilité exponentielle de $\hat{z} = 0$ et la convergence exponentielle de \hat{g} (et donc de g) vers un point fixe sous la condition (2.3) (resp. (2.9)). Le lemme suivant illustre cette application dans le cas d’un véhicule de type unicycle.

Lemme 1 *Considérons un véhicule de type unicycle et supposons que C_Δ est définie par (2.13)–(2.14). Alors, pour toute fonction transverse définie sur \mathbb{T} ,*

1. *La condition de stabilité (2.3) associée à la loi de commande (2.2) est satisfaite si et seulement si*

$$0 < \lambda \cos \bar{\gamma} \quad \text{et} \quad \left(\frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)} (1 - \lambda \cos \bar{\gamma}) + \lambda \sin \bar{\gamma} \right)^2 < 4 \left(1 - \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)} \lambda \sin \bar{\gamma} \right) \lambda \cos \bar{\gamma} \quad \forall \alpha \quad (2.15)$$

avec $a_1(\alpha), a_2(\alpha), a_3(\alpha)$ les composantes du vecteur colonne $A(\alpha)$.

2. *La condition de stabilité (2.9) associée à la loi de commande (2.8) est satisfaite si et seulement si*

$$\forall \alpha, \quad \left(a_1(\alpha) a_2(\alpha) + \frac{\lambda}{4} (1 + a_3(\alpha)^2) \lambda \sin \bar{\gamma} \right) \lambda \sin \bar{\gamma} < a_2(\alpha)^2 \lambda \cos \bar{\gamma} \quad (2.16)$$

Dans le cas particulier où $\bar{\gamma} = 0$ et la fonction transverse est définie par (1.38), les conditions (2.15) et (2.16) sont respectivement équivalentes à

$$1 - \frac{2}{\delta^2} \left(\sqrt{1 + \delta^2} - 1 \right) < \lambda < 1 + \frac{2}{\delta^2} \left(\sqrt{1 + \delta^2} - 1 \right), \quad \delta = \frac{2 + \varepsilon^2 \eta^2}{\varepsilon \eta} \quad (2.17)$$

et

$$0 < \lambda \quad (2.18)$$

La preuve de ce lemme est donnée dans l’annexe A.1.

La condition suffisante de stabilité (2.17) illustre bien une propriété générique de ce type d’analyse : la marge de robustesse garantie est d’autant plus faible que $\varepsilon \eta$ est petit (au premier ordre elle est en fait proportionnelle à $\varepsilon \eta$). Elle est donc commensurable à la précision de positionnement souhaitée. Le fait que ce type de condition n’apparaisse pas pour la loi de commande (2.8) (cf. (2.18)), bien qu’intéressant, n’est malheureusement pas une propriété générique ; il est seulement lié à la structure très particulière des erreurs de mesure ici considérées. En règle générale, la loi de commande (2.8) conduit à des conditions de stabilité similaires à celles que l’on peut obtenir avec la commande (2.2), avec l’inconvénient qu’elle ne permet pas de découpler la convergence de chaque composante du vecteur z , même lorsque le modèle du robot est parfaitement connu. Aussi, à partir de maintenant, nous nous limiterons essentiellement à l’étude de la commande (2.2).

Bien que la condition de stabilité (2.17) soit seulement *suffisante*, elle est cohérente avec les problèmes de robustesse rappelés dans le chapitre précédent qui montraient la difficulté/impossibilité d’obtenir de façon robuste la stabilisation asymptotique exponentielle d’un point fixe.

Le résultat suivant montre que la condition de stabilité (2.3) est suffisante pour garantir la stabilisation pratique de trajectoires *arbitraires*, et établit le lien entre la précision de suivi et les paramètres de commande.

Proposition 6 *On suppose que la condition (2.3) est satisfaite avec la matrice C_Δ définie par (2.13)–(2.14). Alors, pour toute trajectoire de référence telle que $\|c_r\|_{\max} := \max_t \|c_r(t)\| < \infty$, la loi de commande (2.2) avec z remplacé par $\hat{z} = \hat{g}f(\alpha)^{-1}$ et $K = -kI_3$ ($k > 0$) assure que $\|g\|$ est ultimement bornée par $\tau(\varepsilon_f + \|c_r\|/k) + \|(b_p, b_\theta)\|$, avec $\varepsilon_f := \max_\alpha \|f_g(\alpha)\|$, et τ une constante indépendante de la trajectoire de référence, et du gain k .*

La preuve de ce résultat est donnée dans l'annexe A.2.

Il est possible, en utilisant notamment la condition de stabilité généralisée (2.10), d'obtenir des résultats de stabilité lorsque les paramètres du modèle (2.11) varient. A simple titre d'illustration, supposons maintenant que γ soit une fonction du temps et, pour simplifier, que la cible soit immobile. On a alors

$$\dot{\hat{g}} = X(\hat{g})C_\Delta(\zeta, t) + \dot{\gamma}(t) \begin{pmatrix} S(\hat{p} - b_p) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec C_Δ , toujours définie par (2.13)–(2.14), qui dépend maintenant de la variable t au travers de la fonction γ . En utilisant (1.28), on déduit de l'équation précédente que

$$\dot{\hat{z}} = X(\hat{z})\text{Ad}^X(f_g(\alpha))\bar{C}_\Delta(f_\zeta(\alpha), t)\bar{v} + \dot{\gamma}(t) \begin{pmatrix} S(\hat{z}_p + R(\hat{z}_\theta)f_p(\alpha) - b_p) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec \hat{z}_p et \hat{z}_θ définis par $\hat{z} = (\hat{z}'_p, \hat{z}'_\theta)'$. Par application de la loi de commande (2.2), on obtient donc en boucle fermée

$$\dot{\hat{z}} = -kM(\hat{z}, \alpha)\hat{z} + \dot{\gamma}(t) \begin{pmatrix} S(\hat{z}_p + R(\hat{z}_\theta)f_p(\alpha) - b_p) \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec M la fonction à valeur matricielle définie par (2.5). Si la condition de stabilité généralisée (2.10) est satisfaite, la dérivée de la fonction $V(\hat{z}) = \hat{z}'\hat{z}$ le long des solutions du système ci-dessus vérifie donc l'inégalité

$$\dot{V}(\hat{z}) \leq -2k\delta\|\hat{z}\|^2 + \|\hat{z}\|\dot{\gamma}(\|f_p(\alpha)\| + b_p)$$

avec δ définie via la relation (2.7). D'où l'on déduit que si $\dot{\gamma}$ est bornée, $\|\hat{z}\|$ est bornée ultimement par $\sup_t |\dot{\gamma}(t)|(\varepsilon_f + b_p)/(2k\delta)$.

2.2 Conditions suffisantes de stabilité vis-à-vis de l'estimation de la pose

Les résultats précédents ont permis d'illustrer comment la condition de stabilité (2.3) permet d'obtenir des résultats de robustesse vis-à-vis d'erreurs d'estimation de la pose.

Toutefois, le modèle (2.11) est clairement restrictif. Nous souhaitons maintenant établir des résultats plus génériques. Pour ce faire, nous allons considérer une estimation $\hat{g} = \psi(g)$ où ψ est une fonction arbitraire a priori. Ceci correspond à un cadre général lorsque le capteur est fixé à la plateforme non holonome (i.e. $\xi \equiv 0$ suivant le schéma de la Figure 2.1), puisque s dépend seulement de g dans ce cas et l'estimation \hat{g} est typiquement calculée comme une fonction de s . Le cas où ξ est contrôlé activement sera illustré sur la base d'exemples dans la section suivante.

Considérons donc une estimation $\hat{g} = \psi(g)$. Comme dans la section précédente, on pose $\hat{z} := \hat{g}f(\alpha)^{-1}$. L'utilisation de \hat{z} à la place de z dans (1.41)-(1.42) donne

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger \left(\text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1})X(\hat{z})^{-1}K\hat{z} + \text{Ad}^X(\hat{g}^{-1})c_r(t) \right) \quad (2.19)$$

ou

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger \text{Ad}^X(f(\alpha)^{-1})X(\hat{z})^{-1}K\hat{z} \quad (2.20)$$

lorsque c_r est zéro, ou inconnu. Notons que la différence entre la loi de commande (2.20) et la commande (2.2) réside essentiellement dans l'utilisation de l'inverse de la matrice $\text{Ad}^X(f(\alpha))$ au lieu de sa transposée (puisque $X(z)$ est une matrice de rotation, on a $X(z)^{-1} = X(z)'$). Afin d'établir les résultats qui vont suivre, on aurait aussi pu utiliser la commande (2.2) au lieu de (2.20); toutefois ce dernier choix est un peu plus naturel puisque c'est celui qui permet de linéariser exactement la dynamique de z lorsque g est connu.

Le problème consiste maintenant à déterminer les propriétés de stabilité des commandes (2.19) et (2.20). Contrairement au cas particulier d'une estimation \hat{g} donnée par (2.11), nous allons étudier séparément le problème de bornitude de l'erreur de suivi de celui de la convergence de g vers une configuration fixe lorsque la cible est immobile. Concernant la propriété de bornitude, nous sommes amenés à faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse 1 *Il existe deux constantes $\delta_1 > 0$ et $\gamma_1 < 1$ telles que l'erreur d'estimation $\tilde{g} = g\hat{g}^{-1}$ satisfait l'inégalité suivante*

$$\|\tilde{g}\| \leq \gamma_1 \|g\|, \quad \forall g \in B_g(\delta_1) \quad (2.21)$$

La condition (2.21) signifie que la norme relative de l'erreur d'estimation est inférieure à un dans un domaine borné contenant $g = 0$. Ceci constitue clairement une condition faible. En effet, comme $\hat{g} = \psi(g)$, alors si $\psi(0) = 0$ (estimation non biaisée à la position désirée), on montre à partir de la définition de la loi de groupe (1.10) que

$$\tilde{g} \approx \left(I_3 - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0) \right) g \quad (2.22)$$

dans le voisinage de $g = 0$. Par conséquent, si

$$\left\| I_3 - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0) \right\| < 1 \quad (2.23)$$

l'hypothèse 1 est satisfaite dans un voisinage de $g = 0$. Par exemple, lorsque $s = \varphi_s(g)$ avec $\varphi_s(0) = 0$, pour une certaine fonction φ_s , une estimation possible \hat{g} est donnée par

$$\hat{g} = \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \right)^{-1} s \quad (2.24)$$

Dans ce cas, la relation (2.23) devient

$$\left\| I_3 - \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \right)^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0) \right\| < 1$$

Cette dernière relation rappelle les conditions de stabilité classiques sur la matrice d'interaction $L = \frac{\partial s}{\partial g}$, du type² $L\widehat{L}^{-1} > 0$, dans le contexte de la commande référencée capteur des bras manipulateurs (Samson et al., 1990)[ch. 7] et en particulier de la commande référencée vision (voir par exemple (Chaumette, 1990; Malis, 1998)).

Le résultat suivant établit la bornitude ultime de l'erreur de suivi g (cf. la propriété *iii.a*) de la Proposition 4) sous l'hypothèse 1.

Proposition 7 (Bornitude de l'erreur de suivi pour l'unicycle et la voiture). *Considérons la loi de commande (2.20) avec $K = -kI_3$ ($k > 0$) et f une FT. Si*

$$\|g(0)\| < \delta_1 - 2\varepsilon_f \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}_f := \frac{\varepsilon_f + \|c_r\|_{\max}/k}{1 - \gamma_1} < \delta_1 \quad (2.25)$$

avec δ_1 et γ_1 des constantes spécifiées par (2.21) et $\|c_r\|_{\max} := \max_t \|c_r(t)\|$, alors $\|g\|$ est borné ultimement par $\bar{\varepsilon}_f$.

La preuve de ce résultat est donnée dans l'annexe A.3.

Faisons quelques commentaires sur ce résultat. Tout d'abord, le choix de la matrice de gain K dans la proposition est fait essentiellement pour simplifier la preuve et spécifier une borne ultime pour $\|g\|$. La bornitude ultime est aussi garantie pour d'autres matrices Hurwitz stables, comme par exemple toute matrice de la forme

$$K = \begin{pmatrix} -K_p & 0 \\ 0 & -k_\theta \end{pmatrix}$$

avec K_p une matrice 2×2 définie positive et $k_\theta > 0$. Ensuite, notons que la condition (2.25) indique comment la "taille" de la FT f influence la borne ultime de g et l'ensemble des conditions initiales $g(0)$ pour lesquelles la bornitude peut être démontrée. Enfin, insistons sur la contribution la plus importante de ce résultat : pour toute estimation \hat{g} de g satisfaisant (2.21), l'erreur de suivi de toute trajectoire de référence est bornée par une valeur qui peut être rendue arbitrairement petite par un choix pertinent des paramètres de contrôle

²ceci est un cas particulier de la condition de positivité (1.53) en considérant la décomposition $\widehat{J}_e = \widehat{L}J$ avec J le jacobien du robot supposé parfaitement connu.

ε_f et k . Notons en particulier que rien n'empêche a priori que ε_f soit arbitrairement petit. En d'autres termes, en ce qui concerne le problème de bornitude de l'erreur de suivi, les contraintes sur la qualité d'estimation de g sont très faibles.

Lorsque la vitesse de référence c_r est connue, la loi de commande (2.19) peut être utilisée pour améliorer la précision de suivi comme ceci est précisé dans la proposition suivante.

Proposition 8 *Supposons que la vitesse de référence $c_r(t)$ est connue et considérons la loi de commande (2.19) avec $K = -kI_3$ ($k > 0$) et f une FT. Si*

$$\|g(0)\| < \delta_1 - 2\varepsilon_f \quad \text{et} \quad \bar{\varepsilon}_f := \frac{\varepsilon_f}{1 - \gamma_1(1 + \|c_r\|_{\max}/k)} < \delta_1$$

avec δ_1 et γ_1 des constantes spécifiées par (2.21) et $\|c_r\|_{\max} := \max_t \|c_r(t)\|$, alors $\|g\|$ est bornée ultimement par $\bar{\varepsilon}_f$.

La preuve de ce résultat est similaire à la preuve de la Proposition 7.

Les résultats précédents indiquent que la bornitude de l'erreur de suivi peut être obtenue sous des hypothèses relativement faibles. Toutefois, ceci ne garantit en rien que le comportement du système soit satisfaisant en pratique. En particulier, il est naturel de se demander, comme dans le cas où g est parfaitement connue (cf Propriété *iii.b*) de la Proposition 4), si l'on peut garantir la convergence du robot vers une configuration fixe lorsque la cible est immobile. Pour répondre à cette question, nous sommes amenés à étudier séparément les cas de l'unicycle et de la voiture.

Proposition 9 (Convergence unicycle) *Pour le modèle de l'unicycle (1.6), considérons la loi de commande (2.20) avec $K = -kI_3$ ($k > 0$), et f une FT définie par (1.38). Supposons que $c_r = 0$ (i.e. cible immobile) et que la condition (2.25) est satisfaite. Soit γ_2 la plus petite constante positive telle que*

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0) \right\| \leq \gamma_2 \|g\|, \quad \forall g \in B_g(\varepsilon_f/(1 - \gamma_1)) \quad (2.26)$$

Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 , qui dépendent uniquement du paramètre η de la FT f , telles que si

$$\bar{\gamma} := \left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon_f}{1 - \gamma_1} \right) \left(\frac{c_1}{\varepsilon_f} + c_2 \varepsilon_f^3 \right) < 1 \quad (2.27)$$

alors \hat{z} converge exponentiellement vers zéro et g converge exponentiellement vers un point fixe.

La preuve de cette proposition, inspirée de la preuve de la Proposition 5, est donnée dans l'annexe A.4.

Par rapport à la Proposition 7, le résultat précédent nécessite la condition supplémentaire (2.27). Discutons maintenant les rôles que la "taille" ε_f de la fonction transverse (qui dépend essentiellement du paramètre ε), et les valeurs de γ_1, γ_2 (qui reflètent la qualité de

l'estimation de la pose), jouent dans la réalisation de cette condition. Pour $\varepsilon_f \in [0, \bar{\varepsilon}]$, la condition (2.27) est satisfaite si

$$\left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon_f}{1 - \gamma_1} \right) \frac{\bar{c}_1}{\varepsilon_f} < 1 \quad (2.28)$$

avec $\bar{c}_1 = c_1 + c_2 \bar{\varepsilon}^4$. Il est clair que cette condition ne peut pas être satisfaite, quand ε_f tend vers zéro, à moins que $\gamma_1 = 0$. Ceci suggère que des valeurs très petites de ε_f , permettant un suivi très précis, pourraient empêcher le robot de converger vers une situation fixe quand la cible est immobile. Ceci est cohérent avec les résultats obtenus dans le cas particulier de l'estimation (2.11) (cf. Lemme 1), et plus généralement avec la difficulté d'obtenir en même temps la stabilité exponentielle d'une configuration fixe et la robustesse de cette propriété vis-à-vis d'erreurs de modèle. Néanmoins, la condition (2.27) montre aussi que, pour toute valeur de ε_f , la convergence exponentielle a lieu si γ_1 et γ_2 sont suffisamment petits. On déduit de (2.22) que γ_1 est petit dans le voisinage de $g = 0$ si le Jacobien de ψ en ce point est proche de l'identité. Par exemple, quand \hat{g} est donnée par (2.24), cette condition est satisfaite si le Jacobien de la fonction φ_s est estimé avec précision. Dans ce cas, si l'on suppose, pour simplifier, que $\gamma_1 = 0$, alors la condition (2.28) est réduite à $\gamma_2 \bar{c}_1 < 1$. La constante \bar{c}_1 peut être calculée à partir des paramètres de la FT. En ce qui concerne γ_2 , il est directement lié aux termes de second ordre de la fonction ψ , et donc aux termes de second ordre de la fonction signal φ_s . Pour cette raison, à moins qu'un modèle analytique de φ_s soit connu, il est généralement difficile d'évaluer γ_2 . Remarquons, cependant, que $\gamma_2 = 0$ quand ψ est une transformation linéaire (cf. modèle (2.11)). Finalement, remarquons que (2.27) est seulement une condition *suffisante* pour la convergence. Des simulations et des résultats expérimentaux, comme ceux présentés dans les sections suivantes, tendent à indiquer qu'elle est très conservatrice. En fait, des simulations intensives avec divers choix de la fonction signal ne nous ont pas permis d'observer des situations où l'erreur de suivi reste bornée sans converger vers une valeur fixe. Cependant la question de savoir si cette propriété est toujours satisfaite ou non reste ouverte. Les résultats précédents ont fait l'objet de la publication (Maya et al., 2006a).

Pour les plateformes de type voiture, on obtient le résultat suivant, similaire à la Proposition 9 modulo la condition (2.27) qui est remplacée par une condition plus restrictive.

Proposition 10 (Convergence voiture). *Pour le modèle de la voiture (1.9), considérons la loi de commande (2.20) avec $K = -kI_3$ ($k > 0$), et f une FT définie par (1.39). Supposons que $c_r = 0$, et que la condition (2.25) est satisfaite. Soit γ_2 la plus petite constante positive telle que*

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0) \right\| \leq \gamma_2 \|g\|, \quad \forall g \in B_g(\varepsilon_f / (1 - \gamma_1)) \quad (2.29)$$

Il existe deux constantes positives c_1 et c_2 , qui dépendent uniquement des paramètres η_i de

la FT, telles que si

$$\bar{\gamma} := \left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon_f}{1 - \gamma_1} \right) \left(\frac{c_1}{\varepsilon_f^2} + c_2 \varepsilon_f^4 \right) < 1 \quad (2.30)$$

alors \hat{z} converge exponentiellement vers zéro et g converge exponentiellement vers un point fixe.

La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la Proposition 9.

La différence principale avec la Proposition 9 vient du terme $1/\varepsilon_f^2$ dans (2.30). Ceci est dû au fait que la troisième composante de la FT (1.39) est homogène à ε^2 , tandis que la troisième composante de la FT (1.38) associée à l'unicycle est homogène à ε . Ceci dit, les conclusions qui peuvent être tirées de ces deux propositions sont qualitativement les mêmes : il est beaucoup plus difficile de garantir la convergence de l'état vers une valeur fixe que sa bornitude ultime.

2.3 Quelques techniques pour l'estimation de la pose

Rappelons d'abord que $s = \varphi(g_{ts})$ et que nous avons supposé que φ est un difféomorphisme (local), de sorte que φ^{-1} est, lui aussi, bien défini localement. Par la loi de groupe, nous avons $g = g_{rt}g_{ts}g_{sm}$, et l'on peut donc écrire

$$g = g_{rt}\varphi^{-1}(s)g_{sm} \quad (2.31)$$

Le calcul d'une estimation \hat{g} de g à partir de mesures capteur correspond au classique "problème d'estimation de la pose", qui a été amplement étudié dans la littérature sur la vision par ordinateur (voir par exemple (Faugeras, 1993) pour une référence didactique et (Rosenhahn, 2003) pour un aperçu des techniques existantes dans le cadre d'un capteur visuel ; pour des techniques particulières appliquées sur les robots mobiles, voir par exemple (Sugihara, 1988; Tsakiris, 1999; Artus, 2005)). Rappelons brièvement (sans aucune revendication d'originalité) quelques approches possibles. Par exemple, on déduit de (2.31) que

$$s = \varphi_s(g, \xi) := \varphi(g_{tr}gg_{ms}) \quad (2.32)$$

étant donné que g_{tr} est constant et g_{ms} dépend seulement de ξ . Avec s choisi de manière que $\varphi_s(0, 0) = 0$, une estimation linéaire simple peut être obtenue à partir de l'approximation locale $s \approx \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0, 0)g + \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}(0, 0)\xi$, i.e.

$$\hat{g} = \left(\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0, 0) \right)^{-1} \left(s - \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}}(0, 0)\xi \right) \quad (2.33)$$

avec $\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0, 0)$ et $\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}}(0, 0)$ des approximations de $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0, 0)$ et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}(0, 0)$. Lorsque la configuration g_{ms} du capteur par rapport à la plateforme est connue, et un modèle de φ est

disponible, l'équation (2.31) peut être utilisée pour obtenir des estimations non linéaires. Cependant, il est souvent difficile en pratique d'obtenir un modèle précis de φ . De plus, ce qui est en réalité nécessaire pour le calcul de g est φ^{-1} , l'inverse de φ . La connaissance d'une expression analytique de φ n'implique pas pour autant qu'une expression analytique de φ^{-1} soit disponible. Quand elle ne l'est pas, on peut calculer une estimation de $\varphi^{-1}(s)$ via un algorithme de recherche par gradient, basé sur l'utilisation de la matrice Jacobienne $\frac{\partial \varphi}{\partial g_{ts}}$. Une autre possibilité consiste à déterminer une fonction $\hat{\varphi}$ proche de φ dans un domaine contenant la situation désirée $g_{ts}^* = \varphi^{-1}(0)$, et dont on peut obtenir l'inverse analytiquement. Ceci suggère l'estimation suivante :

$$\hat{g} = g_{rt} \hat{\varphi}^{-1}(s) g_{sm} \quad (2.34)$$

Finalement, même lorsqu'une expression analytique de φ^{-1} est connue, on peut utiliser une expression simplifiée pour cette fonction, de façon à réduire la complexité du calcul. Cette alternative conduit à une estimation de g de la forme

$$\hat{g} = g_{rt} \widehat{\varphi}^{-1}(s) g_{sm} \quad (2.35)$$

2.4 Résultats de simulation pour un capteur visuel

Les résultats de simulation qui suivent ont été obtenus avec le système illustré par la Fig. 2.2, comportant un robot mobile (de type unicycle ou voiture) muni d'une caméra embarquée, contrôlée en rotation autour d'un axe vertical. La cible est matérialisée par trois points non colinéaires dans le plan $(0, i, j)$, L , M , et R , qui constituent les sommets d'un triangle isocèle de base $2a$ et de hauteur b , avec $a = b = 0.25$. Le signal capteur est

$$s = \begin{pmatrix} \mathbf{l} - \mathbf{l}^* \\ \mathbf{m} - \mathbf{m}^* \\ \mathbf{r} - \mathbf{r}^* \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

avec $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{r}$ les coordonnées y (dans le repère caméra) de la projection des points L, M, R sur le plan image, et \mathbf{x}^* la valeur de la variable \mathbf{x} à la position de référence. Pour toutes les simulations, $g_{tr} = (-2.5, 0, 0)'$ (ce qui revient à aligner la plateforme face à la cible à la position de référence, comme ceci est illustré par la figure), et $g_{ms} = (0.51, 0, \xi)'$.

