

UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
U.F.R. M.I.M.  
ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE E.D. 184

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PROVENCE  
*Spécialité : Mathématiques*

par

**Léa BLANC-CENTI**

sous la direction du Pr. Bernard COUPET

*Titre :*

**DISQUES ANALYTIQUES ET PROBLÈMES AU BORD EN  
GÉOMÉTRIES COMPLEXE ET PRESQUE COMPLEXE**

soutenue publiquement le 11 décembre 2006

### JURY

M. Bernard COUPET	Université d'Aix-Marseille I	<i>Directeur</i>
M. Hervé GAUSSIER	Université d'Aix-Marseille I	<i>Examineur</i>
M. Sergey IVACHKOVYCH	Université de Lille I	<i>Rapporteur</i>
M. Jean-Claude SIKORAV	École Normale Supérieure de Lyon	<i>Rapporteur</i>
M. Alexandre SUKHOV	Université de Lille I	<i>Examineur</i>
M. Andrei TELEMAN	Université d'Aix-Marseille I	<i>Examineur</i>



## REMERCIEMENTS

J'avais toujours entendu dire que, dans une thèse, le plus difficile à faire est de loin la page de remerciements. J'ai pourtant savouré le fait de pouvoir, pour une fois, écrire au fil de la plume (ce n'est pas si fréquent lorsque l'on rédige des mathématiques); sans doute ma sincérité y est-elle pour quelque chose.

Mes premiers remerciements vont à Bernard Coupet. Durant ces années, il a encadré ma thèse avec une constante disponibilité, et m'a fait bénéficier de sa grande connaissance de la littérature. Je désire lui exprimer toute ma gratitude pour avoir partagé avec moi son expérience et ses idées, et m'avoir initiée à la recherche mathématique.

Je remercie très chaleureusement Jean-Claude Sikorav pour avoir été rapporteur de ma thèse, et pour l'attention qu'il a apportée à la lecture de ce manuscrit. Ses remarques, ses suggestions et ses critiques m'ont été précieuses.

Je souhaite également adresser mes plus vifs remerciements à Sergey Ivachkovych, qui a accepté de rapporter sur ma thèse malgré des délais un peu serrés.

C'est un très grand plaisir pour moi que Hervé Gaussier soit dans mon jury de thèse. Il a toujours prêté une oreille attentive à mes problèmes, et pris le temps de répondre à mes nombreuses questions. Je l'en remercie sincèrement.

Je tiens également à remercier Alexandre Sukhov et Andrei Teleman de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail en acceptant de faire partie du jury.

Les membres de l'équipe d'analyse et géométrie complexes du LATP m'ont tous accueillie avec bienveillance, à commencer par Karl Oeljeklaus, qui a dirigé mon stage de première année. Merci en particulier à Karim Kellay, Stas Kupin, Joël Merker et Stéphane Rigat pour leurs conseils, ainsi qu'à Florian Bertrand pour nos discussions presque complexes toujours profitables. Enfin, même s'il ne s'est pas encore converti à l'analyse complexe, je suis très reconnaissante envers Franck Boyer pour ses encouragements, son aide amicale et sa manière magistrale de servir le thé.

Ces années de thèse n'auraient sans doute pas été les mêmes sans les amis que j'ai rencontrés au CMI : un très grand merci à Alexandre, Florence B., Florence S., Julie, Muriel, Nicolas B., Nicolas K., Sébastien et Stéphanie pour leur soutien, leurs conseils pratiques, et surtout pour les innombrables joyeux moments passés ensemble. J'ai aussi une pensée pour tous ceux qui m'ont fourni l'occasion de faire une pause-papotage dans les couloirs, parmi lesquels Camille, Clément C., Clément R., Franck, Raphaël, Rémi, Yun... , sans oublier la petite bande des grenoblois!

J'aimerais remercier ici toutes les personnes avec qui j'ai eu l'occasion d'enseigner et qui m'ont fait profiter de leur expérience. Je suis également reconnaissante envers certains

de mes professeurs, notamment Marc Bayart dont le cours de Maths Spé reste pour moi une référence.

Je désire aussi exprimer mes remerciements à Aline Blanc, Sylvie Blanc, Nathalie Bonifay, Norbert Deleutre, Chantal Exbrayat, Gisèle Fiol, Muriel Gouyache, Gérard Henry, Sandrine Ifrah, Hervé Masia, Georges Moutouh, Véronique Munusami, Kaï Poutrain, Julie Raud, Chantal Ravier, Marie-Christine Tort, Sèverine Vincent et Anna Wojciechowska, qui ont toujours résolu avec beaucoup de gentillesse et d'efficacité mes problèmes d'ordre administratif, informatique, reprographique...

Un immense merci à mes parents pour leur confiance en moi, leur soutien et leurs encouragements durant toutes mes années d'étude, et bien sûr pour m'avoir donné le goût des mathématiques !

Et un merci infini à Maxime pour ses compétences en topologie et en informatique, pour sa patience et son amour...

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1	Avant-propos . . . . .	1
0.2	Résultats . . . . .	3
<b>1</b>	<b>Etude des disques holomorphes réguliers</b>	<b>9</b>
1.1	Préliminaires . . . . .	10
1.2	Cas quasi-circulaire . . . . .	12
1.2.1	Les disques réguliers sont les disques linéaires . . . . .	12
1.2.2	Un cas particulier du théorème d'unicité de Cartan . . . . .	16
1.3	Cas non-dégénéré . . . . .	16
1.3.1	Disques réguliers attachés à une hyperquadrique $Q$ . . . . .	17
1.3.2	Disques réguliers attachés à une petite perturbation de $Q$ . . . . .	22
1.3.3	Propriété d'unicité des biholomorphismes . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Préliminaires en géométrie presque complexe</b>	<b>35</b>
2.1	Définitions . . . . .	35
2.1.1	Variétés presque complexes . . . . .	35
2.1.2	Pseudo-holomorphie . . . . .	37
2.2	Domaines strictement $J$ -pseudoconvexes . . . . .	38
2.2.1	Forme de Levi . . . . .	38
2.2.2	Stricte $J$ -pseudoconvexité et $J$ -plurisousharmonicité . . . . .	41
2.3	Deux cas particuliers de structures presque complexes . . . . .	43
2.3.1	Structures modèles, structures modèles simples . . . . .	43
2.3.2	Petites déformations de la structure standard . . . . .	45
<b>3</b>	<b>Estimation au bord d'un disque <math>J</math>-holomorphe</b>	<b>51</b>
3.1	Problèmes de plurisousharmonicité . . . . .	51
3.1.1	Estimation de la forme de Levi pour des fonctions classiques . . . . .	52
3.1.2	Construction de fonctions strictement $J$ -plurisousharmoniques . . . . .	54
3.2	Minoration de la métrique de Kobayashi . . . . .	57
3.2.1	Minoration explicite . . . . .	57
3.2.2	Lemme de localisation . . . . .	60
3.3	Disque attaché à une sous-variété totalement réelle . . . . .	62
3.3.1	Estimation de la norme 1/2-hölderienne . . . . .	62
3.3.2	Estimation des normes hölderiennes . . . . .	65
3.4	Application : régularité sur l'arête d'un wedge . . . . .	68

<b>4</b>	<b>Prolongement au bord d'une application propre</b>	<b>71</b>
4.1	Prolongement $1/2$ -hölderien au bord . . . . .	72
4.1.1	Premières propriétés des applications pseudo-holomorphes propres .	72
4.1.2	Conservation des distances . . . . .	75
4.2	Le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ . . . . .	77
4.2.1	La méthode des dilatations . . . . .	78
4.2.2	Construction et propriétés de la fonction $G$ . . . . .	85
4.2.3	Application à l'étude du comportement au bord . . . . .	90
4.3	Régularité supérieure et estimation au bord . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>93</b>

# Chapitre 0

## Introduction

### 0.1 Avant-propos

Aussi bien en analyse complexe qu'en géométrie de Cauchy-Riemann, la résolution de nombreux problèmes passe par la compréhension du comportement des courbes holomorphes dans les variétés complexes. L'interaction entre la géométrie d'une variété et les propriétés de ces courbes a motivé mon travail : au confluent de l'analyse et de la géométrie, l'étude des disques analytiques, et plus précisément des disques analytiques attachés à une sous-variété, constitue le fil directeur de cette thèse.

Un problème majeur en analyse complexe est de classifier les domaines de  $\mathbb{C}^n$  sous l'action des biholomorphismes. Si  $n = 1$ , le théorème de représentation conforme de Riemann affirme que tout domaine simplement connexe de  $\mathbb{C}$ , distinct de  $\mathbb{C}$ , est biholomorphiquement équivalent au disque unité. Dans le cas multidimensionnel, on sait depuis les travaux de H. Poincaré [52] que ce théorème n'admet pas de généralisation directe. En raison de la rigidité des applications holomorphes de plusieurs variables, l'équivalence biholomorphe entre domaines est très rare, ce qui motive la recherche d'invariants associés à un domaine, ou plus simplement à son bord. S.S. Chern et J.K. Moser [8] associent par exemple de façon unique à toute hypersurface réelle Levi-non-dégénérée une équation "simple" (qui a d'ailleurs inspiré la méthode de dilatation des coordonnées de S. Pinchuk), ainsi qu'une famille d'invariants classifiants purement géométriques.

Les disques analytiques sont des invariants naturels des variétés à bord sous l'action des biholomorphismes, et plus généralement des applications CR. Un *disque analytique* dans une variété (presque) complexe  $M$  (qu'on appellera, selon les cas, disque holomorphe ou disque pseudo-holomorphe) est une fonction  $h$  continue du disque unité fermé  $\bar{\Delta}$  de  $\mathbb{C}$  dans  $M$ , (pseudo-)holomorphe dans  $\Delta$ . On dira que  $h$  est *attaché* à une sous-variété  $E$  si  $h(\partial\Delta) \subset E$ . Lorsque  $E$  est totalement réelle, les disques attachés à  $E$  possèdent de nombreuses propriétés au bord [9, 10, 46, 47, 37, 34], notamment des propriétés de régularité dûes à une variante du principe de réflexion. De façon générale, les propriétés au bord des disques analytiques attachés à une sous-variété apparaissent comme un outil essentiel dans les problèmes de prolongement, mais aussi dans la compréhension de la géométrie locale des variétés presque complexes. L. Lempert [41] a ainsi montré que, dans un domaine  $D$  fortement convexe de  $\mathbb{C}^n$ , les géodésiques pour la métrique de Kobayashi sont exactement

les disques *réguliers*, c'est-à-dire ceux qui se relèvent en un disque analytique attaché à la projectivisation du fibré conormal  $N^*(\partial D)$ . Il y a plusieurs avantages à se restreindre à la famille des disques réguliers. D'une part, la remarque de S. Webster [62] sur le fibré conormal d'une hypersurface non dégénérée montre que le relèvement est alors attaché à une sous-variété totalement réelle; les disques réguliers héritent des propriétés au bord de leur relèvement. D'autre part, sous certaines hypothèses, une hypersurface  $E$  est feuilletée par les bords des disques réguliers qui y sont attachés, ce qui fournit des informations sur  $E$ . Remarquons également que la condition supplémentaire ainsi imposée aux disques est encore préservée par les biholomorphismes.

En associant à une sous-variété  $E$  une paramétrisation des disques réguliers qui y sont attachés, on construit, au moins localement, une représentation de  $E$  sous forme d'une sous-variété circulaire, appelée indicatrice de Kobayashi. L. Lempert a ainsi introduit un analogue multidimensionnel de l'application de Riemann sous la forme d'un homéomorphisme entre un domaine fortement convexe et la boule unité. En codimension supérieure, A. Sukhov et A. Tumanov [58] obtiennent, pour de petites déformations de  $S^3 \times S^3$ , un nouvel invariant : l'indicatrice étendue, canoniquement difféomorphe au fibré conormal. L'application construite commute avec les biholomorphismes, et constitue un analogue partiel de la représentation circulaire de L. Lempert, lié à la structure de contact du fibré conormal. C'est également la méthode employée, en presque complexe, par B. Coupet, H. Gaussier et A. Sukhov [14] pour de petites déformations de la sphère munie de la structure standard : l'existence de suffisamment de disques réguliers dans la boule permet de définir un analogue local de la représentation circulaire de Lempert, muni de propriétés similaires de régularité et d'holomorphicité le long des feuilles, et qui commute avec les biholomorphismes. S. Semmes [55] a, quant à lui, introduit la notion de fonction de Riemann, essentiellement caractérisée par une équation différentielle; sa construction, différente de celle de Lempert, fait néanmoins intervenir les disques extrémaux et des structures symplectiques.

Une deuxième direction, initiée par E. Bishop [5] (voir aussi le papier de C.D. Hill et G. Taiani [30]) consiste à utiliser les disques analytiques pour relier le comportement d'une application définie à l'intérieur d'un domaine  $D$  à son comportement au bord. L'idée est de "remplir"  $D$  par l'intérieur de disques analytiques attachés à  $\partial D$ .

La régularité au bord d'un biholomorphisme (et plus généralement d'une application holomorphe propre) entre deux domaines bornés strictement pseudoconvexes  $D$  et  $D'$  de  $\mathbb{C}^n$  a été largement étudiée, et il existe plusieurs approches pour les théorèmes de prolongement au bord. Si  $n = 1$ , on sait que toute application conforme entre deux domaines bornés de  $\mathbb{C}$ , à bords de classe  $\mathcal{C}^m$  ( $m > 1$ ), est de classe  $\mathcal{C}^{m-0}$  jusqu'au bord. Lorsque  $n \geq 2$ , si  $D$  et  $D'$  sont à bords de classe  $\mathcal{C}^m$  ( $m \geq 2$ ), toute application holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  se prolonge au bord en une application de classe  $\mathcal{C}^{m-1/2}$ . De nombreux auteurs ont contribué à la démonstration de ce théorème. Le premier résultat est dû à G. Henkin [29], et affirme que l'application se prolonge de façon 1/2-hölderienne jusqu'au bord si  $D$  admet une fonction définissante globalement plurisousharmonique et si  $D'$  a un bord de classe  $\mathcal{C}^2$  strictement pseudoconvexe. La démonstration est basée sur des estimées de la métrique de Carathéodory. En 1974, Ch. Fefferman [19] montre que tout biholomorphisme entre deux domaines bornés à bords lisses de  $\mathbb{C}^n$ , strictement pseudoconvexes, se prolonge de façon

lisse au bord. La preuve originelle est basée sur une analyse fine du comportement au bord du noyau de Bergman, et de la géométrie des géodésiques de la métrique de Bergman pour un domaine strictement pseudoconvexe. La preuve a considérablement été simplifiée par S. Bell et E. Ligocka [3], et différentes nouvelles techniques ont été introduites afin d'étendre le résultat à une classe plus large de domaines. Citons également S. Pinchuk [50] et B. Coupet [13] pour la régularité maximale. Pour un tour d'horizon plus détaillé, nous renvoyons au papier de F. Forstnerič [20].

Les disques analytiques permettent de comprendre les phénomènes de prolongement et de régularité au bord des applications pseudo-holomorphes. L. Lempert [41] a ainsi donné une preuve géométrique du théorème de Fefferman lorsque les domaines sont fortement convexes, basée sur sa théorie du comportement au bord des disques stationnaires pour la métrique de Kobayashi ; A. Tumanov [60] en a également donné une preuve utilisant les petits disques extrémaux dans le cas strictement pseudoconvexe.

Les récents progrès en géométrie symplectique, et notamment le travail fondamental de M. Gromov [27], ont renforcé l'intérêt pour l'analyse dans les variétés presque complexes. On sait (A. Newlander et L. Nirenberg, [44]) qu'une structure presque complexe n'est génériquement pas intégrable. La question se pose donc de savoir quels résultats demeurent ; les objets et outils spécifiques au cas intégrable devront pour cela être généralisés. Contrairement aux démonstrations requérant l'emploi du noyau de Bergman, celles utilisant des manipulations sur les disques analytiques se transposent assez naturellement au cas presque complexe. La première question qui se pose est celle de l'existence de disques pseudo-holomorphes dans une variété presque complexe quelconque. Elle a été résolue par A. Nijenhuis et W. Woolf [45], qui, en considérant les applications pseudo-holomorphes comme les solutions d'opérateurs elliptiques non linéaires, ont montré qu'en tout point, dans toute direction, il existe un petit disque pseudo-holomorphe. Le même type d'arguments permet de relier la régularité du disque dans  $\Delta$  à celle de la structure presque complexe, et conduit à des estimations *a priori* (J.-C. Sikorav, [56]). Les estimations obtenues sont liées à la fois à la structure presque complexe et à la géométrie de la variété, comme le montre l'estimation uniforme donnée par L. Lempert dans le cas d'un domaine fortement convexe [41], et qui met en jeu la courbure et le diamètre du domaine.

A l'aide notamment d'estimations sur la "taille" des disques pseudo-holomorphes (plus précisément, d'estimations de la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi), B. Coupet, H. Gaussier et A. Sukhov [15, 22] ont prouvé l'analogie du théorème de Fefferman en presque complexe. L'étude de la régularité du biholomorphisme au bord se ramène en fait à l'étude de la régularité au bord des disques pseudo-holomorphes, c'est-à-dire à un problème de régularité elliptique.

## 0.2 Résultats

### Paramétrisation explicite des disques réguliers

La première partie de ce travail (**chapitre 1**) vise à donner une paramétrisation explicite des disques réguliers attachés à certaines hypersurfaces réelles. La condition supplémentaire ainsi imposée aux disques permet de restreindre notre étude à une famille de disques qui sera (localement, et sous certaines hypothèses) en bijection via l'applica-

tion  $h \mapsto h(1)$  avec la sous-variété à laquelle ils sont attachés, sans perdre la propriété d'invariance par biholomorphisme.

Un calcul simple montre que les disques réguliers centrés en 0 attachés à la sphère sont exactement les disques linéaires. On cherche tout d'abord à généraliser ce résultat, en considérant le cas d'une hypersurface réelle  $M^\rho \subset \mathbb{C}^{n+1}$  définie dans une boule centrée en 0 par une équation de la forme  $0 = \rho(z) = |z_0|^2 + \phi(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$ , où  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose de plus que  $M^\rho$  est fortement convexe, et n'intersecte pas le plan complexe  $\{z_0 = 0\}$  : une telle hypersurface sera dite *quasi-circulaire*. Grâce à la forme particulière de la fonction  $\rho$ , l'hypothèse pour un disque d'être régulier se traduit par un système d'équations différentielles ordinaires en les modules des composantes du disque sur  $\partial\Delta$ . La condition de forte convexité permet de résoudre le système du premier ordre ainsi obtenu, et donne :

**Théorème 0.1** *Soit  $M^\rho \subset \mathbb{C}^{n+1}$  une hypersurface quasi-circulaire : les disques réguliers attachés à  $M^\rho$  et centrés en 0 sont exactement les disques linéaires  $\zeta \mapsto \lambda\zeta$ ,  $\lambda \in M^\rho$ .*

La propriété d'invariance par biholomorphisme entraîne alors :

**Corollaire 0.2** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines de  $\mathbb{C}^n$  contenant 0, dont les bords sont des hypersurfaces quasi-circulaires. Tout biholomorphisme  $F : D \rightarrow D'$ , fixant 0 et de classe  $\mathcal{C}^1$  jusqu'au bord, est linéaire.*

Remarquons que le théorème 0.1 donne deux paramétrisations des disques réguliers  $h$  attachés à  $M^\rho$  centrés en 0, via  $h \mapsto h(1)$  et  $h \mapsto h'(0)$ , et donc un difféomorphisme entre  $M^\rho$  et son indicatrice de Kobayashi  $\{h'(0)\}$ . On peut se demander si cette représentation reste valable lorsque l'on ne suppose plus la stricte convexité de  $M$ , mais seulement son caractère non dégénéré. Le problème plus général de savoir quand une famille de disques forme une variété banachique apparaît dans de nombreux papiers. Nous suivons la démarche de [14] (voir aussi [6] et [58]), qui montrent que les disques réguliers forment un feuilletage (singulier à l'origine) de la boule, et en déduisent un analogue local de la représentation circulaire de L. Lempert. La méthode consiste à utiliser le critère donné par J. Globevnik [24] (voir aussi [46]) : étant donné une sous-variété  $E$  et un disque  $\hat{h}^0$  attaché à  $E$ , et sous l'hypothèse que certains entiers (les indices partiels) dépendant de  $E$  et  $\hat{h}^0$  soient positifs, les disques analytiques proches de  $\hat{h}^0$  attachés à une sous-variété proche de  $E$  forment une famille à  $\kappa$  paramètres, où  $\kappa$  est l'indice de Maslov de  $E$  le long de  $\hat{h}^0$ .

Puisque tout disque régulier  $h^0$  attaché à une hypersurface  $Q$  se relève en un disque analytique  $\hat{h}^0$  attaché au projectivisé  $\mathbb{P}(N^*Q)$  du fibré cornormal de  $Q$ , on cherche à appliquer la condition de Globevnik à  $E = \mathbb{P}(N^*Q)$  et  $\hat{h}^0$ . Le calcul des indices partiels et de l'indice de Maslov le long de  $\hat{h}^0$  nécessite de réduire une certaine matrice  $H(\hat{h}^0(\zeta))$  sous la forme  $\overline{P(\zeta)} \text{diag}(\zeta^{\kappa_0}, \dots, \zeta^{\kappa_{2n}}) Q(\zeta)$  sur  $\partial\Delta$ , où  $H$  dépend des dérivées à l'ordre 1 et 2 des équations de  $E$ , et où  $P$  et  $Q$  se prolongent holomorphiquement à  $\Delta$  en des matrices inversibles. La difficulté pour vérifier les hypothèses du critère de Globevnik provenant essentiellement de la forme des équations de  $E$ , on choisit une hypersurface de base  $Q$  définie de façon "simple" : l'hyperquadrique  $\{0 = r(z) = \text{Re } z_0 - {}^t\bar{z}A'z\}$ , où  $A$  est une matrice hermitienne non dégénérée de taille  $n$ . Fixons-nous un point  $p = (p_0, 0, \dots, 0) \notin Q$ ,

tel que

$$\operatorname{Re} p_0 > 0 \text{ (resp. } \operatorname{Re} p_0 < 0 \text{) si } A \text{ est définie positive (resp. définie négative) : } \quad (1)$$

il existe alors un disque régulier  $h^0$  attaché à  $Q$  et centré en  $p$ . Précisément, on montre :

**Théorème 0.3** *Soit  $M = \{\rho = 0\}$  une hypersurface proche (pour la topologie  $\mathcal{C}^3$ ) de  $Q$ . L'ensemble des disques réguliers non constants attachés  $M$  et proches de  $h^0$  forme une famille à  $4n + 3$  paramètres. Si de plus on exige que les disques  $h$  soient centrés en  $p$ , les applications  $h \mapsto h(1)$  et  $h \mapsto h'(0)$  constituent des difféomorphismes locaux sur leur image.*

Autrement dit, une hypersurface assez proche d'une hyperquadrique est représentée localement de façon circulaire par son indicatrice  $\{h'(0)\}$ . En corollaire, on récupère une propriété locale d'unicité pour les biholomorphismes au voisinage de telles hypersurfaces : si  $p = (p_0, 0) \notin Q$  et  $F(p) = (p'_0, 0) \notin Q'$  vérifient la condition (1), la relation de commutation suivante assure que  $F$  est déterminé par sa différentielle en  $p$  :

$$\begin{array}{ccc} F : (\Omega, M) & \longrightarrow & (\Omega', M') \\ h(1) & \mapsto & F \circ h(1) \\ \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \\ h'(0) & \longrightarrow & dF_p(h'(0)). \end{array}$$

### Disques analytiques en géométrie presque complexe

On se place désormais dans une variété munie d'une structure presque complexe, c'est-à-dire une variété réelle  $M$  munie d'une section  $J$  de classe  $\mathcal{C}^r$  de  $\operatorname{End}(TM)$  vérifiant  $J^2 = -id_{TM}$  (avec  $r \geq 1$ ). Pour qu'une telle structure sur  $M$  soit bien définie, il faut que  $M$  soit de classe au moins  $\mathcal{C}^{r+1}$  : ainsi, la contrainte de régularité imposée aux applications pseudo-holomorphes viendra de la régularité de  $J$ , et non de celle de  $M$ . On peut donc supposer sans se montrer restrictif que les variétés considérées sont lisses.

Le but est ici d'étendre le théorème de Fefferman aux applications pseudo-holomorphes propres entre domaines strictement pseudoconvexes. On cherche également à préciser le lien entre la régularité hölderienne de l'application au bord et celle des structures presque complexes, et à donner des estimations au bord pour les normes hölderiennes. Nous suivons la démarche de B. Coupet, H. Gaussier et A. Sukhov [15, 22], qui consiste à déduire la régularité au bord de celle connue pour une famille de disques attachés à une sous-variété totalement réelle.

L'un des outils est la métrique de Kobayashi : invariante par rapport aux biholomorphismes, décroissante sous l'action des applications holomorphes, elle intervient dans l'étude des propriétés au bord. Les premières estimations connues sont dues à I. Graham [25] (voir [43] pour des estimations plus précises) ; des estimées similaires en presque complexe ont été obtenues dans [21] à partir de la construction de fonctions plurisousharmoniques. De ces estimées découlent des propriétés au bord pour les disques. L'autre ingrédient essentiel est la méthode de dilatation des coordonnées de S. Pinchuk (voir [50]), dont le principe est de ramener différents problèmes du cas strictement pseudoconvexe

au cas particulier de la (réalisation non bornée de la) boule. Il s'agit de faire exploser les domaines source et/ou but de façon à créer une application limite entre domaines modèles simples, en les dilatant de façon anisotrope. Les premières applications de cette méthode concernent la preuve du caractère localement biholomorphe d'une application propre entre domaines strictement pseudoconvexes [49]. La méthode des dilatations intervient également dans l'étude du comportement de la métrique de Kobayashi ou la preuve du théorème de Wong-Rosay. En presque complexe, les transformations ainsi opérées sur les domaines n'ont aucune raison d'être pseudo-holomorphes, d'où la nécessité de dilater simultanément les structures presque complexes : les structures limites sont des structures modèles, pas nécessairement intégrables. Notons que, uniquement dans le cas  $n = 2$ , on peut normaliser les structures de départ de façon à obtenir à la limite la structure standard.

Le **chapitre 2** rassemble des rappels sur les variétés presque complexes, et établit des lemmes techniques qui interviendront dans les chapitres suivants. Toutes les notions liées à l'holomorphie se transposent au cas presque complexe, notamment la forme de Levi, ce qui permet d'étendre les définitions de domaines strictement pseudoconvexes et de fonctions plurisousharmoniques. Les minorations obtenues sur la forme de Levi serviront par la suite à assurer le caractère plurisousharmonique de certaines fonctions. Il s'agit par ailleurs d'étudier deux cas particuliers de structures presque complexes.

Une *structure modèle* sur un ouvert de  $\mathbb{C}_{z_0} \times \mathbb{C}_{z'}^n$  est une structure presque complexe de la forme

$$J(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{st}^{(1)} & B^J(z') \\ 0 & \mathcal{J}_{st}^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

où  $\mathcal{J}_{st}$  désigne la structure complexe standard. La matrice  $B^J(z') \in \mathcal{M}_{2,2n}(\mathbb{R})$  est supposée  $\mathbb{R}$ -linéaire en  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ , et la condition d'intégrabilité de  $J$  s'exprime de façon simple sur ses coefficients [22]. Les structures modèles apparaissent naturellement comme limites de structures presque complexes dilatées de façon anisotrope. L'expression des coefficients du tenseur de Nijenhuis donne des informations supplémentaires sur la structure dans le cas où celle-ci n'est pas intégrable (voir [38]). Grâce aux renseignements qui en découlent sur la forme des applications pseudo-holomorphes, on calcule la valeur de la dérivée dans la direction "normale" de la fonction limite obtenue par la méthode des dilatations.

L'autre cas particulier est celui des petites déformations de la structure standard. Deux lemmes (l'un pour une sous-variété totalement réelle maximale  $E$ , l'autre pour le relèvement au fibré cotangent) permettent, par des changements de cartes appropriés, de se ramener localement à la situation  $\|J - \mathcal{J}_{st}\| \leq \varepsilon$ . On parlera alors de cartes  $(\varepsilon, E)$ -adaptées, et les normes des applications seront prises à travers de telles cartes. Les structures presque complexes proches de la structure standard montrent leur intérêt lors de l'étude de propriétés stables par petites perturbations, comme la stricte plurisousharmonicité.

Le **chapitre 3** est consacré à l'étude de la régularité au bord pour des disques analytiques attachés à une sous-variété totalement réelle. E. Chirka [9] a prouvé que, si la sous-variété est de classe  $\mathcal{C}^r$ , les disques attachés sont de classe  $\mathcal{C}^{r-0}$ . Dans le cas presque complexe, lorsque la structure est lisse, les disques sont lisses [15]. Il s'agit ici de donner une version qualitative des résultats de [15], en déterminant, lorsque la structure complexe

est seulement supposée de classe  $C^r$ , la régularité des disques ainsi que des estimations *a priori* explicites au bord. A partir de la construction de fonctions plurisousharmoniques, on récupère une estimation explicite de la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi, et par conséquent la régularité 1/2-hölderienne au bord, ainsi qu'une majoration de la norme associée.

L'obtention de plus de régularité est basée sur une variante du principe de réflexion. L'idée, comme dans [22], est de "symétriser" les disques par rapport à la partie du bord attachée à la sous-variété totalement réelle, de façon à obtenir un nouveau disque vérifiant une équation de pseudo-holomorphie sur  $\Delta$  tout entier. A partir de cette équation elliptique, et partant de la régularité 1/2-hölderienne, on récupère automatiquement une régularité d'ordre supérieur en réinjectant à chaque étape dans l'équation de pseudo-holomorphie la régularité obtenue à l'étape précédente. Les estimations découlent elles aussi de cette équation elliptique (voir [56]). Plus précisément, on établit :

**Théorème 0.4** *Soit  $k \geq 1$  un entier,  $0 < \alpha < 1$ ,  $(M, J)$  une variété presque complexe, où  $J$  est de classe  $C^{k+\alpha}$ , et  $E$  une sous-variété totalement réelle maximale. Toute application  $h$  continue du demi-disque supérieur  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$  dans  $M$ ,  $J$ -holomorphe sur  $\Delta^+$  et envoyant le diamètre dans  $E$  est localement de classe  $C^{k+\alpha/2}$  sur  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$ . De plus, pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$ , on a alors :*

$$\forall \zeta, \zeta' \in K, \|h(\zeta) - h(\zeta')\| \leq C(K) \frac{\|h\|_\infty}{\sqrt{\lambda_E^J}} \times |\zeta - \zeta'|^{1/2}$$

$$\text{et } \|h\|_{C^{k+\alpha/2}(K)} \leq c(r, K) \|h\|_\infty \left( 1 + \frac{c(K)}{\sqrt{\lambda_E^J}} \right).$$

On désigne ici par  $\lambda_E^J$  la plus petite valeur propre de la forme de Levi pour la structure presque complexe  $z_* J$  de la fonction  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mapsto y_1^2 + \dots + y_n^2$ . En référence à son interprétation géométrique, on appellera  $\lambda_E^J$  la *J-courbure minimale de  $E$* . Remarquons que l'estimation donnée dans [41] faisait déjà intervenir la courbure du domaine.

Ce théorème s'applique à l'étude d'une application pseudo-holomorphe le long de l'arête d'un wedge, et permettra dans le chapitre suivant d'obtenir plus de régularité au bord pour une application pseudo-holomorphe propre.

Le **chapitre 4** traite du problème du prolongement au bord d'une application pseudo-holomorphe propre  $F : D \rightarrow D'$  (c'est-à-dire telle que l'image réciproque de tout compact inclus dans  $D'$  soit un compact) entre deux domaines strictement pseudoconvexes. Les applications holomorphes propres ont longuement été étudiées (voir par exemple [54] pour les résultats classiques). La plupart des démonstrations mettent en jeu des arguments non transposables tels quels au cas pseudo-holomorphe, comme l'holomorphie du jacobien, ou le fait qu'un ensemble analytique compact soit nécessairement fini. La première difficulté est donc de contourner ces arguments, de façon à obtenir la surjectivité de l'application pseudo-holomorphe propre, ainsi que la densité de ses valeurs régulières. Cela passe par des arguments de théorie du degré, mais utilise également le théorème de A. Nijenhuis et W. Woolf sur l'existence de petits disques pseudo-holomorphes dans une variété presque complexe en tout point et dans toute direction. Comme dans le cas biholomorphe, la

démonstration du prolongement 1/2-hölderien au bord se ramène, grâce aux estimées de la métrique de Kobayashi, à prouver que  $F$  conserve les distances au bord.

La différence avec le cas biholomorphe est évidemment l'existence de points critiques. On sait que toute application holomorphe propre de  $\Delta$  dans lui-même est un produit fini de Blaschke ; une auto-application holomorphe propre de la boule unité de  $\mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 2$ , est un biholomorphisme d'après le théorème d'Alexander [1]. Toujours dans le cas  $n \geq 2$ , S. Pinchuk a montré [48, 49] qu'une application holomorphe propre entre deux domaines bornés de  $\mathbb{C}^n$ , strictement pseudoconvexes à bords de classe  $\mathcal{C}^2$  est localement biholomorphe. Nous prouvons qu'en presque complexe, ce résultat reste vrai près du bord :

**Théorème 0.5** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de même dimension, définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^2$ .*

*Si  $F$  est une application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$ , alors  $\liminf_{p \rightarrow \partial D} |\text{Jac}_p F| > 0$ .*

*En particulier, l'ensemble des points critiques de  $F$  est un compact inclus dans  $D$ .*

On démontre cette propriété essentielle, qui permet, localement près du bord, de se ramener à étudier le cas biholomorphe traité dans [22], grâce à la méthode de dilatation des coordonnées adaptée au cas presque complexe.

