

Solutions fortes de l'équation de l'énergie

Chérif Amrouche ¹, Macaire Batchi ^{1,2}, Jean Batina ².

1 Laboratoire de Mathématiques Appliquées CNRS UMR 5142

2 Laboratoire de Thermique Energétique et Procédés

Université de Pau et des Pays de l'Adour

Avenue de l'Université 64000 Pau, France

Abstract

In this paper, we give some existence results of strong solutions for the energy equation associated to the Navier-Stokes equations with nonhomogeneous boundary conditions in two dimension.

Mots Clés: Equation de l'énergie, équations Navier-Stokes, fluide incompressible, convection forcée, conditions aux limites non homogènes, température de paroi.

1 Introduction

Le problème thermique est décrit par l'équation de l'énergie avec la convection assurée par la vitesse du fluide du système (2). La température $\theta(\mathbf{x}, t)$ du fluide satisfait le système suivant, dans lequel on suppose qu'il n'y a pas de source extérieure de chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta - a \Delta \theta = 0 & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0, T[, \\ \theta = \theta_\infty & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \theta = \theta_p & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta(0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1)$$

avec $a > 0$, $T > 0$, θ_∞ , θ_p réels donnés et θ_0 donnée. En outre, on a le champ de vitesses \mathbf{v} solution des équations de Navier-Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla p = 0 & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{v} = \mathbf{g} & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times]0, T[, \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2)$$

où \mathbf{g} , \mathbf{v}_0 et $T > 0$ sont donnés. On suppose que :

$$\operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3)$$

et

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T. \quad (4)$$

On suppose ici que Ω est un ouvert borné de classe $C^{1,1}$. On se ramène aux variables adimensionnelles où l'on pose pour simplifier :

$$\theta^* = \frac{\theta - \theta_\infty}{\theta_p - \theta_\infty}.$$

De telle sorte que le système (1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta^*}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta^* - a \Delta \theta^* = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \theta^* = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \theta^* = 1 & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[, \\ \frac{\partial \theta^*}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta^*(0) = \theta_0^* & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (5)$$

avec $\theta_0^* = \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{\theta_p - \theta_\infty}$.

Pour étudier le problème (5), on se ramène à des conditions aux limites homogènes en posant

$$\tilde{\theta} = \theta^* - \theta_s$$

où θ_s représente la fonction de température à la paroi et vérifie

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \theta_s = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \theta_s = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \theta_s = 1 & \text{sur } \Gamma_2, \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right. \quad (6)$$

L'ouvert Ω étant régulier, le problème (6) possède une solution unique $\theta_s \in \bigcap_{1 \leq p < 2} W^{1,p}(\Omega)$.

Alors (5) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta - a \Delta \theta = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta_s & \text{dans } Q_T = \Omega \times]0, T[, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times]0, T[, \\ \theta = 0 & \text{sur } \Gamma_2 \times]0, T[, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta(0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (7)$$

avec

$$\theta_0 = \theta_0^* - \theta_s,$$

et où pour simplifier l'écriture, on a noté θ au lieu de $\tilde{\theta}$ dans (7).

Remarque 1.1

Comme $\theta_s \in \bigcap_{1 \leq p < 2} W^{1,p}(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$

alors

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_s \in L^2(0, T; L^p(\Omega)) \quad \forall 1 \leq p < 2. \square$$

Afin de résoudre le problème (7), nous allons utiliser à nouveau la méthode de Galerkin. Pour cela, on définit l'espace $\Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega), \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_2\}$.

Le lemme qui suit permet d'obtenir une base spéciale adaptée.