2.4.1 Estimation linéaire de la pose

Nous illustrons d'abord l'utilisation d'une estimation linéaire simple définie par (2.33). Ce modèle nécessite l'estimation des matrices jacobienes $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0, 0)$ et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}(0, 0)$. En pratique, ceci peut être effectué au moyen de petits déplacements $\Delta g(p), \Delta \xi(p)$ ($p = 1, \dots, P$) générés dans le voisinage de $g = 0$ et $\xi = 0$, en mesurant les variations de signal associées $\Delta s(p)$, et en posant par exemple

$$\begin{pmatrix} \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0, 0) & \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}}(0, 0) \end{pmatrix} = (\Delta s(1) \cdots \Delta s(P)) \begin{pmatrix} \Delta g(1) \cdots \Delta g(P) \\ \Delta \xi(1) \cdots \Delta \xi(P) \end{pmatrix}^\dagger \quad (2.37)$$

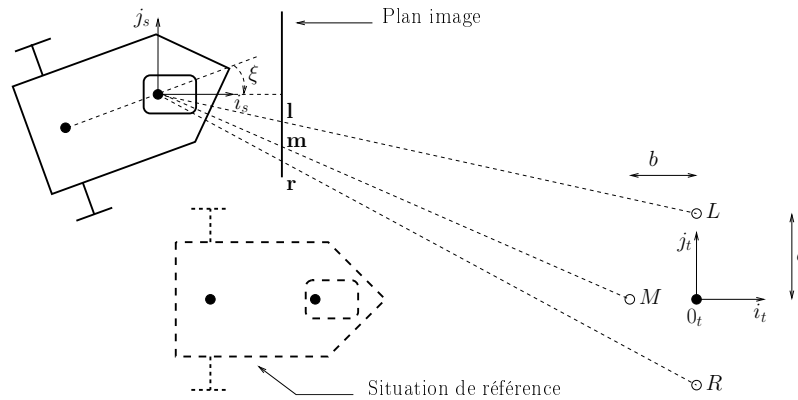
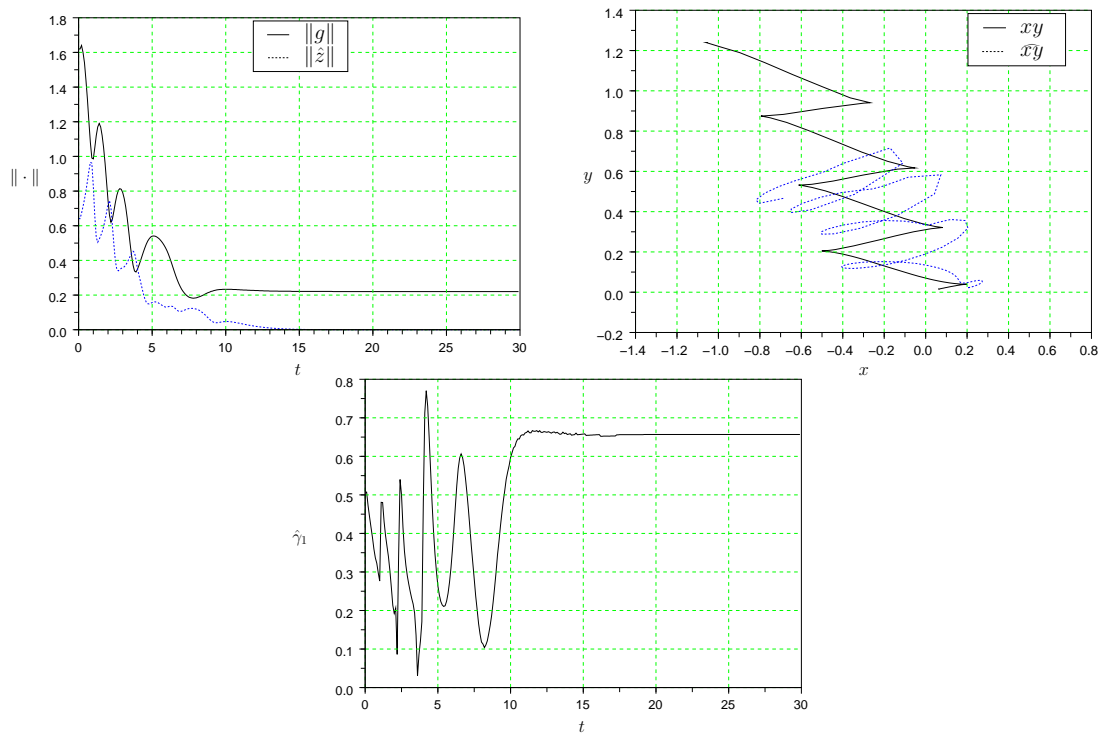


FIG. 2.2: Robot mobile avec capteur visuel embarqué

Caméra fixée au robot. Nous considérons d'abord le cas où $\xi = 0$ (la caméra reste fixe sur le robot). Dans ce cas, s et \hat{g} dépendent de g uniquement. Les résultats de simulation représentés sur la Fig. 2.3 ont été obtenus avec un robot de type unicycle et une cible immobile. Les normes de g et \hat{z} sont représentées sur la figure du haut à gauche. La figure du haut à droite correspond au mouvement de l'origine 0_m du repère robot sur le plan. La trajectoire réelle est représentée avec des lignes continues tandis que la trajectoire donnée par l'estimation de la pose (2.33) est représentée en pointillé. La figure du bas correspond à un calcul numérique en ligne (à chaque instant t) de γ_1 en utilisant les définitions de l'hypothèse 1 avec l'égalité dans l'équation (2.21). Étant donné qu'il est en général difficile de calculer analytiquement γ_1 ainsi que le domaine de validité d'un tel calcul, nous avons choisi d'estimer cette valeur numériquement. Cette estimation de γ_1 est présentée ici seulement à titre informatif pour avoir une idée de la vérification où non de l'inégalité (2.21) (utilisée dans la proposition 7) en pratique. Même si cette valeur de γ_1 n'est pas strictement exacte vis-à-vis des définitions de l'hypothèse 1, elle nous donne une bonne estimation de la vraie valeur au moins le long de la trajectoire réalisée dans cette simulation. La loi de commande (2.20) a été utilisée avec $K = -0.5I_3$, et la FT est définie par (1.38) avec $\varepsilon = 0.3$ et $\eta = 1$. Le robot démarre de la condition initiale $g(0) = (-1.05, 1.24, 0)'$ (en haut à gauche sur la figure de droite) et la position finale est donnée approximativement par $g(30) = (0.07, -0.03, 0.24)'$. En dépit de la mauvaise qualité de l'estimation de g quand le robot est éloigné de la position de référence, la variable contrôlée \hat{z} converge vers zéro et la plateforme converge vers une situation fixe proche de celle désirée. D'après l'estimée de γ_1 , l'inégalité (2.21) a été vérifiée tout au long de cette simulation. En substituant la dernière valeur de l'estimée $\hat{\gamma}_1(30) = 0.66$ et les paramètres de commande dans (2.25), la borne ultime de la norme de l'erreur de suivi g qui en résulte est de 0.94. La norme de $g(30)$ est bien au-dessous de cette borne, ce qui est cohérent avec la proposition 7.

FIG. 2.3: Estimation linéaire de g , caméra fixée sur le robot, cible immobile

Caméra commandée en rotation. Dans la pratique, il est souvent nécessaire de commander la caméra en rotation (i.e. commande de l'angle ξ dans notre cas) de manière à ce que la cible reste dans le champ de vision de la caméra. Une stratégie simple de commande consiste à choisir $v_\xi (= \dot{\xi})$ de façon à stabiliser s_2 à zéro (voir la fig. 2.2). Pour ce faire, un retour proportionnel simple, avec précompensation de la rotation de la plateforme mobile, de forme

$$v_\xi = k_s s_2 - v_2 \quad (k_s > 0) \quad (2.38)$$

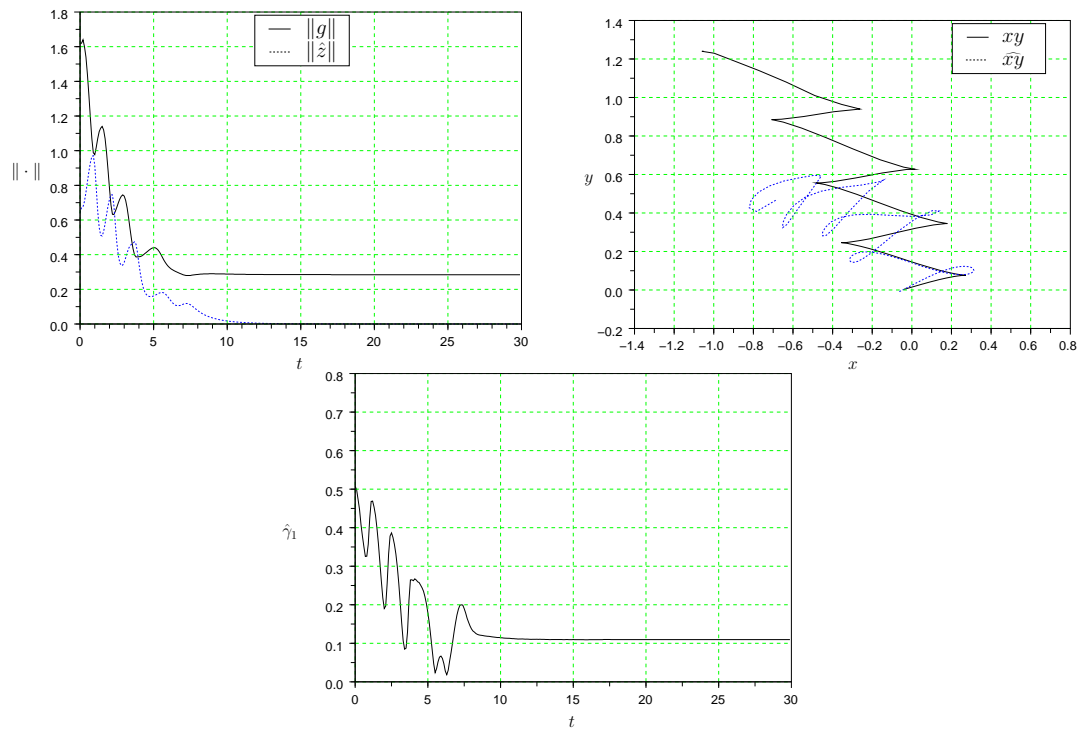
peut être utilisé. Le choix d'un gain k_s relativement élevé aide à réduire la "traînée" introduite par le mouvement non compensé de la cible. On pourrait aussi synthétiser des lois de commande plus sophistiquées pour stabiliser s_2 à zéro dans toutes les situations, mais cela n'est pas nécessaire car l'objectif, à ce niveau, est seulement de garder la cible dans le champ de vision de la caméra.

La Fig. 2.4 illustre cette stratégie. La loi de commande (2.20) a été appliquée avec la même matrice de gains K et la même fonction transverse que dans la simulation précédente, et avec la loi de commande v_ξ définie par (2.38) pour $k_s = 3$ et s exprimé en coordonnées métriques. Bien que l'estimation de la situation de la plateforme soit significativement différente de celle obtenue pour la simulation précédente, la trajectoire réelle de la plateforme n'est pas très différente qualitativement. En ce qui concerne l'estimée de γ_1 , on voit que sa valeur est significativement plus basse que celle de la simulation précédente, ce qui indiquerait, en plus de la vérification de l'inégalité (2.21), une meilleure estimation de g et aussi une borne ultime plus petite pour l'erreur de suivi. En substituant la dernière valeur de l'estimée $\hat{\gamma}_1(30) = 0.11$ et les paramètres de commande dans (2.25), la borne ultime de la norme de l'erreur de suivi g qui en résulte est de 0.36. La norme $\|g(30)\| = \|(-0.038, 0.004, 0.282)'\| = 0.285$ est encore au-dessous de cette borne, ce qui est cohérent avec la proposition 7.

Référence mobile. Les mêmes stratégies d'estimation et de contrôle, appliquées au cas d'une cible mobile, sont illustrées par la Fig. 2.5. La vitesse de référence³ est définie par (1.43)

Les trajectoires du robot (en ligne continue) et du repère de référence (en pointillé) sont représentées sur la figure en haut à droite. On remarque que le robot réalise beaucoup de manœuvres pour $t \in [30, 45)$. Ceci est lié au fait que la trajectoire de référence n'est pas réalisable dans cet intervalle de temps car $c_{r,2} \neq 0$. Comme dans les deux simulations précédentes, plusieurs manœuvres sont aussi réalisées dans la phase transitoire, quand la cible est immobile et le robot est encore loin de la cible (i.e., $t \in [0, 15]$). Rappelons que, comme commenté dans le chapitre 1, le nombre de ces manœuvres peut être réduit significativement, par exemple en planifiant une trajectoire de référence menant de la position initiale du robot à la position désirée, ou en utilisant un gain non linéaire comme celui

³Notons qu'il s'agit bien ici du mouvement du repère déporté \mathcal{F}_r que l'on souhaite stabiliser, et non pas de la vitesse de la cible.

FIG. 2.4: Estimation linéaire de g , caméra commandée en rotation, cible immobile

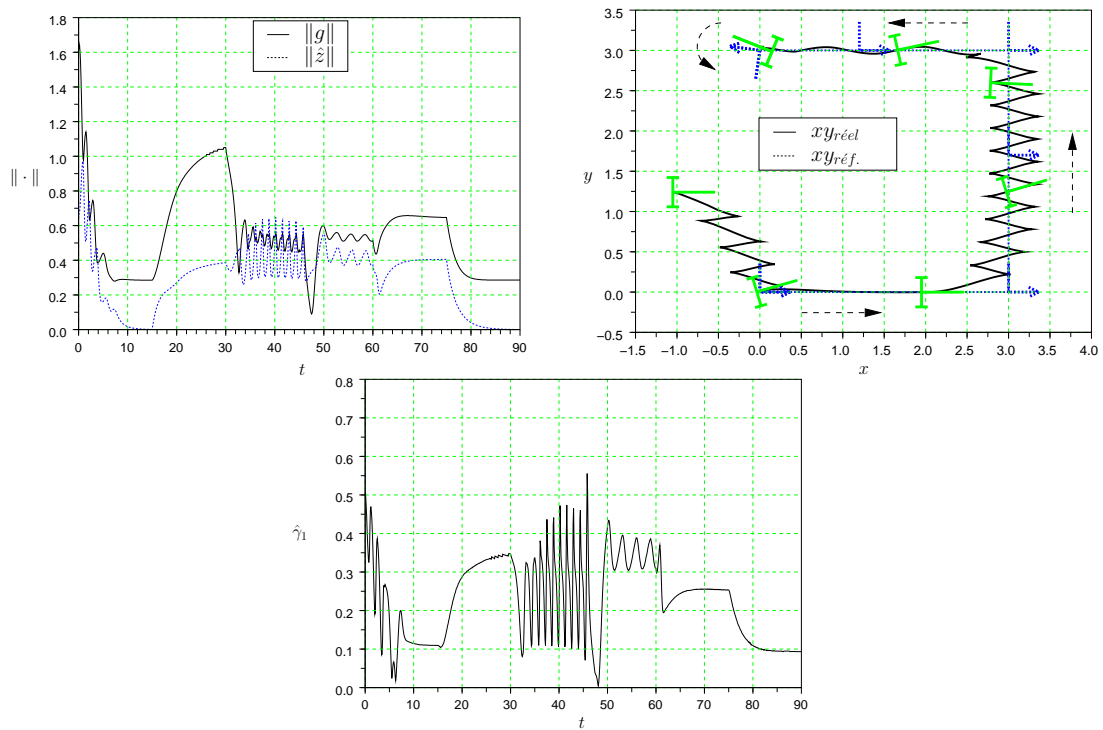


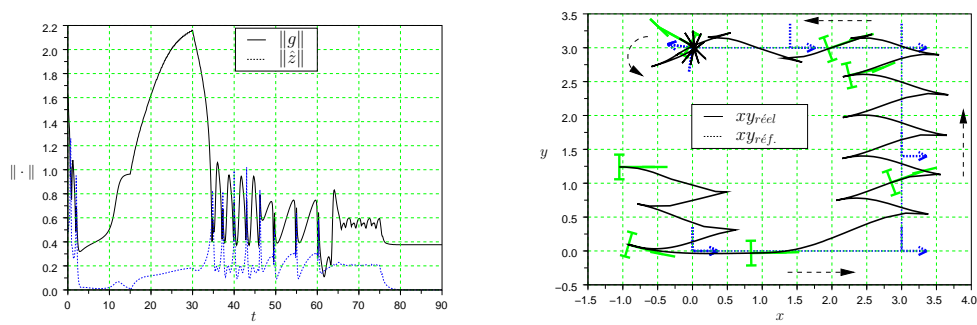
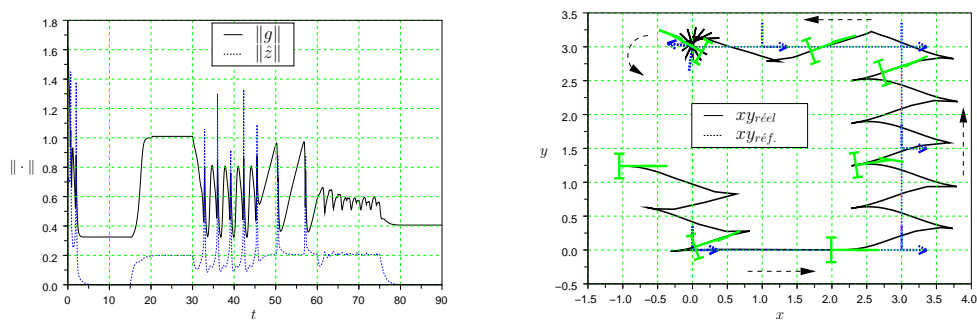
FIG. 2.5: Estimation linéaire de g , caméra contrôlée en rotation, $\hat{c}_r = 0$

proposé dans (Artus et al., 2004). On observe également sur la figure de gauche que l'erreur de suivi est significative lorsque $c_r(t) \neq 0$. Ceci est dû au fait que l'information de vitesse de la cible n'est pas utilisée. L'introduction d'un terme de précompensation de cette vitesse dans la boucle de commande (cf. commande (2.19)) quand c_r est connu ou peut être mesuré/estimé avec précision, améliore ce point de manière significative. Par ailleurs, on peut aussi observer de petites oscillations dans la trajectoire du robot quand la cible bouge en ligne droite dans la direction de $-\vec{t}_t$ (i.e., dans l'intervalle de temps $[45, 60]$). Ce phénomène, qui n'est pas présent lorsque $\hat{g} = g$, est une conséquence de l'estimation imparfaite de la pose du robot. Il a plutôt tendance à se produire quand la cible recule (i.e. dans la direction de $-\vec{t}_t$). En effet, dans ce cas la distance entre le robot (et donc la caméra) et la cible est plus petite, et l'erreur d'estimation augmente rapidement lorsque la distance entre la caméra et la cible diminue. La figure du bas montre l'estimée de γ_1 où l'on peut observer que l'inégalité (2.21) est vérifiée tout au long de cette simulation.

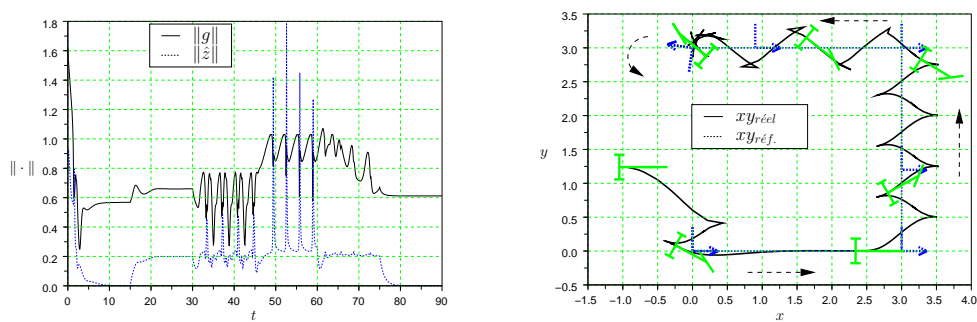
Robot de type voiture. La Figure 2.6(a), illustre l'utilisation de cette stratégie de commande (i.e. loi de commande (2.20) avec une estimation linéaire de la pose) pour un véhicule de type voiture. Le mouvement de la cible est toujours défini via la vitesse de référence c_r donnée par (1.43). Le contrôle de la caméra est donné par (2.38) avec $k_s = 3$. La fonction transverse est définie par (1.39) (avec divers choix des paramètres $\varepsilon, \eta_1, \eta_2, \eta_3$ précisés ci-dessous). La loi de commande \bar{v} , à partir de laquelle on peut déduire la commande v_1 du modèle (1.9), est donnée par (2.20) avec $K = I_3$. La variable δ est posée égale à $f_\delta(\alpha)$, avec la stabilisation asymptotique de $\delta - f_\delta(\alpha) = 0$ obtenue en posant $v_\delta = \dot{f}_\delta(\alpha) - k(\delta - f_\delta(\alpha))$ avec $k > 0$. Les paramètres de la fonction transverse ont été définis comme suit :

$$\varepsilon = 0.3, \quad \eta_1 = 3, \quad \eta_2 = 1.7, \quad \eta_3 = 4 \quad (2.39)$$

Ceci correspond à un débattement longitudinal d'environ $\pm 0.8\text{m}$, et de $\pm 0.4\text{rad}$ en orientation. Ce résultat de simulation met en évidence plusieurs propriétés. Tout d'abord, en dépit d'une estimation très approximative de g , la stabilisation pratique est bien assurée et l'on peut observer la convergence de \hat{z} vers zéro (et de g vers une configuration fixe) dans les phases où la cible est immobile. Lorsque la cible se déplace dans la direction de \vec{t}_t ($t \in (15, 30]$), l'erreur de suivi devient cependant importante. Ceci est dû à la combinaison de trois facteurs : la valeur des paramètres de la fonction transverse qui autorise une erreur longitudinale non négligeable, la "traînée" engendrée par le fait que la vitesse de la cible n'est pas précompensée dans la loi de commande, et la mauvaise estimation de g qui tend à "sous-estimer" l'erreur longitudinale. L'élément le plus remarquable de cette simulation est le phénomène d'oscillation observée en marche arrière (i.e. lorsque la cible se déplace dans la direction de \vec{t}_t ($t \in (45, 60]$)). Ce phénomène avait déjà été signalé pour l'unicycle (Fig. 2.5), mais il est ici beaucoup plus prononcé. La figure 2.7 (à gauche) présente l'estimation du paramètre γ_1 correspondante à cette même simulation. On peut observer que l'inégalité (2.21) ($\gamma_1 < 1$) est vérifié quasiment pendant toute la simulation sauf pendant la phase de marche arrière où le phénomène d'oscillation se manifeste.

(a) Estimation linéaire de g (2.33) et paramètres (2.39) de la FT

(b) Estimation (2.40) et paramètres (2.39) de la FT



(c) Estimation (2.40) et paramètres (2.45) de la FT

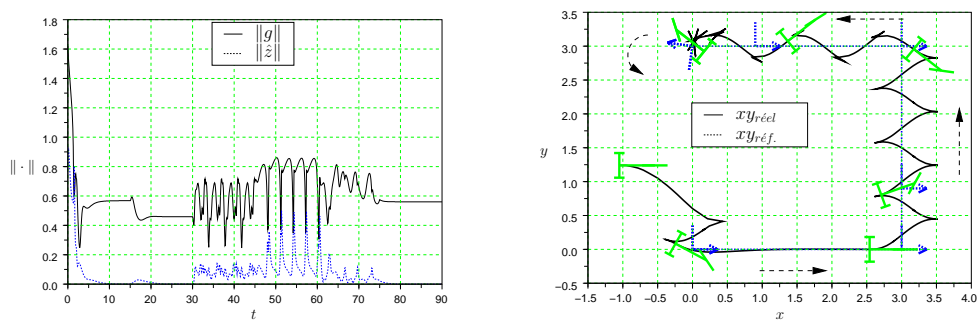
(d) Estimation (2.40), paramètres (2.45) de la FT et $\hat{c}_r(t) = c_r(t)$

FIG. 2.6: Voiture : influence de l'estimation de l'état, du choix des paramètres de la FT et de l'estimation de la vitesse de référence sur le suivi.

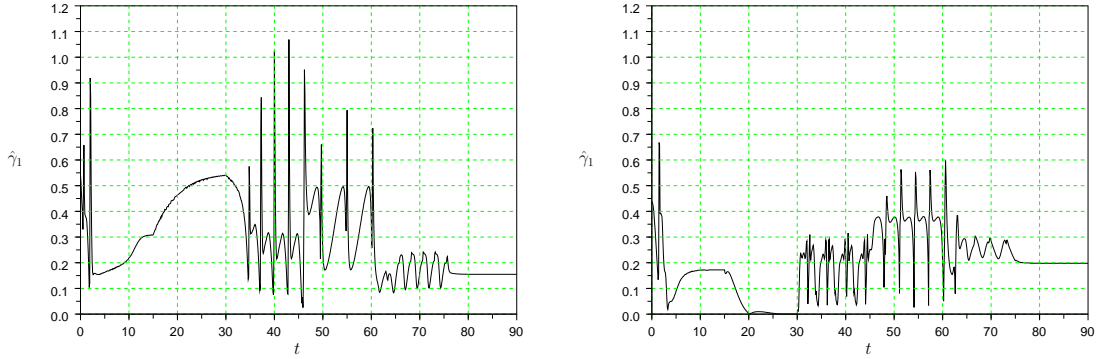


FIG. 2.7: Voiture : Estimation de γ_1 . À gauche l'estimation correspondant à la simulation de la figure 2.6(a) et à droite celle correspondant à la simulation de la figure 2.6(d)

Pour améliorer la précision de suivi on peut intervenir sur les trois facteurs mentionnés précédemment. Les figures 2.6(b), 2.6(c) et 2.6(d) illustrent l'influence de ces facteurs sur la précision de suivi et le comportement du robot. La Figure 2.6(b) montre comment une simple modification de l'estimation \hat{g} permet d'améliorer significativement la précision longitudinale de suivi (pour le capteur de type caméra considéré). Pour cette simulation, les paramètres de la fonction transverse sont encore donnés par (2.39), mais un facteur de correction (correspondant à un rapport de profondeur) est introduit dans la définition de \hat{g} , i.e.

$$\hat{g} = L \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0,0) \right)^{-1} \left(s - \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial \xi}(0,0)\xi \right) \quad (2.40)$$

avec

$$L = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad l = \frac{|\mathbf{l}^* - \mathbf{r}^*|}{|\mathbf{l} - \mathbf{r}|}$$

Pour expliquer ce choix, rappelons brièvement la projection perspective réalisée par une caméra avec un modèle sténopé (voir par exemple (Chaumette, 1990; Faugeras, 1993)).

Sans perte de généralité, on pose la distance focale de la caméra $f = 1$ de manière qu'un point 3D $P = (X, Y, Z)'$ se projette par projection perspective sur le plan image de la caméra en un point $p = (1, y_p, z_p)'$ (cf. Figure 2.8). On obtient alors

$$\mathbf{p}_i = \frac{1}{X_i} P_i \quad (2.41)$$

et (2.36) peut être réécrite comme

$$s_i = \frac{\tilde{y}_{st}}{\tilde{x}_{st}} - \frac{\tilde{y}_{st}^*}{\tilde{x}_{st}^*} \quad (2.42)$$

avec $s_i \in \{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{r}\}$, $\tilde{x}_{st} = x_{st} + X_{ti}$, $\tilde{y}_{st} = y_{st} + Y_{ti}$ et (X_{ti}, Y_{ti}) les coordonnées (constantes) des points P_i dans le repère F_t (voir figure 2.2). Dans le cadre particulier d'erreurs de

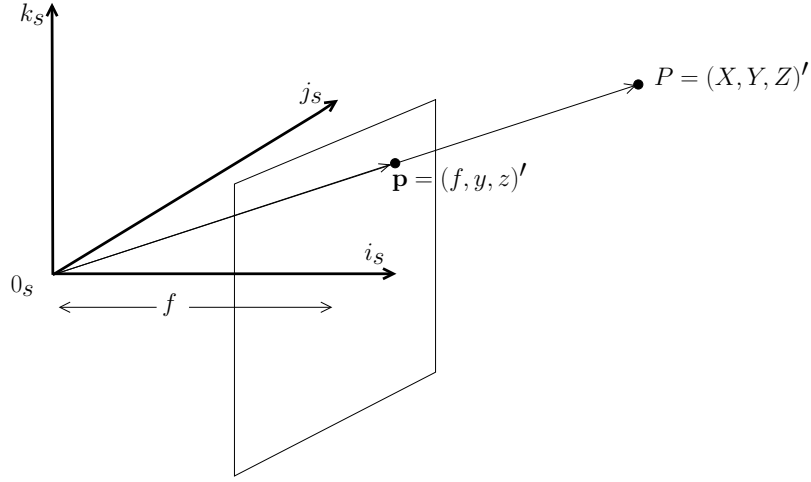


FIG. 2.8: Projection perspective.

suivi purement longitudinales, i.e. lorsque les axes $(0_m, \vec{v}_m)$ et $(0_r, \vec{v}_r)$ de la Figure 2.1 sont confondus, $\tilde{y}_{st} = \tilde{y}_{st}^*$, $g = (x, 0, 0)'$ et $g_{ms} = (0.51, 0, 0)'$. À partir des relations $g = g_{rt}g_{ts}g_{sm}$ et (1.11) et du vecteur $g_{tr} = (-2.5, 0, 0)'$ (par construction) on déduit $g_{st} = (x + x_{st}^*, 0, 0)'$. En appliquant cette dernière égalité dans (2.42) nous déduisons

$$s_i = \frac{x\tilde{y}_{st}^*}{\tilde{x}_{st}\tilde{x}_{st}^*}$$

d'où

$$x = \frac{\tilde{x}_{st}\tilde{x}_{st}^*}{\tilde{y}_{st}^*} s_i \quad (2.43)$$

L'estimation (2.33) équivaut à approximer x en utilisant $\tilde{x}_{st} = \tilde{x}_{st}^*$ dans (2.43). Cela suggère d'améliorer l'estimation de x dans (2.33) par l'utilisation d'une approximation de \tilde{x}_{st} . Remarquons que $|\mathbf{1} - \mathbf{r}| = 2a/x_{st}$. Si l'on connaît la valeur de a (dimensions de l'objet) nous pouvons dériver directement une estimation de la profondeur \tilde{x}_{st} ; si ce n'est pas le cas, une possibilité est donnée par

$$\frac{|\mathbf{1}^* - \mathbf{r}^*|}{|\mathbf{1} - \mathbf{r}|} = \frac{\tilde{x}_{st}}{\tilde{x}_{st}^*} = l. \quad (2.44)$$

Par application de ce facteur sur le premier élément de (2.33) nous retrouvons (2.40). Cette estimation a été validée en simulation et, comme on peut le voir sur la Figure 2.6(b), elle réduit notablement l'erreur longitudinale de suivi lorsque $t \in (15, 30)$ sans modification majeure de l'erreur pour tout autre t . L'estimée du paramètre γ_1 , essentiellement avec les mêmes caractéristiques que pour la simulation précédente (l'hypothèse 1 est vérifiée pendant quasiment toute la simulation sauf pour la phase de marche arrière), n'est pas montré ici.