Afin d'obtenir le caractère  $\mathcal{C}^1$  du prolongement, on distingue le cas où les structures presque complexes limites sont intégrables, et le cas non intégrable dans lequel on utilise l'étude faite au chapitre 2 des applications pseudo-holomorphes entre domaines modèles. Enfin, la régularité plus précise du prolongement, ainsi qu'une estimation explicite des normes hölderiennes de  $F$  au bord, découlent des résultats du chapitre 3 :

**Théorème 0.6** *Soit  $k, k' \geq 1$  des entiers et  $0 < \alpha, \alpha' < 1$ . On se place sous les hypothèses du théorème 0.5, en supposant de plus  $J$  (resp.  $J'$ ) de classe  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$  (resp.  $\mathcal{C}^{k', \alpha'}$ ) et  $\rho$  (resp.  $\rho'$ ) de classe  $\mathcal{C}^{k+1, \alpha}$  (resp.  $\mathcal{C}^{k'+1, \alpha'}$ ).*

*Toute application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  se prolonge en une application de classe  $\mathcal{C}^s$  de  $\bar{D}$  dans  $\bar{D}'$ , où  $s = \min(k - 1 + \alpha/2, k' + \alpha'/2)$ , et*

$$\|F\|_{\mathcal{C}^{s-1}(\bar{D})} \leq c(s) \|(F, {}^t(dF)^{-1})\|_{\infty} \left( 1 + \frac{c'}{\sqrt{\lambda_{N^*M'}^{F^*J}}} \right).$$

# Chapitre 1

## Etude des disques holomorphes réguliers

De nombreuses questions géométriques en analyse complexe se ramènent à l'étude des disques holomorphes. Un disque holomorphe (ou analytique) attaché à une hypersurface réelle  $M$  est une fonction  $h$  holomorphe du disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^n$ , continue jusqu'au bord, et telle que  $h(\partial\Delta) \subset M$ . Il est dit *régulier* s'il existe un relèvement méromorphe  $h^*$  de  $h$  au fibré cotangent  $T^*\mathbb{C}^n$ , avec au plus un pôle d'ordre 1 en 0, tel que l'image  $h^*(\partial\Delta)$  soit incluse dans le fibré conormal  $N^*M$  privé de la section nulle. Quitte à projectiviser les fibres de  $N^*M$ , ces relèvements deviennent holomorphes.

Les disques réguliers centrés en 0 et attachés à la sphère sont exactement les disques linéaires. Le théorème 1.5 généralise ce résultat pour une hypersurface quasi-circulaire  $M^\rho$ , c'est-à-dire fortement convexe et définie dans une boule centrée en 0 par une équation de la forme

$$0 = \rho(z) = |z_0|^2 + \phi(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$$

où  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et n'intersectant pas le plan complexe  $\{z_0 = 0\}$ . Lorsque l'on ne suppose plus la forte convexité de  $M$  mais seulement son caractère non dégénéré, on obtient, sous certaines hypothèses, une paramétrisation des disques réguliers. La méthode (voir [58, 14]) consiste à considérer une hypersurface "simple", pour laquelle on sait déterminer explicitement les disques réguliers et calculer les indices partiels, puis à étendre les résultats ainsi obtenus à des hypersurfaces proches à l'aide du théorème de Globevnik [24].

Dans la section 1, on rappelle les définitions, et l'on introduit à partir d'un exemple simple les techniques qui seront développées dans le cas quasi-circulaire. Le théorème 1.5 est prouvé dans la deuxième section, ainsi que le cas particulier du théorème d'unicité de Cartan qui en découle. La section 3 traite du cas non dégénéré, et contient la démonstration du théorème 1.24, affirmant que les disques réguliers attachés à une petite déformation d'une hyperquadrique non dégénérée dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  forment une famille à  $4n + 3$  paramètres. En corollaire, on récupère une propriété locale d'unicité pour les biholomorphismes au voisinage de telles hypersurfaces (théorème 1.26).

## 1.1 Préliminaires

**Définition** Un disque holomorphe  $h$  est une fonction continue  $\bar{\Delta}$  dans  $\mathbb{C}^n$ , holomorphe dans  $\Delta$ . Si  $M$  est une sous-variété de  $\mathbb{C}^n$ , on dira que  $h$  est attaché à  $M$  si  $h(\partial\Delta) \subset M$ .

Les disques holomorphes attachés à une sous-variété totalement réelle maximale possèdent des propriétés particulières, notamment de régularité au bord par le biais d'une variante du principe de réflexion. Pour se ramener à ce cas de figure, on introduit la notion de fibré conormal, dont la fibre en un point  $p \in M$  est l'ensemble des  $(1, 0)$ -formes sur  $T\mathbb{C}^n$  dont la partie réelle s'annule sur l'espace tangent  $T_pM$  :

$$N_p^*M = \{\phi \in T_p^*\mathbb{C}^n / \operatorname{Re} \phi|_{T_pM} = 0\}.$$

Si  $M$  une hypersurface réelle de  $\mathbb{C}^n$ , et  $\rho$  une fonction définissante de  $M$  (c'est-à-dire telle que  $M = \{\rho = 0\}$  et  $d\rho$  ne s'annule pas sur  $M$ ), les fibres de  $N^*M$  sont des droites (réelles) dirigées par  $\partial\rho$ .

**Définition** Un disque holomorphe attaché à  $M$  est régulier s'il existe un relèvement méromorphe  $(h, h^*)$  de  $h$  au fibré cotangent  $T^*\mathbb{C}^n$ , ayant au plus un pôle d'ordre 1 en 0, et tel que

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, h^*(\zeta) \in N_{h(\zeta)}^*M \setminus \{0\}.$$

Un tel relèvement de  $h$  est dit régulier.

*Remarque 1.1* Dans la suite, l'expression "relèvement régulier de  $h$ " désignera selon les cas  $(h, h^*)$ , ou  $h^*$  par abus de notation.

On exige donc que l'image  $h^*(\partial\Delta)$  soit incluse dans le fibré conormal  $N^*M$  privé de la section nulle. En termes de coordonnées, cela se traduit par l'existence d'une fonction continue  $c : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}^*$  telle que  $h^*(\zeta) = c(\zeta)\partial\rho_{h(\zeta)}$  pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ , où la fonction  $\zeta \mapsto \zeta c(\zeta)\partial\rho_{h(\zeta)}$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$ .

Bien qu'on impose ainsi une condition supplémentaire aux disques attachés à  $M$ , la propriété d'invariance par biholomorphisme est préservée :

**Lemme 1.2** Soit  $h$  un disque régulier attaché à une hypersurface réelle  $M$  et  $F$  un biholomorphisme dans un voisinage de  $h(\bar{\Delta})$ , qui envoie un voisinage dans  $M$  de  $h(\partial\Delta)$  dans une sous-variété  $M'$ . Alors  $F \circ h$  est un disque régulier attaché à  $M'$ .

### Preuve

Le disque holomorphe  $\tilde{h} := F \circ h$  est attaché à  $M'$ . Montrons que si  $h^*$  est un relèvement régulier de  $h$ , alors  $\tilde{h}^* := h^*(\partial F_h)^{-1}$  est un relèvement régulier de  $\tilde{h}$ . La fonction  $\zeta h^*$  est holomorphe dans  $\Delta$ , continue jusqu'au bord, donc  $\zeta \tilde{h}^*$  aussi. De plus, on sait qu'il existe une fonction continue  $c : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}^*$  telle que  $h^*|_{\partial\Delta} = c \times \partial\rho_h$ ; par conséquent, pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$  :

$$\tilde{h}^*(\zeta) = h^*(\zeta)\partial F_{h(\zeta)}^{-1} = c(\zeta)\partial\rho_{F^{-1}(\tilde{h}(\zeta))}(\partial F_{h(\zeta)})^{-1} = c(\zeta)\partial(\rho \circ F^{-1})_{\tilde{h}(\zeta)},$$

où  $\rho \circ F^{-1}$  est une fonction définissante de  $M'$ . Ainsi, pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,  $\tilde{h}^*(\zeta) \in N_{\tilde{h}(\zeta)}^*M'$ , et par construction  $h^*$  ne s'annule pas sur  $\partial\Delta$ .  $\square$

Le premier exemple d'hypersurface pour laquelle les disques réguliers sont explicitables est le suivant :

**Proposition 1.3** *Soit  $\mathcal{Q}$  l'hypersurface donnée par l'équation  $a = \sum_{i,j} a_{i,j} \bar{z}_i z_j$ , où  $a$  une constante non nulle et où la matrice  $A = (a_{i,j})$  est hermitienne non dégénérée. Les disques réguliers attachés à  $\mathcal{Q}$  et centrés en 0 sont exactement les  $\zeta \mapsto \lambda \zeta$ ,  $\lambda \in \mathcal{Q}$ .*

**Preuve**

Supposons d'abord que la matrice  $A$  est diagonale à coefficients égaux à 1 ou  $-1$  :  $\mathcal{Q}$  est donnée par l'équation  $0 = r(z) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i |z_i|^2 - a$ , où  $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$ . Soit  $h = (h_1, \dots, h_n)$  un disque régulier attaché à  $\mathcal{Q}$  tel que  $h(0) = 0$ . Il existe une fonction continue  $c : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}^*$  telle que  $\zeta c \partial r_h$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$ . Puisque  $h$  s'annule en 0, pour tout  $j$  la fonction

$$\frac{h_j}{\zeta} \cdot \zeta c \frac{\partial r}{\partial z_j} \circ h = h_j \cdot c \frac{\partial r}{\partial z_j} \circ h = \varepsilon_j c |h_j|^2$$

se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$ . Comme elle est à valeurs réelles sur  $\partial\Delta$ , elle est constante :

$$\forall j, \exists \mu_j \in \mathbb{R} / \forall \zeta \in \partial\Delta, c(\zeta) |h_j(\zeta)|^2 = \mu_j.$$

Soit  $j$  tel que  $h_j/\zeta$  s'annule dans  $\bar{\Delta}$ . Alors  $\mu_j = 0$ , et en notant  $g_j$  le prolongement holomorphe à  $\Delta$  de  $\zeta c(\zeta) \frac{\partial r}{\partial z_j}(h(\zeta)) : \frac{h_j}{\zeta} \cdot g_j \equiv 0$  sur  $\bar{\Delta}$ , donc d'après le principe des zéros isolés, soit  $h_j \equiv 0$ , soit  $g_j \equiv 0$ . Or par hypothèse  $g_j \not\equiv 0$  puisque la fonction  $c$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^*$ , ce qui force  $h_j$  à être identiquement nulle.

Le disque  $h$  étant attaché à  $\mathcal{Q}$ , et  $0 \notin \mathcal{Q}$ , il existe  $k$  tel que  $h_k$  soit non identiquement nulle et d'après le raisonnement précédent  $h_k/\zeta$  ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$ . Puisque  $\mu_k = c(\zeta) |h_k(\zeta)|^2$  sur  $\partial\Delta$ , on a  $\mu_k \neq 0$  :

$$\forall j, \forall \zeta \in \partial\Delta, |h_j(\zeta)|^2 = \frac{\mu_j}{c(\zeta)} = \frac{\mu_j}{\mu_k} |h_k(\zeta)|^2.$$

Comme  $h$  est attaché à  $\mathcal{Q}$  :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, a = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i |h_i(\zeta)|^2 = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i \varepsilon_i}{\mu_k} \right) |h_k(\zeta)|^2.$$

La fonction  $h_k$  est de module constant sur  $\partial\Delta$ , et par conséquent tous les  $|h_i|$  sont constants sur  $\partial\Delta$ . Or une fonction continue de  $\bar{\Delta}$  dans  $\mathbb{C}$ , holomorphe dans  $\Delta$  et de module constant sur  $\partial\Delta$ , est de la forme  $\zeta \mapsto \lambda \zeta^d \prod_{j=1}^m \frac{\alpha_j - \zeta}{1 - \bar{\alpha}_j \zeta}$ , où les  $\alpha_j$  sont les zéros non nuls de la

fonction : pour tout  $j$ , ou bien  $h_j \equiv 0$ , ou bien  $h_j(\zeta) = \lambda_j \zeta$ . En particulier,  $\lambda = h(1) \in \mathcal{Q}$ .

Réciproquement, soit  $\lambda \in \mathcal{Q}$  et  $h(\zeta) = \lambda \zeta$  :  $h$  est un disque holomorphe attaché à  $\mathcal{Q}$ , et  $h^* = (h_1^*, \dots, h_n^*)$  défini par  $h^*(\zeta) = \bar{\lambda} \zeta$  coïncide avec  $\partial r_h$  sur  $\partial\Delta$  et fournit un relèvement régulier de  $h$ .

Dans le cas général où  $A$  est non dégénérée, considérons une matrice  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $A = {}^t P D P$ , où  $D = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ . L'application

$$(h, h^*) \mapsto (Ph, h^* P^{-1})$$

est une bijection de l'ensemble des relèvements réguliers de disques réguliers centrés en 0 et attachés à  $\mathcal{Q}$  sur l'ensemble des relèvements réguliers de disques réguliers centrés en 0 et attachés à l'hypersurface  $\{a = \sum \varepsilon_i |z_i|^2\}$ . De plus cette bijection transforme les disques linéaires en les disques linéaires, ce qui termine la preuve.  $\square$

## 1.2 Cas quasi-circulaire

Soit  $\Omega$  une boule centrée en 0, et  $M^\rho \subset \mathbb{C}^{n+1}$  une hypersurface réelle définie dans  $\Omega$  par une équation de la forme  $0 = \rho(z) = |z_0|^2 + \phi(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$  où  $\phi$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que  $M^\rho \cap \{z_0 = 0\} = \emptyset$  (ce qui force  $\phi(0) \neq 0$ ). On dira que  $M^\rho$  est *quasi-circulaire* si de plus  $M^\rho$  est fortement convexe, c'est-à-dire si la restriction de la forme hermitienne  $\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} \bar{z}_j z_k$  au fibré tangent de  $M^\rho$  est définie positive (voir [35] pour les différentes notions de convexité et les liens entre celles-ci).

### 1.2.1 Les disques réguliers sont les disques linéaires

Commençons par donner une caractérisation des disques réguliers attachés à une hypersurface quasi-circulaire.

**Lemme 1.4** *Soit  $M^\rho \subset \Omega$  une hypersurface quasi-circulaire et  $h : \Delta \rightarrow \Omega$  un disque holomorphe centré en 0 attaché à  $M^\rho$ . Alors  $h$  est régulier si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

$$i. \text{ pour tout } j \geq 0 \text{ tel que } h_j/\zeta \text{ s'annule dans } \bar{\Delta}, \left. \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \circ h \right|_{\partial \Delta} \equiv 0;$$

$$ii. \exists \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R} / \forall j, \forall \zeta \in \partial \Delta, h_j(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \circ h(\zeta) = \mu_j h_0(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z_0} \circ h(\zeta).$$

De plus, les relèvements réguliers de  $h$  sont exactement de la forme  $\alpha \times h^*$ , où  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  et  $h^* = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ h_1 \\ \dots \\ \mu_n \\ h_n \end{pmatrix}$ .

#### Preuve

• Soit  $h$  un disque holomorphe centré en 0 et attaché à  $M^\rho$ , et  $h^* = c \cdot \partial \rho_n$  un relèvement régulier de  $h$ , où  $c : \partial \Delta \rightarrow \mathbb{R}^*$  est continue et où la fonction

$$\zeta \mapsto \zeta c(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z} (h(\zeta)) = \zeta h^*(\zeta)$$

se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$ . Par hypothèse,  $\rho(z) = |z_0|^2 + \phi(|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$ , donc pour tout  $j$  la fonction  $z_j \times \frac{\partial \rho}{\partial z_j}$  est à valeurs réelles. En particulier,

$$\begin{aligned} \forall \zeta \in \partial \Delta, h_j(\zeta) h_j^*(\zeta) &= c(\zeta) h_j(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z_j} (h(\zeta)) \in \mathbb{R} \\ &= (h_j(\zeta)/\zeta) \times (\zeta h^*(\zeta)) \end{aligned}$$

se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  puisque  $h(0) = 0$ . Ainsi la fonction  $h_j h_j^*$  est holomorphe dans  $\Delta$ , à valeurs réelles au bord donc constante :

$$\forall j, \exists \mu'_j \in \mathbb{R} / \forall \zeta \in \bar{\Delta}, h_j(\zeta) h_j^*(\zeta) = \mu'_j. \quad (1.1)$$

Soit  $j$  tel que  $h_j/\zeta$  s'annule dans  $\bar{\Delta}$ . Vu (1.1),  $\mu'_j = 0$ , ce qui entraîne :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, h_j(\zeta) \times \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(h(\zeta)) = \frac{\mu'_j}{c(\zeta)} = 0. \quad (1.2)$$

- Si  $j = 0$  :  $\frac{\partial \rho}{\partial z_0}(h) = \bar{h}_0$ , donc  $h_0$  est identiquement nulle sur  $\partial\Delta$  et  $\frac{\partial \rho}{\partial z_0}(h(\zeta)) \equiv 0$ .
- Si  $j \geq 1$  :  $\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(h) = \bar{h}_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(|h_1|^2, \dots, |h_n|^2)$ , donc à  $\zeta$  fixé, (1.2) équivaut à  $|h_j(\zeta)|^2 = 0$  ou  $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(|h_1(\zeta)|^2, \dots, |h_n(\zeta)|^2) = 0$ , et dans les deux cas  $\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(h)(\zeta) = 0$ .

Par hypothèse,  $h_0 \times \frac{\partial \rho}{\partial z_0}(h) = |h_0(\zeta)|^2$  ne s'annule pas sur  $M^\rho$ , et d'après (1.1) :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, c(\zeta) = \frac{\mu'_0}{|h_0(\zeta)|^2} \text{ avec } \mu'_0 \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\forall j \geq 1, h_j(\zeta) \times \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(h(\zeta)) = \frac{\mu'_j}{c(\zeta)} = \frac{\mu'_j}{\mu'_0} |h_0(\zeta)|^2,$$

ce qui donne ii. en posant  $\mu_j = \mu'_j/\mu'_0$ .

• Réciproquement, soit  $h$  un disque holomorphe centré en 0 et attaché à  $M^\rho$  vérifiant les conditions i) et ii). Posons pour tout  $j$ ,  $h_j^* = 0$  si  $\frac{\partial \rho}{\partial z_j} \circ h$  est identiquement nulle sur  $\partial\Delta$ , et  $h_j^* = \mu_j/h_j$  sinon. Vérifions que  $h^*$  est un relèvement régulier de  $h$  : sur  $\partial\Delta$ ,  $h^*(\zeta) = c(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z}(h(\zeta))$ , où  $c$  est définie sur  $\partial\Delta$  par  $c(\zeta) = |h_0(\zeta)|^2 \in \mathbb{R}^*$ . De plus soit  $\zeta h_j^*(\zeta)$  est identiquement nulle, soit  $\zeta h_j^*(\zeta) = \frac{\mu_j}{(h_j(\zeta)/\zeta)}$ , qui se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  puisque  $h_j/\zeta$  ne s'annule pas. Ainsi  $h^*$  est un relèvement régulier de  $h$ .  $\square$

Remarquons que les disques linéaires attachés à une hypersurface quasi-circulaire  $M^\rho$  vérifient les deux conditions du lemme 1.4 : en effet, posons  $h(\zeta) = \lambda\zeta$ ,  $\lambda \in M$ . Si  $h_j/\zeta$  s'annule dans  $\bar{\Delta}$ ,  $\lambda_j = 0$  et donc pour tous  $\zeta \in \partial\Delta$  et  $j \geq 1$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(h(\zeta)) = \bar{\lambda}_j \times \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = 0$$

et de même, si  $j = 0$  :  $\frac{\partial \rho}{\partial z_0}(h(\zeta)) = |\lambda_0|^2 = 0$ . De plus, on a pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$  :

$$h_j(\zeta) \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(h(\zeta)) = |\lambda_j|^2 \times \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) = \frac{|\lambda_j|^2}{|\lambda_0|^2} \times \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(|\lambda_1|^2, \dots, |\lambda_n|^2) |h_0(\zeta)|^2.$$

Ainsi, les disques linéaires attachés à  $M$  sont réguliers. Ce sont les seuls :

**Théorème 1.5** *Soit  $\Omega$  une boule centrée en 0, et  $M^\rho \subset \Omega$  une hypersurface quasi-circulaire. Les disques réguliers attachés à  $M^\rho$  et centrés en 0 sont exactement les disques linéaires  $\zeta \mapsto \lambda\zeta$ ,  $\lambda \in M^\rho$ .*

**Preuve**

On suppose que  $h$  est un disque régulier attaché à  $M^\rho$  et centré en 0. Pour  $j \geq 1$ , on pose

$$X_j(\theta) = |h_j(e^{i\theta})|^2, \quad X_\alpha = (X_1, \dots, X_n).$$

Puisque  $h$  est holomorphe,  $X_j$  est soit différent de 0 presque partout, soit identiquement nul. En particulier  $X_0$  ne s'annule pas, et quitte à réindexer on peut supposer que  $X_j$  est identiquement nul si et seulement si  $r+1 \leq j \leq n$  (avec par convention  $r = n$  si aucun  $X_j$  n'est identiquement nul).

Si  $r = 0$ ,  $h = (h_0, 0, \dots, 0)$  et pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,  $0 = |h_0(\zeta)|^2 + \phi(0)$  avec  $\phi(0) \neq 0$  puisque  $M^\rho$  est quasi-circulaire. Ainsi le module de  $h_0$  est constant non nul sur le bord :  $h_0$  est un produit de Blaschke, et comme  $h_0/\zeta$  ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$ , nécessairement  $h(\zeta) = \lambda\zeta$ ,  $\lambda \in M$ . Dans la suite, on suppose donc  $r \geq 1$ . On utilisera le résultat suivant :

**Lemme 1.6** *Soit  $z \in M^\rho$  et  $x = (|z_0|^2, x_\alpha)$ , où  $x_\alpha = (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2)$ . On suppose qu'il existe  $r \geq 1$  tel que  $x_1, \dots, x_r \neq 0$  et  $x_{r+1} = \dots = x_n = 0$ . Posons  $\phi_i := \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$ ,  $\phi_{i,j} := \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}$  et*

$$S_{i,j}(x) := \phi_{i,j}(x_\alpha)x_i x_j + \delta_{i,j} \phi_j(x_\alpha)x_j, \quad R_{i,j}(x) := \phi_{i,j}(x_\alpha)x_i + \delta_{i,j} \phi_j(x_\alpha).$$

La matrice  $S = (S_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$  est symétrique définie positive ; en particulier,

$$\forall 1 \leq j \leq r, \quad \phi_{j,j}(x_\alpha)x_j + \phi_j(x_\alpha) > 0. \quad (1.3)$$

La matrice  $R = (R_{i,j})_{1 \leq i,j \leq r}$  est inversible et pour tous  $1 \leq i, j \leq r$ ,  $(R^{-1})_{i,j} = x_i (S^{-1})_{i,j}$ .

**Preuve du lemme 1.6**

Un élément  $z' \in \mathbb{C}^{n+1}$  est dans l'espace tangent  $T_z(M^\rho)$  si et seulement si

$$d\rho_z(z') = 0 = \operatorname{Re} \left( \bar{z}_0 z'_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_\alpha) \bar{z}_j z'_j \right).$$

En particulier, pour tout  $t = (t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $(it_0 z_0, \dots, it_n z_n) \in T_z(M^\rho)$  et l'hypothèse de forte convexité implique que

$$\sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} (\overline{it_j z_j})(it_k z_k) \geq 0$$

et vaut 0 si et seulement si pour tout  $j$ ,  $t_j z_j = 0$ , c'est-à-dire  $t_1 = \dots = t_r = 0$ . Or

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} (\overline{it_j z_j})(it_k z_k) \\ &= t_0^2 |z_0|^2 + \sum_{j,k=1}^n \phi_{j,k}(x_\alpha) z_j \bar{z}_k (\overline{it_j z_j})(it_k z_k) + \sum_{j=1}^n \phi_j(x_\alpha) t_j z_j \overline{it_j z_j} \\ &= t_0^2 |z_0|^2 + \sum_{j,k=1}^r \phi_{j,k}(x_\alpha) x_j x_k t_j t_k + \sum_{j=1}^r \phi_j(x_\alpha) x_j t_j^2 \\ &=: q(t_0, \dots, t_r). \end{aligned}$$

La forme quadratique  $q$  est donc définie positive, et la matrice  $S$  est symétrique définie positive. En particulier ses éléments diagonaux sont strictement positifs, et comme par hypothèse les  $x_j$  sont strictement positifs, on obtient (1.3).

La matrice  $R$  étant obtenue en divisant la  $j$ ème colonne de  $S$  par  $x_j > 0$ , elle est également inversible. De plus

$$a = R^{-1}b \iff \forall i, \sum_j R_{i,j}a_j = b_i \iff \forall i, \sum_j S_{i,j}a_j/x_j = b_i \iff \left(\frac{a_1}{x_1}, \dots, \frac{a_r}{x_r}\right) = S^{-1}b,$$

d'où la conclusion.  $\square$

Retournons à la démonstration du théorème 1.5. Puisque  $M^\rho$  est fortement convexe, on sait d'après [41] (ou [9], en utilisant que la forte convexité implique la stricte pseudo-convexité et donc le caractère totalement réel du fibré conormal privé de la section nulle) qu'un disque régulier  $h$  attaché à  $M^\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  jusqu'au bord. Par conséquent, les fonctions  $X_j$  introduites précédemment sont également de classe  $\mathcal{C}^1$ . Soit  $I$  l'ensemble de mesure nulle défini comme suit :

$$I := \{\theta \in [0; 2\pi] / \exists 1 \leq i \leq r, X_i(\theta) = 0\}.$$

La matrice  $R(X(\theta))$  est inversible dès que  $\theta \notin I$ . Pour  $1 \leq j \leq r$  fixé :

$$\begin{aligned} & \exists \mu_j \in \mathbb{R} / h_j \frac{\partial \rho}{\partial z_j} \circ h = \mu_j |h_0|^2 \text{ sur } \partial \Delta \\ & \iff \exists \mu_j \in \mathbb{R} / X_j \times \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(X_\alpha) \equiv \mu_j X_0 \\ & \iff \frac{X_j}{X_0} \times \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(X_\alpha) \equiv cste \\ & \iff \left( X_j' \phi_j(X_\alpha) + X_j \times \sum_{i=1}^n \phi_{i,j}(X_\alpha) X_i' \right) X_0 - X_0' X_j \phi_j(X_\alpha) \equiv 0 \\ & \iff \forall \theta \notin I, X_0(\theta) \times \left[ R(X(\theta)) \cdot \begin{pmatrix} X_1'(\theta) \\ \vdots \\ X_r'(\theta) \end{pmatrix} \right]_j = X_0'(\theta) X_j(\theta) \phi_j(X_\alpha(\theta)) \end{aligned}$$

par densité. Par conséquent, la condition *ii.* du lemme 1.4 équivaut à

$$\forall \theta \notin I, \begin{pmatrix} X_1'(\theta) \\ \vdots \\ X_r'(\theta) \end{pmatrix} = X_0'(\theta) \times R(X(\theta))^{-1} \begin{pmatrix} X_1(\theta) \phi_1(X_\alpha(\theta)) \\ \vdots \\ X_r(\theta) \phi_r(X_\alpha(\theta)) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Puisque le disque  $h$  est attaché à  $M^\rho$ ,  $X_0 + \phi(X_\alpha) \equiv 0$  et donc  $0 \equiv X_0' + \sum_{j=1}^n \phi_j(X_\alpha) X_j'$ . Remplaçons les  $X_j'$  par l'expression donnée par (1.4) :

$$\begin{aligned} 0 &= X_0' \left( 1 + \sum_{j,k=1}^r \phi_j(X_\alpha) (R(X)^{-1})_{j,k} X_k \phi_k(X_\alpha) \right) \text{ sur } [0; 2\pi] \setminus I \\ &= X_0' \left( 1 + \sum_{j,k=1}^r [\phi_j(X_\alpha) X_j] (S(X)^{-1})_{j,k} [\phi_k(X_\alpha) X_k] \right) \text{ d'après le lemme 1.6.} \end{aligned}$$

La matrice  $S(X)$  étant définie positive, on obtient que  $X'_0$  est identiquement nul, et vu (1.4) tous les  $X'_j$  sont identiquement nuls. Ainsi pour tout  $j$ ,  $|h_j|$  est constant sur  $\partial\Delta$ . Notons  $x_j = |h_j| \equiv |X_j|_{\partial\Delta}$ . On sait déjà que  $h_0/\zeta$  ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$ , d'où  $h_0$  est linéaire.

Il reste à montrer que  $h_j/\zeta$  ne s'annule pas sur  $\bar{\Delta}$  pour  $1 \leq j \leq r$ . Pour cela, il suffit de voir que  $\frac{\partial\phi}{\partial x_\alpha}(x_\alpha) \neq 0$  : en effet, on aura alors que  $\frac{\partial\rho}{\partial z_j} \circ h = \bar{h}_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_\alpha)$  sur  $\partial\Delta$  ne s'annule pas, et donc  $h_j/\zeta$  ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$  toujours d'après le lemme 1.4.

Pour  $t \in [0; x_j]$ , posons  $x_\alpha(t) = (x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) \in \Omega$  et  $\Phi_j(t) = t \times \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_\alpha(t))$ . Alors

$$t\Phi'_j(t) = t \left( \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_\alpha(t)) + t \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2}(x_\alpha(t)) \right)$$

est le coefficient  $(j, j)$  de la matrice  $S(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_r)$ , strictement positif dès que  $t > 0$  d'après (1.3). Ainsi  $\Phi_j$  est strictement croissante sur  $[0; x_j]$ ; or  $\Phi_j(0) = 0$ , donc pour tout  $t \in ]0; x_j]$ ,  $\Phi_j(t) > 0$ , autrement dit  $\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_\alpha(t)) > 0$ . En particulier, avec  $t = x_j$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

### 1.2.2 Un cas particulier du théorème d'unicité de Cartan

Le théorème 1.5, combiné avec la propriété d'invariance des disques réguliers sous l'action d'un biholomorphisme, donne un résultat d'unicité pour les biholomorphismes.

**Corollaire 1.7** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines de  $\mathbb{C}^n$  contenant 0, dont les bords sont des hypersurfaces quasi-circulaires. Tout biholomorphisme  $F : D \rightarrow D'$ , fixant 0 et de classe  $C^1$  jusqu'au bord, est linéaire.*

#### Preuve

Puisque  $M$  est par hypothèse fortement convexe, a fortiori strictement pseudoconvexe, les disques holomorphes attachés à  $M$  et centrés en 0 sont complètement contenus dans  $\bar{D}$ . Le biholomorphisme  $F$  échange donc les disques réguliers attachés à  $M$  centrés en 0 et les disques réguliers attachés à  $M'$  centrés en 0 :

$$\forall \lambda \in M, \forall \zeta \in \bar{\Delta}, F(\lambda\zeta) = \lambda'\zeta$$

où  $\lambda' = F(\lambda) \in M'$ . On en déduit que  $F$  est linéaire, déterminée de façon unique par sa différentielle en 0.  $\square$

## 1.3 Cas non-dégénéré

Considérons l'hyperquadrique  $Q \subset \mathbb{C}^{n+1}$  définie sur un ouvert  $\Omega \ni 0$  par

$$0 = r(z) = \operatorname{Re}z_0 - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \bar{z}_i z_j,$$

où la matrice  $A = (a_{i,j})_{i,j}$  est hermitienne non dégénérée.

1.3.1 Disques réguliers attachés à une hyperquadrique  $Q$ 

**Proposition 1.8** *Les disques réguliers attachés à  $Q$  sont exactement de la forme*

$$h(\zeta) = \left( {}^t\bar{v}Av + 2{}^t\bar{v}Aw \frac{\zeta}{1-a\zeta} + \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} \frac{1+a\zeta}{1-a\zeta} + iy_0, v + w \frac{\zeta}{1-a\zeta} \right)$$

où  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \Delta$  sont quelconques.

De plus  $h^*$  est un relèvement régulier de  $h$  si et seulement si il existe  $b \in \mathbb{R}^*$  tel que

$$\forall \zeta \in \Delta \setminus \{0\}, h^*(\zeta) = \frac{b}{\bar{\zeta}} \left( \frac{-\bar{a}}{1+|a|^2} + \zeta - \frac{a}{1+|a|^2} \zeta^2 \right) \times (1/2, -\overline{{}^t h_\alpha(\zeta)} A).$$

En particulier,  $h$  et  $h^*$  se prolongent dans un voisinage de  $\bar{\Delta}$ .