Lemme 1.2 *Il existe une suite $(\psi_j)_{j \geq 1}$ de Φ et une suite $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ de réels tels que :*

$$\begin{aligned} \lambda_j &> 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = +\infty, \\ \forall \varphi \in \Phi, \quad ((\psi_j, \varphi)) &= \lambda_j (\psi_j | \varphi), \\ (\psi_j | \psi_k) &= \delta_{jk}, \quad ((\psi_j, \varphi)) = \lambda_j \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour $f \in L^2(\Omega)$, soit $\psi \in H^2(\Omega)$ l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta \psi = f & \text{dans } \Omega, \\ \psi = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

L'opérateur \wedge :

$$\begin{aligned} f &\longmapsto \psi && \text{linéaire et continue,} \\ L^2(\Omega) &\longrightarrow H^2(\Omega) \end{aligned}$$

est considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans lui même, \wedge est compact. De plus, il est auto-adjoint :

$$(\wedge f_1, f_2) = (u_1, -\Delta u_2) = \int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla u_2 dx = (f_1, \wedge f_2).$$

Par conséquent, $L^2(\Omega)$ possède une base hilbertienne formée de vecteurs propres de \wedge

$$\wedge \psi_j = \mu_j \psi_j, \quad \mu_j \in \mathbb{R}, \quad \mu_j \longrightarrow 0 \text{ quand } j \longrightarrow \infty$$

On a donc

$$(\psi_i | \psi_j) = \delta_{ij}$$

et pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$ tel que $\varphi = 0$ sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$, on a :

$$(\wedge \psi_i | \varphi) = \mu_i (\psi_i | \varphi)$$

i.e.

$$\begin{cases} -\Delta\psi_j = \frac{1}{\mu_j}\psi_j & \text{dans } \Omega, \\ \psi_j = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \cup \Gamma_2, \\ \frac{\partial\psi_j}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Notons que

$$(\psi_j | \psi_k) = \lambda_j \delta_{jk} \quad \text{où } \lambda_j = \frac{1}{\mu_j}$$

et que $(\psi_j)_{j \geq 1}$ est une base orthogonale de l'espace Φ .

En particulier pour tout $\varphi \in \Phi$, il existe $\varphi_m \in \langle \psi_1, \dots, \psi_m \rangle$ tel que $\varphi_m \rightarrow \varphi$ dans $H^1(\Omega)$ lorsque $m \rightarrow \infty$. \square

2 Existence de solution

Considérons maintenant le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial\theta}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\theta - a\Delta\theta = h & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \theta = 0 & \text{sur } (\Gamma_0 \cup \Gamma_2) \times]0, T[, \\ \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times]0, T[, \\ \theta(0) = \theta_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

où h et θ_0 donnés.

On se propose de démontrer le résultat suivant

Lemme 2.1 *Si $\theta_0 \in H^1(\Omega)$ et $\theta_0 = 0$ sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_2$ et si $h \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, alors le problème (8) possède une solution unique telle que*

$$\theta \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$$

$$\theta' \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Démonstration. On définit $\theta_m(t)$ une solution approchée du problème (8) par :

$$\theta_m(t) = \sum_{j=1}^m g_{jm}(t) \psi_j$$

De sorte que

$$(\theta'_m(t), \psi_j) + \alpha((\theta_m(t), \psi_j)) + b(\mathbf{v}, \theta_m(t), \psi_j) = (h, \psi_j) \quad (9)$$

avec

$$\begin{cases} \theta_m(0) = \theta_{0m} \in \langle \psi_1, \dots, \psi_m \rangle, \\ \theta_{0m} \rightarrow \theta_0 \\ \theta_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \end{cases} \quad \text{dans } H^1(\Omega) \quad \text{lorsque } m \rightarrow \infty, \quad (10)$$

i) Estimation 1

Multiplions (9) par $g_{jm}(t)$ et sommons sur j de 1 à m :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\theta_m(t)|^2 + \alpha \|\theta_m(t)\|^2 &= (h, \theta_m(t)) \\ &\leq C |h(t)| \|\theta_m(t)\| \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} |\theta_m(t)|^2 + \alpha \|\theta_m(t)\|^2 \leq \frac{1}{\alpha C^2} |h(t)|^2 \quad (11)$$

En intégrant (11) de 0 à s , où $s \in]0, T]$, on obtient

$$|\theta_m(t)|^2 \leq \|\theta_0\|^2 + \frac{1}{\alpha C^2} \|h\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^2,$$

et on déduit que

$$\theta_m \in \text{borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Ensuite, en intégrant de nouveau (11) entre 0 et T , il vient

$$\theta_m \in \text{borné de } L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Finalement, on a :

$$\theta_m \in \text{borné de } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (12)$$

ii) Estimation 2

Multiplions (9) par $\lambda_j g_{jm}(t)$ puis sommons sur j et grâce au choix de la base (ψ_j) définie au lemme 1.2, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + \alpha |\Delta \theta_m(t)|^2 + b(\mathbf{v}, \theta_m(t), \Delta \theta_m(t)) = (h, \Delta \theta_m(t)).$$