Pour la simulation de la Figure 2.6(c), les paramètres de la fonction transverse ont été modifiés comme suit :

$$\varepsilon = 0.17, \quad \eta_1 = 15, \quad \eta_2 = 1.7, \quad \eta_3 = 30 \quad (2.45)$$

Par rapport aux paramètres précédents, ce choix conduit à réduire le débattement longitudinal (à $\pm 0.45\text{m}$) et augmenter le débattement en orientation ($\pm 0.9\text{rad}$). Logiquement, et comme on peut l'observer sur la figure de gauche (pour $t \in (15, 30]$), ceci a pour effet de réduire l'erreur longitudinale de suivi. Ceci mis à part, le mouvement du robot est similaire à celui observé dans le cas précédent. L'estimée du paramètre γ_1 présente essentiellement avec les mêmes caractéristiques que pour les deux simulations précédentes et pour cette raison elle n'est pas montrée ici.

Finalement, la figure 2.6(d) a été obtenue en compensant dans la loi de commande la vitesse de la référence $c_r(t)$, i.e. Éq. (2.19). Comme on peut s'y attendre ceci se traduit par une diminution de l'erreur de suivi, dans toutes les phases de l'asservissement où la cible bouge. Qualitativement, le mouvement du robot reste similaire à ce que l'on observait pour les simulations précédentes. En particulier, la connaissance de la vitesse de la cible ne suffit pas à faire disparaître le phénomène d'oscillations parasites lorsque la cible recule. La figure 2.7 (à droite) présente l'estimation du paramètre γ_1 correspondant à cette même simulation. On peut observer que dans ce cas, l'inégalité (2.21) ($\gamma_1 < 1$) est vérifiée pendant toute la simulation.

Erreurs d'estimation du Jacobien. Les résultats de simulation de la sous-section précédente ont été obtenus avec un Jacobien exact de la fonction φ_s . Toute erreur sur l'estimation de ce Jacobien entraîne des erreurs additionnelles dans l'estimation de l'état du robot. D'après l'hypothèse 1 et le résultat énoncé par la Proposition 7, ceci affecte directement la borne de l'erreur de suivi et la condition de convergence. En fait, des simulations intensives suggèrent des propriétés de robustesse beaucoup plus fortes que celles garanties par l'analyse. En guise d'exemple, nous présentons ci-dessous des simulations pour un modèle simple de l'erreur d'estimation du Jacobien de φ_s correspondant à une estimation à un facteur d'échelle près, i.e.

$$\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0, \xi^*) = \lambda \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0, \xi^*)$$

$$\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}}(0, \xi^*) = \lambda \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}(0, \xi^*)$$

Deux choix du paramètre λ sont illustrés par les résultats de simulation de la Figure 2.9. La loi de contrôle et les paramètres associés sont les mêmes que ceux utilisés pour la simulation de la Figure 2.5. La partie haute de la figure correspond au choix $\lambda = 1/2$, qui tend à surestimer l'erreur de suivi. Il en découle une amélioration de la précision de suivi, mais également une amplification du phénomène d'oscillation dans la phase de marche arrière. Inversement, le choix $\lambda = 2$ associé à la partie basse de la figure diminue la précision de suivi mais fait quasiment disparaître le phénomène d'oscillation. Ces deux aspects mis à part, les résultats sont très similaires.

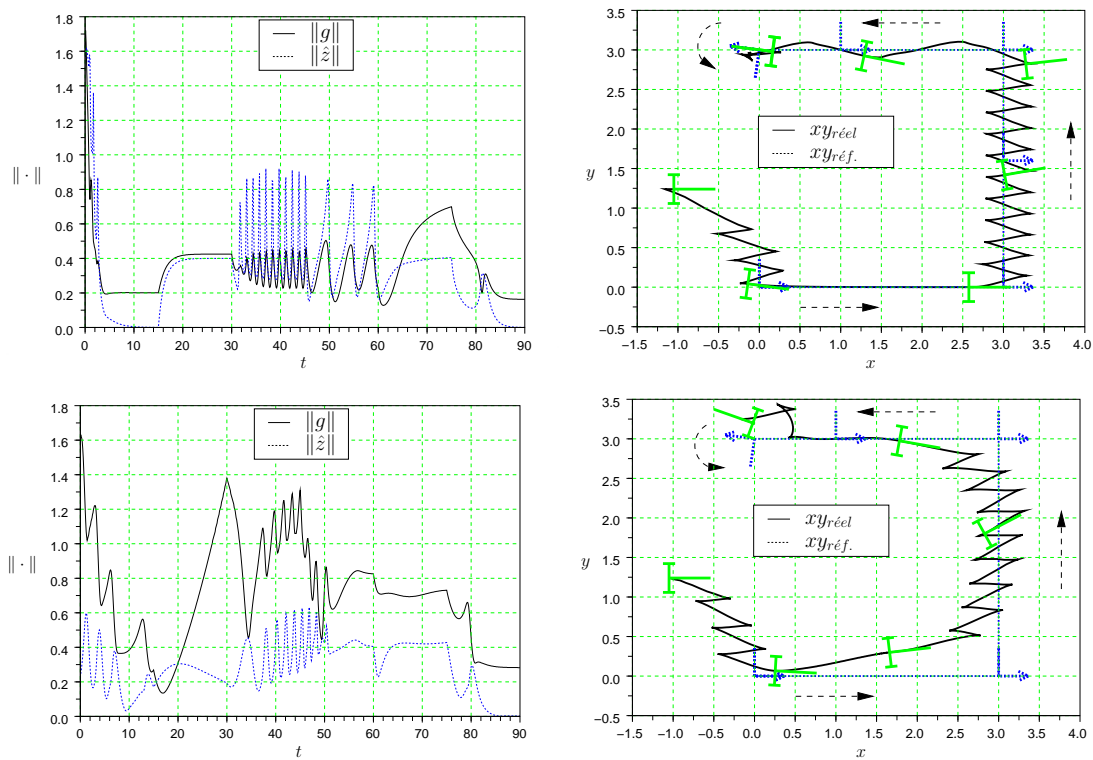


FIG. 2.9: Erreur d'estimation du Jacobien, facteur d'échelle $\hat{J} = \lambda J$. $\lambda = 1/2$ (haut), $\lambda = 2$ (bas)

2.4.2 Estimations non linéaires

Lorsque la situation g_{ms} du capteur par rapport à la plateforme est connue, et un modèle de φ est disponible, on peut envisager de nombreuses façons d'estimer g . Nous présentons ci-dessous quelques unes de ces possibilités pour le capteur de vision, afin d'illustrer le gain en performance que peut apporter une meilleure estimation de l'état. Nous ne présentons pas de estimations du paramètre γ_1 dans les simulations qui suivent car ces estimations étant meilleures que les linéaires, la valeur de ce paramètre est certainement plus petite dans ce cas, ce qui implique la vérification de l'inégalité (2.21).

Estimation de g à partir d'une approximation de φ et inversion de $\hat{\varphi}$ (Éq. (2.34)) : Supposons que $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{r}$ soient exprimés en coordonnées métriques (caméra calibrée). De la géométrie de la cible (cf. Fig. 2.2), nous pouvons déduire que

$$\mathbf{l} = f \frac{y_{st} + a \cos \theta_{st}}{x_{st} - a \sin \theta_{st}}, \quad \mathbf{m} = f \frac{y_{st} - b \sin \theta_{st}}{x_{st} - b \cos \theta_{st}}, \quad \mathbf{r} = f \frac{y_{st} - a \cos \theta_{st}}{x_{st} + a \sin \theta_{st}} \quad (2.46)$$

avec f la distance focale. Remarquons que ces relations définissent la fonction φ (après avoir remplacé $x_{st}, y_{st}, \theta_{st}$ par leurs expressions en termes de x_{ts}, y_{ts} , et θ_{ts}). Le fait que $\theta_{st} = 0$ à la position de référence suggère d'approximer $\sin \theta_{st}$ par θ_{st} et $\cos \theta_{st}$ par un dans les équations ci-dessus. Avec de telles approximations, nous pouvons déduire l'expression suivante de $\hat{\varphi}$:

$$\hat{s} = \hat{\varphi}(g_{ts}) = \left(f \frac{y_{st} + a}{x_{st} - a\theta_{st}}, f \frac{y_{st} - b\theta_{st}}{x_{st} - b}, f \frac{y_{st} - a}{x_{st} + a\theta_{st}} \right)' \quad (2.47)$$

L'équation (2.47) conduit à un système linéaire dans les trois inconnues x_{st}, y_{st} , et θ_{st} , d'où l'on déduit l'estimation suivante de g_{st} :

$$\hat{g}_{st} = \begin{pmatrix} \hat{x}_{st} \\ \hat{y}_{st} \\ \hat{\theta}_{st} \end{pmatrix} = P^{-1}q \quad \text{avec } P := \begin{pmatrix} \mathbf{l} & -f & -a\mathbf{l} \\ \mathbf{r} & -f & a\mathbf{r} \\ \mathbf{m} & -f & b\mathbf{m} \end{pmatrix} \quad \text{et } q := \begin{pmatrix} af \\ -af \\ \mathbf{m}b \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

L'approximation $\hat{\varphi}^{-1}(s)$ de $\varphi^{-1}(s)$ est alors définie par la relation

$$\hat{\varphi}^{-1}(s) := \hat{g}_{ts} := \hat{g}_{st}^{-1} \quad (2.49)$$

avec \hat{g}_{st}^{-1} l'inverse de \hat{g}_{st} par rapport à l'opération du groupe de Lie $SE(2)$ (cf. Éq. (1.11)). L'estimation \hat{g} est alors calculée à partir de (2.34).

Les Figures 2.10(a) et 2.11(a) illustrent cette stratégie d'estimation de g pour une cible immobile et une cible mobile respectivement, avec un véhicule de type unicycle. À l'exception du choix de \hat{g} , tous les paramètres de contrôle sont les mêmes que ceux utilisés pour les simulations des Figures 2.4 et 2.5. En comparant les Fig. 2.4 et 2.10(a), on peut observer que l'estimation non linéaire de g est beaucoup plus précise que l'estimation linéaire utilisée précédemment, en particulier lorsque $\|g\|$ est grand. Bien que cela ait peu

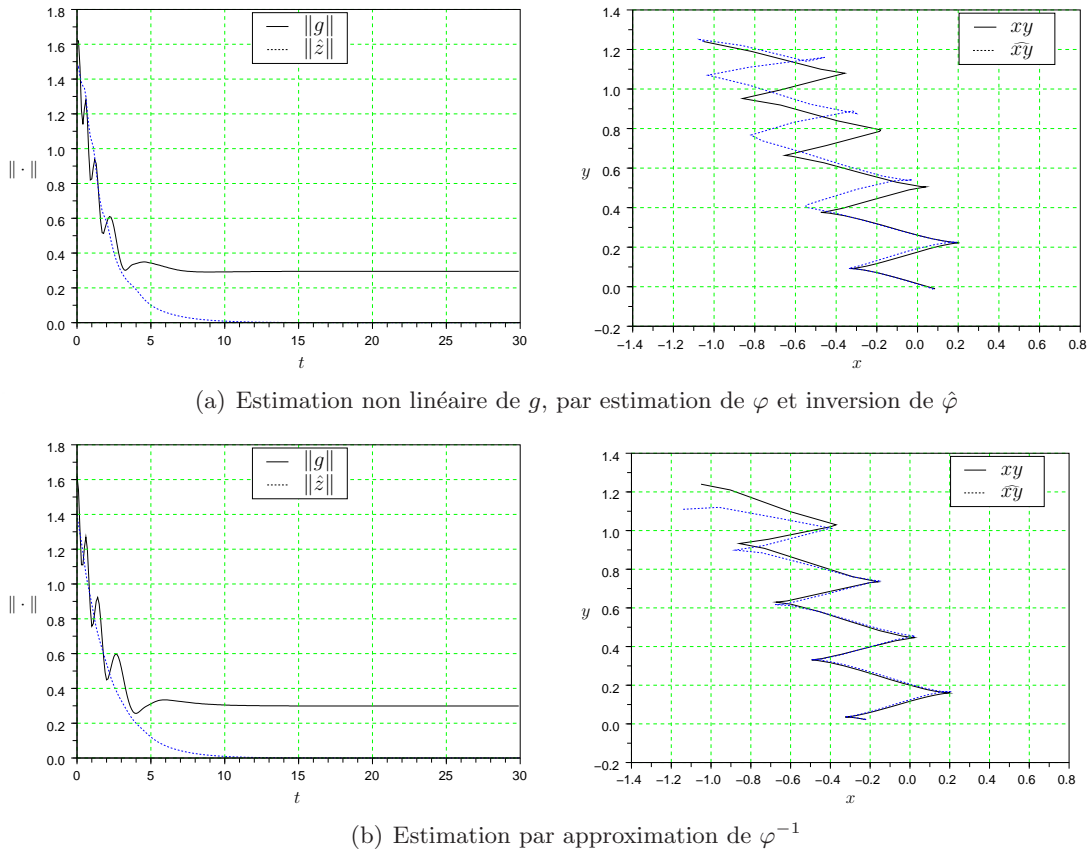
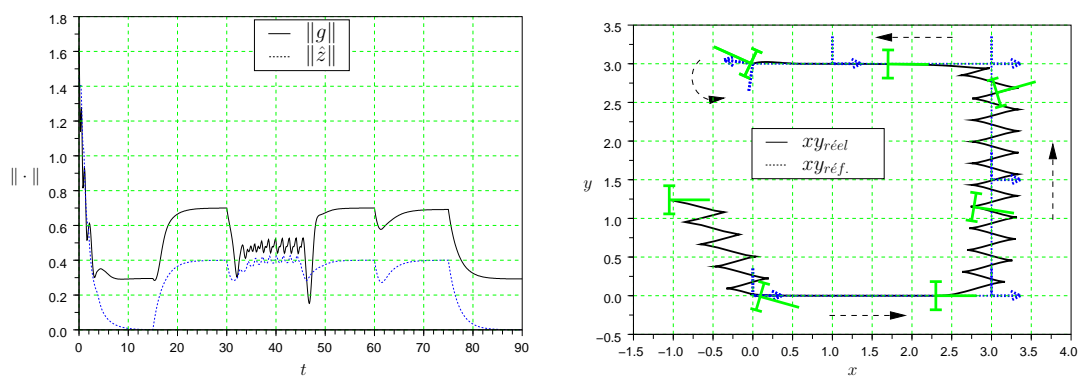
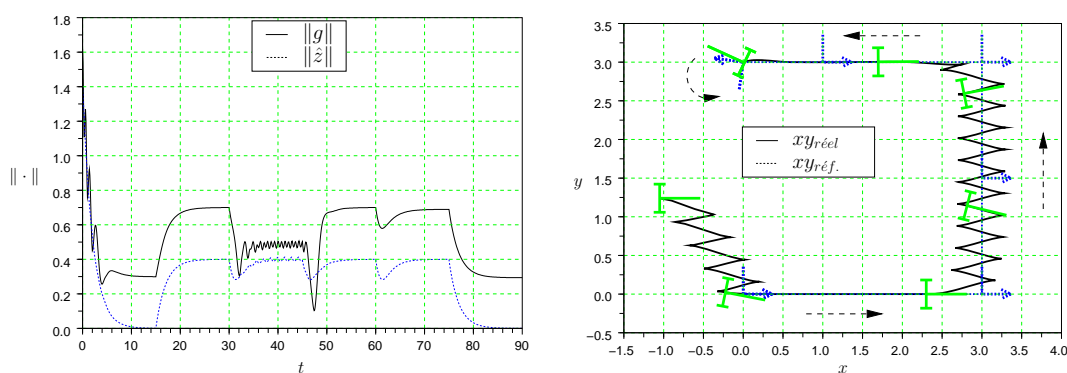
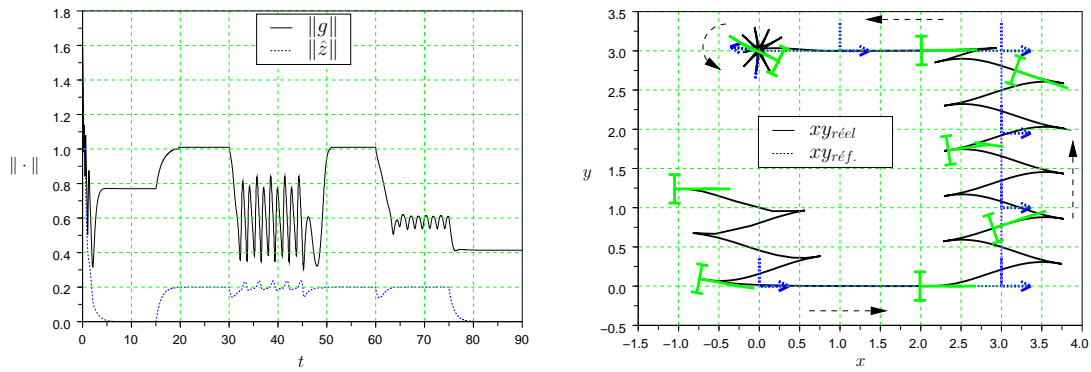
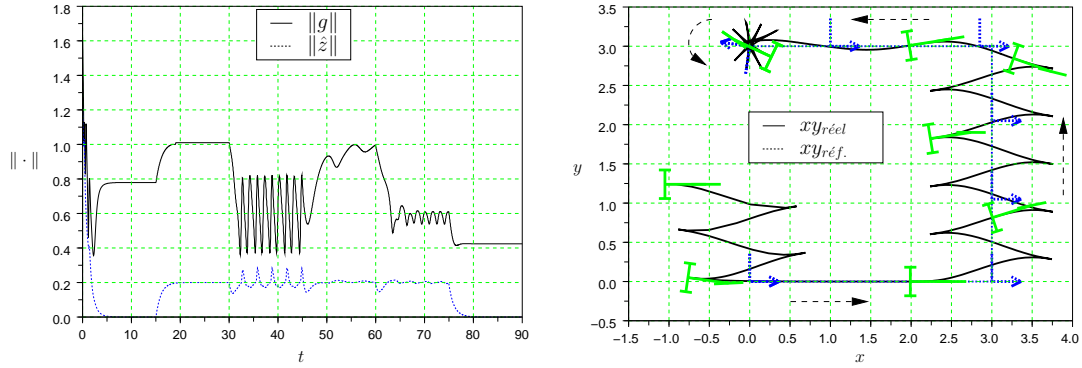


FIG. 2.10: Unicycle : Estimations non linéaires, caméra commandée en rotation, cible fixe.

d'impact sur le mouvement du robot quand la cible est immobile, la qualité de l'estimation contribue à 1) améliorer la précision de suivi lorsque la cible bouge (comparer les parties gauches des Fig. 2.11(a) et 2.5), et 2) supprimer le phénomène d'oscillation quand la cible recule (comparer les parties droites des Fig. 2.11(a) et 2.5).

La figure 2.12(a) illustre cette stratégie d'estimation de g pour le suivi d'une cible mobile, par un véhicule de type voiture. À l'exception du choix de \hat{g} , tous les paramètres de contrôle sont les mêmes que ceux utilisés pour la simulation de la figure 2.6(a). Cette simulation confirme le résultat obtenu avec le robot de type unicycle, i.e. l'utilisation d'une estimation non linéaire (plus précise qu'une estimation linéaire) permet d'améliorer les performances du système commandé, notamment on peut observer 1) une nette amélioration de la précision de suivi lorsque la cible bouge (comparer les parties gauches des Fig. 2.12(a) et 2.6(a)), et 2) supprimer le phénomène d'oscillation quand la cible recule (comparer les parties droites des Fig. 2.12(a) et 2.6(a)). L'amélioration de la qualité de l'estimation de la pose se traduit par les mêmes effets bénéfiques que pour l'unicycle.

(a) Estimation non linéaire de g , par estimation de φ et inversion de $\hat{\varphi}$ (b) Estimation par approximation de φ^{-1} FIG. 2.11: Unicycle : Suivi de cible, estimations non linéaires, caméra contrôlée en rotation, $\hat{c}_r = 0$.

(a) Estimation non linéaire de g , par estimation de $\hat{\varphi}$ et inversion de $\hat{\varphi}$ (b) Estimation par approximation de φ^{-1} FIG. 2.12: Voiture : Suivi de cible, estimations non linéaires, caméra contrôlée en rotation, $\hat{c}_r = 0$.

Estimation de g à partir d'une approximation de φ^{-1} (Éq. (2.35)) : Une autre possibilité consiste à approximer directement la pose $g_{ts} = \varphi^{-1}(s)$ à partir des données capteur s , afin de calculer \hat{g} via la relation (2.35). Ce calcul, tout comme celui correspondant à l'estimation non linéaire précédente, nécessite la connaissance de la pose du capteur sur la plateforme mobile (g_{sm}), de la position de référence dans le repère cible (g_{rt}), des paramètres intrinsèques de la caméra et des paramètres (les distances) du modèle de la cible. Cette méthode, dont le détail du développement est présenté dans l'Annexe B, est basée sur des relations géométriques. En particulier, elle utilise le fait qu'il existe un cercle passant par trois points non colinéaires, par exemple les points L, R de la cible et l'origine 0_s du repère caméra (cf. Figure B.1). Il est clair que le centre du cercle se trouve sur l'axe x_t du repère cible. Il est facile de calculer le rayon du cercle r_{rl} à partir des signaux capteur et des relations les liant à la géométrie de la cible. Il reste alors à localiser le point 0_s sur le périmètre du cercle. Ce point peut être paramétré par un angle σ dont plusieurs approximations sont possibles. Une fois ce paramètre déterminé, les coordonnées de 0_s dans le repère cible sont données par :

$$\begin{cases} x_{ts} &= -a \frac{|f+\mathbf{l}r/f|}{1-\mathbf{r}} - r_{rl} \cos \sigma \\ y_{ts} &= -r_{rl} \sin \sigma \\ \theta_{ts} &= \arctan\left(\frac{y_{ts}}{x_{ts}+b}\right) - \arctan\left(\frac{\mathbf{m}}{f}\right) \end{cases} \quad (2.50)$$

avec

$$r_{rl} = \frac{a \sqrt{(f + \frac{\mathbf{l}r}{f})^2 + (1 - \mathbf{r})^2}}{1 - \mathbf{r}} \quad (2.51)$$

et σ l'angle dont la valeur est définie dans l'annexe B (voir Éq. (B.6)-(B.7)). Une approximation possible de σ est donnée par :

$$\hat{\sigma} = 2 \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \frac{2\mathbf{m} - (1 + \mathbf{r})}{1 - \mathbf{r}} \quad (2.52)$$

L'approximation $\hat{g}_{ts} = \hat{\varphi}^{-1}(s)$ que nous avons considérée consiste à remplacer dans (2.50) σ par $\hat{\sigma}$ et $\arctan(\mathbf{m}/f)$ par \mathbf{m}/f .

Les Figures 2.10(b) et 2.11(b) illustrent l'utilisation de cette stratégie d'estimation pour une cible fixe et une cible mobile respectivement, dans le cas d'un véhicule de type unicycle. Les paramètres de contrôle sont les mêmes que pour la simulation précédente. On observe sur la Figure 2.10(b) que \hat{g} est une très bonne estimation de g , même pour des erreurs de suivi relativement grandes. Logiquement, le mouvement du robot est donc quasiment identique à celui observé avec l'estimation non-linéaire (2.48)-(2.49) (voir les Figures 2.10(a) et 2.11(a)).

L'utilisation de ces estimées pour le suivi d'une cible mobile par un véhicule de type voiture est illustrée par la figure 2.12(b). Hormis le choix de \hat{g} , tous les paramètres de commande sont les mêmes que ceux utilisés pour les simulations des figures 2.6(a) et 2.12(a). À l'exception de faibles oscillations pendant la phase de recul de la cible, la trajectoire du

robot sur le sol est pratiquement la même que celle obtenue avec l'estimation (2.48)-(2.49) (comparer les parties droites des figures 2.12(b) et 2.12(a)).

2.4.3 Fonctions Transverses Généralisées

Les résultats précédents ont illustré l'intérêt qu'il y a à disposer d'une estimation précise de g dans un large domaine. Toutefois, l'obtention d'une telle estimation nécessite une connaissance détaillée du capteur et de l'environnement (la cible), qui n'est pas toujours disponible. Une autre approche pour améliorer la qualité de l'asservissement consiste à modifier l'expression des lois de commande. L'approche de commande par fonctions transverses offre de nombreuses possibilités à ce niveau. L'une d'elles repose sur le choix de la fonction transverse elle-même. En particulier, une notion de "fonction transverse généralisée" a été définie dans (Morin et Samson, 2004a), dans le but de faire varier la précision du suivi en fonction de la trajectoire de référence. Nous montrons ci-dessous comment l'utilisation de telles fonctions, couplée avec une simple estimation linéaire de g , permet d'améliorer le suivi.

Suivant (Morin et Samson, 2004a), une "fonction transverse généralisée" est une fonction

$$f(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} f_g \\ f_\zeta \end{pmatrix}(\alpha, \beta)$$

dont les restrictions à la variable α , i.e. les fonctions $\bar{f}_\beta(\alpha) = f(\alpha, \beta)$ sont des fonctions transverses. Par conséquent, pour tout couple (α, β) , la matrice

$$\begin{pmatrix} X(f_g(\alpha, \beta))C(f_\zeta(\alpha, \beta)) & \frac{\partial f_g}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

est de rang trois ou, ce qui revient au même, telle que la matrice

$$\bar{C}(\alpha, \beta) := (C(f_\zeta(\alpha, \beta)) \quad -A(\alpha, \beta))$$

est de rang trois (comparer avec (1.37)), avec A définie par la relation

$$\dot{f}_g = X(f_g(\alpha, \beta))(A(\alpha, \beta)\dot{\alpha} + B(\alpha, \beta)\dot{\beta}) \quad (2.53)$$

L'intérêt de faire dépendre la fonction transverse d'une variable β supplémentaire est que cette variable permet d'accomplir des tâches de contrôle complémentaires, comme nous l'illustrerons dans la suite. La Proposition 4 est facilement étendue à ce cadre plus général. Avec $z = g f_g(\alpha, \beta)^{-1}$, nous obtenons au lieu de (1.40),

$$\dot{z} = X(z)\text{Ad}^X(f_g(\alpha, \beta)) \left(\bar{C}(\alpha, \beta)\bar{v} - B(\alpha, \beta)\dot{\beta} - \text{Ad}^X(g^{-1})c_r(t) \right) \quad (2.54)$$

avec $\bar{v} = (v', \dot{\alpha}')$, et $B(\alpha, \beta)$ la matrice définie par (2.53). Ceci suggère de définir \bar{v} comme (comparer avec (1.41)-(1.42))

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha, \beta)^\dagger \left(\text{Ad}^X(f_g(\alpha, \beta)^{-1})X(z)^{-1}Kz + B(\alpha, \beta)\dot{\beta} + \text{Ad}^X(g^{-1})c_r(t) \right) \quad (2.55)$$

de façon à obtenir l'équation en boucle fermée $\dot{z} = Kz$ et, par conséquent, la convergence exponentielle de z vers zéro pour toute matrice K Hurwitz-stable. Dans le contexte présent, z , g , et c_r , sont bien entendu remplacés dans l'expression de commande ci-dessus par leurs estimations respectives \hat{z} , \hat{g} , et \hat{c}_r . Il reste à spécifier des fonctions transverses généralisées et à déterminer une expression de commande pour $\dot{\beta}$. Considérons la fonction (comparer avec (1.38))

$$f_g(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \varepsilon(\sin(\alpha + \beta) - \rho \sin \beta) \\ \frac{\varepsilon^2 \eta}{2} ((\sin(\alpha + \beta) - \rho \sin \beta)(\cos(\alpha + \beta) - \rho \cos \beta) - \rho \sin \alpha) \\ \arctan(\varepsilon \eta (\cos(\alpha + \beta) - \rho \cos \beta)) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Il est facile de vérifier (voir aussi (Artus et al., 2004)) que f_g est une fonction transverse généralisée, pour le modèle cinématique (1.6) de l'unicycle, pour tout $\varepsilon, \eta > 0$. Le paramètre constant supplémentaire ρ peut être choisi arbitrairement. Les rôles que l'on souhaite faire jouer au paramètre ρ et à la variable β sont les suivants. Lorsque $\rho \in [0, 1]$, on a $\max_{(\alpha, \beta)} \|f_g(\alpha, \beta)\| \leq 2\|(\varepsilon, \varepsilon^2 \eta, \varepsilon \eta)\|$ et $\max_{\beta} \|f_g(0, \beta)\| \leq (1 - \rho)\|(\varepsilon, \varepsilon^2 \eta/4, \varepsilon \eta)\|$. La première inégalité montre que, indépendamment de ρ , la borne supérieure de $\|f_g(\alpha)\|$ peut être réglée via le choix des paramètres ε et η . La seconde inégalité montre qu'en choisissant ρ proche de un, et si α tend vers zéro, on peut maintenir la taille de f_g petite quelles que soient les valeurs de β et le choix fait pour ε et η . Ceci suggère d'utiliser $\dot{\beta}$ en tant que variable de commande pour faire tendre α vers zéro lorsque le repère de référence est immobile, ou lorsque la trajectoire de référence est réalisable par la plateforme mobile, de façon à réduire l'erreur de suivi dans ces cas. Lorsque la trajectoire de référence n'est pas réalisable, α doit pouvoir croître de façon à diminuer la précision de suivi et, par conséquent, le nombre de manœuvres. Afin de mettre en œuvre cette stratégie, l'expression suivante a été proposée dans (Artus et al., 2004) :

$$\dot{\beta} = \frac{1}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \alpha} \left(k_t \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2}{\varepsilon \eta} (\tan(f_3)(c_{r,3} f_2 - c_{r,1}) + c_{r,3} f_1) \right) \quad (2.57)$$

avec $k_t > 0$, $\rho \in [0, 1)$, et $c_{r,i}$ la i -ème composante de c_r .