*Remarque 1.9* Un disque régulier  $h$  attaché à  $Q$ , centré en un point  $p = (p_0, 0, \dots, 0)$  est de la forme

$$h(\zeta) = \left( \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} \frac{1+a\zeta}{1-a\zeta} + iy_0, w \frac{\zeta}{1-a\zeta} \right).$$

**Preuve**Condition nécessaire

On suppose que  $h$  possède un relèvement régulier  $h^*$  :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, h^*(\zeta) = c(\zeta) \times \frac{\partial r}{\partial z} \circ h(\zeta) = c(\zeta) \times (1/2, -\overline{{}^t h_\alpha(\zeta)} \cdot A) \quad (1.5)$$

où  $c : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}^*$  est continue, et  $\zeta c/2$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$ . Autrement dit, il existe une fonction  $\varphi$  holomorphe dans  $\Delta$ , continue sur  $\bar{\Delta}$  telle que pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,  $c(\zeta) = \varphi(\zeta)/\zeta \in \mathbb{R}^*$ . Or dans  $L^2(\partial\Delta)$ ,

$$\frac{1}{\zeta} \varphi(\zeta) = \frac{\hat{\varphi}_0}{\zeta} + \hat{\varphi}_1 + \sum_{n \geq 1} \hat{\varphi}_{n+1} \zeta^n = \overline{\frac{1}{\zeta} \varphi(\zeta)} = \sum_{n \geq 1} \overline{\hat{\varphi}_{n+1}} \bar{\zeta}^n + \bar{\hat{\varphi}}_1 + \bar{\hat{\varphi}}_0 \bar{\zeta}$$

(où  $\hat{\varphi}_n$  désigne le  $n$ ème coefficient de Fourier de  $\varphi$ ). Ainsi, par identification,  $\varphi(\zeta)$  est de la forme  $a + b\zeta + \bar{a}\zeta^2$ , et

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, c(\zeta) = a\bar{\zeta} + b + \bar{a}\zeta. \quad (1.6)$$

• Premier cas :  $a = 0$  (et donc  $b \neq 0$ ).

Autrement dit, pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,  $h^*(\zeta) = b \times (1/2, -\overline{{}^t h_\alpha(\zeta)} \cdot A)$ . Puisque par hypothèse,  $h^*$  a au plus un pôle d'ordre 1 en 0,  $\zeta \times \overline{{}^t h_\alpha(\zeta)} \cdot A$  est holomorphe ce qui équivaut à  $\zeta \bar{h}_\alpha$  holomorphe dans  $\Delta$ , c'est-à-dire  $h_\alpha$  affine :  $\exists v, w \in \mathbb{C}^n / h_\alpha(\zeta) = v + \zeta w$ . Comme le disque  $h$  est attaché à  $Q$  :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, \frac{1}{2}(h_0(\zeta) + \bar{h}_0(\zeta)) = {}^t\bar{v}Av + {}^t\bar{w}Aw\zeta\bar{\zeta} + \bar{\zeta}{}^t\bar{w}Av + \zeta{}^t\bar{v}Aw = d + \bar{e}\bar{\zeta} + e\zeta \quad (d \in \mathbb{R}),$$

et

$$\sum_{-\infty}^{-1} \zeta^n (\hat{h}_0)_n / 2 + \operatorname{Re}(\hat{h}_0)_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta^n (\hat{h}_0)_n / 2 = d + \bar{e}\bar{\zeta} + e\zeta.$$

En identifiant, on récupère  $h_0$  affine à constante imaginaire pure près.

• Deuxième cas :  $a \neq 0$ .

Notons  $a_1$  et  $a_2$  les deux racines de  $a + b\zeta + \bar{a}\zeta^2$ . Elles ne sont pas de module 1 puisque  $h^*$  ne s'annule pas sur  $\partial\Delta$ , et  $|a_1 a_2| = |a/\bar{a}| = 1$  : supposons par exemple  $0 < |a_1| < 1 < |a_2|$ . La fonction  $\zeta h^*$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  si et seulement si

$$\zeta \mapsto (a + b\zeta + \bar{a}\zeta^2) \overline{h_\alpha(\zeta)}$$

se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$ . Décomposons  $h_\alpha$  dans  $L^2(\partial\Delta)$  :  $h_\alpha(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} H_k \zeta^k$ , où  $H_k \in \mathbb{C}^n$  :

$$\begin{aligned} (a + b\zeta + \bar{a}\zeta^2) \overline{h_\alpha(\zeta)} &= (a + b\zeta + \bar{a}\zeta^2) \sum_{k=0}^{+\infty} \bar{H}_k \zeta^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (a\bar{H}_k + b\bar{H}_{k+1} + \bar{a}\bar{H}_{k+2}) \zeta^{-k} + (b\bar{H}_0 + \bar{a}\bar{H}_1) \zeta + \bar{a}\bar{H}_0 \zeta^2, \end{aligned}$$

qui se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  si et seulement si

$$\forall k \geq 1, a\bar{H}_k + b\bar{H}_{k+1} + \bar{a}\bar{H}_{k+2} = 0. \quad (1.7)$$

C'est une récurrence linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique a deux racines distinctes  $a_1$  et  $a_2$ , donc il existe  $V, W \in \mathbb{C}^n$  ne dépendant que de  $H_1$  et  $H_2$  tels que

$$\forall k \geq 1, H_k = \bar{a}_1^{k-1} V + \bar{a}_2^{k-1} W.$$

La fonction  $h_j$  étant holomorphe dans le disque unité, la série  $\sum (v_j \bar{a}_1^{k-1} + w_j \bar{a}_2^{k-1}) \zeta^k$  converge dans  $\Delta$ , et a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. En posant  $d_k^j = v_j \bar{a}_1^{k-1} + w_j \bar{a}_2^{k-1}$ , on a

$$\frac{d_{k+2}^j}{d_{k+1}^j} = \frac{v_j \bar{a}_1^{k+1} + w_j \bar{a}_2^{k+1}}{v_j \bar{a}_1^k + w_j \bar{a}_2^k}$$

et  $0 < |a_1| < 1 < |a_2|$ . S'il existe  $j$  tel que  $w_j \neq 0$ , alors  $\frac{d_{k+2}^j}{d_{k+1}^j} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \bar{a}_2$  donc le rayon de convergence vaut  $1/|a_2| < 1$ , ce qui est faux : d'où  $W = 0$ .

Si  $v_j \neq 0$ ,  $\frac{d_{k+2}^j}{d_{k+1}^j} = \bar{a}_1$  et la série a un rayon de convergence égal à  $1/|a_1| > 1$  ; si  $v_j = 0$ , la série a un rayon de convergence infini.

Ainsi  $H_0 = h_\alpha(0)$ ,  $H_1 = h'_\alpha(0)$  et

$$h_\alpha(\zeta) = H_0 + H_1 \times \zeta \sum_{k=0}^{+\infty} (\bar{a}_1 \zeta)^k. \quad (1.8)$$

Comme  $a_1$  et  $a_2$  ne sont pas de module 1, nécessairement  $b \neq 0$  (sinon,  $a_1$  et  $a_2$  seraient racines de  $a + \bar{a}\zeta^2$ ). Quitte à multiplier  $h^*$  par  $1/b$ , ce qui ne change pas le fait que ce soit un relèvement régulier, on peut supposer  $b = 1$  : l'équation caractéristique devient

$a + \zeta + \bar{a}\zeta^2 = 0$ . Les autres relèvements réguliers seront obtenus par multiplication par une constante non nulle. Il reste à exprimer  $a$  à l'aide de  $a_1$ .

Si  $1 - 4|a|^2 < 0$ , les deux racines sont

$$a_1 = \frac{-1 + i\sqrt{4|a|^2 - 1}}{2\bar{a}} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-1 - i\sqrt{4|a|^2 - 1}}{2\bar{a}},$$

et si  $1 - 4|a|^2 = 0$ , l'équation a une racine double : dans les deux cas,  $|a_1| = |a_2|$ , ce qui est impossible.

Par conséquent  $1 - 4|a|^2 > 0$  et  $a_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4|a|^2}}{2\bar{a}}$ . En notant  $a = |a|e^{i\theta}$ ,

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4|a|^2}}{2|a|} e^{i\theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4|a|^2}}{2|a|} e^{i(\theta + \pi)},$$

d'où  $\text{Arg}(a) = \text{Arg}(a_1) - \pi$  et

$$\begin{aligned} |a_1| = \frac{1 - \sqrt{1 - 4|a|^2}}{2|a|} &\Leftrightarrow 1 - 2|a||a_1| = \sqrt{1 - 4|a|^2} \\ &\Leftrightarrow |a| < 1/2|a_1| \text{ et } 1 - 4|a||a_1| + 4|a|^2|a_1|^2 = 1 - 4|a|^2 \\ &\Leftrightarrow |a| = \frac{|a_1|}{1 + |a_1|^2} \end{aligned}$$

car  $a \neq 0$  et  $0 < |a_1| < 1$ . Autrement dit,  $a = |a|e^{i\theta} = \frac{|a_1|}{1 + |a_1|^2} \frac{-a_1}{|a_1|} = \frac{-a_1}{1 + |a_1|^2}$ .

Condition suffisante

Réciproquement, on suppose que  $h$  est donné comme dans (1.8) par

$$h_\alpha(\zeta) = H_0 + H_1 \times \zeta \sum_{k=0}^{+\infty} (\bar{a}_1 \zeta)^k, \quad \text{où } |a_1| < 1,$$

et  $h_0$  est déterminé de façon unique à constante imaginaire pure près de sorte que  $h$  soit attaché à  $Q$ . Si  $a_1 = 0$ ,  $h_\alpha$  est affine, et les expressions (1.5) et (1.6) montrent que  $h$  est régulier et donnent ses relèvements réguliers.

Supposons donc  $0 < |a_1| < 1$ , et posons  $c(\zeta) = -\frac{a_1}{1 + |a_1|^2} \bar{\zeta} + 1 - \frac{\bar{a}_1}{1 + |a_1|^2} \zeta$  : alors  $h^*$  défini comme dans (1.5) est l'unique relèvement régulier de  $h$  à constante réelle non nulle multiplicative près.  $\square$

**Proposition 1.10** *L'application  $\Phi : (y_0, v, w, a) \mapsto h$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \Delta$  sur l'ensemble des disques réguliers non constants attachés à  $Q$ . Sa réciproque est donnée par*

$$\Phi^{-1} : h \mapsto (\text{Im}(h_0(0)), h_\alpha(0), h'_\alpha(0), [\theta_h(1) - i\theta_h(i)]) \quad (1.9)$$

$$\text{où } \theta_h(\zeta) = \frac{\|h'_\alpha(0)\|^2}{4} \left( \frac{1}{\|h_\alpha(-\zeta) - h_\alpha(0)\|^2} - \frac{1}{\|h_\alpha(\zeta) - h_\alpha(0)\|^2} \right).$$

**Preuve**

Par construction, l'application  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  pour la topologie induite par  $\mathcal{C}^\alpha(\partial\Delta)^{n+1}$

et surjective. De plus si  $h = \Phi(y_0, v, w, a)$ , alors pour tout  $\zeta \in \Delta$ ,  $y_0 = \text{Im}(h_0(0))$  et  $h_\alpha(\zeta) = v + w \left[ \zeta \sum_{k=0}^{+\infty} (a\zeta)^k \right]$  : l'unicité du développement en série entière montre que  $\Phi$  est injective.

On remarque que si  $h = \Phi(y_0, v, w, a)$ , alors pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,

$$\frac{\|h'_\alpha(0)\|^2}{\|h_\alpha(\zeta) - h_\alpha(0)\|^2} = \left| \frac{1 - a\zeta}{\zeta} \right|^2 = 1 - 2\text{Re}(\zeta a) + |a|^2,$$

d'où l'expression de  $\Phi^{-1}$ . Pour montrer que  $\Phi^{-1}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , il suffit de vérifier que les applications linéaires  $h \mapsto h_\alpha(0)$  et  $h \mapsto h'_\alpha(0)$  sont continues sur  $\mathcal{C}^\alpha(\bar{\Delta}) \cap H(\Delta)$ . Or pour  $h \in \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Delta}) \cap H(\Delta)$ ,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} h_\alpha(\zeta) \zeta^{-k} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \|h_\alpha\|_\infty \leq \|h\|_\alpha,$$

d'où le résultat avec  $k = 1$  (resp. 2) pour  $h_\alpha(0)$  (resp.  $h'_\alpha(0)$ ).

Il reste à montrer que  $\Phi$  est une submersion. Comme l'image de  $d\Phi$  est de dimension finie en tout point, elle admet en tout point un supplémentaire topologique ; il suffit donc de montrer qu'en tout point  $(y_0, v, w, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \Delta$ ,  $d\Phi_{(y_0, v, w, a)}$  est injective. Soit  $(y'_0, v', w', a') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$  tel que  $d\Phi_{(y_0, v, w, a)}(y'_0, v', w', a') = 0$ . En développant selon les différentielles partielles, il vient :

$$0 = d_{y_0}\Phi_{(y_0, v, w, a)}y'_0 + d_v\Phi_{(y_0, v, w, a)}v' + d_w\Phi_{(y_0, v, w, a)}w' + d_a\Phi_{(y_0, v, w, a)}a'.$$

Les  $n$  dernières composantes de cette égalité donnent

$$\forall \zeta \in \bar{\Delta}, v' + w' \frac{\zeta}{1 - a\zeta} + w \frac{\zeta^2}{(1 - a\zeta)^2} a'.$$

En identifiant les coefficients du développement en série entière, il vient  $v' = w' = 0$  et  $wa' = 0$ , d'où  $a' = 0$  puisque par hypothèse  $w \neq 0$ . En remplaçant dans la première composante, on obtient  $y'_0 = 0$ , et donc l'injectivité de  $d\Phi$  en tout point.  $\square$

*Remarque 1.11* L'ensemble  $\mathcal{M}_p$  des disques réguliers non constants attachés à  $Q$  et centrés en  $p$  est soit vide, soit une sous-variété de dimension (réelle)  $2n + 1$ .

**Corollaire 1.12** Soit  $p \in \mathbb{C}^{n+1}$ . L'ensemble  $\mathcal{M}_p$  des disques réguliers non constants attachés à  $Q$  et centrés en  $p$  est non vide si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

- \*  $A$  est définie positive et  $r(p) > 0$  ;
- \*  $A$  est définie négative et  $r(p) < 0$  ;
- \*  $A$  possède deux valeurs propres de signes distincts.

Dans ce cas, l'application  $\mathcal{M}_p \ni h \mapsto h(1) \in Q$  est un difféomorphisme local si et seulement si  $p \notin Q$ .

### Preuve

Soit  $h$  un disque régulier attaché à  $Q$  :

$$h(\zeta) = \left( {}^t\bar{v}Av + 2{}^t\bar{v}Aw \frac{\zeta}{1 - a\zeta} + \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1 - |a|^2} \frac{1 + a\zeta}{1 - a\zeta} + iy_0, v + w \frac{\zeta}{1 - a\zeta} \right)$$

où  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $v, w \in \mathbb{C}^n$ ,  $a \in \Delta$ . En particulier,

$$h(0) = \left( {}^t\bar{v}Av + \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} + iy_0, v \right) \in Q \Leftrightarrow {}^t\bar{w}Aw = 0. \quad (1.10)$$

Donc  $h \in \mathcal{M}_p$  équivaut à

$$y_0 = \operatorname{Im} p_0, \quad v = p_\alpha, \quad \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} = \operatorname{Re} p_0 - {}^t\bar{p}_\alpha Ap_\alpha.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\mathcal{M}_p$  est non vide si et seulement s'il existe  $w \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  ${}^t\bar{w}Aw = \operatorname{Re} p_0 - {}^t\bar{p}_\alpha Ap_\alpha$ , d'où les trois cas.

Posons  $x_0 = \operatorname{Re} p_0 - {}^t\bar{p}_\alpha Ap_\alpha$ . D'après la proposition précédente, il suffit de regarder l'application

$$\left\{ (y_0, v, w, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \Delta / v = p_\alpha, y_0 = \operatorname{Im} p_0, \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} = x_0 \right\} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$$

définie par

$$\begin{aligned} \psi(v, w, a, y_0) &= (\operatorname{Im}(h_0(1)), h_\alpha(1)) \\ &= \left( 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{{}^t\bar{v}Aw}{1-a} \right] + \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} \cdot 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{1-r} \right] + y_0, v + \frac{w}{1-a} \right) \\ &= \left( 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{{}^t\bar{p}_\alpha Aw}{1-a} \right] + 2x_0 \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} + \operatorname{Im} p_0, p_\alpha + \frac{w}{1-a} \right). \end{aligned}$$

Sa différentielle en un point  $(y_0, v, w, a)$  est définie sur l'espace tangent

$$\left\{ (0, 0, w', a') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times / \frac{{}^t\bar{w}'Aw + {}^t\bar{w}Aw'}{1-|a|^2} + x_0 \frac{\bar{a}a' + a\bar{a}'}{1-|a|^2} = 0 \right\}$$

par

$$d\psi_{(y_0, v, w, a)}(0, 0, w', a') = \left( 2 \operatorname{Im} \left[ \frac{{}^t\bar{p}_\alpha Aw'}{1-a} + \frac{{}^t\bar{p}_\alpha Aw}{(1-a)^2} a' + \frac{x_0}{(1-a)^2} a' \right], \frac{w'}{1-a} + \frac{wa'}{(1-a)^2} \right).$$

Puisque  $\mathcal{M}_p$  est non vide, c'est une sous-variété de dimension (réelle)  $2n+1$ , donc  $d\psi_{(y_0, v, w, a)}$  est un isomorphisme sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$  si et seulement si elle est injective. Or

$$\begin{aligned} d\psi_{(y_0, v, w, a)}(0, 0, w', a') = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{{}^t\bar{w}'Aw + {}^t\bar{w}Aw'}{1-|a|^2} + x_0 \frac{\bar{a}a' + a\bar{a}'}{1-|a|^2} = 0 \\ \operatorname{Im} \left[ \frac{{}^t\bar{p}_\alpha Aw'}{1-a} + \frac{{}^t\bar{p}_\alpha Aw}{(1-a)^2} a' + \frac{x_0}{(1-a)^2} a' \right] = 0 \\ \frac{w'}{1-a} + \frac{wa'}{(1-a)^2} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w' = -\frac{a'}{1-a} w \\ \left( -\frac{\bar{a}'}{1-\bar{a}} - \frac{a'}{1-a} \right) \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2} + x_0 \frac{\bar{a}a' + a\bar{a}'}{1-|a|^2} = 0 \\ \operatorname{Im} \left( \frac{x_0}{(1-a)^2} a' \right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w' = -\frac{a'}{1-a} w \\ x_0 \left[ -\frac{\bar{a}'}{1-\bar{a}} - \frac{a'}{1-a} + \frac{\bar{a}a' + a\bar{a}'}{1-|a|^2} \right] = 0 \\ x_0 \operatorname{Im} \frac{a'}{(1-a)^2} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, si  $x_0 = 0$  (c'est-à-dire si  $p \in Q$ ),  $d\psi_{(v,w,a,y_0)}$  n'est pas injective. Si  $x_0 \neq 0$ , le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} w' = -\frac{a'}{1-a}w \\ \frac{a'}{(1-a)^2} = \frac{\bar{a}'}{(1-\bar{a})^2} \\ 0 = -\frac{\bar{a}'}{1-\bar{a}} - \frac{a'}{1-a} + \frac{\bar{a}a' + a\bar{a}'}{1-|a|^2}. \end{cases}$$

En remplaçant dans la troisième ligne  $\bar{a}'$  par  $\frac{(1-\bar{a})^2}{(1-a)^2}$ , il vient

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{a'}{1-\bar{a}} \frac{(1-\bar{a})^2}{(1-a)^2} - \frac{a'}{1-a} + \frac{\bar{a}a'}{1-|a|^2} + \frac{aa'}{1-|a|^2} \frac{(1-\bar{a})^2}{(1-a)^2} \\ &= -2 \frac{a'}{|1-a|^2(1-|a|^2)} (1-\bar{a})^2, \end{aligned}$$

ce qui donne  $a' = 0$  et donc  $w' = 0$ , et termine la preuve.  $\square$

### 1.3.2 Disques réguliers attachés à une petite perturbation de $Q$

#### Méthode

La méthode consiste à utiliser le critère donné par J. Globevnik [24] : étant donné une sous-variété  $E$  et un disque  $f$  attaché à  $E$ , et sous l'hypothèse que certains entiers (les indices partiels) dépendant de  $E$  et  $f$  soient positifs, les disques analytiques proches de  $f$  attachés à une sous-variété proche de  $E$  forment une famille à  $\kappa$  paramètres, où  $\kappa$  est l'indice de Maslov de  $E$  le long de  $f$ . Précisons tout cela.

On suppose que la fonction  $f : \partial\Delta \rightarrow \mathbb{C}^N$  est de classe  $C^\alpha$  et qu'il existe une boule ouverte  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{2N}$  centrée en l'origine et des fonctions  $r_j \in C^\alpha(\partial\Delta, \mathcal{C}^2(\mathbb{B}))$ ,  $1 \leq j \leq N$ , telles que pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,

$$M(\zeta) = \{\omega \in f(\zeta) + \mathbb{B} / \forall 1 \leq j \leq N, r_j(\zeta)(\omega - f(\zeta)) = 0\}$$

$$d(r_1(\zeta)) \wedge \dots \wedge d(r_N(\zeta)) \neq 0 \text{ sur } \mathbb{B}$$

et  $f(\zeta) \in M(\zeta)$ . On suppose également que pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,  $T(\zeta) := T_{f(\zeta)}M(\zeta)$  est totalement réel.

Pour  $\zeta \in \partial\Delta$ , on note  $G(\zeta)$  la matrice inversible  $\left( \frac{\partial(r_i(\zeta))}{\partial \bar{z}_j} (0) \right)_{i,j}$ , et  $A(\zeta)$  une matrice

dont les colonnes engendrent sur  $\mathbb{R}$  l'espace  $T(\zeta)$ . Par construction, chaque ligne de  $G(\zeta)$  est  $\mathbb{R}$ -orthogonale à chaque colonne de  $A(\zeta)$  :

$$\operatorname{Re}(\overline{G(\zeta)}A(\zeta)) = 0 \iff G(\zeta)\overline{A(\zeta)} = -\overline{G(\zeta)}A(\zeta) \implies A(\zeta)\overline{A(\zeta)}^{-1} = -\overline{G(\zeta)}^{-1}G(\zeta).$$

Posons  $B(\zeta) := A(\zeta)\overline{A(\zeta)}^{-1}$  pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ . La matrice  $B$  ne dépend pas du choix de  $A$  : en effet, si  $A_1(\zeta)$  est une autre matrice dont les colonnes engendrent sur  $\mathbb{R}$  l'espace  $T(\zeta)$ , il existe  $V(\zeta) \in GL_N(\mathbb{R})$  telle que  $A_1(\zeta)V(\zeta) = A(\zeta)$ , d'où  $A_1(\zeta)\overline{A_1(\zeta)}^{-1} = A(\zeta)\overline{A(\zeta)}^{-1}$ . On

sait alors que la fonction matricielle  $B$  possède une factorisation de Birkhoff [4], c'est-à-dire de la forme :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, B(\zeta) = B^+(\zeta)\Lambda(\zeta)B^-(\zeta)$$

où  $B^+ : \bar{\Delta} \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  est continue, holomorphe dans  $\Delta$ ,  $B^- : (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \Delta \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$  est continue, holomorphe dans  $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \bar{\Delta}$  et

$$\Lambda(\zeta) = \text{diag}(\zeta^{\kappa_1}, \dots, \zeta^{\kappa_N}).$$

Les entiers  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_N$  sont indépendants de la factorisation ; ce sont les *indices partiels* de  $B$  (pour plus de détails, voir [61] et [11]).

**Définition** Avec les notations ci-dessus, on appelle indices partiels de  $M$  le long de  $f$  les entiers  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_N$  (qui ne dépendent que du fibré  $\{T(\zeta)/\zeta \in \partial\Delta\}$ ). L'indice de Maslov, ou indice total, de  $M$  le long de  $f$  est  $\kappa = \sum_1^N \kappa_j$ .

Le théorème suivant décrit en particulier tous les disques holomorphes  $\hat{f}$  voisins d'un disque fixé  $f$  et tels que  $\forall \zeta \in \partial\Delta, \hat{f}(\zeta) \in M_\rho(\zeta)$  pour un certain  $\rho$  proche de  $r$ .

**Théorème 1.13 [24]** On se place sous les hypothèses du paragraphe précédent. Pour tout  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_N) \in \mathcal{C}^\alpha(\partial\Delta, \mathcal{C}^2(\mathbb{B}))^N$  dans un voisinage de  $r = (r_1, \dots, r_N)$ , on note

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, M_\rho(\zeta) = \{\omega \in f(\zeta) + \mathbb{B} / \forall 1 \leq j \leq N, \rho_j(\zeta)(\omega - f(\zeta)) = 0\}.$$

On suppose que les indices partiels de  $M = M_r$  le long de  $f$  sont positifs ou nuls, et on note  $\kappa$  l'indice total. Alors il existe

- $V$  voisinage ouvert de  $r$  dans  $\mathcal{C}^\alpha(\partial\Delta, \mathcal{C}^2(\mathbb{B}))^N$  ;
- $U$  voisinage ouvert de  $0$  dans  $\mathbb{R}^{\kappa+N}$  ;
- $W$  voisinage ouvert de  $f$  dans  $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\alpha(\partial\Delta)^N$  ;
- $\mathcal{F} : V \times U \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{C}^\alpha(\partial\Delta)^N$  de classe  $\mathcal{C}^1$

tels que

- $\mathcal{F}(r, 0) = f$  ;
- pour tout  $(\rho, t) \in V \times U$ , la fonction  $\zeta \mapsto \mathcal{F}(\rho, t)(\zeta) - f(\zeta)$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  et pour tout  $\zeta \in \partial\Delta, \mathcal{F}(\rho, t)(\zeta) \in M_\rho(\zeta)$  ;
- il existe  $\eta > 0$  tel que

$$\forall \rho \in V, \forall t_1, t_2 \in U, \|\mathcal{F}(\rho, t_1) - \mathcal{F}(\rho, t_2)\| \geq \eta|t_1 - t_2|,$$

en particulier  $\mathcal{F}(\rho, t_1) \neq \mathcal{F}(\rho, t_2)$  si  $t_1 \neq t_2$  ;

- si  $\hat{f} \in W$  est tel que  $f - \hat{f}$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  et qu'il existe  $\rho \in V$  tel que pour tout  $\zeta \in \partial\Delta, \hat{f}(\zeta) \in M_\rho(\zeta)$ , alors il existe  $t \in U$  tel que  $\hat{f} = \mathcal{F}(\rho, t)$ .

Ce résultat a été étendu par Y.G. Oh [46] au cas où les indices partiels sont supérieurs ou égaux à -1. On peut l'expliquer de la façon suivante en utilisant [31]. La linéarisation de l'équation des disques holomorphes attachés à  $E$  est une somme d'opérateurs de Cauchy-Riemann sur un disque, avec conditions de bord d'indices de Maslov  $\kappa_i$ . Or pour  $\kappa_i \geq -1$ , l'opérateur est toujours surjectif (dans des classes de différentiabilité convenables), donc on peut appliquer le théorème des fonctions implicites.

Rappelons le lien entre le caractère non-dégénéré et le fibré conormal :

**Proposition 1.14** [60] *Une hypersurface réelle  $M$  de  $\mathbb{C}^n$  est non dégénérée si et seulement si son fibré conormal  $N^*M$  privé de la section nulle est totalement réel.*

La méthode va donc consister à appliquer le théorème de Globevnik au projectivisé du fibré conormal de  $Q$ , puis à se ramener aux disques réguliers attachés à des variétés “proches” de  $Q$ .

### Disques attachés à une variété proche de $\mathbb{P}(N^*Q)$

Soit  $h$  un disque régulier non constant attaché à  $Q$ , centré en un point  $p = (p_0, 0, \dots, 0)$  n'appartenant pas à  $Q$  : d'après (1.10),  $w = h'_\alpha(0) \neq 0$ , ce qui permet de supposer  $({}^t\bar{w}A)_n \neq 0$  (quitte à réindexer). Notons  $\mathbb{P}(N^*Q)$  la projectivisation par rapport à la  $n$ ème coordonnée. Soit  $h^*$  un relèvement régulier de  $h$ ,

$$\hat{h}^* = \left( \frac{h_0^*}{h_n^*}, \dots, \frac{h_{n-1}^*}{h_n^*} \right)$$

son projectivisé et  $f = (h, \hat{h}^*)|_{\partial\Delta}$  : c'est le bord d'un (grand) disque attaché à  $\mathbb{P}(N^*Q)$ , et

$$f(\zeta) = \left( \frac{{}^t w A w}{1 - |a|^2} \frac{1 + a\zeta}{1 - a\zeta} + iy_0, \frac{\zeta w_1}{1 - a\zeta}, \dots, \frac{\zeta w_n}{1 - a\zeta}, \frac{\bar{a} - \zeta}{2({}^t\bar{w}A)_n}, \frac{({}^t\bar{w}A)_1}{({}^t\bar{w}A)_n}, \dots, \frac{({}^t\bar{w}A)_{n-1}}{({}^t\bar{w}A)_n} \right) \quad (1.11)$$

d'après la remarque 1.9. Notons que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  jusqu'au bord, et indépendant du choix du relèvement régulier  $h^*$ .

On cherche à appliquer le théorème de Globevnik à  $M(\zeta) = \mathbb{P}(N^*Q)$  pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$  le long du disque holomorphe  $f$ . En particulier,  $T(\zeta) = T_{f(\zeta)}(\mathbb{P}(N^*Q))$  est totalement réel puisque  $Q$  est non dégénérée et que la projectivisation “oublie” la section nulle.