D'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + \alpha |\Delta \theta_m(t)|^2 \leq |b(\mathbf{v}, \theta_m(t), \Delta \theta_m(t))| + |(h, \Delta \theta_m(t))|$$

Mais,

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}, \theta_m(t), \Delta \theta_m(t))| &\leq \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\theta_m(t)\| |\Delta \theta_m(t)| \\ &\leq \frac{3}{4\alpha} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\theta_m(t)\|^2 + \frac{\alpha}{4} |\Delta \theta_m(t)|^2. \end{aligned}$$

Et par conséquent, on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + \alpha |\Delta \theta_m(t)|^2 \leq \frac{3}{4\alpha} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\theta_m(t)\|^2 + \frac{\alpha}{4} |\Delta \theta_m(t)|^2 + \frac{3}{4\alpha} |h(t)|^2 + \frac{\alpha}{4} |\Delta \theta_m(t)|^2,$$

et

$$\frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 + \alpha |\Delta \theta_m(t)|^2 \leq \frac{3}{2\alpha} \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\theta_m(t)\|^2 + \frac{3}{2\alpha} |h(t)|^2.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, puis l'intégration entre 0 et T , on déduit que

$$\theta_m \in \text{borné de } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (13)$$

iii) *Estimation 3*

Multiplions (9) par $g'_{jm}(t)$ et sommant sur $j = 1$ à m , on a :

$$\begin{aligned} |\theta'_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 &\leq |b(\mathbf{v}(t), \theta_m(t), \theta'_m(t))| + |(h, \theta'_m(t))| \\ &\leq \|\mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \|\theta_m(t)\| |\theta'_m(t)| + |h(t)| |\theta'_m(t)|. \end{aligned}$$

On a donc :

$$|\theta'_m(t)|^2 + \alpha \frac{d}{dt} \|\theta_m(t)\|^2 \leq C \|\mathbf{v}(t)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\theta_m(t)\|^2 + C |h(t)|^2.$$

En intégrant entre 0 et t , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t |\theta'_m(s)|^2 ds + \alpha \|\theta_m(t)\|^2 &\leq C \int_0^t \|\mathbf{v}(s)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\theta_m(s)\|^2 ds \\ &\quad + C \int_0^t |h(s)|^2 ds + \alpha \|\theta_0\|^2. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que :

$$\theta'_m \in \text{borné de } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (14)$$

iv) *Passage à la limite.*

On utilise ici le résultat de compacité suivant (voir Temam [7], Lions [5]) :

Théorème 2.2 *Soit B_0, B, B_1 trois espaces de Banach avec*

$$B_0 \subset B \subset B_1, B_0 \text{ et } B_1 \text{ étant réflexifs}$$

et on suppose que

l'injection de $B_0 \rightarrow B$ est compacte.

Soit

$$W = \left\{ v \in L^{p_0}(0, T; B_0), v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\}$$

avec $1 < p_i < +\infty$, $i = 0, 1$.

Alors l'injection de W dans $L^{p_0}(0, T; B)$ est compacte.

Nous appliquons maintenant ce théorème en posant

$$W = \left\{ \theta \in L^2(0, T; H^2(\Omega)), \theta' = \frac{d\theta}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \right\}$$

L'injection $W \subset L^2(0, T; H^1(\Omega))$ étant compacte, donc il existe une sous-suite de θ_m , encore notée θ_m , telle que lorsque $m \rightarrow \infty$, les convergences suivantes aient lieu :

$$\theta_m \rightarrow \theta, \text{ dans } L^2(0, T; H^2(\Omega)) \text{ faible} \quad (15)$$

$$\theta_m \rightarrow \theta, \text{ dans } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ faible}^* \quad (16)$$

$$\theta_m \rightarrow \theta, \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \text{ fort} \quad (17)$$

$$\theta'_m \rightarrow \theta', \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ faible.} \quad (18)$$