Les résultats de simulation de la Figure 2.13(b) illustrent cette approche pour le suivi d'une cible mobile par un véhicule de type unicycle. La vitesse de référence c_r est donnée par (1.43). La loi de commande est donnée par (2.55) avec $K = -0.5I_3$, et z, g remplacées par leurs estimations respectives \hat{z}, \hat{g} , avec \hat{g} l'estimation linéaire de g donnée par (2.33) (i.e. même estimée que celle utilisée pour les simulations des Figures 2.4 et 2.5). Dans cette simulation on fait l'hypothèse que la vitesse de référence c_r est connue. La commande en orientation de la caméra est définie par (2.38) avec $k_s = 1$. La fonction transverse généralisée (2.56) est utilisée avec $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 1$, et $\rho = 0.8$. La commande auxiliaire $\dot{\beta}$ est donnée par (2.57) avec $k_t = 1$. Pour illustrer l'amélioration dans la précision de suivi obtenue avec une fonction transverse généralisée, nous avons inclus (dans la Figure

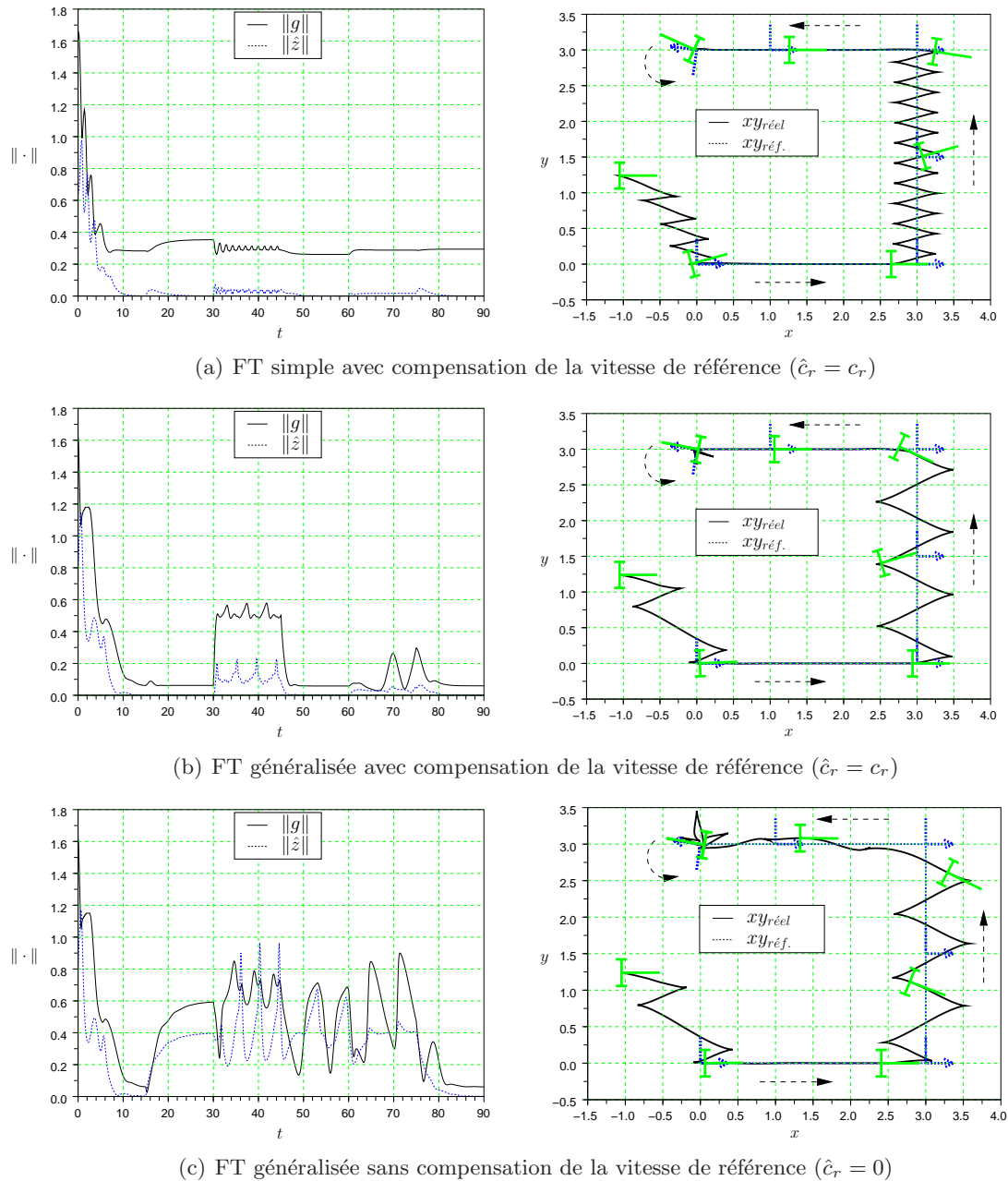


FIG. 2.13: Unicycle : Fonctions Transverses Généralisée vs Simple

2.13(a)) la simulation correspondante à la fonction transverse "simple" (1.38) (avec $\varepsilon = 0.3$ et $\eta = 1$). Comme prévu, on peut observer que l'erreur de suivi obtenue avec la fonction transverse généralisée est très petite pendant les phases où la trajectoire de référence est réalisable (i.e. $t \in [0, 30) \cup [45, 90]$), et qu'elle augmente autrement (i.e. $t \in [30, 45)$), de sorte que les manœuvres sont réalisées à une fréquence basse. On peut aussi remarquer que la connaissance de la vitesse c_r de la cible permet d'améliorer la précision de suivi de manière significative, et dans ce cas d'éliminer le phénomène d'oscillations présent pendant les phases de recul de la cible (comparer la Fig. 2.5 avec la Fig. 2.13(a)). Sur la figure 2.13(c) nous pouvons voir le résultat de simulation pour le cas où la vitesse de référence n'est pas compensée. Le reste des conditions de simulation sont les mêmes que pour le cas précédent. Outre la diminution de la précision de suivi normale, due à la non compensation de la vitesse de référence, on peut observer l'apparition de phénomènes d'oscillation pendant les phases de recul et de rotation pure de la trajectoire de référence. Mis à part cela, le mouvement du robot est très similaire au cas précédent.

2.5 Résultats expérimentaux

Nous avons testé expérimentalement la stratégie de commande proposée dans ce chapitre sur le robot ANIS du projet ICARE, une plateforme mobile de type unicycle. Un bras manipulateur à six degrés de liberté, avec une caméra à son extrémité, est embarqué sur la plateforme. Pour plus de détails sur l'architecture du robot, on pourra se référer à (Tsakiris et al., 1997a). Les conditions de l'expérimentation sont essentiellement les mêmes que celles illustrées par la Fig. 2.2. Les paramètres géométriques définissant la tâche sont aussi ceux utilisés pour les simulations, i.e. $g_{tr} = (2.5, 0, 0)'$, $g_{ms} = (0.51, 0, \xi)'$, et $a = b = 0.25$. Étant donné que nous n'avons pas de capteur pour mesurer la position de la cible par rapport à un repère inertiel, nous ne pouvons inclure ici que des résultats expérimentaux obtenus avec une cible immobile. L'estimation linéaire \hat{g} donnée par (2.33) est utilisée dans la loi de commande, avec les matrices jacobiennes $(\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0, 0), \frac{\partial \varphi_s}{\partial \xi}(0, 0))$ estimées selon la méthode décrite dans la section 2.4.1 (voir Éq. (2.37)), et les déplacements $\Delta g(p)$ mesurés par odométrie. Les composantes du vecteur signal s sont données en pixels. Un filtre passe-bas a été appliqué aux données visuelles pour réduire le bruit de mesure.

Expérience avec une fonction transverse simple. La loi de commande est donnée par (2.20) avec $K = -0.5I_3$, f définie par (1.38) avec $\eta = 1$ et $\varepsilon = 0.3$. Le contrôle en rotation de la caméra est donné par (2.38) avec $1/k_s = -\widehat{\frac{\partial \varphi_{s,2}}{\partial \xi}}(0, 0)$. La trajectoire du robot dans le plan cartésien est représentée sur la Figure 2.14(droite). L'indice "pseudo-vrai" désigne l'état du robot reconstruit par géométrie (voir Éq. (2.50)) à partir des données caméra. Cette reconstruction n'est pas utilisée dans la loi de commande; elle est seulement représentée ici comme valeur de référence. La norme de l'état "réel" et la norme de la variable " \hat{z} " sont représentées sur la figure de gauche. Ces résultats sont très cohérents avec les résultats de simulation correspondants (Fig. 2.4).

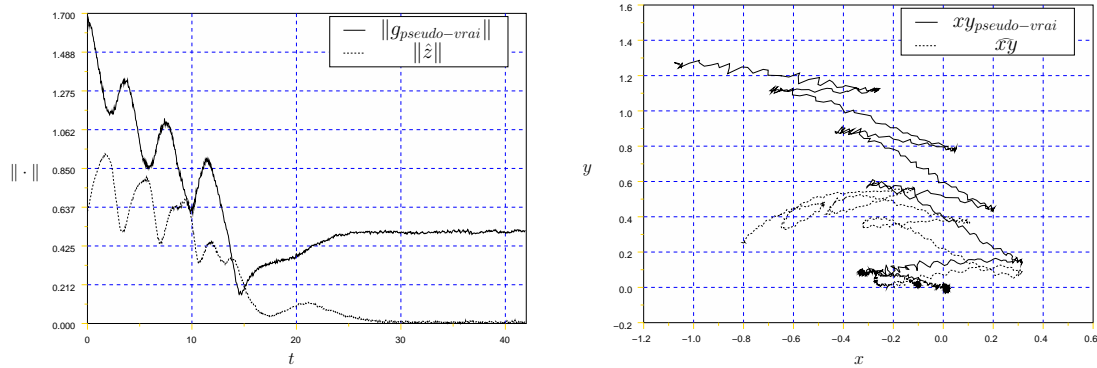


FIG. 2.14: Résultats expérimentaux avec une FT simple

Expérience avec une fonction transverse généralisée. La loi de commande est définie par (2.55) avec $K = -0.5I_3$. La fonction transverse généralisée f_g est donnée par (2.56) avec $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 1$, $\rho = 0.8$, et $\dot{\beta}$ donné par (2.57) avec $k_t = 1$. Le contrôle en rotation de la caméra est le même que pour l'expérience précédente. Les résultats de cette expérience sont représentés sur la Figure 2.15. Tout comme pour les simulations, nous pouvons observer que dans ce cas : a) il y a moins de manœuvres pendant le transitoire de positionnement que pour la loi de commande avec une fonction transverse simple et b) la précision de positionnement s'est nettement améliorée. Ceci étend l'utilisation des fonctions transverse généralisées au cas où l'on dispose seulement d'une estimation de la position et valide leur utilité pratique dans ce cadre.

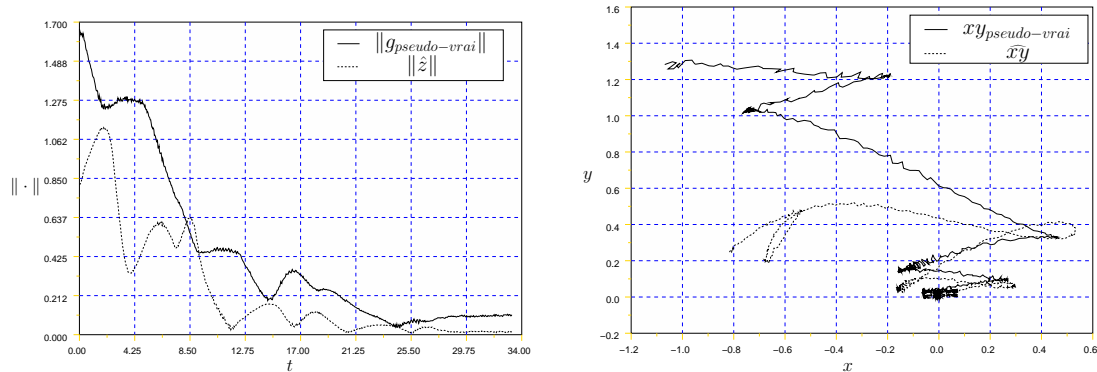


FIG. 2.15: Résultats expérimentaux avec une FT généralisée

2.6 Conclusions

Nous avons exploré dans ce chapitre l'utilisation de méthodes de reconstruction de la pose, à partir de données capteur, pour commander des robots mobiles, via l'approche de commande par fonction transverse. Dans un premier temps nous avons effectué une étude théorique de robustesse des lois de commande vis-à-vis d'erreurs d'estimation de la pose. Cette étude a mis en évidence qu'une stabilisation pratique de trajectoires arbitraires⁴ peut être obtenue à partir d'une estimation relativement grossière de la pose. Les nombreuses simulations que nous avons effectuées avec différents modèles de cette estimation ont confirmé cette forte propriété de robustesse. Toutefois, la stabilité pratique, qui garantit seulement la possibilité de maintenir une erreur de suivi petite, ne garantit pas pour autant que la dynamique du système est satisfaisante. Afin d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous avons considéré le cas particulier de trajectoires de référence réduites à des points fixes, et déterminé des conditions suffisantes sur l'erreur d'estimation de la pose garantissant la convergence du robot vers un point fixe (et donc excluant dans ce cas le risque d'oscillations résiduelles, non souhaitables en pratique). Ces conditions sont cependant plus restrictives et difficiles à satisfaire que celles relatives à la bornitude de l'erreur de suivi. Toutefois, cette propriété de convergence a été observée sur tous les résultats de simulation que nous avons effectué ainsi que sur les expérimentations. Les simulations ont cependant montré que des oscillations résiduelles pouvaient avoir lieu pour d'autres trajectoires de référence (correspondant à des mouvements rectilignes en marche arrière), alors qu'elles ne se produisent pas lorsque la pose est parfaitement connue. Ce phénomène est particulièrement prononcé pour la voiture. Outre la détermination d'une meilleure estimée de la pose, ce phénomène peut être atténué par le choix de paramètres de commande et la connaissance de la vitesse de référence mais, dans le cas de la voiture, nous n'avons pas réussi à le faire disparaître si ce n'est par le calcul d'une estimée de la pose assez précise.

En résumé, ce chapitre montre qu'une estimation grossière de la pose est suffisante pour obtenir une bonne qualité de suivi ou de positionnement pour de nombreuses trajectoires de référence (points fixes, mouvements en marche avant, mouvements latéraux) lorsque l'on utilise l'approche de commande par FT. Une étude complémentaire serait nécessaire pour mieux comprendre et éventuellement éliminer, le phénomène d'oscillations résiduelles observé pour des mouvements de la référence en marche arrière.

⁴au sens de la bornitude ultime de l'erreur de suivi par une valeur qui peut être rendue arbitrairement petite via le choix des paramètres de commande

Chapitre 3

Synthèse de commande dans l'espace capteur

Nous souhaitons maintenant étudier la possibilité de synthétiser des lois de commande directement dans l'espace capteur, i.e. sans le calcul intermédiaire d'une estimation de la situation g de la plateforme. Pour ce faire, nous allons d'abord montrer comment la synthèse de commandes via l'approche par fonctions transverses (Section 1.3.4) se généralise à un système de coordonnées quelconque. Ceci est simplement dû au fait que les propriétés de géométrie différentielle associées aux groupes de Lie sont intrinsèques, et donc indépendantes du choix de système de coordonnées.

3.1 Synthèse de stabilisateurs pratiques dans les coordonnées signal

Tout au long de cette section, nous supposons que le signal s dépend seulement de la situation relative g de la plateforme mobile par rapport à la cible, i.e. $s = \varphi_s(g)$, comme c'est le cas lorsque le capteur est rigidement lié à la plateforme. Rappelons également que par hypothèse φ , et donc φ_s sont des difféomorphismes, que nous supposerons globaux pour simplifier l'exposé.

Lemme 2 Dans les coordonnées $s = \varphi_s(g)$,

1. Le système (1.12) est donné par ¹

$$\dot{s} = Y(s)C(\zeta)v \quad (3.1)$$

avec

$$Y(s) := \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s))X(\varphi_s^{-1}(s)) \quad (3.2)$$

¹Pour être consistant dans la notation, nous devons poser dans (1.12) $g_{om} = g_{rm} = g$.

Ce système est invariant à gauche par rapport à l'opération de groupe \circ dans \mathbb{R}^3 définie par $s_1 \circ s_2 = \varphi_s(\varphi_s^{-1}(s_1)\varphi_s^{-1}(s_2))$.

2. Le système (1.30) est donné par

$$\dot{s} = Y(s) (C(\zeta)v - \text{Ad}^Y(s^{-1})c_r(t)) \quad (3.3)$$

avec $\text{Ad}^Y(s)$ la matrice associée à l'opérateur adjoint et telle que

$$\forall s, \quad \text{Ad}^Y(s) = \text{Ad}^X(\varphi_s^{-1}(s)) \quad (3.4)$$

3. Si $f = (f'_g, f'_\zeta)'$ est une fonction transverse pour le système (1.12), alors $f_s := (f'_{sg}, f'_\zeta)$ avec $f_{sg} := \varphi_s(f_g)$ est une fonction transverse pour le système (3.1).

La preuve de ce lemme est donnée dans l'annexe A.5.

A partir de ce résultat, il est facile d'étendre la Proposition 4 aux coordonnées signal :

Proposition 11 Soit $f = (f'_g, f'_\zeta)'$ une fonction transverse pour le système (1.12), soit $\zeta = f_\zeta(\alpha)$, et posons

$$\begin{aligned} z_s &:= s \circ f_{sg}(\alpha)^{-1} \quad \text{avec} \quad f_{sg} = \varphi_s(f_g) \\ &= \varphi_s(\varphi_s^{-1}(s)f_g(\alpha)^{-1}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Alors,

i) Le long des solutions du modèle d'erreur de suivi (3.3), et pour toute fonction du temps $\alpha(\cdot)$ différentiable,

$$\dot{z}_s = Y(z_s)\text{Ad}^X(f_g(\alpha)) (\bar{C}(\alpha)\bar{v} - \text{Ad}^Y(s^{-1})c_r(t)) \quad (3.6)$$

avec $\bar{v} = (v', \dot{\alpha}')'$ et $\bar{C}(\alpha)$ défini par (1.37).

ii) La matrice $\bar{C}(\alpha)$ étant de rang trois pour tout α , le changement de variable

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger (\text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1})v_{z_s} + \text{Ad}^Y(s^{-1})c_r(t)), \quad (3.7)$$

avec $\bar{C}(\alpha)^\dagger$ une inverse à droite de $\bar{C}(\alpha)$, transforme le système (3.6) en $\dot{z}_s = Y(z_s)v_{z_s}$.

iii) Si K est une matrice Hurwitz-stable, et

$$v_{z_s} = Y(z_s)^{-1}Kz_s \quad (3.8)$$

alors, le long des solutions du système en boucle fermée,

a) $\|s\|$ est ultimement bornée par $\varepsilon_{f_s} := \max_\alpha \|f_{sg}(\alpha)\|$, et $\|g\|$ est ultimement bornée par $\varepsilon_f := \max_\alpha \|f_g(\alpha)\|$, pour toute trajectoire de référence $g_r(\cdot)$,

b) si $c_r = 0$, s (et donc g) converge exponentiellement vers un point fixe.

La preuve de cette proposition est similaire à la preuve de la Proposition 4 (remarquons que la relation (3.4) du Lemme 2 est utilisée pour établir (3.6)).

L'application de la commande (3.7)-(3.8) nécessite *a priori* la connaissance des termes $Y(z_s)$, z_s et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$. Supposons un instant, pour simplifier, que $c_r = 0$, et intéressons nous de plus près aux termes $Y(z_s)$ et z_s . La matrice $Y(z_s)$ (ou plus précisément son inverse) intervient essentiellement au niveau de la commande comme une matrice de gain. Du point de vue de la stabilité, il est raisonnable de penser qu'une connaissance locale de cette matrice, par exemple en $z_s = 0$, est suffisante pour garantir une propriété de stabilité locale. D'après (3.2), ceci nous ramène à la connaissance de $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$ et donc essentiellement, comme dans le cas des bras manipulateurs (Chaumette, 1990; Espiau et al., 1992), à la connaissance de la matrice d'interaction au voisinage de la position désirée. La connaissance du terme z_s est plus problématique. Elle nécessite en effet d'avoir une expression analytique de la loi de groupe \circ dans l'espace capteur et de la fonction f_{sg} , ce qui revient d'après (3.5), à connaître les fonctions φ_s et φ_s^{-1} . Localement, au moins en ce qui concerne la stabilisation de points fixes, la connaissance d'une expression analytique de la loi de groupe \circ n'est pas strictement nécessaire. En effet, pour toute opération de groupe et tout système de coordonnées tel que l'élément identité du groupe est associé au vecteur nul, on a dans le voisinage de l'origine $xy = x + y$ plus des termes d'ordre supérieur. Ainsi, il serait possible de prendre en première approximation $z_s = s - f_{sg}(\alpha) = s - \varphi_s(f_g(\alpha))$. Le résultat suivant montre en effet que la connaissance de la fonction $\alpha \mapsto f_{sg}(\alpha)$ et d'une approximation de $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$ est suffisante pour obtenir des propriétés de stabilité et de convergence locales dans le cas où la trajectoire de référence est un point fixe.

Proposition 12 *Avec les notations de la Proposition 11, supposons que la fonction $\alpha \mapsto f_{sg}(\alpha) = \varphi_s(f_g(\alpha))$ est connue, que $\zeta = f_\zeta(\alpha)$ et que $c_r = 0$. Considérons le système de commande (3.1), bouclé avec la commande*

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger X(f_g)^{-1} \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}^{-1} K(s - f_{sg}(\alpha)) \quad (3.9)$$

et $\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0)$ désignant une approximation de $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$. Alors, si

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0) \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}^{-1}(0) K \quad (3.10)$$

est une matrice Hurwitz-stable et $\varepsilon_f := \max_\alpha \|f_g(\alpha)\|$ est suffisamment petit, il existe un voisinage \mathcal{U} de $f_{sg}(\mathbb{T}^p)$ tel que pour tout $s(0) \in \mathcal{U}$, $s(t)$ converge exponentiellement vers un point fixe de $f_{sg}(\mathbb{T}^p)$ (et donc $g(t)$ converge exponentiellement vers un point fixe de $f_g(\mathbb{T}^p)$).

La preuve de cette proposition est donnée dans la section A.6 de l'annexe A. Ce résultat met en évidence une propriété nouvelle par rapport aux résultats du chapitre précédent (Propositions 9 et 10) puisqu'elle établit une propriété de convergence à partir essentiellement de la connaissance de la fonction signal sur l'ensemble image de $f_g(\mathbb{T}^p)$ et d'une

condition assez faible sur l'estimation du jacobien $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$, tandis que les conditions des Propositions 9 et 10 font intervenir des propriétés d'estimations de cette fonction signal sur tout un voisinage de l'origine. On est cependant amené à la question de la connaissance de la fonction $\alpha \mapsto \varphi_s(f_g(\alpha))$, en particulier, lorsque l'expression analytique de φ_s n'est pas connue. Lorsque, $\mathbb{T}^p = \mathbb{T}$ (i.e. $\dim \alpha = 1$), comme c'est le cas pour l'unicycle lorsque la FT (1.38) est utilisée, on peut éventuellement envisager de "mesurer" expérimentalement les valeurs de cette fonction. Pour des dimensions plus élevées, ceci semble cependant beaucoup plus délicat.

Revenons maintenant à la loi de commande (3.7)-(3.8) de la Proposition 11. En pratique on va être amené à utiliser des estimations des termes $Y(z_s)$, z_s et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$ déterminées à partir d'estimations de φ_s , φ_s^{-1} et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$. Avec ces estimations, la loi de commande \bar{v} est alors donnée par

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger \left(\text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1}) \widehat{Y(z_s)}^{-1} K \hat{z}_s + \text{Ad}^Y(s^{-1}) \hat{c}_r(t) \right) \quad (3.11)$$

avec $\hat{c}_r(t)$ une estimation de $c_r(t)$ laquelle, tout comme dans la section 2.2, peut éventuellement être prise égale à zéro. La question que l'on peut se poser, afin d'évaluer l'intérêt de travailler dans les coordonnées signal, est de savoir de quelle quantité d'information sur φ_s , φ_s^{-1} , et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}$ on a besoin pour obtenir des résultats satisfaisants, et si les lois de commande associées présentent des avantages par rapport aux commandes synthétisées en coordonnées cartésiennes. Afin de fournir des éléments de réponse à ces questions, nous proposons dans la section suivante diverses possibilités d'estimation des termes z_s , $Y(z_s)$, et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$.

3.2 Estimations de termes intervenant dans l'expression de la commande

Le principe est de déterminer des estimations des fonctions φ_s , φ_s^{-1} , et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}$, et d'utiliser ces estimées dans (3.2), (3.4), et (3.5) pour en déduire des estimées de z_s , $Y(z_s)$, et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$. Comme pour le problème de reconstruction de la pose, nous considérons deux types d'estimations, basées soit bien sur des approximations linéaires des fonctions φ_s , φ_s^{-1} , et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}$, soit sur des approximations non-linéaires.