Commençons par déterminer des équations de  $\mathbb{P}(N^*Q)$ . Un élément de  $N^*Q$  au voisinage de  $(h, h^*)(\partial\Delta)$  s'écrit  $(z, c \partial r_z)$  où  $c$  est une constante non nulle : un élément  $(z, t)$  de  $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^n$  au voisinage de  $f(\partial\Delta)$  est donc dans  $\mathbb{P}(N^*Q)$  si et seulement si  $z \in Q$  et il existe  $(Z_0, \dots, Z_n) \in N_z^*Q$  tel que pour tout  $0 \leq j \leq n$ ,  $t_j = Z_j/Z_n$ . Autrement dit,  $\mathbb{P}(N^*Q)$  est défini par les équations

$$\begin{aligned} 0 &= r(z) \\ 0 &= \frac{\partial r}{\partial z_n}(z) t_j - \frac{\partial r}{\partial z_j}(z) \quad \text{pour tout } j = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

En décomposant en partie réelle et partie imaginaire, on obtient les  $2n + 1$  équations de  $\mathbb{P}(N^*Q)$

$$r_0 = \dots = r_{2n} = 0$$

(où  $r_0 = r$ ), et la matrice  $G(\zeta) = \left( \frac{\partial r_i}{\partial z_j}(f(\zeta)) \right)_{i,j}$  s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -L_1 z_\alpha & \dots & -L_n z_\alpha & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & -\bar{A}_{n,1} t_1 + \bar{A}_{1,1} & \dots & -\bar{A}_{n,n} t_1 + \bar{A}_{1,n} & 0 & -L_n z_\alpha & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -\bar{A}_{n,1} t_{n-1} + \bar{A}_{n-1,1} & \dots & -\bar{A}_{n,n} t_{n-1} + \bar{A}_{n-1,n} & 0 & & & -L_n z_\alpha \\ 0 & -\bar{A}_{n,1} t_0 & \dots & -\bar{A}_{n,n} t_0 & -L_n z_\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i(-\bar{A}_{n,1} t_1 + \bar{A}_{1,1}) & \dots & i(-\bar{A}_{n,n} t_1 + \bar{A}_{1,n}) & 0 & iL_n z_\alpha & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & i(-\bar{A}_{n,1} t_{n-1} + \bar{A}_{n-1,1}) & \dots & i(-\bar{A}_{n,n} t_{n-1} + \bar{A}_{n-1,n}) & 0 & & & iL_n z_\alpha \\ 0 & -i\bar{A}_{n,1} t_0 & \dots & -i\bar{A}_{n,n} t_0 & iL_n z_\alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où  $L_j$  désigne la  $j$ ème ligne de la matrice  $A$ . On remarque :

$$\begin{pmatrix} (-\bar{A}_{n,1} t_1 + \bar{A}_{1,1}) & \dots & (-\bar{A}_{n,n} t_1 + \bar{A}_{1,n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (-\bar{A}_{n,1} t_{n-1} + \bar{A}_{n-1,1}) & \dots & (-\bar{A}_{n,n} t_{n-1} + \bar{A}_{n-1,n}) \\ -\bar{A}_{n,1} t_0 & \dots & -\bar{A}_{n,n} t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & -t_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -t_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & -t_0 \end{pmatrix} \times \bar{A},$$

donc quitte à multiplier à droite par la matrice-bloc constante  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_n \end{pmatrix}$  (ce qui ne change pas les indices partiels), on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -z_1 & \dots & -z_{n-1} & -z_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & -t_1 & 0 & -L_n z_\alpha & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots \\ 0 & & & 1 & -t_{n-1} & 0 & & -L_n z_\alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -t_0 & -L_n z_\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i & & & -it_1 & 0 & iL_n z_\alpha & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & i & -it_{n-1} & 0 & & & iL_n z_\alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -it_0 & iL_n z_\alpha & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Remplaçons  $f = (h, \hat{h}^*)$  par son expression : vu (1.11),  $z_\alpha = h_\alpha(\zeta) = \frac{\zeta}{1-a\zeta} w$ ,  $t_0 = -\frac{\zeta-\bar{a}}{2({}^t\bar{w}A)_n}$  et pour tout  $1 \leq j \leq n-1$ ,  $t_j = \frac{({}^t\bar{w}A)_j}{({}^t\bar{w}A)_n}$ . Ainsi

$$L_n z_\alpha = \left( A \times \frac{\zeta}{1-a\zeta} w \right)_n = \frac{\zeta}{1-a\zeta} (Aw)_n = \frac{\zeta}{1-a\zeta} {}^t(Aw)_n = \frac{\zeta}{1-a\zeta} ({}^t w \bar{A})_n.$$

Numérotions les colonnes de la matrice (1.12) de 0 à  $2n$ . Quitte à multiplier la colonne  $C_0$

par 2 et les colonnes  $C_{n+1}, \dots, C_{2n}$  par  $1/({}^t w \bar{A})_n$ , puis à permuter les lignes, il vient :

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} 1 & -z_1 & -z_2 & \dots & -z_{n-1} & -z_n & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -t_0 & -\xi & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -it_0 & i\xi & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -t_1 & 0 & -\xi & \dots & \dots & 0 \\ 0 & i & 0 & \dots & 0 & -it_1 & 0 & i\xi & \dots & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & \\ & (0) & & \ddots & 1 & -t_{n-1} & 0 & & & \ddots & -\xi \\ & & & & i & -it_{n-1} & 0 & (0) & & & i\xi \end{array} \right) \text{ où } \xi := \frac{\zeta}{1 - a\zeta}.$$

Les  $t_j$ ,  $1 \leq j \leq n-1$ , étant constants, les opérations

$$C_1 := C_n + \sum_{j=1}^{n-1} t_j C_j, \quad C_2 := C_{n+1}$$

et  $C_{2j+1} := C_j$ ,  $C_{2j+2} := C_{n+j}$  si  $j \geq 1$  ne changent pas les indices partiels et donnent

$$\left( \begin{array}{cccccccccccc} 1 & (-z_n - \sum_{j=1}^{n-1} t_j z_j) & 0 & -z_1 & 0 & \dots & -z_{n-1} & 0 \\ 0 & -t_0 & -\xi & & & & & \\ 0 & -it_0 & i\xi & & & & & \\ & & & 1 & -\xi & & (0) & \\ & & & i & i\xi & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & & & 1 & -\xi \\ & & & & & & & i & i\xi \end{array} \right). \quad (1.13)$$

Or le long de  $f$ ,  $\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j} (f(\zeta)) \times f_j(\zeta) = -\bar{t} h_\alpha(\zeta) A h_\alpha(\zeta) = -\text{Re}(h_0(\zeta))$  et

$$-z_n - \sum_{j=1}^{n-1} t_j z_j = -\frac{\left( \frac{\partial r}{\partial z_n} z_n + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial r}{\partial z_j} z_j \right)}{\frac{\partial r}{\partial z_n}} = \frac{\text{Re}(h_0(\zeta))}{\frac{\partial r}{\partial z_n}} = 2t_0 \text{Re}(h_0(\zeta)).$$

Le bloc  $3 \times 3$  en haut à gauche de la matrice (1.13) vaut donc  $\begin{pmatrix} 1 & 2t_0 \text{Re } z_0 & 0 \\ 0 & -t_0 & -\xi \\ 0 & -it_0 & i\xi \end{pmatrix}$ , où

$\xi = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}$  et  $t_0$  est de la forme  $\zeta(1 - \bar{a}\bar{\zeta}) \times (\text{cste} \neq 0)$ . Donc en multipliant à droite par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\text{cste})(1 - \bar{a}\bar{\zeta})} & 0 \\ 0 & 0 & I_{2n-1} \end{pmatrix},$$

on se ramène à considérer, à la place de la matrice (1.13), la matrice

$$G'(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\zeta}{|1-a\zeta|^2} \times 2 {}^t\bar{w}Aw & 0 & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}}w_1 & 0 & \dots & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}}w_{n-1} & 0 \\ 0 & -\zeta & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}} & & & & & \\ 0 & -i\zeta & i\frac{\zeta}{1-a\bar{\zeta}} & & & & & \\ & & & 1 & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}} & & & \\ & & & i & i\frac{\zeta}{1-a\bar{\zeta}} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & (0) & & & & & 1 & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}} \\ & & & & & & i & i\frac{\zeta}{1-a\bar{\zeta}} \end{pmatrix}.$$

**Lemme 1.15** *Les indices partiels de  $\mathbb{P}(N^*Q)$  le long de  $f$  sont positifs ou nuls.*

**Preuve**

Ecrivons  $G'(\zeta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$  sous forme de matrice blocs, où  $\alpha \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ,  $\beta \in \mathcal{M}_{3,2n-2}(\mathbb{C})$  et  $\gamma \in \mathcal{M}_{2n-2}(\mathbb{C})$ . On obtient

$$\begin{aligned} \overline{G'(\zeta)}^{-1}G'(\zeta) &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha}^{-1}\alpha & \bar{\alpha}^{-1}(\beta - \bar{\beta}\bar{\gamma}^{-1}\gamma) \\ 0 & \bar{\gamma}^{-1}\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\zeta}{|1-a\zeta|^2} 2 {}^t\bar{w}Aw & \frac{-\zeta}{|1-a\zeta|^2(1-a\bar{\zeta})} 2 {}^t w \bar{A} \bar{w} & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}} w_1 & \frac{-1}{|1-a\zeta|^2} \bar{w}_1 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{\zeta^2}{1-a\bar{\zeta}} & & & (0) \\ 0 & \zeta^2(1-\bar{a}\bar{\zeta}) & 0 & & & \\ & & & 0 & \frac{-\zeta}{1-a\bar{\zeta}} & \\ & & & -\zeta(1-\bar{a}\bar{\zeta}) & 0 & \\ & (0) & & & & \ddots \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Numérotons les lignes et les colonnes de cette matrice de 0 à  $2n$ , et multiplions  $C_1$  par  $(1-\bar{a}\bar{\zeta})$  et  $L_1$  par  $(1-a\zeta)$ . Pour  $j \geq 3$  impair, on multiplie les colonnes  $C_j$  par  $-1/(1-\bar{a}\bar{\zeta})$  et les lignes  $L_j$  par  $-(1-a\zeta)$ . Cela revient à multiplier  $\overline{G'(\zeta)}^{-1}G'(\zeta)$  à droite par  $Q$  et à gauche par  $\bar{Q}^{-1}$ , où

$$Q = \text{diag} \left( 1, \frac{1}{1-\bar{a}\bar{\zeta}}, 1, \frac{-1}{1-\bar{a}\bar{\zeta}}, 1, \dots, \frac{-1}{1-\bar{a}\bar{\zeta}}, 1 \right).$$

Ces opérations ne changent pas les indices partiels, et on obtient que les indices partiels cherchés sont ceux de la matrice  $B(\zeta) = \overline{(G'(\zeta)Q(\zeta))}^{-1}(G'(\zeta)Q(\zeta))$  :

$$B(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\zeta}{|1-a\zeta|^2(1-\bar{a}\bar{\zeta})} 2 {}^t\bar{w}Aw & \frac{-\zeta}{|1-a\zeta|^2(1-a\bar{\zeta})} 2 {}^t w \bar{A} \bar{w} & \frac{\zeta w_1}{|1-a\zeta|^2} & \frac{-\bar{w}_1}{|1-a\zeta|^2} & \dots \\ 0 & 0 & \zeta^2 & & & \\ 0 & \zeta^2 & 0 & & & (0) \\ & & & 0 & \zeta & \\ & & & \zeta & 0 & \\ & (0) & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Pour les calculer, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 1.16** [24] (**lemme 5.1**) Soit  $G'' : \partial\Delta \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ), et notons  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_n$  les indices partiels de la fonction  $\zeta \mapsto G''(\zeta)\overline{G''(\zeta)}^{-1}$ . Alors il existe une fonction  $\theta : \bar{\Delta} \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ , de classe  $\mathcal{C}^\alpha$ , holomorphe dans  $\Delta$  et telle que

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, G''(\zeta)\overline{G''(\zeta)}^{-1} = \theta(\zeta) \begin{pmatrix} \zeta^{\kappa_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \zeta^{\kappa_n} \end{pmatrix} \overline{\theta(\zeta)}^{-1}.$$

On applique ce résultat à la matrice  $G'' = \overline{(G'Q)}^{-1}$ , ce qui donne une fonction  $P$  de  $\bar{\Delta}$  dans  $GL_{2n+1}(\mathbb{C})$ , holomorphe dans  $\Delta$ , telle que

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, P(\zeta)B(\zeta) = \begin{pmatrix} \zeta^{\kappa_0} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \zeta^{\kappa_{2n}} \end{pmatrix} \overline{P(\zeta)}.$$

En particulier, en notant  $l = (l_0, \dots, l_{2n})$  la dernière ligne de  $P$ , on obtient pour tout  $\zeta \in \partial\Delta$ ,

$$l(\zeta)B(\zeta) = \zeta^{\kappa_{2n}} \overline{l(\zeta)} \iff (S) \begin{cases} l_0 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_0 \\ l_0 \times \frac{2^t \bar{w} A w \zeta}{|1-a\zeta|^2(1-\bar{a}\zeta)} + l_2 \zeta^2 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_1 \\ l_0 \times \frac{-2^t w A \bar{w} \zeta}{|1-a\zeta|^2(1-a\zeta)} + l_1 \zeta^2 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_2 \\ \forall 1 \leq j \leq n-1, \begin{cases} l_0 \times \frac{\zeta w_j}{|1-a\zeta|^2} + \zeta l_{2j+2} = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_{2j+1} \\ l_0 \times \frac{-\bar{w}_j}{|1-a\zeta|^2} + \zeta l_{2j+1} = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_{2j+2} \end{cases} \end{cases}.$$

Si la fonction  $l_0$  est non identiquement nulle, vu la première ligne du système, nécessairement  $\kappa_{2n} \geq 0$  puisque  $l_0$  est holomorphe et  $\bar{l}_0$  anti-holomorphe.

Si  $l_0 \equiv 0$  : comme la matrice  $P$  est inversible, sa dernière ligne  $l$  est non identiquement nulle, donc il existe  $j \geq 1$  tel que la fonction  $l_j$  ne soit pas identiquement nulle. Le système (S) devient

$$\begin{cases} l_2 \zeta^2 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_1 & \text{et} & l_1 \zeta^2 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_2 \\ \zeta l_4 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_3 & \text{et} & \zeta l_3 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_4 \\ \vdots & & \\ \zeta l_{2n} = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_{2n-1} & \text{et} & \zeta l_{2n-1} = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_{2n} \end{cases}.$$

Par conséquent  $l_{2i-1} \equiv 0 \iff l_{2i} \equiv 0$ , et on peut supposer  $j \in \{1; 3\}$ . Si  $j = 1$ , alors  $l_2$  est holomorphe non identiquement nulle et  $\bar{l}_1$  est anti-holomorphe non identiquement nulle, donc l'égalité  $l_2 \zeta^2 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_1$  force  $\kappa_{2n} - 2 \geq 0$ . De même, si  $j = 3$ , l'égalité  $\zeta l_4 = \zeta^{\kappa_{2n}} \bar{l}_3$  force  $\kappa_{2n} - 1 \geq 0$ . Finalement, on obtient dans tous les cas  $\kappa_0 \geq \dots \geq \kappa_{2n} \geq 0$ .  $\square$

**Lemme 1.17** Si le déterminant  $\det B$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\partial\Delta$ , l'indice de Maslov  $\kappa$  de  $B$  est donné par

$$\kappa = \text{Ind}_{\det B(\partial\Delta)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{(\det B)'(\zeta)}{\det B(\zeta)} d\zeta.$$

**Preuve**

On suppose que les indices partiels sont donnés par la décomposition suivante :

$$\forall \theta, B(e^{i\theta}) = B^+(e^{i\theta}) \begin{pmatrix} e^{i\kappa_0\theta} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{i\kappa_{2n}\theta} \end{pmatrix} B^-(e^{i\theta})$$

où  $B^+$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  en une matrice inversible, et  $B^-$  se prolonge anti-holomorphiquement à  $\Delta$  en une matrice inversible : autrement dit, il existe  $\tilde{B}^-$  holomorphe dans  $\Delta$  telle que  $B^-(\zeta) = \tilde{B}^-(1/\zeta)$  pour tout  $\zeta \in \hat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ .

Soit  $0 < r < 1$  et  $b_r^+(\theta) = \det(B^+(re^{i\theta}))$ ,  $b_r^-(\theta) = \det(\tilde{B}^-(re^{i\theta})) = \det(\tilde{B}^-(re^{-i\theta}))$  et  $\beta_r(\theta) = b_r^+(\theta)r^\kappa e^{i\kappa\theta} b_r^-(\theta)$ . Le chemin  $\gamma_r = \beta_r([0; 2\pi])$  ne passe pas par 0 ; on peut donc définir l'indice

$$2\pi i \text{Ind}_{\gamma_r}(0) = \int_{\gamma_r} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_0^{2\pi} \frac{b_r^{+\prime}(\theta)}{b_r^+(\theta)} d\theta + \int_0^{2\pi} i\kappa d\theta + \int_0^{2\pi} \frac{b_r^{-\prime}(\theta)}{b_r^-(\theta)} d\theta.$$

Or  $\int_0^{2\pi} \frac{b_r^{+\prime}(\theta)}{b_r^+(\theta)} d\theta = \int_{r\partial\Delta} \frac{\det(B^+(\zeta))'}{\det(B^+(\zeta))} d\zeta$  vaut le nombre de zéros moins le nombre de pôles de la fonction holomorphe  $\det(B^+)$  dans  $r\bar{\Delta}$ , c'est-à-dire 0. De même  $\int_0^{2\pi} \frac{b_r^{-\prime}(\theta)}{b_r^-(\theta)} d\theta = 0$ , et

$$\forall 0 < r < 1, \text{Ind}_{\gamma_r}(0) = \kappa.$$

Le compact  $\{\beta_r(\theta) / r \in [1/2; 1], \theta \in [0; 2\pi]\}$  ne contenant pas 0, il est contenu dans un ouvert  $\Omega$  ne contenant pas 0. Les deux courbes fermées  $\gamma_{1/2}$  et  $\gamma_1$  sont homotopes dans  $\Omega$  via l'application  $(t, \theta) \mapsto \beta_{(1-t)/2+t}(\theta)$ , et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Puisque deux chemins homotopes ont le même indice :

$$\kappa = \text{Ind}_{\gamma_{1/2}}(0) = \text{Ind}_{\gamma_1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\beta_1'(\theta)}{\beta_1(\theta)} d\theta.$$

De plus  $\beta_1(\theta) = \det(B(e^{i\theta}))$ , d'où la conclusion. □

Appliquons ce résultat à la matrice  $B(\zeta)$  introduite en (1.14) :

$$\det B(\zeta) = 1 \times \begin{vmatrix} 0 & \zeta^2 \\ \zeta^2 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} O & \zeta \\ \zeta & 0 \end{vmatrix}^{n-1} = (-1)^n \zeta^{2n+2},$$

qui définit bien une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\partial\Delta$ . Par conséquent :

**Corollaire 1.18** *L'indice de Maslov  $\kappa = \sum_{j=0}^{2n} \kappa_j$  de  $\mathbb{P}(N^*Q)$  le long de  $f$  vaut  $2n + 2$ .*

Les indices partiels étant positifs, on peut appliquer le critère donné par J. Globevnik : vu le corollaire précédent, on obtient ainsi que l'ensemble des disques considérés forme une famille à  $(2n + 1) + \kappa = 4n + 3$  paramètres réels.

**Proposition 1.19** *Il existe des voisinages ouverts  $V$  de  $(r_0, \dots, r_{2n})$  dans  $\mathcal{C}^3(\mathbb{B}, \mathbb{R})$ ,  $U$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^{4n+3}$ ,  $W$  de  $f$  dans  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\alpha}(\partial\Delta)^{2n+1}$ , et une application  $\mathcal{F} : V \times U \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\alpha}(\partial\Delta)^{2n+1}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que*

- $\mathcal{F}(r, 0) = f$  ;
- pour tout  $(\rho, t) \in V \times U$ ,  $\mathcal{F}(\rho, t)$  est le bord d'un disque holomorphe attaché à  $\mathbb{P}(N^*M)$ , où  $M = \{\rho = 0\}$  ;
- si  $t_1 \neq t_2$ ,  $\mathcal{F}(\rho, t_1) \neq \mathcal{F}(\rho, t_2)$  ;
- si  $\dot{f} \in W$  est le bord d'un disque holomorphe attaché à  $M = \{\rho = 0\}$  où  $\rho \in V$ , alors il existe  $t \in U$  tel que  $\dot{f} = \mathcal{F}(\rho, t)$ .

### Disques attachés à une variété proche de $Q$

La proposition 1.19 montre que l'ensemble des disques holomorphes proches du disque  $f = (h, \hat{h}^*)$  et attachés à une hypersurface proche de  $\mathbb{P}(N^*Q)$  forme une variété de dimension (réelle)  $4n + 3$ . Pour en déduire la description de l'ensemble des disques holomorphes proches de  $h$  et attachés à une hypersurface proche de  $Q$ , on a besoin du résultat suivant :

**Lemme 1.20** *Pour  $t$  assez petit et  $\rho$  assez proche de  $r$  pour la topologie  $\mathcal{C}^3$ ,  $\mathcal{F}(\rho, t)$  est la projectivisation d'un relèvement d'un disque régulier.*

#### Preuve

On suit les idées de [41] et [58]. En notant  $s$  le paramètre  $(\rho - r, t)$ ,  $\mathcal{F}(\rho, t)$  s'écrit en coordonnées  $(h_0^s, \dots, h_n^s, H_0^s, \dots, H_{n-1}^s)$ . Le disque  $h^s$  est attaché à  $M^s := \pi(\mathcal{M}^s)$ , où  $\mathcal{M}^s = \{\rho = 0\}$  et  $\pi$  désigne la projection canonique sur les  $n + 1$  premières coordonnées. Soit

$$\phi^s : \partial\Delta \ni \zeta \mapsto \zeta \frac{\partial \rho_0}{\partial z_n}(h^s(\zeta)).$$

Pour  $s = 0$ , on obtient le disque initial  $f$  et

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, \phi^0(\zeta) = \frac{-1}{1 - \bar{a}\zeta} ({}^t \bar{w} A)_n.$$

Or la fonction  $\partial\Delta \ni \zeta \mapsto \frac{-1}{1 - \bar{a}\zeta}$  est à valeurs dans le demi-plan  $\{\operatorname{Re}(z) < 0\}$  : c'est immédiat si  $a = 0$ , et sinon cette fonction envoie le connexe par arcs  $\partial\Delta$  sur un connexe par arcs n'intersectant pas  $\{\operatorname{Re}(z) = 0\}$ , et prend la valeur  $-1/(1 - |a|)$  en  $\zeta = \bar{a}/|a|$ . Par continuité, pour  $s$  assez petit, la fonction  $\phi^s$  est donc elle aussi à valeurs dans un demi-plan strict ne contenant pas  $0$ , ce qui permet de définir

$$\psi^s : \zeta \mapsto \log(\phi^s(\zeta)) = \int_{[z_0; \phi^s(\zeta)]} \frac{dz}{z}.$$

La fonction  $\psi^s$  est de classe  $\mathcal{C}^{\alpha}$ . Soit  $U^s = -\mathcal{T}(\operatorname{Im} \psi^s)$  et  $\lambda^s = \exp(U^s - \operatorname{Re} \psi^s)$ , où  $\mathcal{T}$  désigne la transformée de Hilbert. La fonction  $\lambda^s$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ , et sur  $\partial\Delta$  :

$$\log(\lambda^s \phi^s) = (U^s - \operatorname{Re} \psi^s) + (\operatorname{Re} \psi^s + i \operatorname{Im} \psi^s)$$

qui se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  en une fonction encore notée  $U^s + i\text{Im}\psi^s$ . Ainsi  $\exp(U^s + i\text{Im}\psi^s)$  est un prolongement holomorphe de  $\lambda^s\phi^s$  à  $\Delta$ , qui ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$ , et pour tout  $0 \leq j \leq n-1$ ,

$$\lambda^s \times \zeta \frac{\partial \rho_0}{\partial z_j} \circ h^s = \left( \lambda^s \times \zeta \frac{\partial \rho}{\partial z_n} \circ h^s \right) \times H_j^s$$

est un produit de fonctions qui se prolongent holomorphiquement à  $\Delta$ . La fonction définie par  $h^{*s} := \lambda^s \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \circ h^s$  est donc un relèvement de  $h^s$ , et même un relèvement régulier puisque  $\lambda^s$  ne s'annule pas sur  $\partial\Delta$ . Ainsi,  $(h^s, H^s)$  est la projectivisation de  $(h^s, h^{*s})$ , et de plus  $\zeta h_n^{*s}$  ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$ .  $\square$

Autrement dit, l'application  $(h, h^*) \mapsto (h, \hat{h}^*)$  est surjective. Soit maintenant  $h$  un disque régulier attaché à  $M$ , et  $h^{*(1)}, h^{*(2)}$  deux relèvements réguliers de  $h$  :

$$\forall \zeta \in \partial\Delta, \exists \lambda(\zeta) \in \mathbb{R}^* / h^{*(2)}(\zeta) = \lambda(\zeta) h^{*(1)}(\zeta).$$

De plus  $\zeta h_n^{*(j)}$  est holomorphe pour  $j = 1, 2$  et ne s'annule pas dans  $\bar{\Delta}$  par hypothèse, donc la fonction  $\frac{\zeta h_n^{*(2)}}{\zeta h_n^{*(1)}} = \lambda$  se prolonge holomorphiquement à  $\Delta$  :  $\lambda$  est donc une constante réelle non nulle. Le disque régulier  $h$  possède donc un unique relèvement régulier à constante réelle non nulle multiplicative près, et deux relèvements réguliers ont la même image par  $(h, h^*) \mapsto (h, \hat{h}^*)$ . Par conséquent, l'application  $h \mapsto (h, \hat{h}^*)$  est bien définie et bijective.

**Théorème 1.21** *Soit  $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^{2n}$  une boule ouverte au voisinage de 0,  $A$  une matrice hermitienne non dégénérée de taille  $n$ , et  $Q = \{0 = r(z) = \text{Re } z_0 - {}^t z_\alpha A z_\alpha\}$ . Soit  $h^0$  un disque régulier attaché à  $Q$  tel que  $h^0(0) = (p_0, 0, \dots, 0)$ . Il existe des voisinages ouverts  $V$  de  $r$  dans  $\mathcal{C}^3(\mathbb{B}, \mathbb{R})$ ,  $U$  de 0 dans  $\mathbb{R}^{4n+3}$ ,  $W$  de  $h^0$  dans  $\mathcal{C}_\mathbb{C}^\alpha(\partial\Delta)^{n+1}$ , et une application  $\mathcal{H} : V \times U \rightarrow \mathcal{C}_\mathbb{C}^\alpha(\partial\Delta)^{n+1}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tels que :*

- $\mathcal{H}(r, 0) = h^0$  ;
- pour tout  $(\rho, t) \in V \times U$ ,  $\mathcal{H}(\rho, t)$  est le bord d'un disque régulier attaché à  $M$ , où  $M = \{\rho = 0\}$  ;
- si  $t_1 \neq t_2$ ,  $\mathcal{H}(\rho, t_1) \neq \mathcal{H}(\rho, t_2)$  ;
- si  $\dot{h} \in W$  est le bord d'un disque régulier attaché à  $M = \{\rho = 0\}$ , où  $\rho \in V$ , alors il existe  $t \in U$  tel que  $\dot{h} = \mathcal{H}(\rho, t)$ .

Autrement dit, l'ensemble des disques réguliers proches de  $h^0$  attachés à une hypersurface proche de  $Q$  est une variété de dimension (réelle)  $4n+3$ .

**Corollaire 1.22** *Pour  $\rho$  proche de  $r$  pour la topologie  $\mathcal{C}^3$ , l'application  $\Phi^{-1}$  définie en (1.9) est encore un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme local de  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \Delta$  sur l'ensemble des disques réguliers non constants attachés à  $M = \{\rho = 0\}$ .*

### Preuve

On reprend les notations du théorème précédent. Pour tout  $\rho \in V$ , définissons la fonction

$$\begin{aligned} \Theta_\rho : U &\rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \Delta \\ t &\mapsto (y_0^{(\rho, t)}, v^{(\rho, t)}, w^{(\rho, t)}, a^{(\rho, t)}) \end{aligned}$$

où  $y_0^{(\rho,t)}$ ,  $v^{(\rho,t)}$ ,  $w^{(\rho,t)}$ ,  $a^{(\rho,t)}$  désignent les paramètres associés au disque  $\mathcal{H}(\rho, t)$  par la proposition 1.10. Vu le choix du disque de base  $h^0$ , on peut supposer (quitte à restreindre  $U$  et  $V$ ) que tout disque  $h$  de la forme  $\mathcal{H}(\rho, t)$  vérifie  $({}^t\bar{h}'_\alpha(0)A)_n \neq 0$ . L'application  $\Theta_\rho$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . De plus, l'application  $\mu : (\rho, t) \mapsto d(\Theta_\rho)_t$  est continue de  $V \times U$  dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}_c(\mathbb{R}^{4n+3})$  des applications linéaires continues ; comme  $\mu(r, 0)$  est inversible, et que les inversibles d'un espace de Banach forment un ouvert, on peut supposer (quitte à restreindre  $U$  et  $V$ ) que la différentielle de  $\Theta_\rho$  est inversible en tout point. Le théorème d'inversion locale permet de conclure.  $\square$

### 1.3.3 Propriété d'unicité des biholomorphismes

Intéressons-nous maintenant plus particulièrement aux disques holomorphes centrés en un point fixé. Pour des disques attachés à la sphère, ou plus généralement à une hypersurface quasi-circulaire, et centrés en 0, la paramétrisation via les applications  $h \mapsto h(1)$  et  $h \mapsto h'(0)$  est immédiate. Nous allons montrer que ces paramétrisations sont encore valables, non seulement pour des disques attachés à  $Q$ , mais aussi pour des disques attachés à de petites déformations de  $Q$ . Contrairement au cas traité dans la deuxième section, le résultat est local.

**Proposition 1.23** *Soit  $p = (p_0, 0, \dots, 0)$  tel que  $\operatorname{Re} p_0 \neq 0$ . Si  $A$  est définie positive (resp. définie négative), on suppose de plus  $\operatorname{Re} p_0 > 0$  (resp.  $\operatorname{Re} p_0 < 0$ ). L'application qui à un disque régulier  $h$  non constant, attaché à  $Q$  et centré en  $p$ , associe  $h(1)$  (resp.  $h'(0)$ ) est un difféomorphisme local sur son image.*

#### Preuve

L'application  $h \mapsto h(1)$  a déjà été étudiée dans le corollaire 1.12. D'après la proposition 1.10 et la remarque 1.9, l'étude de l'application  $h \mapsto h'(0)$  se ramène à celle de

$$\Psi : (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) \times \Delta \ni (w, a) \mapsto \left( 2a \frac{{}^t\bar{w}Aw}{1-|a|^2}, w \right).$$

Commençons par montrer que  $\Psi$  est injective : si  $\Psi(w, a) = \Psi(\dot{w}, \dot{a})$ , alors  $w = \dot{w}$  et

$$\frac{a}{1-|a|^2} = \frac{\dot{a}}{1-|\dot{a}|^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|a|}{1-|a|^2} = \frac{|\dot{a}|}{1-|\dot{a}|^2} \\ \operatorname{Arg} a = \operatorname{Arg} \dot{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |\dot{a}| \\ \operatorname{Arg} a = \operatorname{Arg} \dot{a} \end{cases}.$$

Ainsi  $\Psi$  est injective et induit un homéomorphisme sur son image. De plus l'image de sa différentielle en tout point est de dimension finie, donc pour montrer que  $\Psi$  est une submersion il suffit de montrer que sa différentielle est injective en tout point. Or

$$d\Psi_{(w,a)}(w', a') = \begin{pmatrix} 2a \frac{{}^t\bar{w}'Aw + {}^t\bar{w}Aw'}{1-|a|^2} & + & 2 \frac{{}^t\bar{w}Aw}{(1-|a|^2)^2} (a' + a^2\bar{a}') \\ w' & + & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} w' = 0 \\ a' = 0, \end{cases}$$

d'où la conclusion.  $\square$

Un raisonnement similaire à celui de la preuve du corollaire 1.22 montre :

**Théorème 1.24** *Soit  $A$  une matrice hermitienne non dégénérée de taille  $n$ ,  $Q$  l'hyperquadrique  $\{0 = r(z) = \operatorname{Re} z_0 - {}^t \bar{z}_\alpha A z_\alpha\}$  et  $p = (p_0, 0, \dots, 0)$  tel que  $\operatorname{Re} p_0 \neq 0$ . Si  $A$  est définie positive (resp. définie négative), on suppose de plus  $\operatorname{Re} p_0 > 0$  (resp.  $\operatorname{Re} p_0 < 0$ ). Soit  $h^0$  un disque régulier attaché à  $Q$  tel que  $h^0(0) = p$ . Pour  $\rho$  proche de  $r$  pour la topologie  $\mathcal{C}^3$ , on note  $\mathcal{M}_p^{(\rho)}$  l'ensemble des disques réguliers non constants attachés à l'hypersurface  $\{\rho = 0\}$ , centrés en  $p$  et proches de  $h^0$ .*

*Alors les applications définies sur  $\mathcal{M}_p^{(\rho)}$  par  $h \mapsto h(1)$  et  $h \mapsto h'(0)$  sont localement des difféomorphismes.*

Plus précisément, l'application  $h \mapsto (\operatorname{Im} h_0(1), h_\alpha(1))$  est un difféomorphisme local sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ . On obtient ainsi, localement au voisinage d'un point de  $M$  par lequel passe un disque régulier, un feuilletage de l'hypersurface par les bords des disques réguliers. Dans le cas de l'hyperquadrique, on connaît les points par lesquels passe un disque régulier :

**Lemme 1.25** *On se place sous les hypothèses du théorème 1.24, et on note  $\delta^\rho$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_p^{(\rho)}$  par  $\delta^\rho(h) = h(1)$ .*

*L'image de l'application  $\delta^\rho$  est exactement  $\{z \in Q / \operatorname{Re} z_0 \operatorname{Re} p_0 > 0\}$ . En particulier, si  $A$  est définie positive ou définie négative, alors tout  $z \in Q \setminus \{0\}$  s'écrit  $z = h(1)$  pour un certain  $h \in \mathcal{M}_p^{(\rho)}$ .*

### Preuve

Soit  $h$  un disque régulier attaché à  $Q$  et centré en  $p$  :

$$p = h(0) = \left( \frac{{}^t \bar{w} A w}{1 - |a|^2} + i y_0, 0 \right) \text{ et } h(1) = \left( \frac{{}^t \bar{w} A w}{1 - |a|^2} \frac{1+a}{1-a} + i y_0, w \frac{1}{1-a} \right).$$

Autrement dit, pour  $z \in Q$  :

$$\begin{aligned} z = h(1) &\Leftrightarrow \begin{cases} w \frac{1}{1-a} = z_\alpha \\ \frac{1+a}{1-a} \operatorname{Re} p_0 + i \operatorname{Im} p_0 = z_0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w = (1-a) z_\alpha \\ \frac{2}{1-a} = \frac{z_0 + \operatorname{Re} p_0 - i \operatorname{Im} p_0}{\operatorname{Re} p_0} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} w = (1-a) z_\alpha \\ z_0 \neq -\operatorname{Re} p_0 + i \operatorname{Im} p_0 \text{ et } a = \frac{z_0 - p_0}{z_0 + \bar{p}_0}. \end{cases} \end{aligned}$$

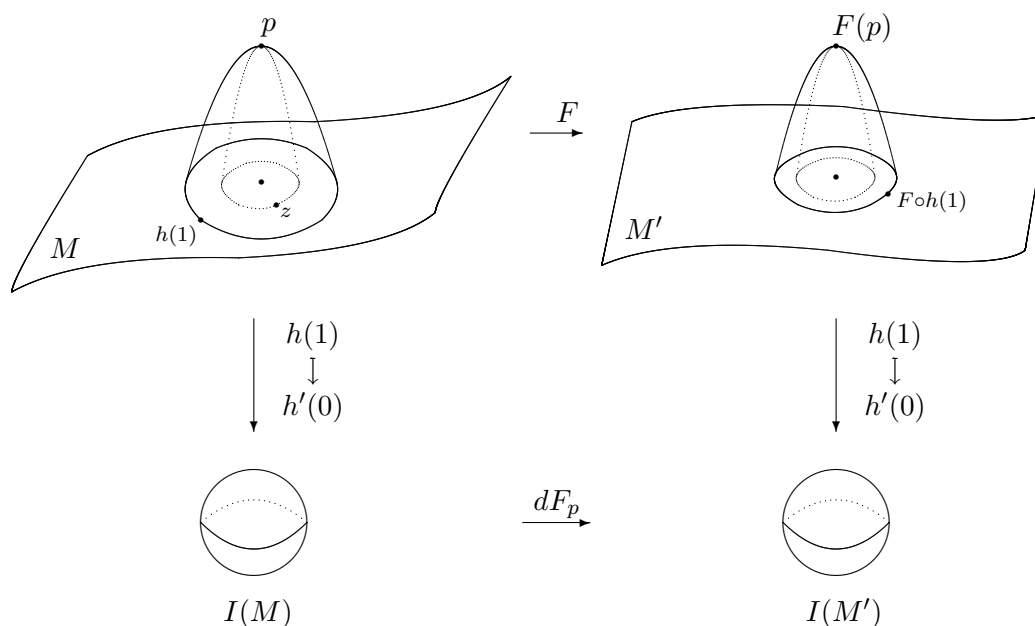
Ce système admet une solution si et seulement si  $z_0 \neq -\bar{p}_0$  et

$$\left| \frac{z_0 - p_0}{z_0 + \bar{p}_0} \right| < 1 \Leftrightarrow \frac{(\operatorname{Re} z_0 - \operatorname{Re} p_0)^2 + (\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Im} p_0)^2}{(\operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re} p_0)^2 + (\operatorname{Im} z_0 - \operatorname{Im} p_0)^2} < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_0 \operatorname{Re} p_0 > 0,$$

d'où la conclusion. □

Par conséquent, tout point de  $M$  proche d'un tel point de  $Q$  possède un voisinage feuilleté par des bords de disques réguliers.