Passons à la limite dans (9), on obtient

$$\forall \psi \in \Phi, \quad (\theta'(t), \psi) + \alpha((\theta(t), \psi)) + b(\mathbf{v}, \theta(t), \psi) = (h, \psi)$$

Par ailleurs, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\theta_m(t) \rightarrow \theta(t) \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible}$$

et en particulier

$$\theta_{0m} = \theta_m(0) \rightarrow \theta(0) \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

Donc $\theta_0 = \theta(0)$. Il est clair finalement que grâce à (15)-(18), on vérifie les conditions aux limites dans (8).

3 Résolution du problème (7)

De la remarque 1.1, on note que $\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_s \in L^2(0, T; L^p(\Omega))$ pour tout $1 \leq p < 2$. Il existe $h_k \in \mathcal{D}(Q_T)$ tel que

$$h_k \rightarrow -\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_s \text{ dans } L^2(0, T; L^p(\Omega)).$$

Il existe donc pour chaque k un unique $\theta_k \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$, $\theta'_k \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ solution de (8) avec second membre h_k et $\theta_k(0) = \theta_0$.

Par ailleurs,

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial t} - \alpha \Delta \theta_k = h_k - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta_k. \quad (19)$$

Il est clair que d'après (12)

$$\theta_k \in L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$$

i.e.

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_s \in \text{borné de } L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

En particulier $\theta_k \in \text{borné de } L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $h_k - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \theta_k \in L^2(0, T; L^p(\Omega))$.

De sorte qu'en utilisant les résultats sur l'équation de la chaleur et la convergence de h_k vers $-\mathbf{v} \cdot \nabla \theta_s$ dans $L^2(0, T; L^p(\Omega))$, on déduit que pour tout $1 \leq p < 2$,

$$\theta_k \in \text{borné de } L^2(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad (20)$$

$$\theta'_k \in \text{borné de } L^2(0, T; L^p(\Omega)). \quad (21)$$

On peut finalement passer à la limite pour montrer que le problème (7) admet une solution unique θ telle que

$$\theta \in L^2(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad (22)$$

$$\theta' \in L^2(0, T; L^p(\Omega)). \quad (23)$$

Alors, on peut énoncer le

Théorème 3.1 Soit $\theta_s \in \bigcap_{1 \leq p < 2} W^{1,p}(\Omega)$, $\theta_0 \in H^1(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$. Alors le problème (7) admet une solution unique θ vérifiant, pour tout $1 \leq p < 2$

$$\theta \in L^2(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad \theta' \in L^2(0, T; L^p(\Omega)).$$

De ce résultat, on déduit le

Corollaire 3.2 Soit $\theta_0 \in H^1(\Omega)$ et $\mathbf{v} \in L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$. Alors le problème (1) admet une solution unique θ vérifiant, pour tout $1 \leq p < 2$

$$\theta \in L^2(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad \theta' \in L^2(0, T; L^p(\Omega)).$$

Remarque 3.3 Si $\mathbf{v} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$, on peut montrer que

$$\theta \in L^2(0, T; W^{2,p}(\Omega)), \quad \theta' \in L^2(0, T; L^p(\Omega)). \square$$

References

- [1] Girault, V., Raviart, P.A., *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*, Springer Series SCM, 1986.
- [2] Kaniel, S. et Shinbrot, M., *A Reproductive Property of the Navier-Stokes Equations*, Arch.Rat.Mech. Analysis, 24, pp.363-369, 1967.
- [3] Ladyzhenskaya, O. A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, N.Y.: Gordon and Breach, 1963.

- [4] Lions, J.L. et Magenes, E., *Problèmes aux limites non homogènes et Applications*, vol.1&2, Paris, Dunod, 1968.
- [5] Lions, J.L., *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Nonlinéaires*, Paris, Dunod, 1969.
- [6] Takeshita, A., *On the reproductive property of the 2-dimensional Navier-Stokes Equations*, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, Sect.IA 15, pp.297-311, 1970.
- [7] Temam, R., *Navier-Stokes Equations. Theory and Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1985.