Estimations basées sur des approximations linéaires : Un choix simple consiste à utiliser les approximations linéaires suivantes :

$$\hat{\varphi}_s(g) = \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0)g, \quad \widehat{\varphi}_s^{-1}(s) = \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \right)^{-1} s, \quad \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(g) = \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0)$$

avec $\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0)$ une estimation de la matrice jacobienne $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$. L'utilisation de ces approximations dans (3.2), (3.4), et (3.5), conduit aux estimations suivantes pour z_s , $Y(z_s)$, et

$\text{Ad}^Y(s^{-1}) :$

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= s - \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) X(\hat{\theta}_s - f_\theta) f_g \\ \widehat{Y}(z_s) &= \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) X \left(\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \right)^{-1} \hat{z}_s \right) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X \left(\left(\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \right)^{-1} s \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (3.12)$$

avec $\hat{\theta}_s$ la troisième composante de $\left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0)\right)^{-1}s$ et f_θ la troisième composante de f_g . Les expressions ci-dessus peuvent être encore simplifiées comme suit :

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= s - \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) f_g \\ \widehat{Y}(z_s) &= \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) X(0) = \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1}) \end{cases} \quad (3.13)$$

et l'on peut vérifier que \hat{z}_s correspond alors à l'approximation au premier ordre de z_s vue comme une fonction des variables s et f_g (voir (3.5)), que $\widehat{Y}(z_s)$ est l'approximation à l'ordre zéro de $Y(z_s)$ en $z_s = 0$, et que $\widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1})$ est l'approximation à l'ordre zéro de $\text{Ad}^Y(s^{-1}) = \text{Ad}^Y(f_{sg}(\alpha)^{-1}z_s^{-1})$ en $z_s = 0$.

Le lemme suivant illustre le fait que pour certains choix des paramètres de commande, la synthèse dans l'espace capteur peut aboutir à la même expression des lois de commande que la synthèse dans l'espace cartésien.

Lemme 3 Soit $K = -kI_3$, $k > 0$, alors la loi de commande (3.11) avec les estimations (3.12) est équivalente à la loi de commande (2.19) avec \hat{g} donné par (2.33).

La preuve de ce lemme est donnée dans l'annexe A.7.

Estimations basées sur des approximations non linéaires : Lorsque des expressions analytiques de $\widehat{\varphi}_s$ et $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ sont disponibles, on peut obtenir une expression analytique de $\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}$, et utiliser (3.2), (3.4), et (3.5), pour déduire les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= \widehat{\varphi}_s(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) f_g^{-1}) \\ \widehat{Y}(z_s) &= \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s)) X(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s)) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X \left(\left(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme rappelé dans la section précédente, on peut approcher l'opération de groupe dans l'espace capteur par $xy = x + y$ dans le voisinage de l'origine. En utilisant cette approximation, on peut obtenir une expression légèrement plus simple de \hat{z}_s comme suit :

$z_s = s \circ f_{sg}(\alpha)^{-1} \approx s - \varphi_s(f_g)$, d'où l'estimation $\hat{z}_s = s - \hat{\varphi}_s(f_g)$. En remplaçant la première égalité dans (3.14) par cette dernière relation on obtient :

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= s - \hat{\varphi}_s(f_g) \\ \widehat{Y}(z_s) &= \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s))X(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s)) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X \left(\left(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (3.15)$$

Si une expression analytique de $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ est disponible mais que celle de $\hat{\varphi}$ ne l'est pas, on peut définir par exemple

$$\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(g) = \left(\frac{\partial \widehat{\varphi}_s^{-1}}{\partial s}(s) \right)^{-1}$$

et utiliser l'approximation linéaire de φ_s donnée par $\widehat{\varphi}_s(g) = \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0)g$. La combinaison de ces relations avec (3.2), (3.4), et (3.5), permet d'obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= \frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0) \left(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) f_g^{-1} \right) \\ \widehat{Y}(z_s) &= \left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_s^{-1}}{\partial s}(\hat{z}_s) \right]^{-1} X(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s)) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X \left(\left(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (3.16)$$

D'autres combinaisons possibles sont :

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= s + \left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_s^{-1}}{\partial s}(0) \right]^{-1} f_g^{-1} \\ \widehat{Y}(z_s) &= \left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_s^{-1}}{\partial s}(\hat{z}_s) \right]^{-1} X(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s)) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X \left(\left(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (3.17)$$

et

$$\begin{cases} \hat{z}_s &= s - \left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_s^{-1}}{\partial s}(0) \right]^{-1} f_g \\ \widehat{Y}(z_s) &= \left[\frac{\partial \widehat{\varphi}_s^{-1}}{\partial s}(\hat{z}_s) \right]^{-1} X(\widehat{\varphi}_s^{-1}(\hat{z}_s)) \\ \widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1}) &= \text{Ad}^X \left(\left(\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) \right)^{-1} \right) \end{cases} \quad (3.18)$$

Bien entendu, beaucoup d'autres expressions peuvent être obtenues, par exemple, par la simplification ou combinaison des expressions ci-dessus.

On souhaiterait à partir de là établir des résultats de robustesse vis-à-vis des erreurs d'estimation des termes \hat{z}_s , $\widehat{Y}(z_s)$ et $\widehat{\text{Ad}}^Y(s^{-1})$, comme nous l'avons fait dans la section 2.2 pour les commandes synthétisées dans l'espace cartésien. Malheureusement, l'expression de conditions suffisantes de stabilité est plus délicate dans ce cas, en raison du fait que

plus de termes doivent être estimés. En particulier, si l'on exprime comme précédemment les estimées \hat{z}_s , $\widehat{Y}(z_s)$ et $\widehat{\text{Ad}^Y}(s^{-1})$ en termes des fonctions $\widehat{\varphi}_s$, $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ et $\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}$, on voit que ces conditions de stabilité vont essentiellement porter sur les erreurs d'estimation des trois fonctions, au lieu d'une pour la synthèse dans l'espace cartésien, ce qui risque de les rendre peu exploitables en pratique. Néanmoins, localement (i.e. dans un voisinage de $\hat{z}_s = 0$), on peut obtenir des conditions de bornitude et de convergence similaires à celles de la section 2.2, exprimées en fonction des erreurs d'estimation du jacobien $\frac{\partial \widehat{\varphi}_s}{\partial g}(0)$ ou du hessien $\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}_s}{\partial g^2}(0)$. En outre, le lemme 3 illustre de façon triviale que ces propriétés de stabilité peuvent être aussi semi-“globales” que celles obtenues dans l'espace cartésien, mais hormis ce cas particulier, il ne semble pas du tout évident d'établir des liens entre le domaine de stabilité et la “taille” des erreurs d'estimation. Pour ces diverses raisons, nous nous limiterons dans la suite de ce chapitre à illustrer et comparer cette approche de synthèse avec celle du chapitre précédent, sur la base de simulations.

3.3 Résultats de simulation pour un capteur visuel

Afin de fournir des éléments de comparaison entre cette solution de commande et la synthèse effectuée en coordonnées cartésiennes, nous présentons dans cette section des résultats de simulation obtenus à partir du dispositif de la Figure 2.2, en appliquant la loi de commande définie par (3.11). Plusieurs choix des estimations de \hat{z}_s , $\widehat{Y}(z_s)$, et $\widehat{\text{Ad}^Y}(s^{-1})$, ont été considérés.

Comme signalé dans le chapitre précédent, un point important à considérer dans la pratique est la vérification de la condition de visibilité de la cible, i.e. l'objet doit rester dans le champ de vision de la caméra pendant tout l'asservissement pour assurer l'existence du signal. Ce problème est crucial pour certains capteurs (par exemple la caméra avec le modèle sténopé considéré dans nos simulations) alors que l'on ne le rencontre pas pour d'autres (par exemple une caméra omnidirectionnelle). Tout comme dans le chapitre précédent, nous avons choisi de résoudre ce problème avec l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire pour commander la caméra en rotation dans le seul but de garder la cible dans le champ de vision. Ce degré de liberté et la commande associée ne sont donc aucunement utilisés pour soulager la problématique liée à la commande de la plateforme non holonome. Néanmoins, le fait de commander activement la caméra n'est pas complètement anodin vis-à-vis des synthèses de commande de la section 3.1. Notamment, l'hypothèse que le signal dépend uniquement de la pose du robot n'est plus vérifiée. Cependant, on peut concevoir différentes façons d'étendre cette synthèse au cadre de la caméra commandée en orientation. Une possibilité simple consiste à calculer, à partir du signal s et de l'orientation ξ de la caméra, le "signal virtuel" \bar{s} qui serait obtenu si la caméra était rigidement liée à la plateforme mobile (i.e., avec l'angle $\xi = 0$). Pour ce faire, supposons par simplicité que l'origine du repère caméra $\mathcal{F}_s = \{0_s, \vec{v}_s, \vec{j}_s\}$ est placé sur l'axe de rotation de la caméra (voir la Figure 3.1).

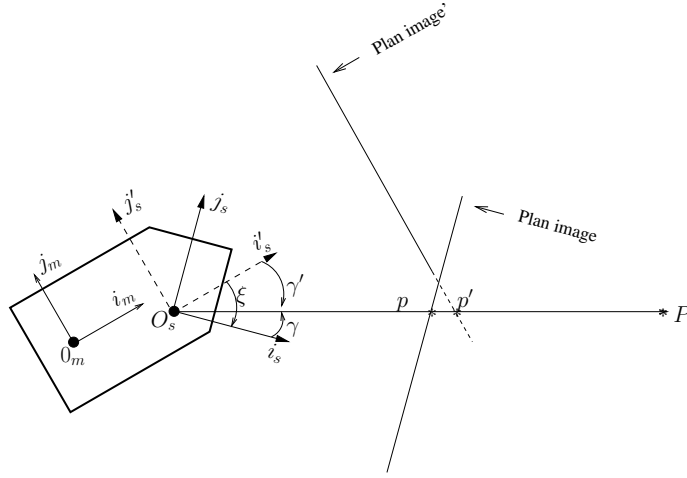


FIG. 3.1: Projection d'un point 3D dans deux plans image —rotation pure de la caméra par rapport à l'axe vertical—

Le repère associé à la “caméra virtuelle” est noté $\bar{\mathcal{F}}_s = \{0_s, \bar{i}_s, \bar{j}_s\}$, et l'angle orienté entre \bar{i}_s et i_s est ξ . Un point P est projeté en les points image p et \bar{p} dans les plans image réel et virtuel respectivement. Soit γ (resp. $\bar{\gamma}$) l'angle orienté entre i_s (resp. \bar{i}_s) et $\overrightarrow{O_s P}$. Alors, $\tan \gamma = c_1 p_y + c_2$ et $\tan \bar{\gamma} = c_1 \bar{p}_y + c_2$, avec p_y et \bar{p}_y les coordonnées y des points image p, \bar{p} dans les repères caméra \mathcal{F}_s et $\bar{\mathcal{F}}_s$, et $c_1 > 0$ et c_2 des constantes qui dépendent des paramètres intrinsèques de la caméra et des unités dans lesquelles p et \bar{p} sont exprimés (i.e. coordonnées métriques ou coordonnées pixels). A partir des expressions de γ et $\bar{\gamma}$, du fait que $\xi + \gamma = \bar{\gamma}$, et du fait que chaque composante s_i du vecteur signal s est donnée par $s_i = p_{iy} - p_{iy}^*$, avec $p_{iy} \in \{\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{r}\}$, on déduit que

$$\bar{s}_i = \frac{1}{c_1} (\tan(\xi + \arctan(c_1(s_i + p_{iy}^*) + c_2)) - c_2) - p_{iy}^* \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.19)$$

Si l'on a des estimations des paramètres c_1 et c_2 (associés au système de coordonnées dans lequel sont exprimés les points p_i —i.e. coordonnées métriques ou pixel—) nous pouvons estimer directement le signal \bar{s}

$$\hat{\bar{s}}_i = \frac{1}{\hat{c}_1} (\tan(\xi + \arctan(\hat{c}_1(s_i + p_{iy}^*) + \hat{c}_2)) - \hat{c}_2) - p_{iy}^* \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.20)$$

Une simplification est obtenue en approximant les fonctions \tan et \arctan dans les expressions ci-dessus par la fonction identité. Ceci donne :

$$\hat{\bar{s}} \simeq s + \frac{\xi}{\hat{c}_1} \quad (3.21)$$

3.3.1 Estimations basées sur des approximations linéaires

La Figure 3.2 illustre l'utilisation des estimations linéaires (3.13) pour la stabilisation pratique d'un robot de type unicycle par rapport à une cible immobile. La loi de commande

est donnée par (3.11) avec s dans l'expression de la commande remplacé par \hat{s} défini par (3.21) avec $c_1 = 1$ (signal exprimé dans des coordonnées métriques). La matrice de gain est $K = -0.5I_3$ et la fonction transverse f_g est donnée par (1.38) avec $\varepsilon = 0.3$ et $\eta = 1$. La commande de la caméra est donnée par (2.38) avec $k_s = 5$. La trajectoire du robot dans le plan cartésien est très proche de celle de la Fig. 2.4 (i.e. avec la synthèse de commande dans l'espace cartésien et une estimation linéaire de la pose).

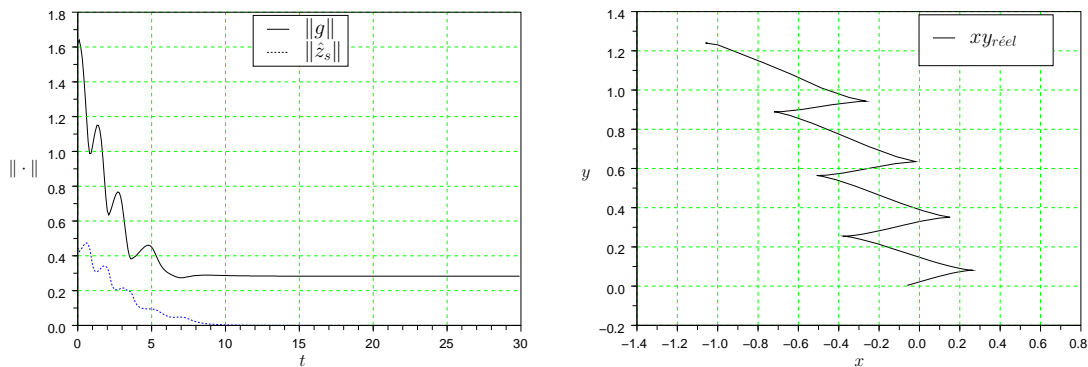


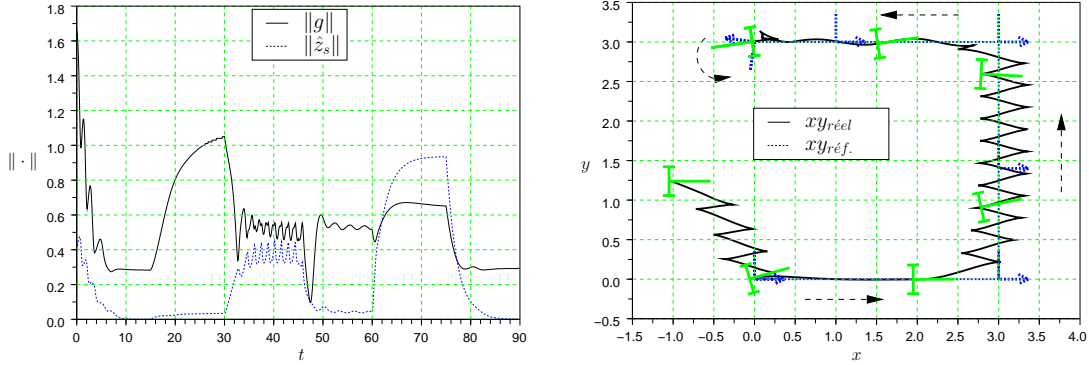
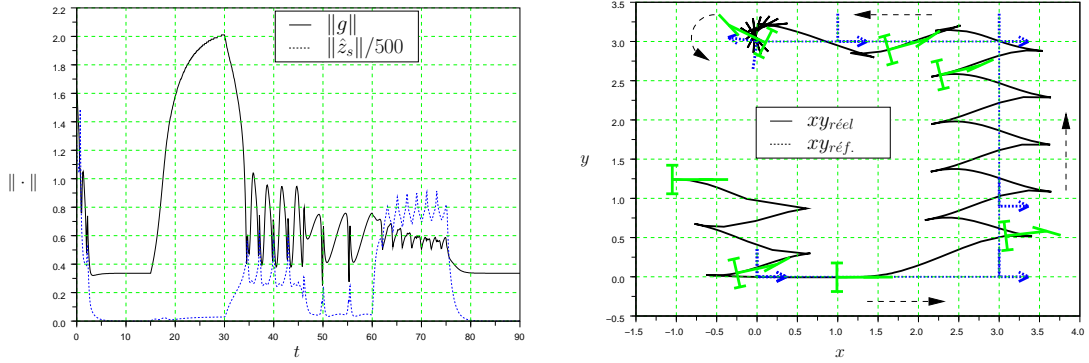
FIG. 3.2: Unicycle : Estimations linéaires (3.13), caméra commandé en rotation, cible immobile

La même stratégie, avec les mêmes paramètres de commande de la simulation précédente, est illustrée par la Figure 3.3 dans le cas d'une cible mobile, sur un robot de type unicycle. La vitesse de référence c_r est donnée par (1.43), et $\hat{c}_r = 0$. La trajectoire du robot est aussi très proche de celle obtenue avec la synthèse dans l'espace cartésien basée sur une estimation linéaire de la pose du robot (Figure 2.5).

La figure 3.4 illustre l'utilisation des mêmes estimations linéaires (3.13) dans la commande d'un robot de type voiture, pour le suivi d'une cible mobile. La vitesse de référence c_r est encore donnée par (1.43). La loi de commande est donnée par (3.11) avec s dans l'expression de la commande remplacé par \hat{s} défini par (3.21) et $c_1 = 1/850$ (signal exprimé dans des coordonnées pixel). La matrice de gain est $K = -I_3$ et la fonction transverse f_g est donnée par (1.39) avec les paramètres définis par (2.39). La commande de la caméra est donnée par (2.38) avec $k_s = 3c_1$. À l'instar de la simulation précédente, la trajectoire du robot dans le plan cartésien est très proche de celle obtenue avec la synthèse de commande dans l'espace cartésien (Fig. 2.6(a)). La partie gauche de la figure montre les normes de g et de z_s , cette dernière à un facteur d'échelle près ($1/500$) par souci de présentation.

3.3.2 Estimations basées sur des approximations non-linéaires

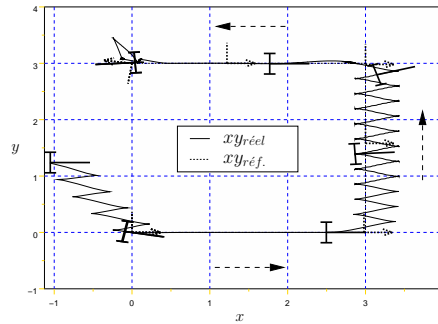
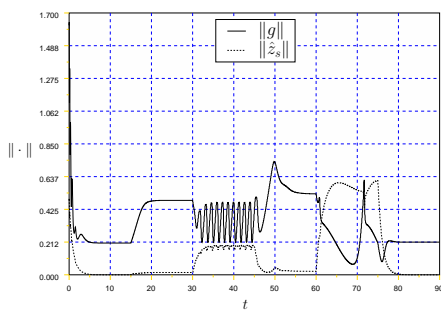
Pour tous les résultats de simulation retenus dans cette sous-section, sauf mention contraire, la commande (3.11) a été utilisée avec $K = -I_3$ et $\hat{c}_r = 0$, et la vitesse de référence c_r est donnée par (1.43).

FIG. 3.3: Unicycle : Estimations linéaires (3.13), caméra commandée en rotation, $\hat{c}_r = 0$ FIG. 3.4: Voiture : Estimations linéaires (3.13), caméra commandée en rotation, $\hat{c}_r = 0$

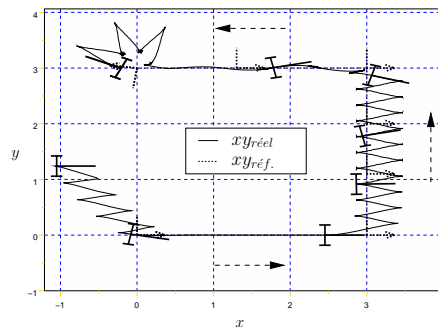
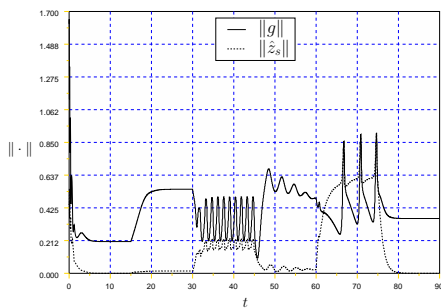
Robot de type unicycle. Pour tous les résultats de simulation suivants concernant ce type de robot, la fonction transverse est donnée par (1.38) avec $\varepsilon = 0.3$ et $\eta = 1$; le signal \hat{s} , défini par (3.21) avec $c_1 = 1$ (signal exprimé dans des coordonnées métriques), est utilisé à la place de s dans l'expression de commande ; la commande en orientation de la caméra est donnée par (2.38) avec $k_s = 5$.

Pour la simulation de la Figure 3.5(a), les estimations (3.14) ont été utilisées. La fonction $\hat{\varphi}_s$ est définie à partir de (2.47) et (2.32), i.e., $\hat{\varphi}_s(g) = \hat{\varphi}(g_{tr}g_{ms})$ avec $\hat{\varphi}$ défini par (2.47). La fonction $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ est définie à partir de (2.48), i.e. $\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) = \hat{g} = g_{rt}\hat{g}_{ts}g_{sm}$ avec $\hat{g}_{ts} = \hat{g}_{st}^{-1}$ et \hat{g}_{st} donné par (2.48). Le résultat obtenu est très satisfaisant : l'erreur de suivi reste faible dans toutes les phases, et très peu de manœuvres “inutiles” sont effectuées.

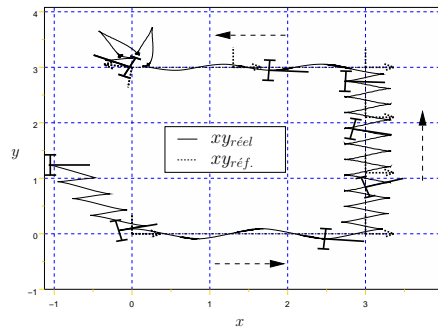
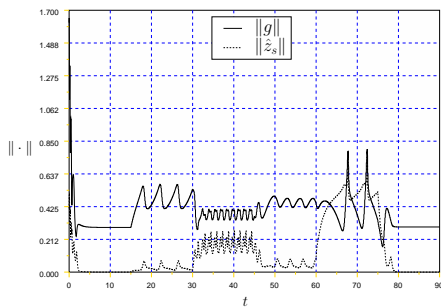
Pour la simulation de la Figure 3.5(b) les estimations (3.14) utilisées précédemment sont remplacées par les expressions légèrement plus simples (3.15). La trajectoire du robot n'est pas très différente de celle de la simulation précédente. Cependant, on peut remarquer une dégradation de la précision de suivi pour des trajectoires de référence consistant en une rotation pure (pour $t \in [60, 75]$), et l'apparition du phénomène d'oscillation (amorti)



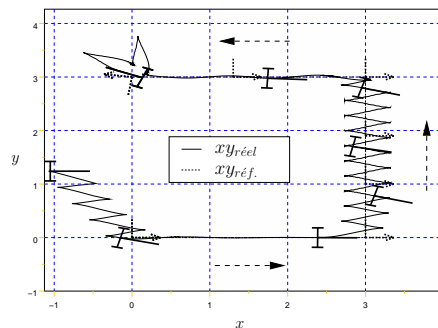
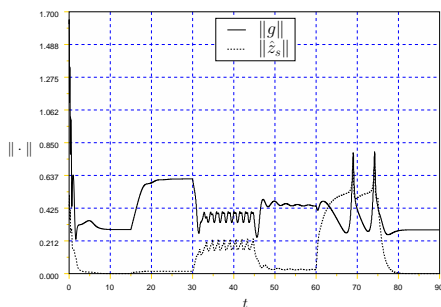
(a) Estimations (3.14)



(b) Estimations (3.15)



(c) Estimations (3.17)



(d) Estimations (3.18)

FIG. 3.5: Unicycle : Estimations non-linéaires, caméra commandée en rotation, $\hat{c}_r = 0$

évoqué précédemment lorsque le repère de référence recule (i.e. pour $t \in [45, 60]$).

La Figure 3.5(c) illustre l'utilisation des estimations (3.17), avec la fonction $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ obtenue suivant (2.50)–(2.52) et (2.35). La précision de suivi est comparable à celle associée aux simulations précédentes, tandis que le phénomène d'oscillation dans les phases de recul de la cible est amplifié. On remarque également, phénomène nouveau, des oscillations lorsque la cible avance.

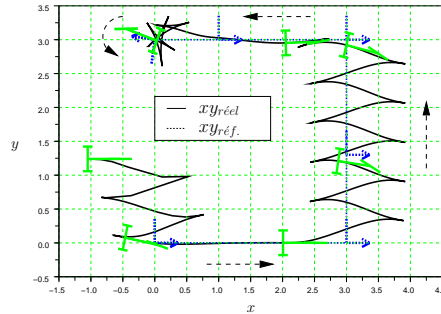
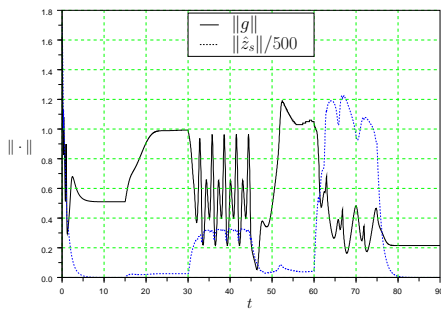
Finalement, la Figure 3.5(d) illustre l'utilisation des estimations (3.18) (où seulement la définition de \hat{z}_s change par rapport à la simulation précédente), avec la fonction $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ encore obtenue via (2.50)–(2.52) et (2.35). On peut remarquer comment cette simple modification suffit à réduire le phénomène d'oscillation de façon significative.

Robot de type voiture. Pour toutes les simulations suivantes concernant ce type de robot, la fonction transverse (1.39), avec les paramètres (2.39), a été utilisée dans la commande de la plateforme mobile ; le signal \hat{s} , défini par (3.21) avec $c_1 = 1/850$ (signal en coordonnées pixel, caméra calibrée), est utilisé à la place de s dans l'expression de commande ; la commande en orientation de la caméra est donnée par (2.38) avec $k_s = 3c_1$.

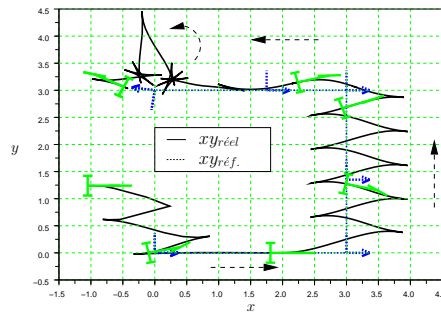
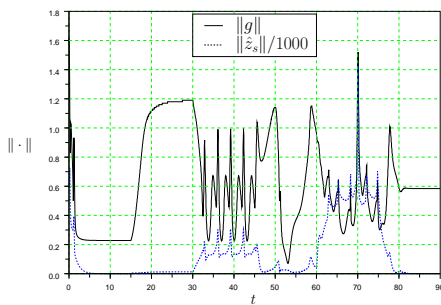
Pour la simulation de la Figure 3.6(a), les estimations (3.14) ont été utilisées. La fonction $\widehat{\varphi}_s$ est définie à partir de (2.32) et (2.47), i.e., $\widehat{\varphi}_s(g) = \widehat{\varphi}(g_{tr}gg_{ms})$ avec $\widehat{\varphi}$ défini par (2.47). La fonction $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ est définie à partir de (2.34) et (2.48)–(2.49), i.e. $\widehat{\varphi}_s^{-1}(s) = g_{rt}\widehat{\varphi}^{-1}(s)g_{sm}$, avec $\widehat{\varphi}^{-1}(s)$ donné par (2.48)–(2.49). Tout comme pour l'unicycle, le résultat est très satisfaisant : l'erreur de suivi reste faible dans toutes les phases et très peu de manœuvres “inutiles” sont effectuées. Par rapport au résultat obtenu avec les estimations linéaires (3.13) : *i*) l'erreur de suivi pour une trajectoire de référence rectiligne en marche avant est nettement diminuée et *ii*) les oscillations “parasites” pendant la phase où le repère de référence recule sont éliminées, toutefois, l'erreur de suivi est ici légèrement plus élevée.