Le théorème 1.24 permet également de construire un analogue local de l'indicatrice de Kobayashi, en considérant l'hypersurface réelle  $I(M) = \{h'(0) / h \in \mathcal{M}_p^{(\rho)}\}$  (on se place toujours sous les hypothèses du théorème).



Le difféomorphisme  $h'(0) \mapsto h(1)$  est bien défini, et commute avec les biholomorphismes dans le sens suivant ; si  $p = (p_0, 0) \notin Q$  et  $F(p) = (p'_0, 0) \notin Q'$  vérifient la condition du corollaire 1.12, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
 F : (\Omega, M) & \longrightarrow & (\Omega', M') \\
 h(1) & \mapsto & F \circ h(1) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\
 h'(0) & \xrightarrow{dF_p} & dF_p(h'(0)).
 \end{array}$$

Autrement dit,  $F$  est déterminé de façon unique par sa différentielle en  $p$ . Récapitulons :

**Théorème 1.26** Soit  $M$  et  $M'$  deux hypersurfaces réelles de  $\mathbb{C}^{n+1}$  d'équations respectives

$$0 = \operatorname{Re} z_0 - \sum_{i,j \geq 1} a_{i,j} \bar{z}_i z_j + O(\|(\operatorname{Im} z_0, z_\alpha)\|^3) \text{ et } 0 = \operatorname{Re} z_0 - \sum_{i,j \geq 1} a'_{i,j} \bar{z}_i z_j + O(\|(\operatorname{Im} z_0, z_\alpha)\|^3)$$

où  $A = (a_{i,j})$  et  $A' = (a'_{i,j})$  sont hermitiennes non dégénérées. On note alors  $Q$  et  $Q'$  les quadriques associées à  $A$  et  $A'$ .

Soit  $F : \Omega \rightarrow \Omega'$  un biholomorphisme tel que  $F(M) \subset M'$ . On suppose qu'il existe  $p = (p_0, 0) \notin Q$  tel que  $F(p) = (p'_0, 0) \notin Q'$  et  $p, F(p)$  vérifient la condition du corollaire 1.12. Enfin, soit  $z \in M$  tel que  $\operatorname{Re} z_0 \operatorname{Re} p_0 > 0$ .

Si  $M$  et  $M'$  sont assez proches de  $Q$  et  $Q'$ , alors  $F$  est déterminé dans un voisinage de  $z$  par sa différentielle en  $p$ .

Le voisinage des équations de  $Q$  et  $Q'$  est entendu au sens de la topologie  $\mathcal{C}^3$ , et dépend de  $p$  et de  $z$ . Les hypothèses sur  $F$  assurent simplement que le théorème 1.24 s'applique à la source et au but.

## Chapitre 2

# Préliminaires en géométrie presque complexe

Le but de ce chapitre est de définir les objets (presque complexes) que nous manipulerons par la suite, et d'établir un certain nombre de lemmes techniques. La géométrie presque complexe, dans laquelle la multiplication par  $i$  est remplacée par la multiplication par un opérateur vérifiant  $J^2 = -id$ , offre une généralisation de toutes les notions liées à l'holomorphicité, et intervient également en géométrie symplectique. Depuis le théorème de A. Newlander et L. Nirenberg [44], on sait qu'une structure presque complexe n'est génériquement pas intégrable. La question se pose donc de savoir quels résultats demeurent. Les objets et outils spécifiques au cas intégrable devront pour cela être généralisés : la notion de  $J$ -plurisousharmonicité permettra par exemple de pallier à l'absence de principe du maximum pour des disques pseudo-holomorphes.

La première section regroupe les définitions et premières propriétés des structures presque complexes et des applications pseudo-holomorphes. Dans la deuxième section, on commence par introduire la forme de Levi, ce qui permet ensuite d'étendre les définitions usuelles de domaines strictement pseudoconvexes et de fonctions plurisousharmoniques. La troisième section est consacrée à l'étude de deux cas particuliers de structures presque complexes intervenant dans les prochains chapitres : les structures modèles, qui apparaissent naturellement comme limites de structures presque complexes dilatées de façon anisotrope ; et les petites déformations de la structure standard, qui montrent leur intérêt lors de l'étude de propriétés stables par petites perturbations.

## 2.1 Définitions

### 2.1.1 Variétés presque complexes

Considérons une variété réelle  $M$  de classe  $C^\infty$ , et  $TM$  son fibré tangent. Sauf précision, une sous-variété de  $M$  sera également supposée de classe  $C^\infty$ .

**Définition** Soit  $r \geq 1$  un réel. Une  $C^r$ -structure presque complexe  $J$  sur  $M$  est une section de classe  $C^r$  de  $\text{End}(TM)$  vérifiant  $J^2 = -id_{TM}$ . On dira que  $(M, J)$  est une variété  $C^r$ -presque complexe.

*Remarque 2.1*

1. Pour qu'une  $\mathcal{C}^r$ -structure sur  $M$  soit bien définie, il faut que  $M$  soit de classe au moins  $\mathcal{C}^{r+1}$ . Ainsi, la contrainte de régularité imposée aux applications pseudo-holomorphes viendra de la régularité de  $J$ , et non de celle de  $M$ ; on peut donc supposer sans se montrer restrictif que les variétés considérées sont lisses.
2. La régularité  $\mathcal{C}^r$  de  $J$  est préservée par changements de variables de classe  $\mathcal{C}^{r+1}$ .

Une variété presque complexe  $(M, J)$  est nécessairement de dimension paire. Quitte à se placer en coordonnées locales, on peut supposer que  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  et voir  $J$  comme une fonction à valeurs dans les matrices (réelles) de taille  $2n$ : autrement dit, si  $(M, J)$  est  $\mathcal{C}^r$ -presque complexe,  $J$  s'écrit comme un élément de  $\mathcal{C}^r(\mathbb{B}, \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}))$ .

Le premier exemple de variété presque complexe est l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de la *structure complexe standard*  $J_{st}$ , qui à tout point  $p \in \mathbb{R}^{2n}$  associe l'endomorphisme de  $T_p M = \mathbb{R}^{2n}$  donné par la matrice

$$J_{st} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n$ . La matrice  $J_{st}$  représente la multiplication par  $i$  lorsqu'on identifie canoniquement  $\mathbb{R}^{2n}$  à  $\mathbb{C}^n$  via l'isomorphisme  $(x, y) \mapsto z = x + iy$ .

Dans le cas général, le fibré tangent d'une variété presque complexe  $(M, J)$  est muni d'une structure de fibré vectoriel complexe par la multiplication  $(a + ib)X := aX + bJX$ . Pour tout  $p \in M$ , l'endomorphisme  $J_p$  a pour valeurs propres  $i$  et  $-i$  de même multiplicité. On note  $T_p^{(1,0)}(M, J)$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $i$  et  $T_p^{(0,1)}(M, J)$  le sous-espace propre associé à la valeur propre  $-i$ : ce sont des  $\mathbb{C}$ -sous-espaces vectoriels de dimension  $n$  de  $T_p M \otimes \mathbb{C}$ . Or pour tout  $V \in T_p M \otimes \mathbb{C}$ :

$$J_p(V - iJ_p V) = i(V - iJ_p V) \quad \text{et} \quad J_p(V + iJ_p V) = i(V + iJ_p V),$$

donc  $T_p^{(1,0)}(M, J) = \text{Im}(I_{2n} - iJ_p)$  et  $T_p^{(0,1)}(M, J) = \text{Im}(I_{2n} + iJ_p)$  où  $i$  désigne la structure complexe standard sur  $T_p M \otimes \mathbb{C}$ .

**Définition** La structure presque complexe  $J$  est dite *intégrable* lorsque  $(M, J)$  est une variété complexe, c'est-à-dire s'il existe un système de coordonnées dans lequel  $J$  coïncide avec  $J_{st}$  en tout point.

On peut déterminer si  $J$  est intégrable grâce au tenseur de Nijenhuis, défini par

$$N_J(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$$

pour tous vecteurs  $X, Y$  tangents à  $M$  au même point. En effet, le théorème de Newlander-Nirenberg [44] affirme que  $J$  est intégrable si et seulement si  $N_J$  est nul sur  $M$  (dans le cas où la structure n'est pas lisse, voir [45]).

*Remarque 2.2* La dénomination "intégrable" provient du fait que  $N_J$  s'annule sur  $M$  si et seulement si la distribution  $T^{(1,0)}M$  est intégrable (c'est-à-dire stable par le crochet de

Lie).

On vérifie ainsi que l'application qui à  $(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^6$  associe

$$J(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & x_1 & -y_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -y_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

définit une structure presque complexe non intégrable sur  $\mathbb{R}^6$  (pour d'autres exemples, voir la condition nécessaire et suffisante donnée dans [22] pour l'intégrabilité des structures modèles).

### 2.1.2 Pseudo-holomorphicité

On s'intéresse aux applications entre deux variétés presque complexes, c'est-à-dire dont la différentielle préserve la structure de  $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels des espaces tangents.

**Définition** Soit  $(M, J)$  et  $(M', J')$  deux variétés presque complexes. Une application  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $M$  dans  $M'$  est dite  $(J, J')$ -holomorphe si sa différentielle  $df : TM \rightarrow TM'$  vérifie l'équation :

$$\forall p \in M, df_p \circ J_p = J'_{f(p)} \circ df_p. \quad (2.1)$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix des structures presque complexes, on dira simplement que  $f$  est pseudo-holomorphe.

Si  $J$  et  $J'$  sont la structure standard, on retrouve les équations de Cauchy-Riemann.

*Remarque 2.3* Lorsque la variété de départ est le disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$  muni de la structure standard, on parle de *disque  $J'$ -holomorphe* : la condition (2.1) s'écrit alors  $\frac{\partial f}{\partial v} = J'_f \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$  si  $(u, v)$  sont les coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

Génériquement, pour une variété de départ  $(M, J)$ , il n'existe pas toujours d'application pseudo-holomorphe à valeurs dans  $(M', J')$ , y compris si  $(M', J') = (\Delta, J_{st})$ . Néanmoins, dans le cas où  $(M, J) = (\Delta, J_{st})$ , l'équation (2.1) représente un système elliptique quasi-linéaire du premier ordre qui admet des solutions non-triviales [45] : il existe donc une infinité de disques pseudo-holomorphes à valeurs dans une variété presque complexe donnée.

Par ailleurs, une application  $f : M \rightarrow M'$  supposée bijective, ou même seulement localement bijective, est  $(J, J')$ -holomorphe si et seulement si  $J' = df \circ J \circ df^{-1}$ . Autrement dit, la variété  $M'$  doit être munie de la structure presque complexe transportée par  $f$ , notée  $J' = f_* J$ .

*Remarque 2.4* S'il existe une application  $f : (M, J) \rightarrow (M', J')$  pseudo-holomorphe, localement difféomorphe, alors  $J$  est intégrable si et seulement si  $J'$  est intégrable.

Tout comme dans le cas holomorphe, les applications vérifiant (2.1) héritent leur régularité de celle de  $J$  :

**Proposition 2.5 (Lee [39])** *Soit  $(M^{2n}, J)$  et  $(M'^{2m}, J')$  deux  $\mathcal{C}^r$ -variétés presque complexes. Toute application pseudo-holomorphe de  $M$  dans  $M'$  est de classe  $\mathcal{C}^{r+1}$ .*

Ce résultat a été obtenu pour des disques par [33] et [56] (théorème 2.2.1). La proposition 2.5 est démontrée dans [39] dans le cas  $\mathcal{C}^\infty$ , mais sa preuve s'adapte immédiatement au cas  $\mathcal{C}^r$ ,  $r \geq 1$ .

## 2.2 Domaines strictement $J$ -pseudoconvexes

Dans ce travail, nous nous intéresserons au comportement au bord d'applications pseudo-holomorphes entre deux domaines strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes. Tout comme dans le cas standard, la définition de la stricte  $J$ -pseudoconvexité repose sur la notion de forme de Levi.

### 2.2.1 Forme de Levi

Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe et  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $\mathcal{C}^2$ . On définit la *forme de Levi*  $\mathcal{L}^J u$  de  $u$  de la façon suivante : pour tout  $X \in TM$ ,

$$d_J^c u(X) := -du(JX) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^J u(X) := d(d_J^c u)(X, JX),$$

où  $d$  désigne la différentielle extérieure.

### Expression en coordonnées

Plaçons-nous en coordonnées locales :  $d_J^c u = - \sum_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} J_{i,j} dx_j$  et

$$d(d_J^c u) = - \sum_{i,j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} J_{i,j} dx_k \wedge dx_i - \sum_{i,j,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_j.$$

Or  $dx_k \wedge dx_j(X, JX) = x_k(Jx)_j - (Jx)_k x_j = \sum_l x_k x_l J_{j,l} - \sum_l x_j x_l J_{k,l}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i,j,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} J_{i,j} dx_k \wedge dx_j \right) (X, JX) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} J_{i,j} J_{j,l} x_k x_l - \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} J_{i,j} J_{k,l} x_j x_l \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \left( \sum_{j,l} (J_{i,j} J_{j,l} x_l x_k - J_{i,j} J_{k,l} x_j x_l) \right) \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \left( \sum_l (J^2)_{i,l} x_l x_k - \left( \sum_j J_{i,j} x_j \right) \left( \sum_l J_{k,l} x_l \right) \right) \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} (-x_i x_k - (JX)_i (JX)_k) \\
&= -{}^t X D X - {}^t (JX) D (JX) \quad \text{où } D = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{et } \left( \sum_{i,j,k} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} dx_k \wedge x_j \right) (X, JX) \\
&= \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} J_{j,l} x_k x_l - \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} J_{k,l} x_j x_l \\
&= \sum_{j,k} \left( \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} \right) \left( \sum_l J_{j,l} x_l \right) x_k - \sum_{j,k} \left( \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} \right) \left( \sum_l J_{k,l} x_l \right) x_j \\
&= \sum_{j,k} A_{j,k} (JX)_j x_k - \sum_{j,k} A_{j,k} (JX)_k x_j \quad \text{où } A = \left( \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} \right)_{j,k} \\
&= {}^t (JX) A X - {}^t X A (JX) = {}^t X ({}^t A - A) JX = -{}^t X A JX - {}^t (JX) A J (JX).
\end{aligned}$$

**Lemme 2.6** Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe. Dans un système de coordonnées locales,

$$\mathcal{L}^J u(X) = {}^t X D X + {}^t (JX) D (JX) + {}^t X (A - {}^t A) JX, \quad (2.2)$$

où

$$D = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq 2n} \quad \text{et} \quad A = \left( \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq 2n}.$$

*Remarque 2.7* Si  $J(p) = J_0 + o(\|p\|^2)$  où  $J_0$  est une structure presque complexe constante, alors  $\mathcal{L}_p^J u = \mathcal{L}_p^{J_0} u$ . Plus généralement, en posant  $J = J_0 + H$  :

$$\mathcal{L}^J u(X) = \mathcal{L}^{J_0} u(X) + 2 {}^t (HX) D (J_0 X) + {}^t (HX) D (HX) + {}^t X (A - {}^t A) (J_0 + H) X.$$

Dans le cas standard,  $\mathcal{L}^{Jst}u$  est représentée matriciellement par  $\left(4 \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ . En particulier, si  $n = 1$ ,  $\mathcal{L}^{Jst}u(x) = \Delta u \cdot x^2$ , où  $\Delta u$  est le laplacien de  $u$ . Dans le cas général, on peut encore relier la forme de Levi au laplacien le long des disques pseudo-holomorphes :

**Lemme 2.8** (voir [17] et [28]) *Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur une variété presque complexe  $(M, J)$ , et  $h : \Delta \rightarrow M$  un disque  $J$ -holomorphe. Le laplacien de la fonction  $u \circ h$  au point  $\zeta \in \Delta$  vaut*

$$\Delta(u \circ h)_\zeta = \mathcal{L}_{h(\zeta)}^J(u) \left( \frac{\partial h}{\partial x}(\zeta) \right).$$

### Preuve

Commençons par calculer le laplacien. Notons  $D = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(h) \right)_{i,j}$  et  $X = \frac{\partial h}{\partial x}$  : d'après la remarque 2.3,  $\frac{\partial h}{\partial y}(\zeta) = J_{h(\zeta)}X$  et

$$\frac{\partial^2(u \circ h)}{\partial x^2} = {}^t X D X + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_h \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2(u \circ h)}{\partial y^2} = {}^t (J_h X) D (J_h X) + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_h \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2}.$$

Vu (2.2), il reste à montrer  $\sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_h \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_h \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} = {}^t (J_h X) A X - {}^t X A (J_h X)$  où  $A = \left( \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_h \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} \Big|_h \right)_{j,k}$ . Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(u \circ h)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( J_h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \Big|_h \frac{\partial h_k}{\partial y} X + J_h \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \Big|_h \frac{\partial h_k}{\partial y} X + J_h \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \Big|_h \frac{\partial h_k}{\partial x} X + J_h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \Big|_h \frac{\partial h_k}{\partial y} X + J_h \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \Big|_h \frac{\partial h_k}{\partial x} X - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{aligned}$$

puisque  $J^2 = -I_{2n}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 h_i}{\partial x^2} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 h_i}{\partial y^2} &= \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \frac{\partial h_k}{\partial y} X + J_h \sum_{k=1}^{2n} \frac{\partial J}{\partial x_k} \frac{\partial h_k}{\partial x} X \right)_i \\ &= \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} J_{k,l} x_l x_j + \sum_{i,j,k,l} \frac{\partial u}{\partial x_i} J_{i,j} \frac{\partial J_{j,l}}{\partial x_k} x_k x_l, \end{aligned}$$

d'où la conclusion.  $\square$

**Effet d'un changement de variables linéaire**

On raisonne toujours en coordonnées locales. Soit  $P \in GL_{2n}(\mathbb{R})$  et  $\phi : x \mapsto P^{-1}x$ . Posons  $\tilde{J} = \phi_* J = P^{-1}J$ ,  $\tilde{u} = u \circ \phi^{-1}$  et cherchons le lien entre  $\mathcal{L}^{\tilde{J}}\tilde{u}$  et  $\mathcal{L}^J u$ . On a

$$\tilde{u}(x) = u(P(x)) = u\left(\sum_l P_{1,l}x_l, \dots, \sum_l P_{2n,l}x_l\right) \quad \text{et} \quad \tilde{J}(x) = P^{-1}J(Px)P.$$

Or  $\mathcal{L}^{\tilde{J}}\tilde{u}_x(X) = {}^tX\tilde{D}(x)X + {}^t(\tilde{J}(x)X)\tilde{D}(x)(\tilde{J}(x)X) + {}^tX\tilde{A}(x)\tilde{J}(x)X - {}^t(\tilde{J}(x)X)\tilde{A}(x)X$  où

$$\tilde{D} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j} \quad \text{et} \quad \tilde{A} = \left(\sum_i \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{J}_{i,j}}{\partial x_k}\right)_{j,k}.$$

On obtient  $\tilde{D}(x) = {}^tPD(Px)P$  et

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{i,j}(x) &= \sum_k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_k}(x) \frac{\partial \tilde{J}_{k,i}}{\partial x_j}(x) \\ &= \sum_k \left(\sum_m P_{m,k} \frac{\partial u}{\partial x_m}(Px)\right) \left(\sum_{l,p} (P^{-1})_{k,l} \times \left(\sum_s \frac{\partial J_{l,p}}{\partial x_s}(Px) P_{s,j}\right) P_{p,i}\right) \\ &= \sum_{l,m,p,s} \frac{\partial u}{\partial x_m}(Px) \delta_{m,l} \frac{\partial J_{l,p}}{\partial x_s}(Px) P_{s,j} P_{p,i} \\ &= \sum_{p,s} A_{p,s}(Px) P_{s,j} P_{p,i} \end{aligned}$$

donc  $\tilde{A}(x) = {}^tPA(Px)P$ . Finalement :

$$\mathcal{L}_x^{\tilde{J}}\tilde{u}(X) = \mathcal{L}_{Px}^J u(PX). \quad (2.3)$$

**2.2.2 Stricte  $J$ -pseudoconvexité et  $J$ -plurisousharmonicité**

Avant de définir la stricte  $J$ -pseudoconvexité similairement au cas standard, commençons par fixer les notations. Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe et  $TM$  son fibré tangent. On peut construire explicitement (voir [63]) une structure presque complexe  $J^*$  sur le fibré cotangent  $T^*M$ , de sorte que tout  $(J, J')$ -biholomorphisme local  $F : M \rightarrow M'$  se relève en un  $(J^*, J'^*)$ -biholomorphisme local  $(F, {}^t(dF)^{-1})$ .

Si  $\Gamma$  est une sous-variété de  $M$ , on définit également son fibré tangent complexe  $T^{\mathbb{C},J}\Gamma := T\Gamma \cap J T\Gamma$  et son fibré conormal

$$N^*\Gamma = \{\phi \in (T^{(1,0)}M)^* / \operatorname{Re} \phi_{T\Gamma} = 0\},$$

qui est une sous-variété du fibré cotangent  $T^*M$ .

**Définition** Une hypersurface réelle  $\Gamma$  de  $(M, J)$  est dite strictement pseudoconvexe (resp. non dégénérée) en un point  $p \in \Gamma$  s'il existe au voisinage de  $p$  une fonction définissante  $\rho$  dont la restriction de la forme de Levi  $\mathcal{L}_p^J \rho$  à  $T_p^{(\mathbb{C},J)}\Gamma$  soit définie positive (resp. non

dégénérée). On dit que  $\Gamma$  est strictement pseudoconvexe si elle est strictement pseudoconvexe en tout point, et on définit de façon similaire une hypersurface non dégénérée.

*Remarque 2.9* Ces conditions ne dépendent pas du choix de la fonction définissante de  $\Gamma$ . De plus, puisque l'application  $(\rho, J) \mapsto \mathcal{L}^J \rho$  est continue, elles restent stables par petites perturbations de l'hypersurface et de la structure presque complexe.

Le caractère non dégénéré se “voit” sur le fibré conormal. Rappelons qu'une sous-variété  $\Gamma$  est *totale-ment réelle* si son fibré tangent complexe est trivial. Le résultat suivant généralise la proposition 2.14 :

**Proposition 2.10** [22] *Soit  $\Gamma$  une hypersurface réelle de  $(M, J)$ . Alors  $\Gamma$  est non dégénérée si et seulement si le fibré conormal  $N^*\Gamma$  privé de la section nulle est totalement réel dans  $(T^*M, J^*)$ .*

Un domaine  $D$  à bord de classe  $\mathcal{C}^2$  d'une variété presque complexe  $(M, J)$  est strictement pseudoconvexe en un point  $p \in \partial D$  si  $\partial D$  est strictement pseudoconvexe en  $p$ . Lorsque  $\partial D$  est strictement pseudoconvexe, on dit que le domaine  $D$  est *strictement pseudoconvexe*. Remarquons que la caractérisation de la stricte  $J$ -pseudoconvexité du bord donnée dans la proposition 2.10 est préservée par biholomorphisme : plus précisément, si  $F : D \rightarrow D'$  est un  $(J, J')$ -biholomorphisme local de classe  $\mathcal{C}^1$  jusqu'au bord, son *application cotangente*  $(F, {}^t(dF)^{-1})$  est continue jusqu'à  $N^*(\partial D)$  et envoie  $N^*(\partial D)$  dans  $N^*(\partial D')$ .

La notion de pseudoconvexité conduit naturellement à celle de plurisousharmonicité. Pour un domaine  $D$  borné de  $M$  et  $u : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , la fonction continue

$$(x, X) \mapsto \frac{\mathcal{L}_x^J u(X)}{\|X\|^2}$$

admet un minimum sur le compact  $\bar{D} \times S^{2n-1}$ , qu'on notera  $\lambda_0(D, J, u)$ .

*Remarque 2.11*  $\lambda_0(D, J, u)$  est la plus petite valeur propre de la forme quadratique  $\mathcal{L}^J u$  sur  $\bar{D}$ .

**Définition** On dit que  $u$  est :

- $J$ -plurisousharmonique sur  $D$ , si  $\lambda_0(D, J, u) \geq 0$ , c'est-à-dire si sa forme de Levi est positive ;
- strictement  $J$ -plurisousharmonique sur  $D$ , si  $\lambda_0(D, J, u) > 0$ , c'est-à-dire si sa forme de Levi est définie positive.

Vu le lemme 2.8,  $u$  est strictement  $J$ -plurisousharmonique si et seulement si pour tout disque  $J$ -holomorphe  $h : \Delta \rightarrow M$  centré en  $p$  et tel que  $(\partial h / \partial x)(0) = v$ , avec  $v \neq 0$  :

$$\Delta(u \circ h)_0 = \mathcal{L}_p^J u(v) > 0.$$



*Remarque 2.13* L'examen de la démonstration montre que le pseudo-biholomorphisme construit est en fait un difféomorphisme global de  $\mathbb{C}^{n+1}$ , de la forme

$$\Psi(z) = (z_0 + \psi('z), \Psi('z))$$

où  $\psi$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en  $'z$  et  $\bar{z}$ , et où  $\Psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est linéaire en  $'z$ . En particulier :

1. pour tout  $t < 0$ ,  $\Psi(t, \mathbf{0}) = (t, \mathbf{0})$  ;
2. si le domaine modèle  $\Sigma$  a pour équation  $0 = \tilde{r}(z) = \operatorname{Re} z_0 + P('z, \bar{z}) < 0$  où  $P$  est un polynôme réel homogène de degré 2 sur  $\mathbb{C}^n$ , alors

$$\tilde{r} \circ \Psi^{-1}(z) = \operatorname{Re} z_0 + \|\bar{z}\|^2.$$

*Remarque 2.14* La démonstration de la proposition 2.12 et le théorème 6.10 de [38] montrent également que si la structure modèle  $J$  est intégrable, on peut imposer  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{st}$ .

La forme des structures modèles simples induit pour une application  $F = (F_0, 'F)$  pseudo-holomorphe entre deux domaines modèles simples un comportement particulier. Vu la proposition 2.12, on peut supposer que les domaines considérés sont le demi-plan de Siegel  $\mathbb{H}$ .

**Proposition 2.15** (voir [38]) *Soit  $F : (\mathbb{H}, \mathcal{J}) \rightarrow (\mathbb{H}, \mathcal{J}')$  une application pseudo-holomorphe où  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  sont des structures modèles simples non intégrables. Alors il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que*

$$\forall z = (z_0, 'z) \in \mathbb{H}, F(z) = (cz_0 + f('z), 'F('z)) \quad (2.5)$$

où  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est antiholomorphe et  $'F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  est holomorphe (au sens standard).

### Preuve

Le calcul des coefficients du tenseur de Nijenhuis  $N_{\mathcal{J}}$  montre que, puisque  $\mathcal{J}$  est par hypothèse non intégrable, il existe  $j, k$  tels que  $b_{j,k}^{\mathcal{J}} - b_{k,j}^{\mathcal{J}} \neq 0$ ; fixons ainsi  $j$  et  $k$ . L'identification des coefficients dans l'égalité  $dF \left( N_{\mathcal{J}} \left( \frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right) = N_{\mathcal{J}'} \left( dF \left( \frac{\partial}{\partial z_j} \right), dF \left( \frac{\partial}{\partial z_k} \right) \right)$  équivaut à

$$\forall l \geq 1, \frac{\partial F_l}{\partial z_0} = \frac{\partial F_l}{\partial \bar{z}_0} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial z_0} = \frac{1}{b_{j,k}^{\mathcal{J}} - b_{k,j}^{\mathcal{J}}} \sum_{l,m=1}^n \frac{\partial \bar{F}_l}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \bar{F}_m}{\partial \bar{z}_k} (b_{l,m}^{\mathcal{J}'} - b_{m,l}^{\mathcal{J}'}). \quad (2.7)$$

D'après (2.6), les composantes  $F_1, \dots, F_n$  de  $F$  sont indépendantes de  $z_0$  et  $\bar{z}_0$  (c'est-à-dire de  $x_0$  et  $y_0$ ). De plus  $F$  est  $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -holomorphe;  $\mathcal{J}, \mathcal{J}'$  étant des structures modèles simples :

$$dF \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}' \circ dF \implies \begin{cases} \mathcal{J}_{st}^{(1)} \circ d_{z_0} F = d_{z_0} F \circ \mathcal{J}_{st}^{(n)} \\ \mathcal{J}_{st}^{(n)} \circ d('F) = d('F) \circ \mathcal{J}_{st}^{(n)}. \end{cases}$$

Ainsi  $'F : 'z \mapsto (F_1('z), \dots, F_n('z))$  et  $z_0 \mapsto F_0(z_0, 'z)$  sont holomorphes (au sens standard). Par conséquent, vu (2.7),  $\frac{\partial F_0}{\partial z_0}$  est indépendante de  $z_0$  et anti-holomorphe en  $'z$  :

$$F_0(z) = c('z)z_0 + f('z)$$

où  $c$  et  $f$  sont anti-holomorphes. A  $'z \in \mathbb{C}^n$  fixé, l'application  $z_0 \mapsto F_0(z_0, 'z)$  est définie sur  $\{\zeta \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \zeta < -\| 'z \|^2\}$ , à valeurs dans  $\{\zeta \in \mathbb{C} / \operatorname{Re} \zeta < -\| 'F('z) \|^2\}$  : nécessairement  $c$  est à valeurs réelles, donc constante puisqu'elle est anti-holomorphe.  $\square$

### 2.3.2 Petites déformations de la structure standard

Soit  $(M, J)$  une variété  $\mathcal{C}^r$ -presque complexe de dimension  $2n$ . Quitte à se placer en coordonnées locales, on peut supposer que  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $J \in \mathcal{C}^r(\mathbb{B}, \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}))$ . Ecrivons  $J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , où les blocs sont de taille  $n$  : si  $J$  est une petite déformation de la structure standard  $J_{st}$ , les matrices  $A$  et  $D$  sont proches de la matrice nulle, la matrice  $B$  est proche de  $-I_n$  et la matrice  $C$  proche de  $I_n$ , en particulier inversible. On obtient :

$$J^2 = -I_{2n} \iff J = \begin{pmatrix} A & -(I_n + A^2)C^{-1} \\ C & -CAC^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

et l'ensemble des structures presque complexes proches de la structure standard est une variété banachique modélée sur  $\mathcal{C}^r(\mathbb{B}, \mathbb{R}^{2n^2})$ .

#### Champs de vecteurs et formes $J$ -holomorphes

Supposons  $J$  proche de la structure standard :  $(\frac{\partial}{\partial x_1}, J\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, J\frac{\partial}{\partial x_n})$  reste une  $\mathbb{C}$ -base de  $TM \otimes \mathbb{C}$ . Posons, pour tout  $1 \leq j \leq n$ ,

$$\frac{\partial^J}{\partial z_j} := \frac{1}{2}(I_{2n} - iJ)\frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^J}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}(I_{2n} + iJ)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Alors  $(\frac{\partial^J}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial^J}{\partial z_n})$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $T^{(1,0)}(M, J)$  et  $(\frac{\partial^J}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial^J}{\partial \bar{z}_n})$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $T^{(1,0)}(M, J)$ , donc  $\mathcal{B} = (\frac{\partial^J}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial^J}{\partial z_n}, \frac{\partial^J}{\partial \bar{z}_1}, \dots, \frac{\partial^J}{\partial \bar{z}_n})$  est une  $\mathbb{C}$ -base de  $TM \otimes \mathbb{C}$ .

On cherche sa base duale  $\mathcal{B}^* = (d^J z_1, \dots, d^J z_n, d^J \bar{z}_1, \dots, d^J \bar{z}_n)$ . Or si  $J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ,  $\mathcal{B}$  a pour matrice dans la base canonique

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I_n - iA & I_n + iA \\ -iC & iC \end{pmatrix},$$

donc  $\mathcal{B}^*$  a pour matrice  ${}^tP^{-1} = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ i{}^t((I_n + iA)C^{-1}) & -i{}^t((I_n - iA)C^{-1}) \end{pmatrix}$ . Ainsi, en posant

$$M := i{}^t((I_n + iA)C^{-1}) \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

on obtient

$$\begin{cases} d^J z = dx + Mdy = \frac{1}{2}(I_n - iM)dz + \frac{1}{2}(I_n + iM)d\bar{z} \\ d^J \bar{z} = dx + \bar{M}dy = \frac{1}{2}(I_n - i\bar{M})dz + \frac{1}{2}(I_n + i\bar{M})d\bar{z} \end{cases} .$$

Comme  $J \approx J_{st}$ ,  $M$  s'écrit  $iI_n + H$  avec  $H = R + iS$  "petit" et

$$d^J z = dz + Hdy, \quad d^J \bar{z} = d\bar{z} + \bar{H}dy.$$

On obtient donc  $C = (S + I_n)^{-1}$  et  $A = -R(S + I_n)^{-1}$ . Par conséquent :

**Proposition 2.16** *Pour toute famille de formes différentielles s'écrivant  $\omega = dz + Hdy$  avec  $H = R + iS$  assez proche de  $0_n$ , il existe une unique structure presque complexe  $J$  proche de  $J_{st}$  telle que  $\omega$  soit une base de  $(1,0)$ -formes pour  $J$ . Elle est donnée matriciellement par*

$$J = \begin{pmatrix} -R(S + I)^{-1} & -(I + R^2)(S + I) \\ (S + I)^{-1} & -(S + I)^{-1}R(S + I) \end{pmatrix} .$$

### Equation de $J$ -holomorphicité

Soit  $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  une application de classe  $\mathcal{C}^1$ . On note  $(u, v)$  les coordonnées dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  identifié de façon standard à  $\mathbb{C}$  :  $\frac{\partial h}{\partial u}$  et  $\frac{\partial h}{\partial v}$  sont dans  $TM$ , a fortiori dans  $TM \otimes \mathbb{C} = T^{(1,0)}(M, J) \oplus T^{(0,1)}(M, J)$ , donc se décomposent de la façon suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \operatorname{Re} X \quad \text{où } X \in T^{(0,1)}(M, J) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial v} = \operatorname{Re} Y \quad \text{où } Y \in T^{(0,1)}(M, J).$$

L'application  $h$  est  $J$ -holomorphe si et seulement si  $\frac{\partial h}{\partial v} = J_h \frac{\partial h}{\partial u}$ . En séparant les parties réelles et imaginaires, la condition de  $J$ -holomorphicité devient  $\frac{\partial h}{\partial u} + i\frac{\partial h}{\partial v} = X$ . Autrement dit,

$$h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \text{ est } J\text{-holomorphe} \iff \forall \zeta \in \Delta, \quad \frac{\partial h}{\partial u}(\zeta) + i\frac{\partial h}{\partial v}(\zeta) \in T_{h(\zeta)}^{(0,1)}(M, J)$$

où  $i$  est la structure complexe standard sur  $TM \otimes \mathbb{C}$ . Ainsi, s'il existe une base de  $(1,0)$ -formes du type  $d^J z = dx + Mdy$  :

$$h \text{ est } J\text{-holomorphe} \iff (I_n \quad {}^t M) \left( \frac{\partial h}{\partial u} + i\frac{\partial h}{\partial v} \right) = 0.$$

Similairement au cas standard, posons

$$\frac{\partial h}{\partial \zeta} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial u} - J_{st} \frac{\partial h}{\partial v} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial u} + J_{st} \frac{\partial h}{\partial v} \right).$$

Il vient  $\frac{\partial h}{\partial u} + i\frac{\partial h}{\partial v} = (I_{2n} + iJ_{st})\frac{\partial h}{\partial \zeta} + (I_{2n} - iJ_{st})\frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}}$  et

$$(I_n \quad {}^t M) \left( \frac{\partial h}{\partial u} + i\frac{\partial h}{\partial v} \right) = (I_n + i{}^t M \quad -iI_n + {}^t M) \frac{\partial h}{\partial \zeta} + (I_n - i{}^t M \quad iI_n + {}^t M) \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}}. \quad (2.10)$$

**Lemme 2.17** Si  $J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  est proche de la structure standard de  $\mathbb{R}^{2n}$ , une application  $h : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  de classe  $C^1$  est  $J$ -holomorphe sur  $\Delta$  si et seulement si

$$\forall \zeta \in \Delta, \begin{pmatrix} I - C^{-1} & -AC^{-1} \\ -AC^{-1} & -I + C^{-1} \end{pmatrix} \Big|_{h(\zeta)} \frac{\partial h}{\partial \zeta} + \begin{pmatrix} I + C^{-1} & -AC^{-1} \\ AC^{-1} & I + C^{-1} \end{pmatrix} \Big|_{h(\zeta)} \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} = 0.$$

**Preuve**

D'après (2.9) et la proposition 2.16, la matrice  $M$  dans (2.10) vaut  $M = i^t((I + iA)C^{-1})$ , et en séparant partie réelle et partie imaginaire on obtient :

$$\begin{cases} 0 = (I - C^{-1} & -AC^{-1}) \frac{\partial h}{\partial \zeta} + (I + C^{-1} & -AC^{-1}) \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}} \\ 0 = (-AC^{-1} & -I + C^{-1}) \frac{\partial h}{\partial \zeta} + (AC^{-1} & I + C^{-1}) \frac{\partial h}{\partial \bar{\zeta}}. \end{cases}$$

□

**Deux lemmes de changement de variables**

On suppose que  $(M, J)$  est une variété  $C^r$ -presque complexe. Si  $M$  est de dimension  $2n$ , et si  $E$  est une sous-variété totalement réelle de  $M$ , on dit que  $E$  est *totalement réelle maximale* si elle est de dimension  $n$ . Les deux lemmes suivants permettent de se ramener à des cartes de la variété dotées de propriétés particulières.

**Lemme 2.18** Soit  $(M^{2n}, J)$  une variété  $C^r$ -presque complexe ( $r \geq 1$ ),  $E$  une sous-variété totalement réelle maximale de  $M$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $p \in M$ . Il existe une carte  $z : U \rightarrow \mathbb{B}^{2n}$  au voisinage de  $p$  telle que  $\|z_*J - J_{st}\|_{C^1} \leq \varepsilon$ . Lorsque  $p \in E$ , on obtient  $z$  de classe  $C^r$  vérifiant :

1.  $z(U \cap E) = \mathbb{R}^n \cap \mathbb{B}^{2n}$  ;
2.  $\|(z_*J)_{(x^*, y^*)} - J_{st}\| \leq cste \varepsilon \|y^*\|$  ;
3. l'équation de  $z_*J$ -holomorphie s'écrit  $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} + Q \times \frac{\partial}{\partial \zeta} = 0$ , où  $Q$  est de classe  $C^{r-1}$  et vérifie  $\|Q(x^*, y^*)\| \leq cste \varepsilon \|y^*\|$ .

**Preuve**

Considérons comme dans [15] (lemme 2.1) une carte  $(z', U')$  au voisinage de  $p$  telle que  $z'(p) = 0$ ,  $(z'_*J)_0 = J_{st}$  et  $z'(U \cap E) = \mathbb{R}^n \cap \mathbb{B}^{2n}$  si  $p \in E$ . Pour  $t > 0$ , notons  $d_t : q \mapsto q/t$  la dilatation dans  $\mathbb{R}^{2n}$ , et la composée  $z_t := d_t \circ z'$  : pour  $t$  assez petit,  $z = z_t$ ,  $U = z_t^{-1}(\mathbb{B})$  vérifient bien la condition  $\|z_*J - J_{st}\|_{C^1} \leq \varepsilon$ , ainsi que la condition 1. si  $p \in E$ .

Quitte à raisonner "à travers  $z$ ", on peut donc supposer  $M = \mathbb{B}^{2n}$ ,  $E = \mathbb{R}^n \cap \mathbb{B}^{2n}$  et d'après (2.8) écrire  $J$  en coordonnées locales sous la forme

$$J = \begin{pmatrix} A & -(I_n + A^2)C^{-1} \\ C & -CAC^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \|A\|_{C^1} \leq \varepsilon'' \quad \text{et} \quad \|C - I_n\|_{C^1} \leq \varepsilon''.$$

Posons

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} I_n & -A(x, y)C(x, y)^{-1} \\ 0 & C(x, y)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^* := x - AC^{-1}y \\ y^* := C^{-1}y \end{pmatrix}.$$

Alors

$$d\phi_{(x,y)} \leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(AC^{-1})_{i,k}}{\partial x_j} \right)_{(i,j)} y_k & - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(AC^{-1})_{i,k}}{\partial y_j} \right)_{(i,j)} y_k - AC^{-1} \\ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(C^{-1})_{i,k}}{\partial x_j} \right)_{(i,j)} y_k & \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(C^{-1})_{i,k}}{\partial y_j} \right)_{(i,j)} y_k + C^{-1} \end{pmatrix}$$

est proche de  $I_{2n}$  :  $\phi$  est donc un difféomorphisme local en tout point. En particulier, il existe un ouvert  $\tilde{U}$  au voisinage de  $p$  tel que  $\phi$  induise un difféomorphisme de classe  $C^r$  de  $\tilde{U}$  sur  $\phi(\tilde{U})$ . Vérifions que  $\tilde{z} := \phi \circ z$  convient.

1.  $\phi(x, y) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow y^* = 0 \Leftrightarrow y = 0$  (et même :  $\phi|_{\mathbb{R}^n} = id_{\mathbb{R}^n}$ ).

2.  $d\phi_{(x,y)} \leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n & -A(x, y)C^{-1}(x, y) \\ 0 & C^{-1}(x, y) \end{pmatrix} + H(x, y)$  où

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(AC^{-1})_{i,k}}{\partial x_j} \right)_{(i,j)} y_k & - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(AC^{-1})_{i,k}}{\partial y_j} \right)_{(i,j)} y_k \\ \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(C^{-1})_{i,k}}{\partial x_j} \right)_{(i,j)} y_k & \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial(C^{-1})_{i,k}}{\partial y_j} \right)_{(i,j)} y_k \end{pmatrix},$$

d'où

$$d\phi_{\phi(x,y)}^{-1} = (d\phi_{(x,y)})^{-1} \leftrightarrow \left( I_{2n} + \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & C \end{pmatrix} \times H \right)^{-1} \times \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned} (\phi_* J)_{(x^*, y^*) = \phi(x, y)} &= d\phi_{(x, y)} \circ J_{(x, y)} \circ d\phi_{\phi(x, y)}^{-1} \\ &\leftrightarrow \begin{pmatrix} I_n & -AC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -(I_n + A^2)C^{-1} \\ C & -CAC^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & C \end{pmatrix} + \tilde{H} \\ &= J_{st} + \tilde{H} \end{aligned}$$

où  $\|H(x^*, y^*)\| \leq cste \varepsilon'' \|y^*\|$ .

3. D'après le lemme 2.17, l'équation d'holomorphic pour la  $C^{r-1}$ -structure presque complexe  $\tilde{z}_* J = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$ , vérifiée par  $g = \tilde{z} \circ h$ , est de la forme

$$\underbrace{\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} + \begin{pmatrix} I_n + \tilde{C}^{-1} & -\tilde{A}\tilde{C}^{-1} \\ \tilde{A}\tilde{C}^{-1} & I_n + \tilde{C}^{-1} \end{pmatrix}^{-1}}_{Q \circ g(\zeta)} \begin{pmatrix} I_n - \tilde{C}^{-1} & -\tilde{A}\tilde{C}^{-1} \\ -\tilde{A}\tilde{C}^{-1} & -I_n + \tilde{C}^{-1} \end{pmatrix}_{|g(\zeta)} \times \frac{\partial g}{\partial \zeta} = 0$$

où  $Q(x^*, y^*) = (I_{2n} + O(\|y^*\|))^{-1} \times O(\|y^*\|) \leq cste \|y^*\|$ .

□

*Remarque 2.19* la base de  $(1, 0)$ -formes correspondante s'écrit

$$dx^* + (iI_n + O(\|y^*\|))dy^* = dz^* + O(\|y^*\|)dy^*.$$

On dira qu'un atlas d'une variété  $C^r$ -presque complexe  $(M, J)$  est  $(\varepsilon, E)$ -adapté (où  $E$  est une sous-variété totalement réelle maximale de  $M$ ) s'il est formé de cartes vérifiant les propriétés énoncées dans le lemme 2.18. Un domaine borné  $D$  de  $M$  admet un recouvrement fini  $(z_i, U_i)_{1 \leq i \leq s}$  par de telles cartes, et pour toute application  $f$  de classe  $C^{r'}$  à valeurs dans  $\bar{D}$ , on pose

$$\|f\|_\infty := \text{Max}_i \|z_i \circ f|_{f^{-1}(U_i)}\|_\infty \quad \text{et} \quad \|f\|_{r'} := \text{Max}_i \|z_i \circ f|_{f^{-1}(U_i)}\|_{r'}.$$

Définissons également

$$\lambda_E^J := \min_i \lambda_0(\mathbb{B}^{2n}, z_{i*}J, u), \quad (2.11)$$

où  $u(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \dots + y_n^2$  et  $\lambda_0(\mathbb{B}^{2n}, z_{i*}J, u)$  est la plus petite valeur propre de la forme de Levi de  $u$  : on dira que  $\lambda_E^J$  est la  $J$ -courbure minimale de  $E$ .

Le lemme suivant permet de relever la structure presque complexe d'une variété en une structure presque complexe sur le fibré tangent, tout en conservant certaines propriétés :

**Lemme 2.20** *Soit  $(M, J)$  une variété  $C^r$ -presque complexe ( $r \geq 2$ ),  $E$  une sous-variété totalement réelle maximale de  $M$  et  $\varepsilon > 0$ . Soit  $p \in E$  et  $(z, U)$  une carte  $(\varepsilon, E)$ -adaptée au voisinage de  $p$ . On note  $M^c := TM$  et  $E^c = TE$ .*

*Il existe une structure presque complexe  $J^c$  sur  $M^c$ , de classe  $C^{r-1}$ , qui induit  $J$  sur  $M$  et telle que :*

- $E^c$  est totalement réelle maximale dans  $(M^c, J^c)$  ;
- la carte  $z^c = (z, dz)$  au voisinage de  $(p, 0) \in E^c$  est  $(\varepsilon, E^c)$ -adaptée.

**Preuve**

On raisonne à travers la carte  $z$  pour  $M$  et la carte  $z^c$  pour  $M^c$ . En coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  pour  $M$  et  $(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n, y_1, \dots, y_n, Y_1, \dots, Y_n)$  pour  $M^c$  (où les  $X_i, Y_i$  sont les coordonnées des fibres), on écrit  $J = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  et on pose comme dans [22] (démonstration de la proposition 3.2), à changement de base près :

$$\alpha = \sum_{k=1}^n (X_k \frac{\partial A}{\partial x_k} + Y_k \frac{\partial A}{\partial y_k}), \quad \beta = \sum_{k=1}^n (X_k \frac{\partial B}{\partial x_k} + Y_k \frac{\partial B}{\partial y_k}),$$

$$\gamma = \sum_{k=1}^n (X_k \frac{\partial C}{\partial x_k} + Y_k \frac{\partial C}{\partial y_k}), \quad \delta = \sum_{k=1}^n (X_k \frac{\partial D}{\partial x_k} + Y_k \frac{\partial D}{\partial y_k}).$$

D'après [22],

$$J^c := \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ \alpha & A & \beta & B \\ C & 0 & D & 0 \\ \gamma & C & \delta & D \end{pmatrix}$$

est une structure presque complexe sur  $M^c$  pour laquelle  $E^c = TE$  est totalement réelle. Le changement de carte donné par le lemme 2.18 s'écrit

$$\phi(x, y) = \begin{pmatrix} I_n & -AC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

et celui pour  $M^c$

$$\phi^c(x, X, y, Y) = \begin{pmatrix} I_{2n} & - \begin{pmatrix} A & 0 \\ \alpha & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ \gamma & C \end{pmatrix}^{-1} \\ 0 & \begin{pmatrix} C & 0 \\ \gamma & C \end{pmatrix}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ X \\ y \\ Y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en notant  $\iota : M \hookrightarrow M^c$  l'injection canonique et  $\pi : M^c \rightarrow M$  la projection cano-

$$\text{nique : } \pi \circ \phi^c \circ \iota \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pi \circ \phi^c \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - AC^{-1}y \\ C^{-1}y \end{pmatrix} = \phi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad \square$$

## Chapitre 3

# Régularité et estimation au bord d'un disque $J$ -holomorphe

Les disques  $J$ -holomorphes attachés à une sous-variété totalement réelle possèdent des propriétés particulières de régularité au bord. Dans le cas intégrable, on sait [9] que si la sous-variété est de classe  $C^r$ , le disque est de classe  $C^{r-0}$ . Nous allons montrer que dans le cas presque complexe, pour une sous-variété lisse, la régularité au bord comme les estimées des normes hölderiennes dépendent de la structure presque complexe.

Plus précisément, le théorème 3.19 généralise l'estimation uniforme donnée dans [41] par L. Lempert pour les applications stationnaires d'un domaine  $D$  à l'aide de la courbure et du diamètre de  $\partial D$ , et donne la régularité au bord en fonction de celle de la structure. Il s'agit donc d'une version quantitative du résultat obtenu dans [15] et [21] pour le cas d'une structure lisse. La preuve repose sur les mêmes techniques, notamment une minoration de la métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden, elle-même basée sur la construction de classes particulières de fonctions  $J$ -plurisousharmoniques. Indépendamment de l'étude des applications  $J$ -holomorphes, cette estimation de la métrique de Kobayashi (dont on ne possède pas, en général, d'expression explicite) présente un intérêt en ce qu'elle permet de mesurer la "taille" des disques  $J$ -holomorphes contenus dans un domaine.

Dans la première section, on construit des fonctions  $J$ -plurisousharmoniques, qui serviront à obtenir dans la section 2 une minoration explicite de la métrique de Kobayashi. La troisième section établit le théorème 3.19 : partant d'une régularité  $1/2$ -hölderienne, on récupère automatiquement une régularité supérieure en réinjectant dans l'équation de pseudo-holomorphie. Enfin, on applique dans la section 4 le résultat obtenu à l'étude d'une application pseudo-holomorphe le long de l'arête d'un wedge.

### 3.1 Problèmes de plurisousharmonicité

Dans cette section, on se place en coordonnées locales ; on suppose donc que  $M$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ , et on note  $J_{st} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$  la structure complexe standard. Le but est d'obtenir une estimation de la métrique de Kobayashi à l'aide de manipulations sur des fonctions plurisousharmoniques. Pour construire de telles fonctions, on part de fonctions  $J_{st}$ -plurisousharmoniques, et on montre qu'elles restent  $J$ -plurisousharmoniques

pour  $J$  "proche" de la structure standard. Afin d'évaluer précisément cette "proximité", introduisons les pseudo-normes suivantes sur  $\mathcal{C}^r(M, \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}))$  :

$$\|J_p\|_0 := \text{Max}\{\|J_p X\| / X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}), \|X\| = 1\}$$

$$\|J_p\|_1 := \|J_p\|_0 + \left( \sum_i \left\| \left( \frac{\partial J_{i,j}}{\partial x_k} \right)_{j,k} (p) \right\|_0^2 \right)^{1/2}$$

où  $\|X\| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$  désigne la norme euclidienne. De plus si  $D$  est relativement compact dans  $M$ , on pose

$$\|J\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} := \text{Max}\{\|J_p\|_1 / p \in \bar{D}\},$$

ce qui définit une norme sur  $\mathcal{C}^r(M, \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}))$ , équivalente à la norme  $\mathcal{C}^1$  classique.

### 3.1.1 Estimation de la forme de Levi pour des fonctions classiques

Pour chacune des trois fonctions  $\|z\|$ ,  $\|z\|^2$ ,  $\ln \|z\|$ , on cherche une minoration explicite de la forme de Levi. On obtient une telle estimation à l'aide des valeurs propres de la matrice hessienne :

**Lemme 3.1** *Posons  $J = J_{st} + H$ , et soit  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Pour tout  $X \in T_p M$ ,*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^J u(X) \geq \mathcal{L}_p^{J_{st}} u(X) - 2\rho(p) \|H(p)\|_0 \|X\|^2 + \mu(p) \|H(p)X\|^2 \\ - 2\|\nabla u_p\| (1 + \|H(p)\|_0) \|H(p)\|_1 \times \|X\|^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où  $\rho(p) = \text{Max}|\lambda|$  et  $\mu(p) = \min \lambda$  pour  $\lambda$  décrivant les valeurs propres de  $\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (p) \right)_{i,j}$ .

#### Preuve

En effet,

$$\mathcal{L}_p^J u(X) \geq \mathcal{L}_p^{J_0} u(X) - 2\rho(p) \|H\|_0 \|J_{st}\|_0 \|X\|^2 + \mu(p) \|HX\|^2 \|A\|_0 \|J\|_0 \|X\|^2.$$

Or  $A = \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \left( \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x_k} \right)_{j,k}$ , donc  $\|A\|_0 \leq \sqrt{\sum_i \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2} \times \sqrt{\sum_i \left\| \left( \frac{\partial H_{i,j}}{\partial x_k} \right)_{j,k} \right\|_0^2}$ , ce qui entraîne  $\|A(p)\|_0 \leq \|\nabla u_p\| \times \|H(p)\|_1$ .  $\square$

Pour chacune des trois fonctions  $\|z\|$ ,  $\|z\|^2$ ,  $\ln \|z\|$ , il s'agit donc de déterminer les valeurs propres des matrices hessiennes correspondantes. Pour cela, on utilisera le

**Lemme 3.2** *Soit  $V$  un vecteur colonne non nul. La matrice  $\lambda(I - V {}^t V)$  possède exactement deux valeurs propres :*

- $\lambda(1 - \|V\|^2)$ , de sous-espace propre associé  $\mathbb{R}V$  ;
- $\lambda$ , de sous-espace propre associé  $V^\perp = \{X / {}^t V X = 0\}$ .

#### Preuve

Posons  $D = \lambda(I - {}^t V V)$  : ses valeurs propres sont de la forme  $\lambda(1 - \mu)$  avec  $\mu$  valeur propre de  $V {}^t V$ . Or si  $V {}^t V X = \mu X$ , comme  ${}^t V X$  est scalaire, nécessairement ou bien  $\mu = 0$  et  ${}^t V X = 0$ , ou bien  $X$  est colinéaire à  $V$ . Réciproquement, si  $X = V$ , alors

$$V {}^t V X = V \times ({}^t V V) = \|V\|^2 X. \quad \square$$

- Pour  $a(z) = \|z\| = \sqrt{\sum_1^{2n} x_i^2}$  :

$$\frac{\partial a}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|} \implies \|\nabla a\| = 1$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\|x\|} \left( \delta_{i,j} - \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} \right) \implies D(x) := \left( \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j} = \frac{1}{\|x\|} (I_{2n} - V {}^t V)$$

où  $V = \frac{1}{\|x\|} {}^t (x_1, \dots, x_{2n})$ . Ainsi, la matrice  $D(x)$  a pour valeurs propres 0 et  $\frac{1}{\|x\|}$ .

De même  $\frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2\|z\|} \left( \delta_{i,j} - \frac{\bar{z}_i z_j}{2\|z\|^2} \right)$ , donc en notant  $W = \frac{1}{\sqrt{2}\|z\|} {}^t (z_1, \dots, z_n)$  :

$$\left( \frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{i,j} = \frac{1}{2\|z\|} (I_n - \bar{W} {}^t W),$$

et  $\mathcal{L}^{Jst} a$ , représentée matriciellement dans la base canonique par  $4 \left( \frac{\partial^2 a}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{i,j}$ , a pour valeurs propres  $\frac{2}{\|z\|}$  et  $\frac{1}{\|z\|}$ .

- Pour  $b(z) = \ln\|z\|$  :

$$\frac{\partial b}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\|x\|^2} \implies \|\nabla b\| = \frac{1}{\|x\|}$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{1}{\|x\|^2} \left( \delta_{i,j} - 2 \frac{x_i x_j}{\|x\|^2} \right)$$

donc la matrice  $\left( \frac{\partial^2 b}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j}$  a pour valeurs propres  $\frac{1}{\|x\|^2}$  et  $-\frac{1}{\|x\|^2}$ .

De même  $\frac{\partial^2 b}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2\|z\|^2} \left( \delta_{i,j} - \frac{\bar{z}_i z_j}{\|z\|^2} \right)$ , donc  $\mathcal{L}^{Jst} b$  a pour valeurs propres  $\frac{2}{\|z\|^2}$  et 0.

- Pour  $c(z) = \|z\|^2$  :

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = 2x_i \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{i,j},$$

donc  $\|\nabla c\| = 2\|x\|$  et la matrice  $\left( \frac{\partial^2 c}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j}$  a pour seule valeur propre 2.

De même  $\frac{\partial c}{\partial z_i} = \delta_{i,j}$ , donc  $\mathcal{L}^{Jst} c$  a pour seule valeur propre 4.

Avec les notations du lemme 3.1, on obtient finalement les minoration suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p^J a(X) &\geq \|X\|^2 \left( \frac{1}{\|p\|} - \frac{2}{\|p\|} \|H(p)\|_0 - 2(1 + \|H(p)\|_0) \times \|H(p)\|_1 \right) \\ \mathcal{L}_p^J b(X) &\geq \|X\|^2 \left( -\frac{2}{\|p\|^2} \|H(p)\|_0 - \frac{1}{\|p\|^2} \|H(p)\|_0^2 - \frac{2}{\|p\|} (1 + \|H(p)\|_0) \times \|H(p)\|_1 \right) \\ \mathcal{L}_p^J c(X) &\geq \|X\|^2 (4 - 4\|H(p)\|_0 - 4\|p\|(1 + \|H(p)\|_0) \times \|H(p)\|_1). \end{aligned} \quad (3.2)$$

*Remarque 3.3* Supposons que  $p$  varie dans  $D \ni 0$  domaine de la boule unité, et que  $J(0)$  soit la structure standard : ainsi  $\|J_p - J_{st}\| \leq \|p\| \times \text{Max}_{\bar{D}} \|dJ_p\|$ . Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_p^J a(X) &\geq \|X\|^2 \left( \frac{1}{\|p\|} - 2\|H\|_{\bar{D}} - 2(1 + \|H\|_{\bar{D}} \times \|p\|) \times \|H\|_{\bar{D}} \right) \\ \mathcal{L}_p^J b(X) &\geq -\|X\|^2 \left( \frac{2}{\|p\|} \|H\|_{\bar{D}} + \|H\|_{\bar{D}}^2 + \frac{2}{\|p\|} (1 + \|H\|_{\bar{D}} \|p\|) \times \|H\|_{\bar{D}} \right) \\ \mathcal{L}_p^J c(X) &\geq \|X\|^2 (4 - 4\|H\|_{\bar{D}} \times \|p\| - 4\|p\|(1 + \|H\|_{\bar{D}} \times \|p\|) \times \|H\|_{\bar{D}}),\end{aligned}$$

où  $\|J\|_{\bar{D}} := \text{Max}_{\bar{D}} \|dJ_p\| + \|J\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})}$ .

### 3.1.2 Construction de fonctions strictement $J$ -plurisousharmoniques

**Lemme 3.4** Soit  $D$  un domaine borné (par  $m$ ) de  $\mathbb{R}^{2n}$  muni d'une structure presque complexe  $J$ , et  $\theta$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^+$ , croissante, telle que  $\theta(x) = x$  si  $x \leq 1/3$  et  $\theta(x) = 1$  si  $x \geq 2/3$ .

On pose  $\varepsilon_m := \min \left( \frac{1}{32(1+m)}, \frac{1}{32m(1+m)} \right) = \frac{1}{32(1+m) \times \max(1,m)}$ .

1. Pour tous  $x \in \bar{D}$ ,  $p \in \bar{D}$  et  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\|J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_m \implies \frac{7}{2} \|X\|^2 \leq \mathcal{L}_x^J(\|\cdot - p\|^2)(X) \leq \frac{9}{2} \|X\|^2.$$

2. Il existe une constante  $k$  ne dépendant que de la fonction  $\theta$  telle que pour tous  $r > 0$ ,  $A > 1$ ,  $B \geq k$ ,  $p \in D$ , et pour toute structure presque complexe  $J$  vérifiant  $J(p) = J_{st}$  et  $\|J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_m$ ,

$$x \mapsto \ln \left( \theta \left( \frac{1}{r^2} \|x - p\|^2 \right) \right) + A\|x - p\| + B \frac{1}{r^2} \|x - p\|^2$$

est strictement  $J$ -plurisousharmonique sur  $D$ .

3. Si  $\|J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_m$  et si  $w : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $J$ -plurisousharmonique, alors pour tout  $\delta \leq \frac{2}{9} \lambda_0(D, J, w)$  et pour tout  $p \in D$ , la fonction

$$x \mapsto w(x) - \delta \|x - p\|^2$$

est strictement  $J$ -plurisousharmonique sur  $D$  (voir la remarque 2.11 pour la définition de  $\lambda_0(D, J, w)$ ).

**Preuve**

1. Posons  $H = J - J_{st}$ . Vu (3.2), on obtient l'encadrement suivant :

$$\mathcal{L}_x^J(\|\cdot - p\|^2) \geq \|X\|^2(4 - 4\|H\|_{C^1(\bar{D})} - 4\|x - p\|(1 + \|H\|_{C^1(\bar{D})})\|H\|_{C^1(\bar{D})}),$$

et de même

$$\mathcal{L}_x^J(\|\cdot - p\|^2) \leq \|X\|^2(4 + 4\|H\|_{C^1(\bar{D})} + 2\|H\|_{C^1(\bar{D})}^2 + (1 + \|H\|_{C^1(\bar{D})}) \times 4\|x - p\|\|H\|_{C^1(\bar{D})}).$$

Or par hypothèse  $\|H\|_{C^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_m$ , d'où

$$(4 - (4 + 8m)\varepsilon_m - 8m\varepsilon_m^2) \leq \frac{\mathcal{L}_x^J(\|\cdot - p\|^2)}{\|X\|^2} \leq (4 + (4 + 8m)\varepsilon_m + (2 + 8m)\varepsilon_m^2).$$

Si  $\varepsilon_m \leq 1$ , on en déduit  $4 - (16 + 16m)\varepsilon_m \leq \frac{\mathcal{L}_x^J(\|\cdot - p\|^2)}{\|X\|^2} \leq 4 + (16 + 16m)\varepsilon_m$ .

2. Soit  $p \in D$  fixé et  $v : x \mapsto \ln\left(\theta\left(\left\|\frac{x-p}{r}\right\|\right)^2\right)$ . Il vient

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}(x) = \frac{\theta'}{\theta} \left( \frac{\|x - p\|^2}{r^2} \right) \times \frac{2}{r^2} (x_i - x_i(p)) \implies \|\nabla v(x)\| = \frac{\theta'}{\theta} \left( \frac{\|x - p\|^2}{r^2} \right) \times 2 \frac{\|x - p\|}{r^2}.$$

On obtient également

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) &= \left( \frac{\theta''\theta - \theta'^2}{\theta^2} \right) \left( \frac{\|x - p\|^2}{r^2} \right) \times \frac{4}{r^4} (x_j - x_j(p))(x_i - x_i(p)) \\ &\quad + \frac{\theta'}{\theta} \left( \frac{\|x - p\|^2}{r^2} \right) \times \frac{2}{r^2} \times \delta_{i,j}, \end{aligned}$$

donc en notant  $V = {}^t(x_1 - x_1(p), \dots, x_{2n} - x_{2n}(p))$ , la matrice  $\left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{i,j}$  est de la forme  $\alpha I_{2n} + \beta V^t V$ , avec  $\beta \neq 0$  (puisque  $\theta$  est strictement croissante sur  $] -\frac{1}{3}; 1[$ ). Elle a donc deux valeurs propres :

$$\begin{aligned} &\frac{\theta'}{\theta} \left( \frac{\|x - p\|^2}{r^2} \right) \times \frac{2}{r^2} + \left( \frac{\theta''\theta - \theta'^2}{\theta^2} \right) \left( \frac{\|x - p\|^2}{r^2} \right) \times \frac{4\|x - p\|^2}{r^4} \\ \text{et } &\frac{\theta'}{\theta} \left( \left\| \frac{x - p}{r} \right\|^2 \right) \times \frac{2}{r^2}. \end{aligned}$$

Forme de Levi de  $v$ 

• sur  $D \cap \mathbb{B}(p, r/\sqrt{3})$  :  $v(x) = 2(\ln\|x - p\| - \ln r)$  donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^J v(X) &\geq \|X\|^2 \times 2 \left( 0 - \frac{2}{\|x - p\|} \varepsilon_m - \varepsilon_m^2 - \frac{2}{\|x - p\|} (1 + \varepsilon_m\|x - p\|) \varepsilon_m \right) \\ &\geq -\|X\|^2 \times 8 \left( \frac{1}{\|x - p\|} + 1 \right) \varepsilon_m. \end{aligned}$$

- sur  $D \setminus \mathbb{B}(p, r)$  :  $v(x) = 0$  donc  $\mathcal{L}_x^J v(X) = 0$ .
- sur  $D \cap \mathbb{B}(p, r) \setminus \mathbb{B}(p, r/\sqrt{3})$  : en reprenant les notations du lemme 3.1,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^J v(X) &= {}^t X D X + {}^t (JX) D (JX) + {}^t X (A - {}^t A) JX \\ &\geq -\rho(x) \|X\|^2 - \rho(x) \|JX\|^2 - 2\|A\|_0 \|X\| \times \|JX\| \\ &\geq -\|X\|^2 (\rho(x)(2 + \varepsilon_m) + 2\varepsilon_m(1 + \varepsilon_m) \|\nabla v\|). \end{aligned}$$

Posons

$$k := 4 \times \text{Max} \left( \text{Sup}_{\frac{1}{3} \leq x \leq 1} \left| \frac{\theta'}{\theta} \right|, \text{Sup}_{\frac{1}{3} \leq x \leq 1} \left| \frac{\theta''\theta - \theta'^2}{\theta^2} \right| \right). \quad (3.3)$$

Alors sur  $D \cap \mathbb{B}(p, r) \setminus \mathbb{B}(p, r/\sqrt{3})$ ,

$$\rho(x) \leq \frac{k}{4} \times \left( \frac{2}{r^2} + \frac{4\|x-p\|^2}{r^4} \right) \quad \text{et} \quad \|\nabla v(x)\| \leq \frac{k}{4} \times \frac{2\|x-p\|}{r^2}$$

d'où

$$\mathcal{L}_x^J v(X) \geq -\|X\|^2 \times \frac{k}{2r^2} \left( \left(1 + \frac{2}{r^2} \|x-p\|^2\right) (2 + \varepsilon_m) + 2\varepsilon_m(1 + \varepsilon_m) \|x-p\| \right). \quad (3.4)$$

Forme de Levi de  $u$  :  $x \mapsto u(x) = v(x) + A\|x-p\| + B \left\| \frac{x-p}{r} \right\|^2$  :

- sur  $D \cap \mathbb{B}(p, r/\sqrt{3})$  : vu le choix de  $\varepsilon_m$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_x^J u(X)}{\|X\|^2} &\geq \frac{1}{\|x-p\|} \left[ A(1 - 8m\varepsilon_m - 8m^2\varepsilon_m^2) - (8\varepsilon_m + 12m\varepsilon_m^2) + \frac{B}{r^2} \times \frac{7}{2} \|x-p\| \right] \\ &\geq \frac{1}{\|x-p\|} [A(1 - 8m\varepsilon_m - 8m^2\varepsilon_m^2) - (8\varepsilon_m + 12m\varepsilon_m^2) + 0] \\ &\geq \frac{1}{2\|x-p\|} (A - 1) \end{aligned}$$

puisque  $\varepsilon_m = \min \left( \frac{1}{32(1+m)}, \frac{1}{32m(1+m)} \right)$ .