Pour la simulation de la Figure 3.6(b), les estimations (3.15) – une simplification des estimations (3.14) – ont été utilisées. La trajectoire du robot n'est pas très différente de celle de la simulation précédente. Cependant, on peut remarquer une dégradation de la précision de suivi pour des trajectoires de référence consistant en une rotation pure (pour $t \in [60, 75]$).

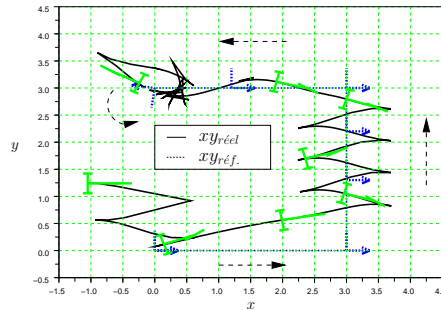
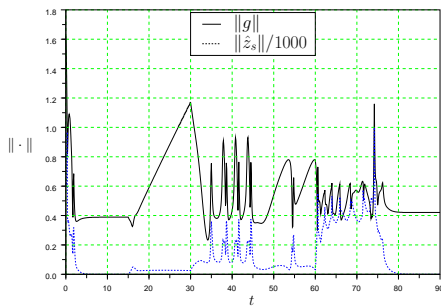
La Figure 3.6(c) illustre l'utilisation des estimations (3.17), avec la fonction $\widehat{\varphi}_s^{-1}$ obtenue suivant (2.50)–(2.52) et (2.35). La trajectoire du robot dans le plan cartésien pendant la phase de marche avant (pour $t \in [10, 30]$) n'est pas très satisfaisante. Bien que la durée de cette phase de marche avant ne soit pas assez longue pour le voir apparaître complètement, il s'agit là du phénomène d'oscillation observé pour le robot de type unicycle pendant cette même phase (cf. figure 3.5(c)). Le phénomène d'oscillation dans les phases de recul de la cible est amplifié par rapport aux simulations précédentes. Le suivi de la trajectoire de référence consistant en une rotation pure (pour $t \in [60, 75]$) est similaire à celui de la simulation précédente.



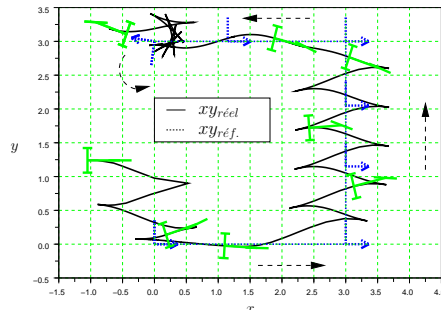
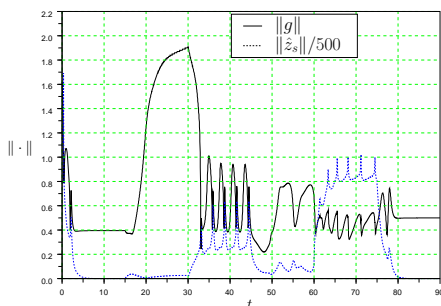
(a) Estimations (3.14)



(b) Estimations (3.15)



(c) Estimations (3.17)



(d) Estimations (3.18)

FIG. 3.6: Voiture : Estimations nonlinéaires, caméra commandé en rotation, $\hat{c}_r = 0$

Finalement, la Figure 3.6(d) illustre l'utilisation des estimations (3.18) (où seulement la définition de \hat{z}_s change par rapport à la simulation précédente), avec la fonction $\widehat{\varphi_s^{-1}}$ encore obtenue via (2.50)–(2.52) et (2.35). On peut remarquer comment cette simple modification suffit à éliminer le phénomène d'oscillations parasites pendant la phase de marche avant et à réduire le phénomène d'oscillation de façon significative pendant la phase de marche arrière. On remarque aussi que la précision de suivi pendant la phase de marche avant est nettement dégradée et reste pratiquement la même pendant les autres phases. La trajectoire du robot dans le plan cartésien pendant la phase de rotation pure, à l'instar des deux simulations précédentes, comporte des manœuvres quelque peu dégradées.

3.3.3 Fonction transverse généralisée

L'extension de la synthèse de commande de la section 3.1 à l'utilisation des fonctions transverses généralisées $f(\alpha, \beta) = (f'_g(\alpha, \beta), f'_c(\alpha, \beta))'$ telle que (2.56) est directe. En posant $z_s = s \circ f_{sg}(\alpha, \beta)^{-1}$ avec $f_{sg} = \varphi_s(f_g)$, on obtient (comparer avec (2.54) et (3.6)) :

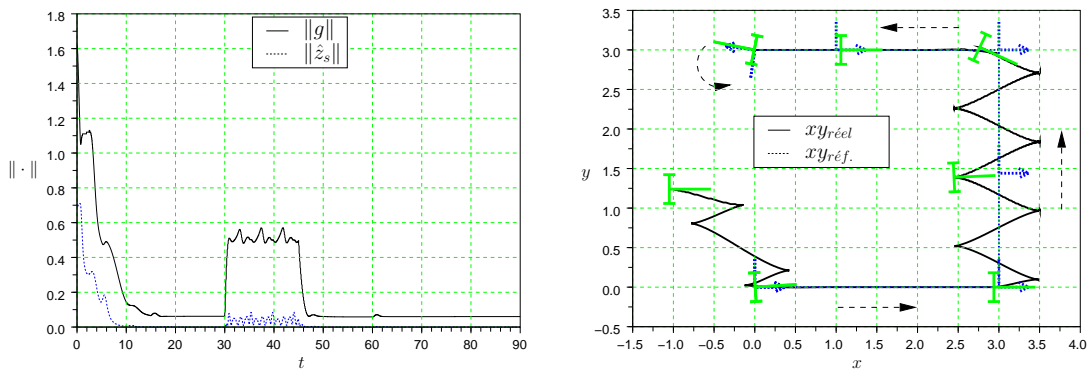
$$\dot{z}_s = Y(z_s) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) \left(\bar{C}(\alpha, \beta) \bar{v} - B(\alpha, \beta) \dot{\beta} - \text{Ad}^Y(s^{-1}) \hat{c}_r(t) \right)$$

Ceci suggère une loi de commande de la forme (comparer avec (3.7)–(3.8)) :

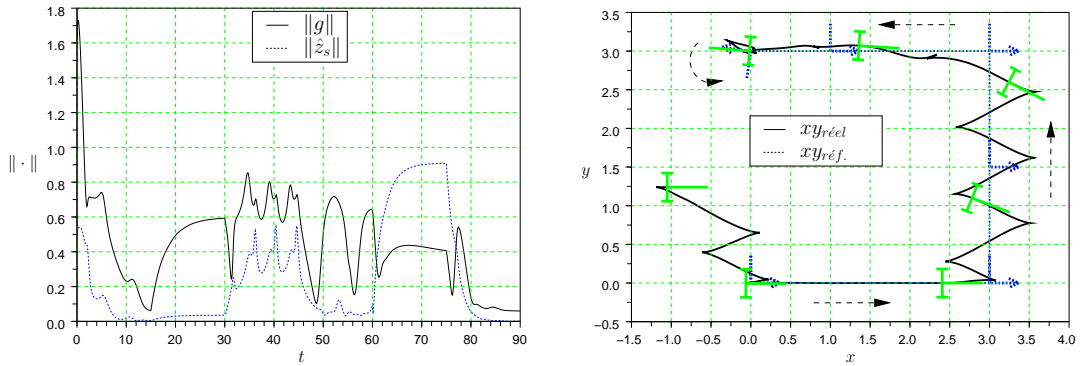
$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger \left(\text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1}) \widehat{Y(z_s)}^{-1} K \hat{z}_s + B_s(\alpha, \beta) \dot{\beta} + \text{Ad}^Y(s^{-1}) \hat{c}_r(t) \right) \quad (3.22)$$

avec K une matrice stable et \hat{z}_s , $\widehat{Y(z_s)}$, et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$, des estimations de z_s , $Y(z_s)$, et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$, définies par exemple comme dans la section 3.2.

La Figure 3.7(a) illustre ce choix de synthèse pour le suivi d'une cible mobile par un véhicule de type unicycle. La loi de commande est donnée par (3.22) avec $K = -0.5I_3$. Les estimations \hat{z}_s , $\widehat{Y(z_s)}$, et $\text{Ad}^Y(s^{-1})$, sont définies par (3.13), et $\dot{\beta}$ est donné par (2.57) avec $\hat{c}_r = c_r$ défini par (1.43) et $k_t = 1$. La fonction transverse généralisée est donnée par (2.56) avec $\varepsilon = 0.3$, $\eta = 1$, et $\rho = 0.8$. La commande de la caméra est donnée par (2.38) avec $k_s = 5$. Le signal \hat{s} , défini par (3.21), avec $c_1 = 1$, est utilisé dans la loi de commande, à la place de s . La trajectoire du robot est très proche de celle que l'on peut observer sur la Figure 2.13 (obtenue avec une synthèse de commande dans les coordonnées cartésiennes et une fonction transverse généralisée). En fait, la précision de suivi est même légèrement meilleure lorsque la référence réalise des rotations pures (intervalle de temps [60, 75]). La Figure 3.7(b) présente les résultats de simulation pour cette synthèse lorsque la vitesse de référence n'est pas compensée ($\hat{c}_r = 0$). Les autres conditions (commande et paramètres) sont les mêmes que pour la simulation précédente. Mise à part la dégradation de la précision de suivi due à la non compensation de la vitesse de référence, et la qualité de suivi quelque peu dégradée pendant la phase de marche arrière, le mouvement du robot est très similaire à celui de la simulation précédente. Les résultats de ce chapitre et ceux du chapitre précédent ont fait l'objet de la publication (Maya et al., 2006b).



(a) Avec compensation de la vitesse ($\hat{c}_r = c_r$)



(b) Sans compensation de la vitesse ($\hat{c}_r = 0$)

FIG. 3.7: Unicycle : Fonction transverse généralisée, synthèse de commande dans l'espace capteur.

3.4 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la synthèse de commandes directement dans l'espace capteur. Dans un premier temps, nous avons montré que formellement, la synthèse dans cet espace à partir du formalisme associé à l'approche FT ne pose pas de difficulté. Cependant, le calcul des lois de commande nécessite a priori la connaissance de la fonction signal du capteur, φ_s , ainsi que de son inverse φ_s^{-1} et de la fonction jacobienne associée $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}$. À partir d'une légère modification de la loi de commande, nous avons en fait montré, dans le cas particulier de la stabilisation de points fixes, que la connaissance de φ_s sur le seul ensemble image associé à la FT (et d'une estimation du jacobien de φ_s à la situation de référence) permet d'obtenir localement des propriétés fortes de stabilité et de convergence. Bien que cette approche mériterait d'être étudiée plus profondément, la connaissance de φ_s sur cet ensemble peut être difficile à obtenir en pratique. Ceci nous a conduit à reconsidérer, de façon plus générale, l'utilisation d'estimées de φ_s , φ_s^{-1} et $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}$ dans la loi de commande de départ. Plusieurs solutions ont ainsi été proposées et simulées, conduisant à des résultats assez similaires à ceux obtenus via la synthèse dans l'espace cartésien (mais à des expressions de commande plutôt plus complexes et des analyses de robustesse plus délicates). Au vu de ces résultats, et à partir de la seule connaissance d'une estimation de la fonction φ_s , il ne semble pas qu'il y ait un intérêt particulier à synthétiser la commande directement dans l'espace capteur plutôt que dans l'espace cartésien.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

4.1 Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié la commande référencée capteur des robots non holonomes. Ce sujet a été abordé via le problème de suivi, *à la fois en position et orientation*, d'une cible mobile par un robot mobile non holonome, en utilisant les mesures issues de capteurs embarqués. La problématique sous-jacente, liée au caractère très non linéaire des équations cinématiques de robots non holonomes, est celle de la robustesse des propriétés de stabilité associées aux commandes considérées, vis-à-vis d'incertitudes sur le modèle du capteur.

D'un point de vue théorique, nous avons démontré qu'une stabilisation pratique de trajectoires de référence générales engendrées par le mouvement de la cible peut être obtenue à partir d'une estimation très approximative de la fonction liant le signal capteur et la pose du robot par rapport à la cible. Pour les trajectoires de référence particulières réduites à un point fixe, nous avons également obtenu des conditions suffisantes de convergence de la pose du robot vers une configuration fixe. Tous les résultats de simulation et d'expérimentation que nous avons obtenus ont confirmé ces propriétés.

En ce qui concerne la synthèse de lois de commande, deux méthodes générales (par rapport au choix des capteurs), basées sur l'approche par fonction transverse, ont été proposées. La première méthode consiste à synthétiser la commande dans l'espace cartésien tandis que la deuxième consiste à synthétiser la commande directement dans l'espace des signaux capteur. La synthèse dans l'espace cartésien repose principalement sur une estimation de la pose du robot qui peut être obtenue via différentes méthodes. Par exemple, une possibilité simple consiste à réaliser une estimation linéaire locale utilisant uniquement une estimation du jacobien de la fonction qui lie l'espace capteur à l'espace cartésien, évalué à la position de référence. Cette synthèse s'est prêtée à la détermination de conditions suffisantes de stabilité et de convergence du système commandé. Sur le plan pratique, cette approche est facilement mise en œuvre, par exemple le jacobien nécessaire pour l'estimation linéaire de la pose peut être estimé expérimentalement via des mesures hors ligne. La

synthèse dans l'espace capteur nécessite a priori la connaissance des champs de commande, de l'opération de groupe et d'une fonction transverse dans cet espace. Une possibilité est de définir ces informations en termes de la fonction entre les signaux capteur et la pose du robot, de son inverse, et du jacobien associé. Cela nous amène à l'utilisation d'estimées de ces fonctions. De ce fait, l'expression de la loi de commande dans cet espace devient plus complexe que celle dans l'espace cartésien et la caractérisation de ses propriétés de stabilité est plus délicate. Localement, tout au moins pour les trajectoires réduites à un point fixe, on peut envisager des synthèses reposant seulement sur la connaissance du jacobien évalué à la position désirée et de la fonction signal sur l'ensemble image d'une fonction transverse dans l'espace cartésien. Ce type de commande permet la détermination de conditions suffisantes pour l'obtention de propriétés locales de stabilité et de convergence. Les informations nécessaires pour la synthèse de la commande peuvent éventuellement être obtenues en pratique via des phases d'apprentissage hors ligne. Néanmoins, la détermination de la fonction signal sur l'ensemble image de fonctions transverses dépendant de plus d'une variable, via cette procédure, semble délicate. Au vu de ces éléments, il semble qu'il n'y ait pas d'intérêt majeur à synthétiser la commande dans l'espace capteur. Toutefois, nous avons bien conscience que de nombreux points mériteraient d'être mieux compris afin de pouvoir avoir une vision plus aboutie des avantages et inconvénients de chacune de ces approches. En outre, les résultats de simulation n'ont pas permis de mettre en évidence des différences significatives en termes de performance du système commandé.

4.2 Perspectives

De nombreuses questions restent en suspens au terme de cette étude.

- D'un point de vue théorique, nous avons pu obtenir au chapitre deux des conditions suffisantes de convergence vers un point fixe pour des trajectoires de référence stationnaires. Toutefois, ces conditions semblent assez restrictives alors qu'en simulation, la convergence vers un point fixe a toujours été observée. L'origine de ces phénomènes mériterait d'être mieux compris. De même, il serait intéressant de pouvoir établir, pour la synthèse dans l'espace capteur, des résultats de stabilité du même ordre que ceux obtenus dans l'espace cartésien.
- Comme établi dans la proposition 7, et vérifié par les résultats de simulation, la vitesse de référence, lorsqu'elle n'est pas précompensée dans la loi de commande, a un impact sur la précision et la qualité du suivi. Puisque cette vitesse n'est pas nécessairement connue, ceci conduit naturellement au problème de synthétiser un estimateur de cette vitesse de référence afin d'améliorer la précision de suivi et de garantir de meilleures propriétés de stabilité pour des vitesses plus élevées. Pour assurer les performances du système commandé avec cet estimateur, une analyse de stabilité conjointe serait nécessaire ainsi qu'une validation en simulation et expérimentalement.
- Dans les diverses simulations effectuées, nous avons observé des manœuvres inutiles, en

particulier pour des trajectoires de référence rectilignes en marche arrière (cf. par exemple les sous-figures dans la colonne droite des figures 2.6 et 3.4). Ce phénomène, évidemment non désirable, est occasionné par l'utilisation d'un modèle très simplifié de la fonction liant les signaux capteur et la pose du robot, dans la synthèse de la commande. Pour la synthèse dans l'espace cartésien, ce modèle simplifié se traduit par la mauvaise estimation de la pose du robot à partir des signaux capteur. Pour la synthèse dans l'espace capteur il peut être associé à l'imprécision de la connaissance de la fonction transverse dans l'espace capteur. Bien que l'utilisation d'un modèle plus fin du capteur permette éventuellement de contourner ce problème, cette solution requiert la connaissance du modèle particulier du capteur utilisé. Une étude pour caractériser le problème et proposer d'autres solutions ne reposant pas sur une connaissance fine du capteur (mais plutôt de la commande) nous semble nécessaire.

- Les lois de commande basées sur la FT n'ont pas encore été validées en expérimentation à ce jour sur une plateforme mobile de type voiture. Il serait donc intéressant de le faire avec les méthodes de synthèse proposées dans cette thèse. Ces validations permettraient d'évaluer les performances obtenues en pratique face à un système plus complexe. En effet, comme l'indiquent les résultats de simulation, ce système semble plus sensible par exemple aux simplifications dans le modèle de la transformation signaux capteur-pose du robot, comme l'indique le problème de manœuvres parasites évoqué précédemment.
- Dû à des contraintes de temps, nous n'avons pas pu valider en expérimentation la synthèse dans l'espace capteur. Bien que les résultats de simulation indiquent des performances similaires à la synthèse dans l'espace cartésien (qui elle a été validée en expérimentation), il nous semble nécessaire de réaliser ces validations pour vérifier si en pratique il existe des différences de performance.
- Un autre point qui nous semble intéressant à développer est celui de l'annulation de l'erreur de suivi lors de trajectoires de référence non stationnaires réalisables. En effet, lorsque la trajectoire de référence est réalisable et non stationnaire, il existe généralement des synthèses de retours d'état qui la stabilisent exponentiellement. Il serait intéressant d'étudier le cas de fonctions transverses qui permettent de réaliser cela. D'autre part, dans le cadre de notre étude de CRC, l'utilisation de telles fonctions transverses pourrait contribuer à éliminer le phénomène de manœuvres parasites observé lors de certaines phases.

Annexe A

Preuves

A.1 Preuve du Lemme 1 (p. 48)

Commençons par montrer que la condition (2.15) est équivalente à (2.3). Puisque f est définie sur \mathbb{T} , $\bar{C}(\alpha)^\dagger = \bar{C}(\alpha)^{-1}$. La condition (2.3) est donc équivalente à $\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{C}(\alpha)^{-1} > 0 \forall \alpha$. D'après (2.4), (2.13), et (2.14), on a

$$\begin{aligned}\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{C}(\alpha)^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\gamma} & 0 & -a_1(\alpha) \\ \lambda \sin \bar{\gamma} & 0 & -a_2(\alpha) \\ 0 & 1 & -a_3(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_1(\alpha) \\ 0 & 0 & -a_2(\alpha) \\ 0 & 1 & -a_3(\alpha) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\gamma} & 0 & -a_1(\alpha) \\ \lambda \sin \bar{\gamma} & 0 & -a_2(\alpha) \\ 0 & 1 & -a_3(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)} & 0 \\ 0 & -\frac{a_3(\alpha)}{a_2(\alpha)} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{a_2(\alpha)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\gamma} & \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}(1 - \cos \bar{\gamma}) & 0 \\ \lambda \sin \bar{\gamma} & 1 - \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}\lambda \sin \bar{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La condition (2.3) est donc équivalente à la positivité du bloc supérieur 2×2 de la matrice ci-dessus, et donc également à celle de la matrice symétrique associée

$$\begin{pmatrix} 2\lambda \cos \bar{\gamma} & \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}(1 - \cos \bar{\gamma}) + \lambda \sin \bar{\gamma} \\ \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}(1 - \cos \bar{\gamma}) + \lambda \sin \bar{\gamma} & 2(1 - \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)}\lambda \sin \bar{\gamma}) \end{pmatrix}$$

Par application du critère de Sylvester (voir e.g. (Bernstein, 2005, Pg. 268) à cette dernière matrice, on obtient donc l'équivalence entre les conditions (2.3) et (2.15).

Montrons maintenant que la condition (2.16) est équivalente à (2.9). Il découle des

expressions précédentes que

$$\begin{aligned}\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{C}(\alpha)' &= \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\gamma} & 0 & -a_1(\alpha) \\ \lambda \sin \bar{\gamma} & 0 & -a_2(\alpha) \\ 0 & 1 & -a_3(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1(\alpha) & -a_2(\alpha) & -a_3(\alpha) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\gamma} + a_1(\alpha)^2 & a_1(\alpha)a_2(\alpha) & a_1(\alpha)a_3(\alpha) \\ \lambda \sin \bar{\gamma} + a_1(\alpha)a_2(\alpha) & a_2(\alpha)^2 & a_2(\alpha)a_3(\alpha) \\ a_1(\alpha)a_3(\alpha) & a_2(\alpha)a_3(\alpha) & 1 + a_3(\alpha)^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Afin de déterminer la positivité de cette matrice, ou ce qui est équivalent celle de la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos \bar{\gamma} + a_1(\alpha)^2 & \frac{1}{2}\lambda \sin \bar{\gamma} + a_1(\alpha)a_2(\alpha) & a_1(\alpha)a_3(\alpha) \\ \frac{1}{2}\lambda \sin \bar{\gamma} + a_1(\alpha)a_2(\alpha) & a_2(\alpha)^2 & a_2(\alpha)a_3(\alpha) \\ a_1(\alpha)a_3(\alpha) & a_2(\alpha)a_3(\alpha) & 1 + a_3(\alpha)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

nous appliquons à nouveau le critère de Sylvester (à partir des mineurs principaux inférieurs). Clairement le terme $1 + a_3(\alpha)^2$ est toujours strictement positif. Le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} a_2(\alpha)^2 & a_2(\alpha)a_3(\alpha) \\ a_2(\alpha)a_3(\alpha) & 1 + a_3(\alpha)^2 \end{pmatrix}$$

est lui aussi toujours strictement positif car la propriété de transversalité de la fonction f est équivalente au fait que $a_2(\alpha) \neq 0$ pour tout α . Par conséquent, la positivité de la matrice $\bar{C}_\Delta(\alpha)\bar{C}(\alpha)'$ est équivalente à la positivité du déterminant de la matrice (A.1), ce qui conduit après quelques calculs à la condition (2.16).

Il reste à établir (2.17) et (2.18). Il est immédiat de vérifier que (2.16) se réduit à (2.18) lorsque $\bar{\gamma} = 0$. Considérons donc la condition (2.15). Lorsque $\bar{\gamma} = 0$, cette condition est équivalente à

$$\delta^2(1 - \lambda)^2 < 4\lambda \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\delta = \max_{\alpha} \left| \frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)} \right| \quad (\text{A.3})$$

On montre facilement, par l'étude des solutions du polynôme $\delta^2(1 - \lambda)^2 - 4\lambda$, que (A.2) est équivalente à l'inégalité de (2.17). Finalement, on déduit de (1.37) que

$$\begin{cases} a_1 = \cos(f_\theta) \frac{\partial f_x}{\partial \alpha} + \sin(f_\theta) \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} \\ a_2 = -\sin(f_\theta) \frac{\partial f_x}{\partial \alpha} + \cos(f_\theta) \frac{\partial f_y}{\partial \alpha} \end{cases}$$

En utilisant les relations trigonométriques

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

et l'expression (1.38) de la fonction transverse, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{a_1(\alpha)}{a_2(\alpha)} &= \frac{\varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2/2\eta^2 \cos \alpha \cos 2\alpha}{\varepsilon^2/2\eta \cos 2\alpha - \varepsilon^2\eta(\cos \alpha)^2} \\ &= -\cos \alpha \frac{2 + \varepsilon^2\eta^2 \cos 2\alpha}{\varepsilon\eta}\end{aligned}$$

D'où il découle d'après (A.3), en considérant la valeur $\alpha = 0$, que δ est bien donnée par (2.17). ■

A.2 Preuve de la Proposition 6 (p. 49)

Le modèle d'erreur exprimé dans la variable \hat{g} , donné par (2.12), s'écrit

$$\dot{\hat{g}} = X(\hat{g})\Delta C(\zeta)\bar{v} - X(\hat{g})\Delta \text{Ad}^X(g^{-1})c_r \quad (\text{A.4})$$

On déduit de (1.11), (2.13), et (1.29) que

$$\begin{aligned}X(\hat{g})\Delta \text{Ad}^X(g^{-1}) &= X(\hat{g})\Delta X(g^{-1}) \begin{pmatrix} I_2 & Sp \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= X(\hat{g}g^{-1})\Delta \begin{pmatrix} I_2 & Sp \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= X(b_\theta)\Delta \begin{pmatrix} I_2 & Sp \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda R(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & Sp \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda R(\gamma) & S(\hat{p} - b_p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Puisque $\hat{z} = \hat{g}f(\alpha)^{-1}$, il découle de (1.28) et (A.4) que

$$\dot{\hat{z}} = X(\hat{z})\text{Ad}^X(f_g(\alpha))\bar{C}_\Delta\bar{v} + X(\hat{z})\text{Ad}^X(f_g(\alpha))X(\hat{g})^{-1}X(\hat{g})\Delta \text{Ad}^X(g^{-1})c_r \quad (\text{A.6})$$

En utilisant l'expression (1.29) de la fonction Ad^X , (A.5), et le fait que

$$\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}_p \\ \hat{z}_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{p} - R(\hat{\theta} - f_\theta(\alpha))f_p(\alpha) \\ \hat{\theta} - f_\theta(\alpha) \end{pmatrix}$$

on montre que

$$X(\hat{z})\text{Ad}^X(f_g)X(\hat{g})^{-1}X(\hat{g})\Delta \text{Ad}^X(g^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda R(\gamma) & S(\hat{z}_p - b_p) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Finalement, par application de la loi de commande (2.2), il découle de (A.6) et (A.7) que le long des trajectoires du système en boucle fermée,

$$\dot{\hat{z}} = -kM(\hat{z}, \alpha)\hat{z} + \begin{pmatrix} \lambda R(\gamma)(c_{r,1}, c_{r,2})' + c_{r,3}S(z_p - b_p) \\ c_{r,3} \end{pmatrix}$$

avec M la fonction à valeur matricielle définie par (2.5). Puisque S est une matrice antisymétrique, la dérivée de la fonction $V(\hat{z}) = \hat{z}'\hat{z}$ le long des solutions de ce système vérifie donc l'équation

$$\dot{V}(\hat{z}) = -2k\hat{z}'M(\hat{z}, \alpha)\hat{z} + 2\hat{z}' \begin{pmatrix} \lambda R(\gamma)(c_{r,1}, c_{r,2})' - c_{r,3}Sb_p \\ c_{r,3} \end{pmatrix}$$

D'où, d'après (2.7),

$$\dot{V}(\hat{z}) \leq -2k\delta\|\hat{z}\|^2 + 2\|\hat{z}\|\|c_r\|(\lambda + b_p + 1)$$

On déduit de cette équation que $\|\hat{z}\|$ est ultimement bornée par $\|c_r\|_{\max}(\lambda + b_p + 1)/(k\delta)$ et, par conséquent, que $\|\hat{g}\|$ est ultimement bornée par $\varepsilon_f + \|c_r\|_{\max}(\lambda + b_p + 1)/(k\delta)$. Finalement, la borne ultime de $\|g\|$ est obtenue à partir de (2.11).