- sur  $D \setminus \mathbb{B}(p, r)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_x^J u(X)}{\|X\|^2} &\geq 0 + \frac{1}{\|x-p\|} \left[ A(1 - 4m\varepsilon_m - 4m(1 + 2m\varepsilon_m)\varepsilon_m) + \frac{B}{r^2} \times \frac{7}{2} \|x-p\| \right] \\ &\geq \frac{1}{\|x-p\|} A(1 - 8m\varepsilon_m - 8m^2\varepsilon_m^2) \\ &\geq \frac{1}{2\|x-p\|} A. \end{aligned}$$

- sur  $D \cap \mathbb{B}(p, r) \setminus \mathbb{B}(p, r/\sqrt{3})$  :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_x^J u(X)}{\|X\|^2} &\geq \frac{1}{\|x-p\|} \times A(1 - 8m\varepsilon_m - 8m^2\varepsilon_m^2)\varepsilon_m \\ &\quad - \frac{k}{2r^2} \times \left( \left(1 + \frac{2}{r^2} r^2\right) (2 + \varepsilon_m) + 4m\varepsilon_m(1 + \varepsilon_m) \right) + \frac{B}{r^2} \times \frac{7}{2} \\ &\geq \frac{1}{2\|x-p\|} A + \frac{7}{2r^2} (B - k). \end{aligned}$$

Ainsi, pour  $A > 1$  et  $B \geq k$ , la forme de Levi  $\mathcal{L}_x u$  est définie positive pour tout  $x \in D$ .

3. Soit  $p \in D$  et  $\tilde{w} : x \mapsto w(x) - \delta \|x - p\|^2$  :

$$\forall x \in D, \mathcal{L}_x^J \tilde{w}(X) \geq \mathcal{L}_x^J w(X) - \frac{9}{2} \delta \|X\|^2 \geq \left( \lambda_0(D, J, w) - \frac{9}{2} \delta \right) \|X\|^2.$$

□

## 3.2 Minoration de la métrique de Kobayashi

Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe. D'après [45], il existe pour tout  $p \in M$  un voisinage  $V$  de 0 dans  $T_p M$  tel que pour tout  $v \in V$ , il existe un disque  $J$ -holomorphe  $h$ , centré en  $p$ , et vérifiant  $dh_0(\partial/\partial x) = v$ . Ceci permet de définir la pseudo-métrique infinitésimale de Kobayashi-Royden, notée  $K_{(M, J)}$  :

**Définition** Pour  $p \in M$  et  $v \in T_p M$ ,  $K_{(M, J)}(p, v)$  est l'infimum de l'ensemble des  $\alpha > 0$  tels qu'il existe un disque  $J$ -holomorphe  $h : \Delta \rightarrow M$  centré en  $p$  et vérifiant  $dh_0(\partial/\partial x) = v/\alpha$ .

La plupart des propriétés de base de la pseudo-métrique de Kobayashi-Royden dans le cadre complexe restent vraies dans le cadre presque complexe. Rappelons les résultats suivants :

**Proposition 3.5 (voir [21])** Soit  $(M, J)$  et  $(M', J')$  deux variétés presque complexes et  $F : M \rightarrow M'$  une application  $(J, J')$ -holomorphe :

$$\forall p \in M, \forall v \in T_p M, K_{(M', J')}(F(p), dF_p(v)) \leq K_{(M, J)}(p, v).$$

Si  $D$  est un domaine de  $M$  :  $\forall p \in D, \forall v \in T_p M, K_{(M, J)}(p, v) \leq K_{(D, J)}(p, v)$ .

### 3.2.1 Minoration explicite

**Proposition 3.6 ([15], proposition 4.4)** Soit  $D$  un domaine d'une variété presque complexe  $(M, J)$ ,  $p \in \overline{D}$ ,  $U$  un voisinage de  $p$  dans  $M$  et  $z : U \rightarrow \mathbb{B}$  une carte normalisée. Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R})$ , strictement négative et strictement  $J$ -plurisousharmonique sur  $D$ . Il existe un voisinage  $U' \subset U$  de  $p$  et une constante  $c > 0$  tels que :

$$\forall p \in D \cap U', \forall v \in T_p M, K_{(D, J)} \geq c \|v\| / |u(p)|^{1/2}.$$

Le but est ici d'expliciter la constante intervenant dans cette minoration ; on verra en particulier qu'elle dépend de  $\lambda_0(D, J, u)$ .

**Lemme 3.7** Soit  $D$  un domaine borné (par  $m$ ) de  $\mathbb{R}^{2n}$  muni d'une structure presque complexe  $J$ , et  $u$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\overline{D}$ , strictement  $J$ -plurisousharmonique et strictement négative. On suppose  $J(p) = J_{st}$  et  $\|J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{D})} \leq \varepsilon_m$  où  $\varepsilon_m$  est donné par le lemme 3.4.

Alors il existe une constante  $c_m$  ne dépendant que de  $m$  telle que

$$\forall v \in \mathbb{R}^{2n}, \forall p \in D, K_{(D,J)}(p, v) \geq c_m \sqrt{\lambda_0(D, J, u)} \frac{\|v\|}{\sqrt{|u(p)|}}.$$

### Preuve

La démonstration de la proposition 3.6 dans [21] donne  $K_{(D,J)}(p, v) \geq \sqrt{\frac{\delta}{eBe^{2Am}}} \frac{\|v\|}{\sqrt{|u(p)|}}$  pour tout  $A > 1$ ,  $B \geq k$ ,  $\delta < \frac{2}{9}\lambda_0(D, J, u)$ . Donc

$$K_{(D,J)}(p, v) \geq \sqrt{\frac{2}{9ke^{2m}}} \times \sqrt{\lambda_0(D, J, u)} \times \frac{\|v\|}{\sqrt{|u(p)|}}$$

où  $k$  est donné par (3.3). □

L'étape suivante est d'éliminer l'hypothèse  $J(p) = J_{st}$ , afin d'obtenir une estimation uniforme :

**Proposition 3.8** *Soit  $D$  un domaine de la boule unité  $\mathbb{B}^{2n}$  munie d'une structure presque complexe  $J$ , et  $u$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\bar{D}$ , strictement  $J$ -plurisousharmonique et strictement négative.*

*Il existe des constantes universelles  $c'$  et  $\varepsilon'$  telles que si  $\|J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon'$ ,*

$$\forall p \in D, \forall v \in \mathbb{R}^{2n}, K_{(D,J)}(p, v) \geq c' e^{-2t} \sqrt{\lambda_0(D, J, u)} \frac{\|v\|}{\sqrt{|u(p)|}}$$

*si  $D$  est borné par  $t$ .*

### Preuve

Pour  $p \in D$ , on considère la matrice formée par les vecteurs  $(e_1, \dots, e_n, J_p e_{n+1}, \dots, J_p e_{2n})$  où  $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1}, \dots, e_{2n})$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{2n}$  : cette matrice dépend continuellement de  $J$  et de  $p$ , et si  $J$  est la structure standard, on obtient ainsi la matrice  $I_{2n}$ . Soit donc  $\varepsilon'$  tel que si  $\|J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon'$ , on ait pour tout  $p \in \mathbb{B}^{2n}$  :

1. la matrice  $P$  obtenue est inversible ;
2.  $\|P^{-1}\|_0, \|P\|_0 \leq 2$  ;
3.  $\|P^{-1}JP - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_{m=2}$

(la troisième condition découlant de la continuité de  $J \mapsto \|P^{-1}JP - J_{st}\|$ ). Supposons le domaine  $D$  borné par  $t \in ]0; 1]$ . Par construction (lemme 3.4),  $\varepsilon_m$  est une fonction décroissante de  $m$  ; en particulier, la condition 3. implique  $\|P^{-1}JP - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_{m=2t}$ .

Fixons  $p \in D$ , et notons  $P$  la matrice obtenue et  $\phi : x \mapsto P^{-1}x$  : alors  $\phi_* J(\phi(p)) = J_{st}$  et  $\phi(D) \subset 2t\mathbb{B}^{2n}$ . La proposition 3.7 s'applique à  $\tilde{D} = \phi(D)$ ,  $\tilde{J} = \phi_* J$ ,  $\tilde{u} = u \circ \phi^{-1}$  et donne

$$\forall \tilde{p} \in \tilde{D}, \forall \tilde{v} \in \mathbb{R}^{2n}, K_{(\tilde{D}, \tilde{J})}(\tilde{p}, \tilde{v}) \geq c_{m=2t} \sqrt{\lambda_0(\tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{u})} \frac{\|\tilde{v}\|}{\sqrt{|\tilde{u}(\tilde{p})|}}$$

et donc

$$K_{(D,J)}(p, v) \geq c_{m=2t} \sqrt{\lambda_0(\tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{u})} \times \frac{\|d(\phi_p)_p(v)\|}{\sqrt{|u(p)|}}.$$

Or  $\|d(\phi_p)_p(v)\| = \|P^{-1}v\| \geq \|v\|/\|P\|_0 \geq \|v\|/2$  vu le choix de  $\varepsilon'$ , d'où

$$K_{(D,J)}(p,v) \geq \frac{c_{m=2t}}{2} \sqrt{\lambda_0(\tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{u})} \frac{\|v\|}{\sqrt{|u(p)|}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{9k}} e^{-2t} \times \sqrt{\lambda_0(\tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{u})} \frac{\|v\|}{\sqrt{|u(p)|}}.$$

De plus pour tous  $x \in \tilde{D}$  et  $X \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x^{\tilde{J}} \tilde{u}(X) = \mathcal{L}_{P_x}^J u(PX) &\geq \lambda_0(D, J, u) \times \|PX\|^2 \\ &\geq \lambda_0(D, J, u) \|X\|^2 / \|P^{-1}\|_0^2 \geq \lambda_0(D, J, u) \|X\|^2 / 4 \end{aligned}$$

vu le choix de  $\varepsilon'$ . Ainsi  $\sqrt{\lambda_0(\tilde{D}, \tilde{J}, \tilde{u})} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_0(D, J, u)}$ , et  $c' = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{9k}}$  (où  $k$  est donné par (3.3)) convient.  $\square$

On récupère ainsi une minoration de la métrique de Kobayashi dans un voisinage de tout point d'une variété presque complexe, ainsi qu'une estimation de la taille de ce voisinage en fonction de la carte choisie :

**Corollaire 3.9** *Soit  $(M, J)$  presque complexe,  $z : U \rightarrow \mathbb{B}^{2n}$  une carte telle que  $z_*J(0)$  soit la structure standard,  $D \subset M$  un domaine et  $u : \overline{D \cap U} \rightarrow ]-\infty; 0[$  strictement  $J$ -plurisousharmonique.*

*Soit  $t = \min\left(1, \frac{\varepsilon'}{\|z_*J\|_{C^1(\mathbb{B}^{2n})}}\right)$  (où  $\varepsilon'$  est donné par la proposition 3.8) et  $U_t = z^{-1}(t\mathbb{B}^{2n})$ . Pour tous  $p \in D \cap U_t$  et  $v \in T_p M$ ,*

$$K_{(D \cap U_t, J)}(p, v) \geq c' e^{-2t} \sqrt{\lambda_0(z(D \cap U_t), z_*J, u \circ z^{-1})} \times \frac{\|dz_p(v)\|}{\sqrt{|u(p)|}}.$$

### Preuve

Soit  $t \in ]0; 1]$ ,  $U_t := z^{-1}(t\mathbb{B}^{2n})$  et  $z_t : p \mapsto z(p)/t$  définie sur  $U_t$  à valeurs dans  $\mathbb{B}^{2n}$  : on a donc  $(z_t)_*J_x = (z_*J)_{tx}$ . Ainsi pour  $t = \frac{\varepsilon'}{\|z_*J\|_{C^1(\mathbb{B}^{2n})}}$  (et  $t \leq 1$ ),

$$\|(z_t)_*J - J_{st}\|_{C^1(\mathbb{B}^{2n})} \leq t \|z_*J - J_{st}\|_{C^1(\mathbb{B}^{2n})} \leq \varepsilon',$$

et on peut appliquer la proposition 3.8 au domaine  $z_t(D \cap U_t)$  muni de la structure presque complexe  $(z_t)_*J$  et à la fonction  $u \circ z_t^{-1}$  : pour tous  $\tilde{p} \in z_t(D \cap U_t)$  et  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,

$$K_{(z_t(D \cap U_t), (z_t)_*J)}(\tilde{p}, \tilde{v}) \geq c' e^{-2t} \sqrt{\lambda_0(z_t(D \cap U_t), (z_t)_*J, u \circ z_t^{-1})} \frac{\|\tilde{v}\|}{\sqrt{|u(z_t^{-1}(\tilde{p}))|}}.$$

Or  $\mathcal{L}_x^{(z_t)_*J}(u \circ z_t^{-1})(X) = \mathcal{L}_{tx}^{z_*J}(u \circ z^{-1})(tX)$ , donc

$$\begin{aligned} \lambda_0(z_t(D \cap U_t), (z_t)_*J, u \circ z_t^{-1}) &= \min_{(x, X) \in z_t(D \cap U_t) \times S^{2n-1}} \mathcal{L}_x^{(z_t)_*J}(u \circ z_t^{-1})(X) \\ &= \min_{(x, X) \in z_t(D \cap U_t) \times S^{2n-1}} \mathcal{L}_{tx}^{z_*J}(u \circ z^{-1})(tX) \\ &\geq t^2 \lambda_0(z(D \cap U_t), z_*J, u \circ z^{-1}). \end{aligned}$$

Avec  $\tilde{p} = z_t(p)$  et  $\tilde{v} = dz_{tp}(v) = \frac{1}{t} dz_p(v)$ , on obtient bien l'inégalité cherchée.  $\square$

### 3.2.2 Lemme de localisation

La métrique de Kobayashi est décroissante sous l'action des applications pseudo-holomorphes, en particulier de l'inclusion. D'après la proposition 3 de [21], on a une sorte de "réciproque", très utile lorsque l'on travaille sur une variété à travers des cartes :

$$K_{(D \cap U, J)}(q, v) \geq K_{(D, J)}(q, v) \geq sK_{(D \cap U, J)}(q, v).$$

Nous allons déterminer explicitement la constante  $s$  ; la démonstration fournira également une estimation explicite de la taille des disques pseudo-holomorphes.

**Lemme 3.10** *Soit  $D$  un domaine dans une variété presque complexe  $(M, J)$ ,  $p \in \bar{D}$  et soit  $z : U \rightarrow \mathbb{B}$  une carte au voisinage de  $p$  telle que  $z_*J(p) = J_{st}$  et  $\|z_*J - J_{st}\|_{C^1(\bar{D})} \leq \varepsilon_{m=1}$ . On suppose qu'il existe  $u : \bar{D} \rightarrow ]-\infty; 0[$  de classe  $C^2$ ,  $J$ -plurisousharmonique dans  $D$ . Alors il existe un voisinage  $V \Subset U$  de  $p$  tel que pour tous  $q \in D \cap V$  et  $v \in T_qM$ ,*

$$K_{(D, J)}(q, v) \geq N \|dz_q(v)\|, \quad \text{où } N = \frac{e^{-1}}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{c}{|u(q)|}}$$

et  $c > 0$  est tel que  $u - c\|z\|^2$  soit strictement plurisousharmonique, et  $k$  est donné par (3.3).

#### Preuve

On adapte la preuve de [21]. Soit  $\theta, r, A, B$  comme dans le lemme 3.4. La fonction

$$x \mapsto \ln \left( \theta \left( \frac{1}{r^2} \|z(x) - z(q)\|^2 \right) \right) + A \|z(x) - z(q)\| + B \frac{1}{r^2} \|z(x) - z(q)\|^2$$

est strictement  $J$ -plurisousharmonique dans  $U$  pour  $q = p$ , et donc pour tout  $q \in V$  pour un certain voisinage  $V \Subset U$  de  $p$ . Remarquons que  $V$  ne dépend que du choix de  $z$  (et de  $\theta$ ). Soit  $\lambda > 1/r^2$  et  $\tau = \lambda B/c$ . Pour tout point  $q \in V$ , définissons la fonction  $\Psi_q$  par

$$\Psi_q(x) = \begin{cases} \theta \left( \frac{1}{r^2} \|z(x) - z(q)\|^2 \right) \exp(A \|z(x) - z(q)\|) \exp(\tau u(x)) & \text{si } x \in D \cap U, \\ \exp(A + \tau u(x)) & \text{si } x \in D \setminus U. \end{cases}$$

Dès que  $0 < \varepsilon < B(\lambda - 1/r^2)$ , la fonction  $\ln(\Psi_q) - \varepsilon \|z - z(q)\|^2$  est  $J$ -plurisousharmonique dans  $D \cap U$ , et par conséquent  $\Psi_q$  est  $J$ -plurisousharmonique dans  $D \cap U$ . Or  $\Psi_q$  coïncide avec  $\exp(A + \tau u)$  hors de  $U$ , donc est globalement  $J$ -plurisousharmonique dans  $D$ .

Soit  $h : \Delta \rightarrow D$  un disque  $J$ -holomorphe tel que  $h(0) = q \in V$  et  $dh_0(\partial/\partial x) = v/\alpha$ , où  $v \in T_qM$  et  $\alpha > 0$ . Pour  $\zeta$  suffisamment proche de 0,

$$h(\zeta) = q + dh_0(\zeta) + O(|\zeta|^2).$$

Posons  $\zeta = \zeta_1 + i\zeta_2$ . La condition de  $J$ -holomorphie  $dh_0 \circ J_{st} = J \circ dh_0$  donne

$$dh_0(\zeta) = \zeta_1 dh_0(\partial/\partial x) + \zeta_2 J dh_0(\partial/\partial x).$$

Considérons la fonction

$$\varphi(\zeta) = \frac{\Psi_q(h(\zeta))}{|\zeta|^2},$$

qui est sousharmonique dans  $\Delta \setminus \{0\}$ . Puisque

$$\varphi(\zeta) = \frac{\|z \circ h(\zeta) - z(q)\|^2}{r^2|\zeta|^2} \exp(A\|z \circ h(\zeta) - z(q)\|) \exp(\tau u(h(\zeta)))$$

pour  $\zeta$  proche de 0, et que

$$\|dh_0(\zeta)\| \leq |\zeta|(\|I + J\| \cdot \|dh_0(\partial\bar{\partial}x)\|),$$

on obtient que  $\limsup_{\zeta \rightarrow 0} \varphi(\zeta)$  est finie. De plus, en choisissant  $\zeta_2 = 0$  il vient :

$$\limsup_{\zeta \rightarrow 0} \varphi(\zeta) \geq \frac{\|dh_0(\partial/\partial x)\|^2}{r^2} \exp(-\lambda B|u(q)|/c).$$

D'après le principe du maximum appliqué à un prolongement sousharmonique de  $\varphi$  dans  $\Delta$ , on a pour tous  $q \in D \cap V$  et  $v \in T_q M$  :

$$K_{(D,J)}(q, v) \geq \frac{\|dz_q v\|}{r} \exp(-(A + \lambda B|u(q)|/c)/2).$$

Avec  $A \rightarrow 1$ ,  $B = k(\theta)$ ,  $\lambda \rightarrow 1/r^2$ , on en déduit

$$K_{(D,J)}(q, v) \geq \frac{\exp(-(1 + k|u(q)|/(cr^2))/2)}{r} \|dz_q v\|.$$

En tant que fonction de  $r > 0$ , la borne inférieure est maximale pour  $r = \sqrt{k|u(q)|/c}$ , ce qui donne la conclusion.  $\square$

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 3.11** *Sous les hypothèses du lemme précédent, tout disque  $J$ -holomorphe  $h : \Delta \rightarrow D$  tel que  $h(0) \in V$  vérifie  $h(s\Delta) \subset V$ , où*

$$s = 1 - \exp(-N \text{dist}(z \circ h(0), \partial\mathbb{B})). \quad (3.5)$$

**Preuve**

La métrique de Kobayashi est décroissante sous l'action des applications holomorphes, ce qui donne pour tout  $\zeta \in \Delta$  :  $d_{(M,J)}^K(h(0), h(\zeta)) \leq d_{(\Delta, J_{st})}^K(0, \zeta)$ . Or, quitte à considérer le disque holomorphe  $g(\zeta) = \zeta_0 + \frac{v}{|v|}(1 - |\zeta_0|)\zeta$  dans la définition de  $K_{(\Delta, J_{st})}(\zeta_0, v)$ , on obtient

$$K_{(\Delta, J_{st})}(\zeta_0, v) \leq \frac{|v|}{1 - |\zeta_0|} \text{ et}$$

$$d_{(\Delta, J_{st})}^K(0, \zeta) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma_M(p,q)} \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|} dt \leq \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|} dt \leq -\ln(1 - |\zeta|),$$

où  $\gamma(t) = t\zeta$ . Par conséquent,  $d_{(M,J)}^K(h(0), h(\zeta)) \leq -\ln(1 - |\zeta|)$ . Posons  $q = h(0)$  et  $s = 1 - \exp(-N \text{dist}(z \circ h(0), \partial\mathbb{B}))$ , et supposons par l'absurde qu'il existe  $\zeta \in \Delta$  tel que

$w = h(s\zeta) \notin V$ . Soit  $G := \{x \in V \mid \|z(x) - z(q)\| < \delta\}$  avec  $\delta = \text{dist}(z(q), \partial\mathbb{B})$ . Alors, pour tout chemin  $\gamma : [0; 1] \rightarrow M$  tel que  $\gamma(0) = q$  et  $\gamma(1) = w$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 K_{(M,J)}(\gamma(t), \gamma'(t)) dt &\geq \int_{\gamma^{-1}(G)} K_{(M,J)}(\gamma(t), \gamma'(t)) dt \\ &\geq \int_{\gamma^{-1}(G)} N \times \|(z \circ \gamma)'(t)\| dt \\ &\geq \int_0^{t_\gamma} N \times \|(z \circ \gamma)'(t)\| dt \\ &\geq N \times \|z(q) - z(h(\gamma(t_\gamma)))\| = N \text{dist}(z(q), \partial\mathbb{B}) \end{aligned}$$

où l'on a posé  $t_\gamma = \max\{t \in [0; 1] \mid \gamma(t_\gamma) \in \overline{G}\} < 1$ .

Donc  $d_{(M,J)}^K(h(0), h(s\zeta)) \geq N \text{dist}(z(q), \partial\mathbb{B})$ , ce qui donne une contradiction si  $s$  est définie par (3.5).  $\square$

**Corollaire 3.12** *Pour un voisinage  $V$  et une constante  $s$  définis comme précédemment, on obtient pour tous  $q \in D \cap V$  et  $c \in T_q M$  :*

$$K_{(D \cap U, J)}(q, v) \geq K_{(D, J)}(q, v) \geq s K_{(D \cap U, J)}(q, v).$$

### 3.3 Disque $J$ -holomorphe attaché à une sous-variété totalement réelle maximale

On sait déjà [15] que si la structure  $J$  est lisse, un disque analytique attaché à une sous-variété totalement réelle est lisse jusqu'au bord. Il s'agit ici, en reprenant les mêmes méthodes de démonstration, de raffiner la régularité selon celle de la structure et d'obtenir une estimation explicite des normes hölderiennes.

#### 3.3.1 Estimation de la norme 1/2-hölderienne

On verra (lemme 3.16) qu'une sous-variété totalement réelle maximale peut être vue comme l'ensemble des zéros d'une fonction positive strictement  $J$ -plurisousharmonique, c'est-à-dire d'une fonction dont la restriction à tous les disques  $J$ -holomorphes est strictement sous-harmonique.

**Lemme 3.13** *Soit  $\phi$  une fonction sous-harmonique sur  $\Delta$ , continue jusqu'au bord, positive et telle que  $\phi|_\gamma \equiv 0$  où  $\gamma := \{e^{i\theta} \mid 0 < \theta < \pi\}$  est le demi-cercle supérieur. Pour  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ , on note  $W_\alpha$  le secteur angulaire  $\{re^{i\theta} \mid 0 < r \leq 1, \alpha < \theta < \pi - \alpha\}$  :*

$$\forall \zeta \in W_\alpha, \quad \phi(\zeta) \leq \left( \frac{1}{(\sin \alpha)^2} \times \int_\pi^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{\pi} \right) \times (1 - |\zeta|).$$

**Preuve**

Si  $|\zeta| = 1$ , c'est immédiat. Supposons donc  $\zeta = re^{it} \in W_\alpha$  avec  $r < 1$ . Puisque  $\phi$  est sous-harmonique sur  $\Delta$ , on a pour tous  $\omega \in \Delta$  et  $\rho > 0$  tels que le disque fermé de centre  $\omega$  et de rayon  $\rho$  soit inclus dans  $\Delta$  :

$$\phi(\omega + re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\omega + \rho e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} - re^{it}|^2} d\theta$$

ce qui donne, avec  $\omega = 0$  et  $r = |\zeta| < 1$  :

$$\forall \rho > |\zeta|, \phi(\zeta = re^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) \frac{\rho^2 - r^2}{|\rho e^{i\theta} - re^{it}|^2} d\theta.$$

Par continuité de  $\phi$ , avec  $\rho \rightarrow 1$ , on obtient

$$\forall \zeta = re^{it} \in \Delta, \phi(\zeta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) \frac{1 - r^2}{|e^{i\theta} - re^{it}|^2} d\theta.$$

Pour  $\alpha \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $\theta \in [\pi; 2\pi]$  et  $t \in [\alpha; \pi - \alpha]$ ,

$$\alpha \leq \theta - t \leq \pi - \alpha \implies \cos(\theta - t) \leq \cos \alpha \implies r^2 - 2r \cos(\theta - t) + 1 \geq r^2 - 2r \cos \alpha + 1.$$

Or pour tout  $r \in [0; 1]$ ,  $r^2 - 2r \cos \alpha + 1 \geq 1 - (\cos \alpha)^2$ , d'où

$$\phi(\zeta) \leq \left( \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) d\theta \right) \times \frac{1 - |\zeta|^2}{(\sin \alpha)^2}.$$

□

De même que dans le cas standard, la régularité 1/2-hölderienne et l'estimation de la norme associée découlent d'une estimation de la différentielle en fonction de la racine carrée de la distance au bord.

**Lemme 3.14** *Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe,  $D$  un domaine borné de  $M$  et  $\rho \in C^2(\bar{D}, \mathbb{R})$  strictement plurisousharmonique. On suppose de plus que  $h : \Delta \rightarrow D$  est une application  $J$ -holomorphe, continue jusqu'au bord et telle que*

$$\rho \circ h|_\gamma \equiv 0 \text{ où } \gamma := \{e^{i\theta} / 0 < \theta < \pi\}$$

et  $\rho \circ h \geq 0$  sur  $\Delta$ .

*Soit  $a \in \gamma$  et  $(z, U)$  une carte au voisinage de  $h(a)$  telle que  $\|z_* J - J_{st}\| \leq \varepsilon'$ . Alors il existe une constante universelle  $c''$  et un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\Delta \cap h^{-1}(U)$  tels que*

$$\forall \zeta \in V, \|d(z \circ h)_\zeta\| \leq c'' \frac{1}{\text{Im } a} \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} \rho \circ h(e^{i\theta}) d\theta}{\lambda_0(z(D \cap U), z_* J, \rho \circ z^{-1})}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - |\zeta|}}.$$

**Preuve**

Soit  $\delta > 0$  tel que  $\Omega_\delta := \Delta \cup (a + \delta\Delta)$  soit inclus dans  $W_\alpha$  pour  $\alpha = \text{Arcsin}(\text{Im } a/2)$ . Quitte à réduire  $\delta$ , par continuité de  $h$ , on peut supposer  $h(\Omega_\delta) \subset U$ . On obtient :

$$\forall \zeta \in \Omega_\delta, \rho \circ h(\zeta) \leq \kappa(1 - |\zeta|) \text{ où } \kappa = \left( \frac{4}{(\text{Im } a)^2} \times \int_0^{2\pi} \rho \circ h(e^{i\theta}) d\theta \right).$$

Soit  $\zeta_0 \in \Omega_{\delta/2}$  et  $l = 1 - |\zeta_0|$  : pour tout  $\zeta \in \zeta_0 + l\Delta$ ,  $|\zeta - a| < \delta$ .  
Ainsi avec  $D_l := \{q \in D / \rho(q) < 2\kappa l\}$  :

$$\forall \zeta \in \zeta_0 + d\Delta, \zeta \in \Omega_{\delta} \implies \rho \circ h(\zeta) < 2\kappa \times l$$

et donc  $\rho \circ h(\zeta_0 + l\Delta) \subset D_l$ .

La fonction  $u_l : w \mapsto \rho \circ z^{-1}(w) - 2\kappa l$  est strictement négative et strictement  $z_*J$ -plurisousharmonique sur  $z(D_l \cap U) \supset z \circ h(\zeta_0 + l\Delta)$ . Posons

$$g_l : \Delta \ni \zeta \mapsto z \circ h(\zeta_0 + l\zeta) \in z(D_l \cap U).$$

Le disque  $g_l$  est  $z_*J$ -holomorphe, donc  $K_{(\Delta, J_{st})}(0, \tau) \geq K_{(z(D_l \cap U), z_*J)}(g_l(0), d(g_l)_0(\tau))$  :

$$|\tau| \geq K_{(z(D_l \cap U), z_*J)}(z \circ h(\zeta_0), l \times d(z \circ h)_{\zeta_0}(\tau)).$$

D'après la proposition 3.8 appliquée au domaine  $z(D_l \cap U)$  muni de la structure presque complexe  $z_*J$  et à la fonction  $u_l$ , il vient :

$$\forall p \in z(D_l \cap U), \forall v \in \mathbb{R}^{2n}, K_{(z(D_l \cap U), z_*J)}(p, v) \geq c'e^{-2} \sqrt{\lambda_0(z(D_l \cap U), z_*J, u_l)} \times \frac{\|v\|}{\sqrt{|u_l(p)|}}.$$

En appliquant cette inégalité à  $p = z \circ h(\zeta_0)$  et  $v = l \times d(z \circ h)_{\zeta_0}(\tau)$ , il vient

$$|\tau| \geq c'e^{-2} \sqrt{\lambda_0(z(D_l \cap U), z_*J, u_l)} \times \frac{\|l \times d(z \circ h)_{\zeta_0}(\tau)\|}{\sqrt{|\rho \circ h(\zeta_0) - 2\kappa l|}},$$

d'où

$$\begin{aligned} \|d(z \circ h)_{\zeta_0}\| &\leq \frac{\sqrt{2\kappa l}}{c'e^{-2} \sqrt{\lambda_0(z(D_l \cap U), z_*J, u_l)} \times l} \\ &\leq \frac{e^2 \sqrt{2\kappa}}{c' \sqrt{\lambda_0(z(D \cap U), z_*J, \rho \circ z^{-1})}} \times \frac{1}{\sqrt{1 - |\zeta_0|}}, \end{aligned}$$

et  $c'' = \frac{2e^2 \sqrt{2}}{c'}$  convient.  $\square$

On obtient évidemment un résultat analogue en remplaçant  $\Delta$  par le demi-disque  $\Delta^+ = \{\zeta \in \Delta / \text{Im} \zeta > 0\}$  et  $\gamma$  par le segment  $] - 1; 1[$ . Le caractère localement  $1/2$ -höldérien de  $z \circ h$  provient alors, grâce au théorème d'Hardy-Littlewood (voir par exemple [7]), de l'estimation de la différentielle.