A.3 Preuve de la Proposition 7 (p. 51)

Nous déduisons de (1.40) et (2.20) que

$$\dot{z} = X(z)X(\hat{z})^{-1}K\hat{z} - X(z)\text{Ad}^X(f)\text{Ad}^X(g^{-1})c_r$$

En utilisant le fait que, pour tout g_1, g_2 , $\text{Ad}^X(g_1)\text{Ad}^X(g_2) = \text{Ad}^X(g_1g_2)$, $X(g_1)X(g_2) = X(g_1g_2)$, et $X(g_1)^{-1} = X(g_1^{-1})$, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= X(z\hat{z}^{-1})K\hat{z} - X(z)\text{Ad}^X(z^{-1})c_r \\ &= X(\tilde{g})K\hat{z} - X(z)\text{Ad}^X(z^{-1})c_r \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Nous déduisons de (1.29) que

$$X(z)\text{Ad}^X(z^{-1})c_r = \begin{pmatrix} I_2 & Sp_z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c_r \quad (\text{A.9})$$

avec

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et p_z la composante de position de z (i.e. $z = (p'_z, \theta_z)'$). On peut aussi vérifier à partir de (1.10) et (1.13) que

$$\hat{z} = \tilde{g}^{-1}z = \tilde{g}^{-1} + X(\tilde{g})^{-1}z \quad (\text{A.10})$$

Comme $K = -kI_3$, nous déduisons de (A.8), (A.9), et (A.10), que

$$\dot{z} = -kz - kX(\tilde{g})\tilde{g}^{-1} + \begin{pmatrix} I_2 & Sp_z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c_r \quad (\text{A.11})$$

Montrons maintenant que $g(t)$ reste dans $B_g(\delta_1)$, i.e. $\|g(t)\| \leq \delta_1$ pour tout t . Nous procédons par contradiction. Supposons que $g(t)$ sort de $B_g(\delta_1)$. Alors, comme $\|g(0)\| < \delta_1 - 2\varepsilon$, il existe $t_0 > 0$ tel que $\|g(t_0)\| = \delta_1$ et $\|g(t)\| < \delta_1$ pour tout $t \in [0, t_0)$. Dans cet intervalle, nous déduisons de (2.21) que

$$\begin{aligned} \|\tilde{g}^{-1}(t)\| &= \|\tilde{g}(t)\| \\ &\leq \gamma_1 \|g(t)\| \\ &\leq \gamma_1 (\|z\| + \|f\|) \\ &\leq \gamma_1 (\|z\| + \varepsilon) \end{aligned}$$

Posons $V(z) = \|z\|^2$. Nous déduisons de l'inégalité ci-dessus et de (A.11) que

$$\begin{aligned} \dot{V}(z) &\leq -2k\|z\|^2 + 2k\|z\|(\gamma_1\|z\| + \gamma_1\varepsilon) + 2\|z\|\|c_r\|_{\max} \\ &\leq -2k\|z\|((1 - \gamma_1)\|z\| - \gamma_1\varepsilon - \|c_r\|_{\max}/k) \\ &< 0, \quad \forall \|z\| > \frac{\gamma_1\varepsilon + \|c_r\|_{\max}/k}{1 - \gamma_1} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

À partir de (2.25) on peut déduire que $\delta_1 - \varepsilon > \frac{\gamma_1\varepsilon + \|c_r\|_{\max}/k}{1 - \gamma_1}$. Par conséquent, comme $\|z(0)\| \leq \|g(0)\| + \varepsilon < \delta_1 - \varepsilon$, nous déduisons de (A.12) que $\|z(t)\| < \delta_1 - \varepsilon$, $\forall t \in [0, t_0]$, ce qui implique

$$\|g(t_0)\| \leq \|z(t_0)\| + \varepsilon < \delta_1$$

d'où une contradiction.

À partir de (A.12) on peut déduire que $\|z\|$ est ultimement borné par $(\gamma_1\varepsilon_f + \|c_r\|_{\max}/k)/(1 - \gamma_1)$. Par application de l'inégalité $\|g\| \leq \|z\| + \|f\| \leq \|z\| + \varepsilon_f$, on déduit que $\|g\|$ est ultimement borné par $\bar{\varepsilon}_f$. ■

A.4 Preuve des Propositions 9 et 10 (pp. 52, 53)

Établissons d'abord la dynamique de \hat{z} . Comme $\hat{g} = \psi(g)$, nous déduisons de (1.30) (avec $c_r = 0$) que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{g}} &= \frac{\partial \psi}{\partial g}(g)\dot{g} \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial g}(g)X(g)C(\zeta)v \\ &= X(\hat{g})\hat{C}(g, \zeta)v \end{aligned}$$

avec

$$\hat{C}(g, \zeta) = X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) C(\zeta)$$

Comme $\hat{z} = \hat{g} f_g^{-1}(\alpha)$ et $\zeta = f_\zeta(\alpha)$, nous déduisons des égalités ci-dessus et de (1.28) que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= X(\hat{z}) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) \left(\hat{C}(g, f_\zeta(\alpha)) v - A(\alpha) \dot{\alpha} \right) \\ &= X(\hat{z}) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) \left(C(f_\zeta(\alpha)) v - A(\alpha) \dot{\alpha} + (X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) - I_3) C(f_\zeta(\alpha)) v \right) \\ &= X(\hat{z}) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) \left(\bar{C}(\alpha) \bar{v} + (X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) - I_3) C(f_\zeta(\alpha)) v \right) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La variable v peut s'écrire comme $v = P\bar{v}$ avec P une matrice de projection. Pour l'unicycle,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tandis que $P = (1 \ 0 \ 0)$ pour la voiture. Par conséquent, nous déduisons de (A.13) que

$$\dot{\hat{z}} = X(\hat{z}) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) \left(\bar{C}(\alpha) \bar{v} + (X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) - I_3) C(f_\zeta(\alpha)) P \bar{v} \right)$$

En bouclant l'équation précédente avec le retour (2.20), et en utilisant le fait que $K = -kI_3$, nous obtenons

$$\dot{\hat{z}} = -k(I_3 - \mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)) \hat{z} \quad (\text{A.14})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha) &= \\ &X(\hat{z}) \text{Ad}^X(f_g(\alpha)) \left(I_3 - X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) \right) C(f_\zeta(\alpha)) P \bar{C}(\alpha)^\dagger \text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1}) X(\hat{z})^{-1} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

D'après (la preuve de) la Proposition 7, g converge exponentiellement à $B_g(\varepsilon/(1-\gamma_1))$. Par conséquent, au vu de (A.14), une condition suffisante pour la convergence exponentielle de \hat{z} à zéro est

$$\|\mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)\| < 1 \quad \forall (\hat{z}, \hat{g}, \alpha), \forall g \in B_g(\varepsilon/(1-\gamma_1)) \quad (\text{A.16})$$

Il reste à montrer que cette propriété est satisfaite. D'après (1.13) et (1.29), on déduit que pour tout z ,

$$\|X(z)\| = \|X(z)^{-1}\| = 1, \quad \|\text{Ad}^X(z)\| \leq (1 + \|z\|), \quad \text{et} \quad \|\text{Ad}^X(z^{-1})\| \leq (1 + \|z\|)$$

Donc, on peut déduire de la définition ci-dessus de $\mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)$, et de la définition de ε , que

$$\|\mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)\| \leq (1 + \varepsilon)^2 \left\| \left(I_3 - X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) \right) C(f_\zeta(\alpha)) P \bar{C}^\dagger(\alpha) \right\| \quad (\text{A.17})$$

Alors,

$$\begin{aligned}
I_3 - X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) &= X(\hat{g})^{-1} \left(X(\hat{g}) - \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) \right) \\
&= X(\hat{g})^{-1} \left(X(\hat{g}) - X(g) + (I_3 - \frac{\partial \psi}{\partial g}(g)) X(g) \right) \\
&= X(\hat{g})^{-1} \left(X(\hat{g}) - X(g) + (I_3 - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0)) X(g) - (\frac{\partial \psi}{\partial g}(g) - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0)) X(g) \right)
\end{aligned}$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\left\| I_3 - X(\hat{g})^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) X(g) \right\| &\leq \|X(\hat{g}) - X(g)\| + \|I_3 - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0)\| + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial g}(g) - \frac{\partial \psi}{\partial g}(0) \right\| \\
&\leq \gamma_1 \|g\| + \gamma_1 + \gamma_2 \|g\| \\
&\leq \gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \|g\|
\end{aligned}$$

avec la deuxième inégalité obtenue par application de (2.21) et (2.26). Nous déduisons de cette inégalité et de (A.17) que $\forall(\hat{z}, \hat{g}, \alpha)$ et $\forall g \in B_g(\varepsilon/(1 - \gamma_1))$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)\| &\leq (1 + \varepsilon)^2 \left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon}{1 - \gamma_1} \right) \|C(f_\zeta(\alpha)) P \bar{C}^\dagger(\alpha)\| \\
&\leq \left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon}{1 - \gamma_1} \right) (1 + \varepsilon)^2 \|C(f_\zeta(\alpha)) P \bar{C}^\dagger(\alpha)\|
\end{aligned} \tag{A.18}$$

Considérons maintenant le cas de l'unicycle.

Unicycle : Dans ce cas,

$$C(f_\zeta(\alpha)) = C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_{11}(\alpha) \\ 0 & 0 & -a_{21}(\alpha) \\ 0 & 1 & -a_{31}(\alpha) \end{pmatrix}$$

avec (cf. Proposition 4)

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\alpha) \\ a_{21}(\alpha) \\ a_{31}(\alpha) \end{pmatrix} = A(\alpha) = X(f_g(\alpha))^{-1} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha}(\alpha) \tag{A.19}$$

Donc,

$$C(f_\zeta(\alpha)) P \bar{C}^\dagger(\alpha) = C P \bar{C}(\alpha)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{11}}{a_{21}}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{31}}{a_{21}}(\alpha) & 1 \end{pmatrix} \tag{A.20}$$

Par application de (1.38), (A.19), et (A.20), on peut montrer que

$$\varepsilon \|C P \bar{C}(\alpha)^{-1}\| \leq \delta(\eta)(1 + \varepsilon^2) \quad \forall \alpha \tag{A.21}$$

avec $\delta(\eta)$ une valeur qui dépend seulement de η .

Nous déduisons de (A.18) et (A.21) que $\forall(\hat{z}, \hat{g}, \alpha)$ et $\forall g \in B_g(\varepsilon/(1 - \gamma_1))$,

$$\|\mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)\| \leq \left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon}{1 - \gamma_1} \right) \frac{\bar{\delta}(\eta)(1 + \varepsilon^4)}{\varepsilon}$$

avec $\bar{\delta}(\eta)$ une autre valeur. On déduit de (1.38) que

$$\varepsilon \leq \varepsilon_f = \max_{\alpha} \|f_g(\alpha)\| \leq \delta_2(\eta)\varepsilon(1 + \varepsilon) \leq \delta_2(\eta)\varepsilon(1 + \varepsilon_f)$$

pour un certain $\delta_2(\eta)$. Par l'application de ces inégalités, on déduit qu'il existe des valeurs c_1, c_2 , qui dépendent seulement de η telles que

$$\|\mathcal{M}(\hat{z}, g, \hat{g}, \alpha)\| \leq \left(\gamma_1 + (\gamma_1 + \gamma_2) \frac{\varepsilon_f}{1 - \gamma_1} \right) \left(\frac{c_1}{\varepsilon_f} + c_2 \varepsilon_f^3 \right)$$

de manière que (A.16) est vérifiée si (2.27) est vérifiée.

Voiture : L'analyse, similaire au cas précédent, est laissée au lecteur.

A.5 Preuve du Lemme 2 (p. 79)

1. Rappelons que par hypothèse φ_s est un difféomorphisme global donc $\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}$ et $\frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}$ sont bien définis partout. Par conséquent $\varphi_s(SE(2))$ est un groupe de Lie avec l'opération de groupe $s_1 \circ s_2 = \varphi_s(\varphi_s^{-1}(s_1)\varphi_s^{-1}(s_2))$. Rappelons aussi que le système défini par (3.1) est invariant à gauche si les champs de vecteurs Y_i sont invariants à gauche, i.e. si $\forall s_1, s_2 \in \varphi_s(G)$, $dl_{s_1}^s(s_2)Y(s_2) = Y(s_1 \circ s_2)$, avec l^s l'opérateur de translation à gauche sur $\varphi_s(SE(2))$ défini par :

$$\begin{aligned} l_{s_1}^s(s_2) &= s_1 \circ s_2 \\ &= \varphi_s(\varphi_s^{-1}(s_1)\varphi_s^{-1}(s_2)) \\ &= \varphi_s\left(l_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2))\right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

d'où

$$dl_{s_1}^s(s_2) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}\left(l_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2))\right) dl_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2)) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s_2) \quad (\text{A.23})$$

Par dérivation de l'égalité $\varphi_s^{-1}(\varphi_s(g)) = g$ on déduit

$$\frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s) = \left[\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s)) \right]^{-1} \quad (\text{A.24})$$

En utilisant (A.23), (A.24) et (3.2) nous déduisons finalement

$$\begin{aligned}
dl_{s_1}^s(s_2)Y(s_2) &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g} \left(l_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2)) \right) dl_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2)) \\
&\quad \left[\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s_2)) \right]^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s_2)) X(\varphi_s^{-1}(s_2)) \\
&= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g} \left(l_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2)) \right) dl_{\varphi_s^{-1}(s_1)}^g(\varphi_s^{-1}(s_2)) X(\varphi_s^{-1}(s_2)) \quad (\text{A.25}) \\
&= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s_1)\varphi_s^{-1}(s_2)) X(\varphi_s^{-1}(s_1)\varphi_s^{-1}(s_2)) \\
&= Y(s_1 \circ s_2)
\end{aligned}$$

2. L'équation (3.3) est déduite directement de la relation (C.10) exprimée dans les coordonnées s .

Reste à démontrer que $\text{Ad}^Y(s) = \text{Ad}^X(\varphi_s^{-1}(s))$, pour cela remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}
r_{s_2}^s(s_1) &= s_1 \circ s_2 \\
&= \varphi_s \left((\varphi_s^{-1}(s_1)\varphi_s^{-1}(s_2)) \right) \quad (\text{A.26}) \\
&= \varphi_s \left(r_{\varphi_s^{-1}(s_2)}^g(\varphi_s^{-1}(s_1)) \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$dr_{s_2}^s(s_1) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial g} \left(r_{\varphi_s^{-1}(s_2)}^g(\varphi_s^{-1}(s_1)) \right) dr_{\varphi_s^{-1}(s_2)}^g(\varphi_s^{-1}(s_1)) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s_1) \quad (\text{A.27})$$

En utilisant (A.23), (A.24) et (A.27) dans (C.2) nous obtenons

$$\begin{aligned}
\text{Ad}_s(s) &= dl_s^s(s^{-1}) dr_{s^{-1}}^s(e) \\
&= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g} \left(l_{\varphi_s^{-1}(s)}^g(\varphi_s^{-1}(s^{-1})) \right) dl_{\varphi_s^{-1}(s)}^g(\varphi_s^{-1}(s^{-1})) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s^{-1}) \\
&\quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial g} \left(r_{\varphi_s^{-1}(s^{-1})}^g(e) \right) dr_{\varphi_s^{-1}(s^{-1})}^g(e) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(e) \\
&= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s)(\varphi_s^{-1}(s^{-1}))) dl_{\varphi_s^{-1}(s)}^g(\varphi_s^{-1}(s^{-1})) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s^{-1}) \\
&\quad \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(s^{-1})) dr_{\varphi_s^{-1}(s^{-1})}^g(e) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(e) \\
&= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(e) dl_{\varphi_s^{-1}(s)}^g(\varphi_s^{-1}(s^{-1})) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s^{-1}) \\
&\quad \left[\frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(s^{-1}) \right]^{-1} dr_{\varphi_s^{-1}(s^{-1})}^g(e) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(e) \\
&= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(e) dl_{\varphi_s^{-1}(s)}^g(\varphi_s^{-1}(s^{-1})) dr_{\varphi_s^{-1}(s^{-1})}^g(e) \frac{\partial \varphi_s^{-1}}{\partial s}(e)
\end{aligned}$$

d'où, en réutilisant la relation (C.2) dans les coordonnées $\varphi_s^{-1}(s)$, nous obtenons

$$\text{Ad}_s(s) = \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(e) \text{Ad}_g(\varphi_s^{-1}(s)) \frac{\varphi_s^{-1}}{\partial s}(e) \quad (\text{A.28})$$

Finalement, rappelons que la représentation matricielle de l'opérateur adjoint Ad^Z par rapport à une base de champs de vecteurs (Z_i) dans un système de coordonnées z est donnée par $Z(e)\text{Ad}^Z = \text{Ad}_z Z(e)$ avec Ad_z l'opérateur adjoint et $Z(\cdot)$ la matrice dont les colonnes sont les champs de vecteurs Z_i . Donc dans le système de coordonnées s nous avons

$$\begin{aligned} Y(e)\text{Ad}^Y(s) &= \text{Ad}_s(s)Y(e) \\ &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(e) \text{Ad}_g(\varphi_s^{-1}(s)) \frac{\varphi_s^{-1}}{\partial s}(e) \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(e) X(e) \\ &= \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(e) X(e) \text{Ad}^X(\varphi_s^{-1}(s)) \\ &= Y(e) \text{Ad}^X(\varphi_s^{-1}(s)) \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Ad}^Y(s) = \text{Ad}^X(\varphi_s^{-1}(s)) \quad (\text{A.29})$$

3. Posons $z_s = s \circ f_{sg}^{-1}$; sa dérivée par rapport au temps est donnée par la relation (C.12) exprimée dans les coordonnées s :

$$\dot{z}_s = Y(z_s) \text{Ad}^Y(f_{sg}) (\bar{C}_s(\alpha) \bar{v})$$

avec $\bar{C}_s(\alpha) = [C(f_\zeta) - A_s(\alpha)]$, $A_s(\alpha)$ telle que $\frac{\partial f_{sg}}{\partial \alpha} = Y(f_{sg}) A_s(\alpha)$,¹ et $\bar{v} = (v', \dot{\alpha})'$. Alors f_{sg} est une fonction transverse pour le système (3.1) si et seulement si la matrice $\bar{C}_s(\alpha)$ est de rang trois. Remarquons que

$$\begin{aligned} A_s(\alpha) &= Y(f_{sg})^{-1} \frac{\partial f_{sg}}{\partial \alpha}(\alpha) \\ &= X(\varphi_s^{-1}(f_{sg}))^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(\varphi_s^{-1}(f_{sg}))^{-1} \frac{\partial \varphi_s(f_g)}{\partial \alpha}(\alpha) \\ &= X(f_g)^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(f_g)^{-1} \frac{\partial \varphi_s(f_g)}{\partial g} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha}(\alpha) \\ &= X(f_g)^{-1} \frac{\partial f_g}{\partial \alpha}(\alpha) \\ &= A(\alpha) \end{aligned}$$

avec $A(\alpha)$ définie comme dans la définition 13. Il s'en suit que $\bar{C}_s(\alpha) = \bar{C}(\alpha)$, donc $\bar{C}_s(\alpha)$ est de rang trois si et seulement si f_g est une fonction transverse pour (1.12).

¹Comme $Y(f_{sg})$ est une matrice inversible pour tout f_{sg} , $A_s(\alpha)$ est bien définie pour tout α .

A.6 Preuve de la Proposition 12 (p. 81)

Considérons le système de commande donné par

$$\begin{aligned}
\overline{s - \dot{f}_{sg}(\alpha)} &= Y(s)C(f_\zeta(\alpha))v - \dot{f}_{sg}(\alpha) \\
&= Y(f_{sg}(\alpha))C(f_\zeta(\alpha))v - \dot{f}_{sg}(\alpha) + (Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha)))C(f_\zeta(\alpha))v \\
&= \frac{\varphi_s}{\partial g}(f_g(\alpha)) \left[X(f_g(\alpha))C(f_\zeta(\alpha))v - \dot{f}_g(\alpha) \right] + (Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha)))C(f_\zeta(\alpha))v \\
&= \frac{\varphi_s}{\partial g}(f_g(\alpha))X(f_g(\alpha))\bar{C}(\alpha)\bar{v} + (Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha)))C(f_\zeta(\alpha))v
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Par application de la commande (3.9), on a

$$\overline{s - \dot{f}_{sg}(\alpha)} = \frac{\varphi_s}{\partial g}(f_g(\alpha)) \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0)^{-1} K(s - f_{sg}(\alpha)) + (Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha)))C(f_\zeta(\alpha))v \tag{A.31}$$

Pour tout voisinage borné \mathcal{U} de $f_{sg}(\mathbb{T}^p)$ il existe une constante c_0 telle que

$$\forall s \in \mathcal{U}, \quad \|Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha))\| \leq c_0 \|s - f_{sg}(\alpha)\|$$

d'où, d'après l'expression de \bar{v} et le fait que la matrice $C(f_\zeta(\alpha))$ est bornée uniformément par rapport à α

$$\|(Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha)))C(f_\zeta(\alpha))v\| \leq \bar{c}_0 \|s - f_{sg}(\alpha)\|^2$$

avec \bar{c}_0 une autre constante. En notant $x = s - f_{sg}(\alpha)$, on peut réécrire (A.31) comme

$$\dot{x} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0) \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0)^{-1} Kx + \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(f_g(\alpha)) - \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0) \right) \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0)^{-1} Kx + O^2(x, \alpha)$$

avec $O^2(x, \alpha) = (Y(s) - Y(f_{sg}(\alpha)))C(f_\zeta(\alpha))v$ un terme d'ordre deux en x . Étant donné que la matrice

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(f_g(\alpha)) - \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0)$$

est bornée uniformément (par rapport à α) par une valeur qui tend vers zéro lorsque ε_f tend vers zéro, on en déduit les conclusions du lemme (en considérant par exemple une fonction de Lyapunov associée au système $\dot{x} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial g}(0) \widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0)^{-1} Kx$).

A.7 Preuve du lemme 3 (p. 83)

Étant donné que dans l'espace cartésien $\hat{z} = \hat{g}f_g(\alpha)^{-1}$, nous déduisons à partir de la définition de l'opération de groupe (1.10) que

$$\begin{aligned}
\hat{z} &= \hat{g} - X(\hat{\theta}_s - f_\theta)f_g \\
&= \left(\widehat{\frac{\partial \varphi_s}{\partial g}}(0) \right)^{-1} \hat{z}_s
\end{aligned}$$

Donc, on déduit de (3.12) que

$$\hat{z}_s = \frac{\widehat{\partial\varphi_s}}{\partial g}(0)\hat{z}, \widehat{Y}(z_s) = \frac{\widehat{\partial\varphi_s}}{\partial g}(0)X(\hat{z}), \widehat{\text{Ad}^Y(s^{-1})} = \text{Ad}^X(\hat{g}^{-1})$$

de manière que l'expression de commande (3.11) devient

$$\bar{v} = \bar{C}(\alpha)^\dagger (\text{Ad}^X(f_g(\alpha)^{-1})X(\hat{z})^{-1}\bar{K}\hat{z} + \text{Ad}^X(\hat{g}^{-1})c_r(t))$$

avec

$$\bar{K} = \left(\frac{\widehat{\partial\varphi_s}}{\partial g}(0) \right)^{-1} K \left(\frac{\widehat{\partial\varphi_s}}{\partial g}(0) \right)$$

Celle-ci est la même loi de commande que (2.19), à l'exception de K qui est remplacé par \bar{K} . Lorsque $K = -kI_3$, les deux lois de commande sont exactement identiques et elles ont donc les mêmes conditions pour la bornitude et la convergence.

Annexe B

Reconstruction géométrique de la pose d'une caméra (p. 71)

L'estimation (2.50)-(2.52) de la pose de la caméra, dans la section 2.4.2, exploite des relations géométriques entre la cible et la caméra. Considérons la fig. B.1 qui montre, entre autre, les repères du capteur et de la cible. Les deux lignes passant par les points L, M et R, M délimitent quatre domaines convexes complémentaires. Nous allons faire l'hypothèse que l'origine O_s du repère capteur est toujours strictement dans le domaine convexe opposé au triangle LMR (comme montré sur la figure). Une des raisons de cette restriction est que, lorsque O_s est sur la ligne qui passe par L, M (resp. R, M), les projections de L et M (resp. R et M) sur le plan image coïncident de manière qu'il n'est pas possible d'associer chaque point de la cible avec sa projection dans l'image.

C'est un fait connu qu'il existe exactement un cercle passant par trois points non colinéaires. Considérons le cercle qui passe par L, O_s , et R , et notons C_{rl} son centre et r_{rl} son rayon (voir la fig. B.1). On note aussi L' (resp. R') le point d'intersection du cercle et de la ligne passant par L et M (resp. R et M). Pour obtenir une expression des coordonnées de O_s dans le repère de la cible, définissons quelques notations complémentaires. Notons α_i ($i \in \{l, m, r\}$) les angles orientés entre l'axe \vec{v}_s du repère capteur et le vecteur $\vec{O_s i}$. Ils satisfont les relations $\tan \alpha_i = \mathbf{i}/f$. Les angles non orientés $\widehat{LO_s M}$, $\widehat{LO_s R}$, et $\widehat{MO_s R}$ sont notés α_{lm} , α_{lr} , et α_{mr} respectivement. Ces angles satisfont les relations

$$\tan \alpha_{ij} = \frac{|\mathbf{j} - \mathbf{i}|}{|f + |\mathbf{ij}|/f|}$$

avec f la distance focale.

Par application du Théorème de l'Angle Inscrit, qui implique que α_{lr} est la moitié de l'angle $\widehat{LC_{rl}R}$, on peut facilement vérifier que les coordonnées (Cx_{rl}, Cy_{rl}) de C_{rl} dans le repère de la cible sont données par

$$Cx_{rl} = -\frac{a}{\tan \alpha_{lr}}, \quad Cy_{rl} = 0 \quad (\text{B.1})$$

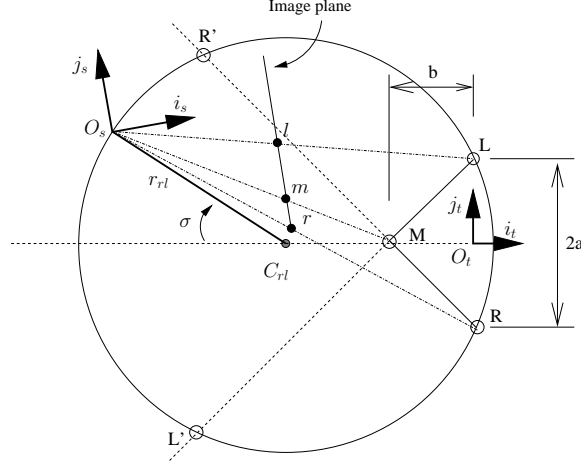


FIG. B.1: Reconstruction de la pose de la caméra

et le rayon r_{rl} du cercle est donné par

$$r_{rl} = \frac{a \sqrt{(f + \frac{lr}{f})^2 + (1 - r)^2}}{1 - r} \quad (\text{B.2})$$

Le problème se réduit à localiser le point O_s sur le segment d'arc $L'R'$. Nous pouvons paramétrer ce point avec σ , l'angle orienté entre les vecteurs $-\vec{i}_t$ et $\vec{C}_{rl}O_s$. Avec cette notation, les coordonnées de O_s dans le repère de la cible sont données par

$$\begin{aligned} x_{ts} &= Cx_{rl} - r_{rl} \cos \sigma \\ y_{ts} &= -r_{rl} \sin \sigma \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Il reste à calculer σ . On a

$$\begin{aligned} -r_{rl} \sin \sigma &= \sin(\alpha_{lm} + \widehat{O_sLM} - \arctan(\frac{a}{b})) \|\vec{O_sM}\| \\ &= D_{lm} \sin(\alpha_{lm} + \widehat{O_sLM} - \arctan(\frac{a}{b})) \sin \widehat{O_sLM} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

avec

$$D_{ij} := \frac{\|\vec{IJ}\|}{\sin \alpha_{ij}} \quad (\text{B.5})$$

pour $i, j \in \{l, m, r\}$. Remarquons que la loi des sinus a été utilisée pour dériver la deuxième égalité dans (B.4). Remarquons aussi que les D_{ij} sont complètement déterminés par la géométrie de la cible et les angles α_{ij} . On déduit de la loi des sinus que

$$\sin \widehat{O_sLM} = \frac{D_{mr}}{D_{lm}} \sin \widehat{O_sRM}$$

et on vérifie facilement sur la Fig. B.1 que

$$\widehat{O_sRM} = 2 \arctan(\frac{a}{b}) - \alpha_{lr} - \widehat{O_sLM}$$

Par la combinaison de ces deux égalités, nous obtenons que

$$\widehat{O_sLM} = \arctan \left(D_{mr} \frac{\sin(2 \arctan(\frac{a}{b}) - \alpha_{lr})}{D_{lm} + D_{mr} \cos(2 \arctan(\frac{a}{b}) - \alpha_{lr})} \right) \quad (\text{B.6})$$

On déduit de (B.4) que

$$\sigma = -\arcsin \left(\frac{D_{lm}}{r_{rl}} \left(\sin(\alpha_{lm} + \widehat{O_sLM}) - \arctan(\frac{a}{b}) \sin \widehat{O_sLM} D_{lm} \right) \right) \quad (\text{B.7})$$

Les équations (B.6) et (B.7) fournissent une expression de σ en termes du signal capteur, de la distance focale, et de la géométrie de la cible. Plusieurs approximations $\hat{\sigma}$ des expressions ci-dessus peuvent être dérivées. Il est en fait possible d'obtenir une approximation de σ , sur une base d'arguments très simples, sans avoir à utiliser explicitement (B.7). Dans ce but, remarquons que :

- $\sigma_{max} = \max |\sigma|$ correspond au cas où O_s coïncide avec L' ou R' . Par application du Théorème de l'Angle Inscrit, on peut vérifier que $\sigma_{max} = \widehat{R'LL'} = \widehat{R'RL'}$. D'ailleurs, $\sigma_{max} = \pi - \beta - \alpha_{rl}$ avec $\beta = \widehat{R'ML} = \widehat{L'MR} = \pi - 2 \arctan(a/b)$. Lorsque le rapport de la distance entre les repères de la cible et de référence à la taille de la cible est élevé, α_{rl} est petit à la position de référence, et tend à diminuer avec l'augmentation de la distance entre le robot et la cible, donc $\sigma_{max} \simeq \pi - \beta$.
- par l'hypothèse de restriction sur la localisation de O_s , nous déduisons que $\alpha_{lm}, \alpha_{mr} \in [0, \alpha_{rl}]$. En outre, $\sigma = 0 \implies \alpha_{lm} = \alpha_{mr} = \frac{\alpha_{rl}}{2}$, $\sigma = -\sigma_{max} \implies \alpha_{mr} = 0$, et $\sigma = \sigma_{max} \implies \alpha_{lm} = 0$.
- si la caméra est pointée sur la cible, l'angle $\alpha_m = \arctan(m/f) = 0$, de sorte que, dans un voisinage de cette position, $\alpha_m \simeq m/f$.

Au vu de ces propriétés, nous proposons une approximation $\hat{\sigma}$ de σ de la forme $\hat{\sigma} = \rho \sigma_{max}$, avec $\rho \in [-1, 1]$ telle que $\alpha_{lm} = \alpha_{mr} = \frac{\alpha_{rl}}{2} \implies \rho = 0$, $\alpha_{mr} = 0 \implies \rho = 1$, et $\alpha_{lm} = 0 \implies \rho = -1$. Une possibilité est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= -\frac{\alpha_{lm} - \alpha_{mr}}{\alpha_{lr}} (\pi - \beta) \\ &= 2 \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \frac{\alpha_{mr} - \alpha_{lm}}{\alpha_{lr}} \end{aligned}$$

Une autre possibilité, directement exprimée comme une fonction de $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{r}$ et a/b , est

$$\hat{\sigma} = 2 \arctan\left(\frac{a}{b}\right) \frac{2\mathbf{m} - (\mathbf{l} + \mathbf{r})}{\mathbf{l} - \mathbf{r}} \quad (\text{B.8})$$

Finalement, pour compléter le calcul de pose de la caméra, nous avons besoin de calculer l'angle d'orientation θ_{ts} . Il est facilement obtenu à partir des coordonnées de O_s et des signaux. Par exemple,

$$\begin{aligned} \theta_{ts} &= \arctan\left(\frac{y_{ts}}{x_{ts} + b}\right) - \alpha_m \\ &= \arctan\left(\frac{y_{ts}}{x_{ts} + b}\right) - \arctan\left(\frac{\mathbf{m}}{f}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Annexe C

Relations dans les groupes de Lie

Dans cet annexe, nous présentons le détail de calcul de quelques résultats classiques de la théorie des groupes de Lie (voir par exemple (Warner, 1983; Spivak, 1999) pour plus de détails et des résultats complémentaires) et quelques relations utiles pour le développement de notre travail. Les relations développées dans cette annexe sont établies de façon intrinsèque (sauf mention contraire), i.e. elles sont indépendantes du système de coordonnées considéré.

Soit un groupe de Lie G avec une opération de groupe $(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$ régulière et l'application inverse $z \mapsto z^{-1}$ aussi régulière. L'élément $z^{-1} \in G$ est tel que $z^{-1} z = z z^{-1} = e$, avec e l'élément neutre du groupe, i.e. $\forall z \in G, z e = e z = z$. L'opération de translation à gauche (resp. à droite) est notée $l_z : G \rightarrow G$ (resp. $r_z : G \rightarrow G$) définie par $l_z(\sigma) = z\sigma$ (resp. $r_z(\sigma) = \sigma z$).

C.1 Équivalences dans les groupes de Lie

1. Par définition $\text{Ad}(z) = dI_z(e)$ avec $I_z : G \rightarrow G$ la bijection définie par $I_z(\sigma) = z\sigma z^{-1}$, qui peut s'écrire comme

$$I_z(\sigma) = l_z(r_{z^{-1}}(\sigma)) = r_{z^{-1}}(l_z(\sigma))$$

d'où

$$dI_z(\sigma) = dl_z(r_{z^{-1}}(\sigma)) dr_{z^{-1}}(\sigma) = dr_{z^{-1}}(l_z(\sigma)) dl_z(\sigma)$$

donc

$$\text{Ad}(z) = dl_z(z^{-1}) dr_{z^{-1}}(e) = dr_{z^{-1}}(z) dl_z(e) \quad (\text{C.1})$$

Dans un système de coordonnées z (avec un abus de notation évident) nous avons

$$\text{Ad}_z(z) = dl_z^z(z^{-1}) dr_{z^{-1}}^z(e) = dr_{z^{-1}}^z(z) dl_z^z(e) \quad (\text{C.2})$$

2. On a aussi $\text{Ad}(pq) = dI_{pq}(e)$ avec $I_{pq}(z) = pqz(pq)^{-1} = I_p(I_q(z))$. Par dérivation de cette dernière relation

$$dI_{pq}(z) = dI_p(I_q(z))dI_q(z)$$

donc

$$dI_{pq}(e) = dI_p(I_q(e))dI_q(e)$$

$$\text{Ad}(pq) = \text{Ad}(p)\text{Ad}(q) \quad (\text{C.3})$$

Si $p = q^{-1}$ on a $\text{Ad}(e) = \text{Ad}(q^{-1})\text{Ad}(q) = Id$ d'où

$$\text{Ad}(q^{-1}) = [\text{Ad}(q)]^{-1} \quad (\text{C.4})$$

3. Par dérivation de $l_{pq}(z) = l_p(l_q(z))$

$$\begin{aligned} dl_{pq}(z) &= dl_p(l_q(z))dl_q(z) \\ &= dl_p(qz)dl_q(z) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

4. Par dérivation de $r_{qp}(z) = r_p(r_q(z))$

$$\begin{aligned} dr_{qp}(z) &= dr_p(r_q(z))dr_q(z) \\ &= dr_p(zq)dr_q(z) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

5. Par dérivation de $l_z(l_{z^{-1}}(p)) = p$

$$dl_z(l_{z^{-1}}(p))dl_{z^{-1}}(p) = Id$$

d'où

$$\begin{aligned} [dl_z(l_{z^{-1}}(p))]^{-1} &= dl_{z^{-1}}(p) \\ [dl_z(z^{-1}p)]^{-1} &= dl_{z^{-1}}(p) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

6. Par dérivation de $r_{z^{-1}}(r_z(p)) = p$

$$dr_{z^{-1}}(r_z(p))dr_z(p) = Id$$

d'où

$$\begin{aligned} dr_{z^{-1}}(r_z(p)) &= [dr_z(p)]^{-1} \\ dr_{z^{-1}}(pz) &= [dr_z(p)]^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

C.2 Relations cinématiques sur les groupes de Lie

Tout au long de cette section nous considérons des systèmes sur un groupe

$$\dot{z}_j = \sum_i Z_i(z_j)v_j = Z(z_j)v_j$$

i.e. avec Z_i des champs de commande invariants à gauche par rapport à l'opération de groupe et $Z(\cdot)$ la matrice dont les vecteurs colonnes correspondent aux champs Z_i .

1. Par dérivation de $zz^{-1} = e$ nous déduisons

$$dl_z(z^{-1})\dot{z}^{-1} = -dr_{z^{-1}}(z)\dot{z}$$

d'où

$$\dot{z}^{-1} = -[dl_z(z^{-1})]^{-1}dr_{z^{-1}}(z)dl_z(e)Z(e)v$$

en utilisant (C.1) et après simplification des termes

$$\dot{z}^{-1} = -dr_{z^{-1}}(e)Z(e)v \quad (\text{C.9})$$

2. Posons $z = z_1^{-1}z_2$. La dérivée de z par rapport au temps avec l'utilisation de la propriété d'invariance à gauche des systèmes considérés et les relations (C.6), (C.7) et (C.9) donne :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \overline{\dot{z}_1^{-1}z_2} = dl_{z_1^{-1}}(z_2)\dot{z}_2 + dr_{z_2}(z_1^{-1})\dot{z}_1^{-1} \\ &= dl_{z_1^{-1}}(z_2)Z(z_2)v_1 - dr_{z_2}(z_1^{-1})dr_{z_1^{-1}}(e)Z(e)v_2 \\ &= Z(z_1^{-1}z_2)v_1 - [dl_{z_2^{-1}z_1}(z_1^{-1}z_2)]^{-1}dl_{z_2^{-1}z_1}(z_1^{-1}z_2)dr_{z_1^{-1}z_2}(e)Z(e)v_2 \\ &= Z(z_1^{-1}z_2)v_1 - dl_{z_1^{-1}z_2}(e)\text{Ad}(z_1^{-1}z_2)Z(e)v_2 \\ &= Z(z_1^{-1}z_2)v_1 - dl_{z_1^{-1}z_2}(e)Z(e)\text{Ad}^Z(z_1^{-1}z_2)v_2 \\ &= Z(z_1^{-1}z_2)(v_1 - \text{Ad}^Z(z_1^{-1}z_2)v_2) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

3. Posons $z = z_1z_2^{-1}$. La dérivée de z par rapport au temps donne :

$$\dot{z} = \overline{\dot{z}_1z_2^{-1}} = dl_{z_1}(z_2^{-1})\dot{z}_2^{-1} + dr_{z_2^{-1}}(z_1)\dot{z}_1 \quad (\text{C.11})$$

Développons d'abord le premier terme à droite de l'égalité ci-dessus. En utilisant (C.9), (C.7), (C.5) (C.1) et l'invariance à gauche des systèmes considérés

$$\begin{aligned} dl_{z_1}(z_2^{-1})\dot{z}_2^{-1} &= -dl_{z_1}(z_2^{-1})dr_{z_2^{-1}}(e)Z(e)v_2 \\ &= -dl_{z_1}(z_2^{-1})dl_{z_2^{-1}}(e)[dl_{z_2^{-1}}(e)]^{-1}dr_{z_2^{-1}}(e)Z(e)v_2 \\ &= -dl_{z_1z_2^{-1}}(e)dl_{z_2}(z_2^{-1})dr_{z_2^{-1}}(e)Z(e)v_2 \\ &= -dl_{z_1z_2^{-1}}(e)\text{Ad}(z_2)Z(e)v_2 \\ &= -dl_{z_1z_2^{-1}}(e)Z(e)\text{Ad}^Z(z_2)v_2 \\ &= -Z(z_1z_2^{-1})\text{Ad}^Z(z_2)v_2 \end{aligned}$$

Développons maintenant le deuxième terme à droite de l'équation (C.11). En utilisant (C.8), (C.6), (C.7), (C.1), (C.3), (C.4) et l'invariance à gauche des systèmes considérés

$$\begin{aligned}
dr_{z_2^{-1}}(z_1)\dot{z}_1 &= dr_{z_2^{-1}}(z_1)dl_{z_1}(e)Z(e)v_1 \\
&= dr_{z_2^{-1}}(z_1)dr_{z_1}(e)[dr_{z_1}(e)]^{-1}dl_{z_1}(e)Z(e)v_1 \\
&= [dl_{z_2z_1^{-1}}(z_1z_2^{-1})]^{-1}dl_{z_2z_1^{-1}}(z_1z_2^{-1})dr_{z_1z_2^{-1}}(e)dr_{z_1^{-1}}(z_1)dl_{z_1}(e)Z(e)v_1 \\
&= dl_{z_1z_2^{-1}}(e)\text{Ad}(z_2z_1^{-1})\text{Ad}(z_1)Z(e)v_1 \\
&= dl_{z_1z_2^{-1}}(e)\text{Ad}(z_2)Z(e)v_1 \\
&= dl_{z_1z_2^{-1}}(e)Z(e)\text{Ad}^Z(z_2)v_1 \\
&= Z(z_1z_2^{-1})\text{Ad}^Z(z_2)v_1
\end{aligned}$$

Donc finalement

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= -Z(z_1z_2^{-1})\text{Ad}^Z(z_2)v_2 + Z(z_1z_2^{-1})\text{Ad}^Z(z_2)v_1 \\
&= Z(z_1z_2^{-1})\text{Ad}^Z(z_2)(v_1 - v_2)
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Bibliographie

- ANSAR, A. et DANILIDIS, K. (2002). « Linear pose estimation from points or lines ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(5).
- ARTUS, G. (2005). « *Application de l'approche par fonctions transverses à la commande des véhicules non-holonomes manoeuvrants* ». Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France.
- ARTUS, G., MORIN, P., et SAMSON, C. (2004). « Control of a maneuvering mobile robot by the transverse function approach : control design and simulation results ». Rapport technique 5155, INRIA.
- BENNANI, M. K. et ROUCHON, P. (1995). « Robust stabilization of flat and chained systems ». Dans *European Control Conference (ECC)*, pages 2642–2646.
- BERNSTEIN, D. (2005). *Matrix mathematics*. Princeton University Press.
- BLOCH, A., KRISHNAPRASAD, P., MARSDEN, J., et MURRAY, R. (1996). « Nonholonomic mechanical systems with symmetry ». *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 136 :21–99.
- BROCKETT, R. W. (1983). Asymptotic stability and feedback stabilization. Dans *Differential Geometric Control Theory*. R. S. Millman, R. W. Brockett and H. J. Sussmann, Eds., Boston, MA :Birkaser.
- CAMPION, G., d'Andrea NOVEL, B., et BASTIN, G. (1991). « Modelling and state feedback control of nonholonomic mechanical systems ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 1184–1189.
- CHAUMETTE, F. (1990). « *La relation vision-commande : théorie et application à des tâches robotiques* ». Thèse de Doctorat, Université de Rennes I, France.
- CHAUMETTE, F. (1998). « *The Confluence of Vision and Control* », Chapitre Potential problems of stability and convergence in image-based and position-based visual servoing, pages 66–78. Numéro 237 dans LNCIS. Springer-Verlag.
- CHEN, C.-T. (1984). « *Linear system theory and design* », Chapitre Controllability of linear dynamical equations. Oxford University Press.
- CHOW, W. L. (1939). « Uber systeme von linearen partiellen differential-gleichungen erster ordnung ». *Math. Ann.*, 117 :98–105.

- CORON, J.-M. (1992). « Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift ». *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 5 :295–312.
- CORON, J.-M. (1994). « Linearized control systems and applications to smooth stabilization ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 32 :358–386.
- CORON, J.-M. et d'Andréa NOVEL, B. (1992). « Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems ». Dans *IFAC Nonlinear Control Systems Design Symp. (NOLCOS)*, pages 649–654.
- D. DEMENTHON, L. D. (1995). « Model-based object pose in 25 lines of code ». *International Journal of Computer Vision*, 15(1-2) :123–141.
- DAS, A., FIERRO, R., KUMAR, V., SOUTHALL, B., SPLETZER, J., et TAYLOR, C. (2001). « Real-time vision-based control of a nonholonomic mobile robot ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*.
- ESPIAU, B., CHAUMETTE, F., et RIVES, P. (1992). « A New Approach to Visual Servoing in Robotics ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(3) :313–326.
- FANG, Y., DIXON, W., DAWSON, A. D., et CHAWDA, P. (2005). « Homography-Based Visual Servo Regulation of Mobile Robots ». *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics*, 35(5) :1041–1050.
- FAUGERAS, O. (1993). *Three-dimensional computer vision : a geometric viewpoint*. MIT Press.
- FILIPPOV, A. (1964). « Differential equations with discontinuous right-hand side ». *Amer. Math. Soc. Trans. Series 2*, 42 :199–231.
- FLIESS, M., LÉVINE, J., MARTIN, P., et ROUCHON, P. (1995). « Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples ». *International Journal of Control*, 61 :1327–1361.
- GRIZZLE, J. et MARCUS, S. (1985). « The structure of nonlinear control systems possessing symmetries ». *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-30(3) :248–258.
- GURVITS, L. et LI, Z. (1992). « *Nonholonomic motion planning* », Chapitre Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning. Kluwer.
- ISIDORI, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Springer Verlag.
- KANAYAMA, Y., KIMURA, Y., MIYAZAKI, F., et NOGUCHI, T. (1990). « A stable tracking control method for an autonomous mobile robot ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 384–389.
- LAUMOND, J.-P. (2001). *La robotique mobile*. HERMES Science Publications.
- LIZÁRRAGA, D., MORIN, P., et SAMSON, C. (1999). « Non-robustness of continuous homogeneous stabilizers for affine control systems ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 855–860.
- LIZÁRRAGA, D. A. (2003). « Obstructions to the Existence of Universal Stabilizers for Smooth Control Systems ». *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16 :255–277.

- MAINI, M., MORIN, P., POMET, J.-B., et SAMSON, C. (1999). « On the robust stabilization of chained systems by continuous feedback ». Dans *IEEE Conf. on Decision and Control (CDC)*, pages 3472–3477.
- MALIS, E. (1998). « *Contributions à la modélisation et à la commande en asservissement visuel* ». Thèse de Doctorat, Université de Rennes, France.
- MALIS, E. et CHAUMETTE, F. (2002). « Theoretical improvements in the stability analysis of a new class of model-free visual servoing methods ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 18(2) :176–186.
- MALIS, E., CHAUMETTE, F., et BOUDET, S. (1999). « 2 1/2 D Visual Servoing ». *IEEE Transaction on Robotics and Automation*, 15(2) :234–246.
- MAYA, M., MORIN, P., et SAMSON, C. (2006a). « Control of a Nonholonomic Mobile Robot Via Sensor-based Target Tracking and Pose Estimation ». pages 5612–5618.
- MAYA, M., MORIN, P., et SAMSON, C. (2006b). « Sensor-based control of nonholonomic mobile robots ». Rapport technique RR-5944, INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.
- M'CLOSKEY, R. T. (1994). « *Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems* ». Thèse de Doctorat, California Institute of Technology, USA.
- M'CLOSKEY, R. T. et MURRAY, R. M. (1997). « Exponential Stabilization of Driftless Nonlinear Control Systems Using Homogeneous Feedback ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(5) :614–628.
- MORIN, P. (1996). « *Sur la stabilisation par retour d'état instationnaire* ». Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- MORIN, P. (2004). « Stabilisation de systèmes non linéaires critiques et application à la commande de véhicules ». Habilitation à diriger des recherches, Université de Nice-Sophia Antipolis, France.
- MORIN, P., POMET, J.-B., et SAMSON, C. (1999). « Design of homogeneous time-varying stabilizing control laws for driftless controllable systems via oscillatory approximation of lie brackets in closed-loop ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38 :22–49.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (1999). « Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics ». *Control, Optimization & Calculus of Variations*, 4 :1–36.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2001). Commande. Dans LAUMOND, J.-P., éditeur, *La robotique mobile*. Hermes.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2003). « Practical Stabilization of Driftless Systems on Lie Groups : The Transverse Function Approach ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(9) :1496–1508.
- MORIN, P. et SAMSON, C. (2004a). « Practical and asymptotic stabilization of chained systems by the transverse function control approach ». *SIAM Journal on Control and Optimization*, 43(1) :32–57.

- MORIN, P. et SAMSON, C. (2004b). « Trajectory tracking for non-holonomic vehicles : overview and case study ». Dans *4th Inter. Workshop on Robot Motion Control (RoMoCo)*, pages 139–153.
- MURRAY, R. M. et SASTRY, S. S. (1993). « Nonholonomic Motion Planning : Steering Using Sinusoids ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(5) :700–716.
- NIJMEIJER, H. et Van der SCHAFT, A. (1991). *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer Verlag.
- PISSARD-GIBOLLET, R. et RIVES, P. (1995). « Applying Visual Servoing Techniques to Control a Mobile Hand-Eye System ». Dans *IEEE Intl. Conf. on Robotics and Automation*.
- POMET, J.-B. (1992). « Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift ». *Systems & Control Letters*, 18 :467–473.
- POMET, J.-B. et SAMSON, C. (1994). « Exponential stabilization of nonholonomic systems in power form ». Dans *IFAC Symp. on Robust Control Design*, pages 447–452.
- ROSENHAHN, B. (2003). « *Pose Estimation Revisited* ». Thèse de Doctorat, Institut für Informatik und Praktische Mathematik der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, Germany.
- ROSIER, L. (1992). « Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field ». *Systems & Control Letters*, 19 :467–473.
- SAFAEE-RAD, R. et TCHOUKANOV, I. (1992). « Three-dimensional location estimation of circular features for machine vision ». *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8(5).
- SAMSON, C. (1990). « Velocity and torque feedback control of a nonholonomic cart ». Dans *Int. Workshop in Adaptive and Nonlinear Control : Issues in Robotics*. Also in LNCIS, Vol.162, Springer Verlag, 1990.
- SAMSON, C. (1995). « Control of chained systems : application to path following and time-varying point-stabilization ». *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40 :64–77.
- SAMSON, C. et AIT-ABDERRAHIM, K. (1991). « Feedback control of a nonholonomic wheeled cart in cartesian space ». Dans *IEEE Conf. on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 1136–1141.
- SAMSON, C., ESPIAU, B., et BORGNE, M. L. (1990). *Robot Control : the Task Function Approach*. Oxford University Press.
- SONTAG, E. D. (1987). « Controllability and linearized regulation ». Dans *IEEE Trans. on Automatic Control*, volume 32, pages 877–888.
- SONTAG, E. D. (1992). « Universal nonsingular controls ». *Systems & Control Letters*, 19 :221–224.
- SPIVAK, M. (1999). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. I*. Publish or Perish, Inc.

- SUGIHARA, K. (1988). « Some location problems for robot navigation using a single camera ». *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 42(1) :112–129.
- TEEL, A., MURRAY, R., et WALSH, G. (1995). « Nonholonomic control systems : from steering to stabilization with sinusoids ». *International Journal of Control*, 62 :849–870. Also in Proc. of the IEEE CDC, pp. 1603–1609, 1992.
- TSAKIRIS, D. (1999). « Nonholonomic Robot Stabilization by Vision-based Time-varying Controls ». Dans *Proc. of the First Nonlinear Control Network Pedagogical School*, pp. 381-398, Eds. K. Kyriakopoulos and J. Tsiniias.
- TSAKIRIS, D., KAPPELLOS, K., SAMSON, C., RIVES, P., et BORRELLY, J. (1997a). « Experiments in real-time vision-based point stabilization of a nonholonomic mobile manipulator ». Dans *Proceedings of the Fifth International Symposium on Experimental Robotics (ISER'97)*, Spain.
- TSAKIRIS, D., RIVES, P., et SAMSON, C. (1997b). « Applying Visual Servoing Techniques to Control Nonholonomic Mobile Robots ». Dans *Workshop on "New Trends in Image-based Robot Servoing"*, *International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS'97)*, France.
- TSAKIRIS, D., SAMSON, C., et RIVES, P. (1996). « Vision-Based Time-Varying Mobile Robot Control ». Dans *Final European Robotics Network (ERNET) Workshop*, Germany.
- WARNER, F. (1983). *Foundations of differential manifolds and Lie groups*. Springer Verlag.

COMMANDE RÉFÉRENCÉE CAPTEUR DES ROBOTS NON HOLONOMES

Ce travail de thèse concerne la synthèse de commandes référencées capteur pour les robots non holonomes, dans le cadre de l'approche par fonctions transverses, ainsi que l'étude de la robustesse de ces lois de commande. La commande de robots non holonomes a été très étudiée ces quinze dernières années. Cependant, lorsque l'on souhaite stabiliser la pose complète du robot, la synthèse de lois de commande robustes vis-à-vis d'erreurs d'estimation de l'état du robot (qui dans la pratique découlent typiquement d'erreurs sur les modèles des capteurs) reste un problème ouvert. La problématique principale de cette thèse se situe à ce niveau. Les résultats développés dans cette thèse portent essentiellement sur deux aspects. Le premier concerne la façon d'utiliser les signaux capteurs pour la synthèse de lois de commande. Plusieurs méthodes de synthèse de commande sont proposées dans ce travail, en particulier, par analogie avec la commande des robots manipulateurs, nous proposons une synthèse directe dans l'espace des signaux capteurs. La deuxième partie de ce travail, plus fondamentale, porte sur l'analyse et l'évaluation des propriétés de robustesse des schémas de commande vis-à-vis d'incertitudes sur les modèles de capteurs. Des résultats théoriques de stabilité sont établis, puis validés et complétés par des simulations ainsi que par des résultats expérimentaux.

Mots-clés : commande référencée capteur, robot non holonome, robot mobile, robustesse, fonction transverse, stabilisation pratique, suivi de cible, expérimentation.

SENSOR-BASED CONTROL OF NONHOLONOMIC ROBOTS

This thesis concerns the design of sensor-based control laws for nonholonomic robots, based on the transverse function control approach, and the robustness analysis of these control laws. The control of nonholonomic robots has been a very active research field for the last fifteen years. Even so, when one wishes to stabilize the full robot pose, the robustness of control laws with respect to state estimation errors (which typically arise in practice due to sensor model errors) remains an open problem. The main obstacles to this work come from this problem. The results obtained in this work can be classified into two main contributions. The first one concerns the obtention of methodologies for synthesizing control laws from sensor signals. Several methods are proposed and in particular we devise a control scheme directly in the signal space by analogy with manipulator control techniques. The second and more fundamental part of this work concerns the analysis of the robustness of the proposed control schemes with respect to sensor model errors. Theoretical stability results have been obtained and validated by simulations and experiments.

Keywords: sensor-based control, nonholonomic robot, mobile robot, robustness, transverse function, practical stabilization, target tracking, experimentation.

Thèse préparée à l'INRIA Sophia-Antipolis dans le projet ICARE