**Proposition 3.15** *Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe,  $D$  un domaine borné de  $M$  et  $\rho \in \mathcal{C}^2(\overline{D}, \mathbb{R})$  strictement plurisousharmonique. On suppose de plus que  $h : \Delta^+ \rightarrow D$  est  $J$ -holomorphe, continue jusqu'au bord et telle que*

$$\rho \circ h \geq 0 \text{ sur } \Delta^+ \text{ et } \rho \circ h|_{]-1; 1[} \equiv 0.$$

*Soit  $a \in \gamma$  et  $(z, U)$  une carte au voisinage de  $h(a)$  telle que  $\|z_*J - J_{st}\|_{\mathcal{C}^1(\mathbb{B})} \leq \varepsilon'$ . Alors il existe une constante universelle  $c$  et un voisinage  $W$  de  $a$  dans  $\Delta \cap h^{-1}(U)$  tels que*

$$\forall \zeta, \zeta' \in W, \|z \circ h(\zeta) - z \circ h(\zeta')\| \leq c \frac{1}{1 - |a|} \sqrt{\frac{\int_0^{2\pi} \rho \circ h(e^{i\theta}) d\theta}{\lambda_0(z(D \cap U), z_*J, \rho \circ z^{-1})}} \times |\zeta - \zeta'|^{1/2}$$

*où  $\lambda_0(z(D \cap U), z_*J, \rho \circ z^{-1})$  désigne la plus petite valeur propre de  $\mathcal{L}^{z_*J}(\rho \circ z^{-1})$  sur  $z(D \cap U)$ .*

### 3.3.2 Estimation des normes hölderiennes

Afin d'utiliser le résultat établi dans la proposition 3.15, nous établissons le lien entre sous-variété totalement réelle maximale et fonction strictement  $J$ -plurisousharmonique :

**Lemme 3.16** *Soit  $(M^{2n}, J)$  une variété presque complexe et  $E$  une sous-variété totalement réelle maximale. Il existe une fonction  $\rho$  positive de même régularité que  $E$ , strictement  $J$ -plurisousharmonique, telle que  $E = \{\rho = 0\}$ .*

#### Preuve

On suit les idées du début de la section 4.1 de [15]. Supposons  $E$  définie sur l'ouvert de carte  $U$  par  $r_1 = \dots = r_n = 0$  avec  $dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$  ne s'annulant pas. Posons  $\rho = \sum_{i=1}^n r_i^2$  :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^n 2 \frac{\partial r_i}{\partial x_k} \times r_i \text{ et } D_{k,l} := \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{i=1}^n \left( 2 \frac{\partial^2 r_i}{\partial x_k \partial x_l} \times r_i + 2 \frac{\partial r_i}{\partial x_k} \frac{\partial r_i}{\partial x_l} \right).$$

En particulier,  $\nabla \rho|_E \equiv 0$ , et  $D|_E = 2 \sum_{i=1}^n \nabla r_i \cdot {}^t \nabla r_i$ , d'où :

$${}^t X D|_E X = 2 \sum_{i=1}^n \| {}^t \nabla r_i \cdot X \|^2 \geq 0.$$

Soit  $(U^\alpha, \phi_\alpha)$  une partition de l'unité, et  $\rho_\alpha$  la fonction construite comme précédemment pour l'ouvert  $U^\alpha$ . Posons  $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha \phi_\alpha$  : alors  $\frac{\partial \rho}{\partial x_k} = \sum_\alpha \left( \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x_k} \times \phi_\alpha + \rho_\alpha \times \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} \right)$  et

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_\alpha \left( \frac{\partial^2 \rho_\alpha}{\partial x_k \partial x_l} \times \phi_\alpha + \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_l} + \frac{\partial \rho_\alpha}{\partial x_l} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial x_k} + \rho_\alpha \times \frac{\partial^2 \phi_\alpha}{\partial x_k \partial x_l} \right).$$

En particulier,  $\nabla \rho|_E \equiv 0$  et

$$\left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_E \right)_{k,l} = 2 \sum_\alpha \phi_\alpha D_{\alpha|E}.$$

Or les fonctions  $\phi_\alpha$  sont à valeurs positives, et la matrice  $D_\alpha$  est symétrique positive, donc la matrice  $D := \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k \partial x_l} \Big|_E \right)_{k,l}$  est positive. De plus,  ${}^t X D X = 0$  si et seulement si pour tous  $\alpha$  et  $i$ ,  $dr_{\alpha,i}(X) = 0$  : c'est-à-dire  $X \in TE$ . Ainsi, pour tout  $p \in E$ ,

$$\mathcal{L}_p^J \rho(X) = {}^t X D(p) X + {}^t (J(p) X) D(p) (J(p) X) \geq 0$$

et

$$\mathcal{L}_p^J \rho(X) = 0 \iff (X \in TE \text{ et } JX \in TE) \iff X = 0$$

puisque  $E$  est totalement réelle. La forme de Levi de  $\rho$  est donc définie positive sur  $E$ , et le reste au voisinage de  $E$  par continuité.  $\square$

**Corollaire 3.17** *Soit  $(M, J)$  une variété presque complexe,  $E$  une sous-variété totalement réelle maximale,  $p \in E$  et  $(z, U)$  une carte  $(\varepsilon', E)$ -adaptée au voisinage de  $p$ . Soit de plus  $h$  continue de  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$  dans  $M$ ,  $J$ -holomorphe sur  $\Delta^+$ , vérifiant  $h(]-1; 1[) \subset E$ . Pour tout  $a \in ]-1; 1[ \cap h^{-1}(U)$ , il existe un voisinage  $W \ni a$  inclus dans  $U$  sur lequel  $z \circ h$  est  $1/2$ -höldérienne, et*

$$\forall \zeta, \zeta' \in W, \|z \circ h(\zeta) - z \circ h(\zeta')\| \leq \frac{\tilde{c}}{1 - |a|} \times \frac{\|z \circ h\|_\infty}{\sqrt{\lambda_E^J}} \times |\zeta - \zeta'|^{1/2}$$

où  $\tilde{c}$  est une constante universelle, et  $\lambda_E^J$  est la  $J$ -courbure minimale de  $E$  (définie en (2.11)).

### Preuve

La démonstration du lemme 3.16 montre que la fonction  $\rho = \sum_{i=1}^n (\pi_{y_i} \circ z)^2$  définie sur  $V \Subset U$ , où  $\pi_{y_i}$  désigne la projection canonique dans  $\mathbb{R}^{2n}$  sur l'axe de  $y_i$ , s'étend en une fonction positive, strictement  $J$ -plurisousharmonique, telle que  $E = \{\rho = 0\}$ . On a alors :

$$\forall \zeta \in \Delta^+, |\rho \circ h(\zeta)| \leq \|z \circ h(\zeta)\|^2 \leq \|z \circ h\|_\infty^2.$$

La proposition 3.15 donne un voisinage  $W$  de  $a$  tel que

$$\forall \zeta, \zeta' \in W, \|z \circ h(\zeta) - z \circ h(\zeta')\| \leq \frac{c}{1 - |a|} \times \sqrt{\frac{\int_0^\pi \rho \circ h(e^{i\theta}) d\theta}{\lambda_0(z(U \cap V), z_* J, \rho \circ z^{-1})}} \times |\zeta - \zeta'|^{1/2},$$

d'où le résultat par définition de  $\lambda_E^J$ .  $\square$

Cette estimation de la norme  $1/2$ -höldérienne va conduire de façon automatique à une estimation des normes höldériennes de degré supérieur. Pour cela, on utilisera la proposition suivante :

**Proposition 3.18 (voir [56])** *Soit  $\alpha \in ]0; 1[$ ,  $\Omega$  un domaine de  $\Delta$  et  $K$  relativement compact dans  $D$ . Il existe  $\delta_\alpha > 0$  et  $\Lambda(\alpha, K) > 0$  telles que si  $q : \mathbb{B}^n \rightarrow \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n)$  est de classe  $\mathcal{C}^\alpha$  avec  $\|q\|_\alpha \leq \delta_\alpha$ , alors toute fonction différentiable  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{B}^n$  vérifiant  $\bar{\partial}h + q \circ h \times \partial h = 0$  est de classe  $\mathcal{C}^{1, \alpha}$  sur  $K$ , et*

$$\|h|_K\|_{1, \alpha} \leq \Lambda(\alpha, K) \times \|h|_K\|_{1/2}.$$

### Preuve

On reprend la démonstration de la proposition de [56], en choisissant la fonction  $\rho_1$  à support inclus dans l'intérieur de  $\Omega$ . Notons  $T$  et  $P$  les opérateurs définis par

$$Pg(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \int_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad , \quad Tg(z) = p.v. \left( \frac{1}{2\pi i} \int_D \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right).$$

On fixe  $K'$  et  $K''$  deux compacts tels que  $K \Subset K'' \Subset K' \Subset D$ , et  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  des fonctions lisses de  $\Delta$  dans  $[0; 1]$  vérifiant

- $\text{Supp}(\rho_1) \subset \text{int } \Omega$  et  $\rho_1|_{K'} \equiv 1$ ,
- $\text{Supp}(\rho_2) \subset K'$  et  $\rho_2|_{K''} \equiv 1$ ,
- $\text{Supp}(\rho_3) \subset K''$  et  $\rho_3|_K \equiv 1$ .

Soit  $M(K, D, \alpha) := \max(\|\rho_1\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}}, \|\rho_2\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}}, \|\rho_3\|_{\mathcal{C}^{1,\alpha}})$ . Les constantes  $\Lambda$  et  $\delta$  cherchées ne dépendent que de  $\|T\|_{L^3(D)}$ ,  $\|P\|_{L^3(D) \rightarrow \mathcal{C}^{1/3}(D)}$ ,  $\|T\|_{\mathcal{C}^{\alpha/3}}$  et  $M(K, D, \alpha)$ .  $\square$

La méthode d'”amorce géométrique” (voir la preuve de la proposition 3.2 dans [22]) consiste à obtenir la régularité et les estimées par induction, en réinjectant au fur et à mesure dans l'équation de pseudoholomorphicité.

Supposons  $r = k + \alpha$ , où  $k \geq 2$  et  $0 < \alpha < 1$ , et soit  $D^+ := h^{-1}(U)$ ,  $D^- := \overline{h^{-1}(U)}$  et  $\delta := \overline{D^+} \cap \overline{D^-}$ . On pose

$$g(\zeta) = \begin{cases} z \circ h(\zeta) & \text{si } \zeta \in D^+ \\ z \circ h(\bar{\zeta}) & \text{si } \zeta \in D^- \end{cases}.$$

La fonction  $g$  est ainsi définie et continue sur  $D := D^+ \cup D^- \cup \delta$ . De plus  $g$  vérifie sur  $D$  :

$$\bar{\partial}g + A(\cdot)\partial g = 0,$$

où  $A(\zeta)$  est défini par  $A(\zeta) = Q(g(\zeta))$  si  $\zeta \in D^+ \cup \delta$ , et  $A(\zeta) = \overline{Q(g(\bar{\zeta}))}$  si  $\zeta \in D^-$ , et où  $Q$  est donné par le lemme 2.18. Puisque  $g$  est  $1/2$ -hölderienne,  $A$  est de classe  $\mathcal{C}^{1/2}$ .

Soit  $K$  un compact inclus dans  $(D^+ \cup \delta)$ . Les estimées a priori de la proposition 3.18 (voir aussi [61]) s'appliquent à  $g$  : ainsi,  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,1/2}$  sur  $K$ , et

$$\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{1,1/2}(K)} = \|g\|_{\mathcal{C}^{1,1/2}(K)} \leq \Lambda(1/2, K)\|g\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)} = \Lambda(1/2, K)\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)}.$$

D'après le lemme 2.20, l'inégalité qu'on vient d'établir s'applique à  $H^1 = (h, dh)$  : ainsi  $H^1$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,1/2}$  sur  $K$  et  $\|z^c \circ H^1\|_{\mathcal{C}^{1,1/2}(K)} \leq \Lambda(1/2, K)\|z^c \circ H^1\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)}$ , autrement dit

$$\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{2,1/2}(K)} \leq \Lambda(1/2, K)\|g\|_{\mathcal{C}^{1,1/2}(K)} \leq \Lambda(1/2, K)^2\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)}.$$

En itérant, on obtient de même que  $H^{k-2} = (z, dz, \dots, d^{k-2}z)$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,1/2}$  sur  $K$ , c'est-à-dire que  $z \circ h$  est de classe  $\mathcal{C}^{k-1,1/2}$  sur  $K$ , et

$$\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{k-1,1/2}(K)} \leq C(k, K)\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)}.$$

Le même raisonnement appliqué à  $H^{k-1}$  (pour laquelle le coefficient dans l'équation de pseudo-holomorphicité est de classe  $\mathcal{C}^{\alpha/2}$ ) donne le caractère  $\mathcal{C}^{1,\alpha/2}$  de  $H^{k-1}$ , c'est-à-dire montre que  $z \circ h$  est de classe  $\mathcal{C}^{k,\alpha/2}$  et que

$$\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{k,\alpha/2}(K)} \leq C(K, k)\Lambda(\alpha, K)\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)}.$$

De plus,

$$\|z \circ h\|_{\mathcal{C}^{1/2}(K)} \leq \|z \circ h\|_{\infty} \left( 1 + \frac{c(K)}{\sqrt{\lambda_E^J}} \right)$$

d'après la proposition précédente. Remarquons que la construction, au chapitre 2, d'un atlas  $(\varepsilon', E)$ -adapté, montre que le choix d'un atlas quelconque ne modifie pas l'estimation obtenue. On vient d'établir :

**Théorème 3.19** Soit  $(M, J)$  une variété  $\mathcal{C}^r$ -presque complexe (où  $r = k + \alpha \geq 1$  et  $0 < \alpha < 1$ ) et  $E$  une sous-variété totalement réelle maximale. Toute application  $h$  continue de  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$  dans  $M$ ,  $J$ -holomorphe sur  $\Delta^+$  et vérifiant  $h(]-1; 1[) \subset E$  est localement de classe  $\mathcal{C}^{r-\alpha/2}$  sur  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$ .

De plus, en désignant par  $\lambda_E^J$  la  $J$ -courbure minimale de  $E$ , on a pour tout compact  $K$  inclus dans  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$  :

$$\|h\|_{\mathcal{C}^{r-\alpha/2}(K)} \leq c(r, K) \|h\|_{\infty} \left( 1 + \frac{c(K)}{\sqrt{\lambda_E^J}} \right),$$

### 3.4 Application : régularité sur l'arête d'un wedge

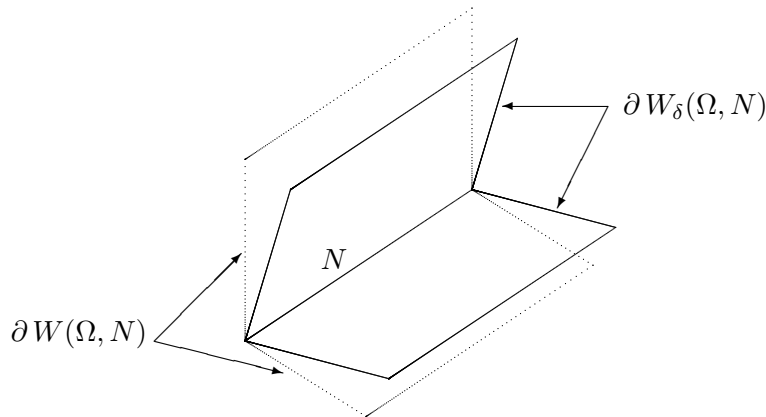
La régularité et les estimations données par le théorème 3.19 pour les disques pseudo-holomorphes vont fournir la régularité et des estimations similaires pour des applications pseudo-holomorphes. On s'intéresse ici à une application définie sur un wedge; dans le chapitre 4, on en déduira le comportement au bord d'une application pseudo-holomorphe propre entre deux domaines strictement pseudoconvexes. Commençons par quelques remarques préliminaires.

Soit  $(M, J)$  une  $\mathcal{C}^r$ -variété presque complexe et  $\Omega \subset M$  un domaine. On suppose que  $N \subset \Omega$  est une sous-variété totalement réelle maximale donnée par  $r_1 = \dots = r_n = 0$  où  $dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n$  ne s'annule pas sur  $\Omega$ . Notons  $W(\Omega, N) := \{z \in \Omega / \forall 1 \leq j \leq n, r_j(z) < 0\}$  le wedge d'arête  $N$ .

Pour tout  $0 < \delta < \frac{1}{n-1}$ ,  $W_\delta(\Omega, N) := \{z \in \Omega / \forall 1 \leq j \leq n, r_j(z) - \delta \sum_{k \neq j} r_k(z) < 0\}$  est inclus dans  $W(\Omega, N)$  : en effet, en posant  $S = \sum_k r_k$ , il vient

$$[\forall j, (1 + \delta)r_j < \delta S] \implies (1 + \delta)S < n\delta S \implies (1 - (n-1)\delta)S < 0 \implies r_j < \frac{\delta}{1 + \delta} S < 0.$$

Dans cette section, on suppose donc  $0 < \delta < \frac{1}{n-1}$ .



On commence par vérifier :

**Lemme 3.20**  $W_\delta(\Omega, N)$  et  $W(\Omega, N)$  sont des ouverts non vides de  $\Omega$  et  $N$  est incluse dans leur bord.

**Preuve**

Posons  $\rho_j = r_j - \delta \sum_{k \neq j} r_k$  : en particulier,

$$\begin{pmatrix} d\rho_1 \\ \vdots \\ d\rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (-\delta) \\ & \ddots & \\ (-\delta) & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dr_1 \\ \vdots \\ dr_n \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, la famille  $(dr_1, \dots, dr_n)$  est libre en tout point. De plus la matrice de passage est inversible (elle a pour déterminant  $(1 - (n-1)\delta)(1 + \delta)^{n-1}$ ), donc la famille  $(d\rho_1, \dots, d\rho_n)$  est libre en tout point.

De même, 
$$\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & (-\delta) \\ & \ddots & \\ (-\delta) & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix},$$
 donc

$$r_1 = \dots = r_n = 0 \iff \rho_1 = \dots = \rho_n = 0$$

et les  $\rho_j$  sont des fonctions définissantes de  $N$ .

Comme  $W_\delta(\Omega, N) = \{z \in \Omega / \forall j, \rho_j(z) < 0\}$ , il suffit (quitte à changer de fonctions définissantes) de montrer que  $W_\delta(\Omega, N)$  est un ouvert non vide.

Or pour  $\phi : \Omega \ni z \mapsto (r_1(z), \dots, r_n(z)) \in \mathbb{R}^n$ , on a  $W(\Omega, N) = \phi^{-1}(]0; +\infty[^n)$  ouvert et  $d\phi$  de rang  $n$  donc surjective sur  $\Omega$ , d'où la conclusion d'après le théorème du rang constant.  $\square$

**Proposition 3.21** Soit  $k, k' \geq 1$  des entiers et  $0 < \alpha, \alpha' < 1$ ,  $(M, J)$  une variété  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ -presque complexe et  $(M', J')$  une variété  $\mathcal{C}^{k', \alpha'}$ -presque complexe, et  $\Omega \subset M$  un domaine. On suppose que  $N \subset \Omega$  (resp.  $N'$ ) est une sous-variété totalement réelle maximale de  $(M, J)$  (resp. de  $(M', J')$ ). Posons  $s = \min(k - 1 + \alpha/2, k' + \alpha'/2)$ .

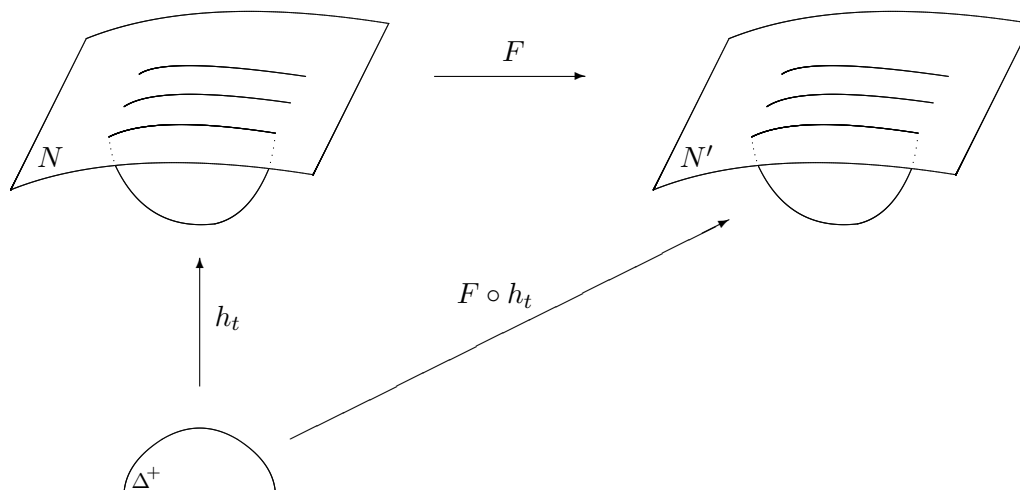
Toute application pseudo-holomorphe  $F : W(\Omega, N) \rightarrow (M', J')$ , continue sur  $W(\Omega, N) \cup N$  et telle que  $F(N) \subset N'$ , est localement de classe  $\mathcal{C}^s$ . De plus, pour tout compact  $K$  inclus dans  $W(\Omega, N) \cup N$  :

$$\|F\|_{\mathcal{C}^s(K)} \leq c(s, K) \|F\|_\infty \left( 1 + \frac{c(K)}{\sqrt{\lambda_{N'}}} \right).$$

**Preuve**

On se place sous les hypothèses de la proposition 3.21. D'après le lemme 5.2 de [15], il existe une famille paramétrée  $(h_t)_{t \in \mathbb{R}^{2n}}$  de demi-disques  $J$ -holomorphes, dépendant de façon lisse du paramètre  $t$ , telle que  $W_\delta(\Omega, N) \subset \bigcup_t h_t(\Delta^+)$  et

$$\forall t, h_t([-1; 1]) \subset N \text{ et } h_t(\Delta^+) \subset W(\Omega, N).$$



Le théorème 3.19 montre que les fonctions  $F \circ h_t$  sont localement de classe  $\mathcal{C}^{k'+\alpha'/2}$  sur  $\Delta^+ \cup ]-1; 1[$ , et donne pour tout compact  $K \subset \Delta^+ \cup ]-1; 1[$  :

$$\|F \circ h_t\|_{\mathcal{C}^{k'+\alpha'/2}(K)} \leq c(k', \alpha', K) \|F \circ h_t\|_{\infty} \left( 1 + \frac{c(K)}{\sqrt{\lambda_E^J}} \right).$$

Ainsi les normes  $\mathcal{C}^{k'+\alpha'/2}$  des fonctions  $F \circ h_t$  sont uniformément bornées. Rappelons le principe de régularité séparée :

**Proposition 3.22** [59] *Soit  $s > 0$  non entier et  $\Gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , des  $\mathcal{C}^{s+1}$ -feuilletages d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  tels qu'en tout point  $p \in \Omega$ , les vecteurs tangents aux courbes  $\gamma_j \in \Gamma_j$  passant par  $p$  soient linéairement indépendants. Soit  $f$  une fonction sur  $\Omega$  dont les restrictions  $f|_{\gamma_j}$ ,  $\gamma_j \in \Gamma_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  sont de classe  $\mathcal{C}^s$  et uniformément bornées en norme  $\mathcal{C}^s$ . Alors  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^s$ .*

De plus, si  $M$  est un majorant uniforme des normes  $\mathcal{C}^s$  des  $f|_{\gamma_j}$ , alors la norme  $\mathcal{C}^s$  de  $f$  est majorée par  $c \times M$  où  $c$  est une constante universelle [12]. Il découle de la construction de la famille  $(h_t)_t$  que les  $h_t(\cdot) \in ]-1; 1[$  forment des  $\mathcal{C}^{k+\alpha/2}$ -feuilletages transverses de  $N$  : ainsi les restrictions de  $F$  à ces courbes satisfont les hypothèses du principe de régularité séparée avec  $s = \min(k - 1 + \alpha/2, k' + \alpha'/2)$ .  $\square$

## Chapitre 4

# Prolongement et estimation au bord d'une application pseudo-holomorphe propre

Une application continue entre deux domaines  $D$  et  $D'$  est dite *propre* si l'image réciproque de tout compact inclus dans  $D'$  est un compact ; en particulier, une telle application est non constante. Le choix de l'espace but  $D'$  n'est pas indifférent : l'application identité du disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$  est propre en tant qu'application de  $\Delta$  dans  $\Delta$ , mais pas en tant qu'application de  $\Delta$  dans  $\mathbb{C}$ .

Une application holomorphe  $F : D \rightarrow D'$  est propre si et seulement si elle envoie toute suite de points tendant vers  $\partial D$  sur une suite de points tendant vers  $\partial D'$ . Les applications holomorphes propres ont été longuement étudiées (voir par exemple [54] pour les résultats classiques). La plupart des démonstrations mettent en jeu des arguments non transposables tels quels au cas pseudo-holomorphe. Notamment, l'holomorphie du jacobien combinée au fait qu'une sous-variété analytique compacte soit un ensemble fini de points donne la surjectivité d'une application holomorphe propre, ainsi que la densité de ses valeurs régulières. Si de plus les domaines sont strictement pseudoconvexes à bord de classe  $\mathcal{C}^2$ , S. Pinchuk [49] a montré qu'une telle application  $F$  est un biholomorphisme local. Nous montrons qu'en presque complexe, ce résultat reste vrai près du bord (théorème 4.24) en adaptant la méthode de dilatation des coordonnées de Pinchuk : il s'agit de dilater de façon anisotrope à la fois les domaines et les structures presque complexes. Les domaines limites sont la réalisation non bornée de la boule, et la fonction limite hérite des propriétés de  $F$  au bord, mais les structures limites ne sont pas nécessairement intégrables.

Dans la première section, on prolonge l'application de façon 1/2-hölderienne jusqu'au bord, ce qui revient, grâce aux estimées de la métrique de Kobayashi, à prouver que  $F$  conserve les distances au bord. Le point central de la deuxième section est de montrer, en étudiant la fonction limite obtenue par dilatation et en distinguant les cas intégrable et non intégrable, que  $|\text{Jac } F|$  reste minoré hors d'un compact par une constante strictement positive. Cette propriété essentielle permet d'appliquer le raisonnement de [22] pour obtenir le caractère  $\mathcal{C}^1$  du prolongement (théorème 4.29). Enfin, on étudiera plus précisément la régularité du prolongement, et l'on donnera dans la section 4.3 une estimation des normes hölderiennes de  $F$  au bord (théorème 4.30) en utilisant les résultats du chapitre 3.

## 4.1 Prolongement 1/2-hölderien au bord

### 4.1.1 Premières propriétés des applications pseudo-holomorphes propres

On suppose que  $D$  et  $D'$  sont deux domaines strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n$ , définis respectivement par  $\{\rho < 0\}$  et  $\{\rho' < 0\}$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Soit  $F$  une application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$ . Rappelons qu'un point  $p \in D$  est dit *critique* pour  $F$  si le jacobien de  $F$  s'annule en  $p$ , et notons  $C_F$  l'ensemble des points critiques de  $F$ . Une *valeur critique* est l'image par  $F$  d'un point critique, et les points de  $D'$  qui ne sont pas des valeurs critiques sont appelés *valeurs régulières*. L'idée est d'étudier la "taille" de l'ensemble des valeurs régulières de  $F$ , et d'en déduire des propriétés topologiques de  $F$ . Pour cela, la dimension de Hausdorff constitue le bon outil de travail.

#### Rappels sur la dimension de Hausdorff

Commençons par fixer les notations. Pour une partie  $A$  d'un espace métrique  $X$  et  $\varepsilon > 0$ , un  $\varepsilon$ -recouvrement de  $A$  est une collection au plus dénombrable de parties  $A_i$  de  $X$  telle que pour tout  $i$ ,  $\text{diam } A_i < \varepsilon$  et  $A = \bigcup_i A_i$ . Pour tout  $t > 0$ , on définit

$$H_\varepsilon^t(A) := \inf \left( \sum_i (\text{diam } A_i)^t \right),$$

où l'infimum est pris sur tous les  $\varepsilon$ -recouvrements  $\{A_i\}$  de  $A$ .

**Définition** La  $t$ -mesure de Hausdorff de  $A$  est  $H^t(A) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} H_\varepsilon^t(A) = \text{Sup}_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon^t(A)$ .

La dimension de Hausdorff de  $A$  est  $\dim_H(A) := \text{Sup}\{t > 0 / H^t(A) > 0\}$ .

En particulier, la  $N$ -mesure de Hausdorff dans  $\mathbb{R}^N$  coïncide avec la mesure de Lebesgue (voir par exemple [54], proposition 14.4.2), et si  $A$  est une variété de dimension  $N$ , alors  $\dim_H(A) = N$ . Dans la suite, on utilisera le résultat suivant, qui fournit notamment une majoration de la dimension de Hausdorff de l'ensemble des valeurs critiques :

**Théorème 4.1 ([18], théorème 3.4.3)** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $Y$  un espace vectoriel normé et  $F : \Omega \rightarrow Y$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout entier  $m < N$ ,

$$\dim_H(F(\{x \in \Omega / \dim(\text{Im } dF_x) \leq m\})) \leq m + \frac{N - m}{k}.$$

Si  $F$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  entre deux variétés, on obtient donc

$$\dim_H(F(\{x \in \Omega / \dim(\text{Im } dF_x) \leq m\})) \leq m.$$

Le théorème 4.1, qui généralise le théorème de Sard, apporte également une précision supplémentaire lorsque l'application considérée est pseudo-holomorphe :

**Corollaire 4.2** Soit  $F : (M, J) \rightarrow (M', J')$  une application pseudo-holomorphe entre deux

variétés presque complexes. L'ensemble  $F(C_F)$  des valeurs critiques de  $F$  est de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à  $2n - 2$ .

### Preuve

Vu le théorème 4.1, il suffit de montrer que l'application  $dF$  est de rang inférieur ou égal à  $2n - 2$  sur  $C_F$ . Soit donc  $p \in C_F$  : par définition, le sous-espace vectoriel  $\text{Ker } dF_p$  est de dimension au moins 1. De plus,  $F$  est  $(J, J')$ -holomorphe donc  $\text{Ker } dF_p$  est stable par  $J_p$ . Puisque l'endomorphisme  $J_p$  n'a pas de valeur propre réelle, cela implique que  $\text{Ker } dF_p$  contient un sous-espace de dimension 2, d'où le résultat.  $\square$

### Points critiques, valeurs régulières

Il est bien connu (voir par exemple [54], proposition 15.1.5) qu'une application holomorphe propre entre deux domaines de  $\mathbb{C}^n$  est surjective et que l'ensemble de ses valeurs régulières forme un ouvert dense et connexe par arcs. Ce résultat se généralise au cas pseudo-holomorphe. Commençons par montrer :

**Lemme 4.3** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudo-convexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  de dimension  $2n$ , définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^2$ . Toute application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  prend des valeurs régulières.*

### Preuve

Il suffit de montrer que l'ouvert  $D \setminus C_F$  est non vide, ce qui, grâce au théorème du rang constant, impliquera que son image par  $F$  est un ouvert de  $D'$ , donc de dimension de Hausdorff égale à  $2n$ . Comme  $\dim_H F(C_F) \leq 2n - 2$  vu le corollaire 4.2, on obtiendra bien  $F(C_F) \neq F(D \setminus C_F)$ .

Par l'absurde, supposons  $C_F = D$  et notons  $r_0$  le rang maximal atteint par  $dF$  sur  $D$  : alors  $r_0 \leq 2n - 2$ , et  $r_0 > 0$  puisque  $F$  est non constante. L'ensemble  $D_0$  des points où  $dF$  est de rang  $r_0$  est un ouvert, dont l'image par  $F$  est une sous-variété de dimension  $r_0$  d'après le théorème du rang constant : ainsi  $\dim_H F(D_0) = r_0$ .

Or sur  $D \setminus D_0$ , l'application  $dF$  est de rang inférieur ou égal à  $r_0 - 1$  (en fait  $r_0 - 2$ ), donc  $\dim_H F(D \setminus D_0) \leq r_0 - 1$  toujours d'après le théorème 4.1, et  $F(D_0) \neq F(D \setminus D_0)$ .

Soit donc  $q \in F(D_0) \setminus F(D \setminus D_0)$ . Autrement dit,  $N := F^{-1}(\{q\})$  est inclus dans l'ouvert  $D_0$  : c'est donc une sous-variété de dimension  $2n - r_0$  de  $D$ , compacte puisque  $F$  est propre. De plus le fibré tangent à  $N$  est  $\text{Ker } dF$  qui est stable par  $J$ , par suite  $J$  induit une structure presque complexe sur  $N$ .

La fonction  $\rho$  atteint son maximum sur  $N$  en un point  $p$ . D'après [45], 5.4.a, il existe un disque pseudo-holomorphe  $h$  à valeurs dans  $N$ , centré en  $p$  et tel que  $\frac{\partial h}{\partial x}(0) \neq 0$ . La fonction strictement sous-harmonique  $\rho \circ h$ , qui atteint son maximum en 0, est constante d'après le principe du maximum.

Calculons le laplacien  $\Delta(\rho \circ h)$  : il est nul puisque la fonction est constante. Par ailleurs, d'après le lemme 2.8,

$$\Delta(\rho \circ h)_\zeta = \mathcal{L}_{h(\zeta)}^J(\rho) \left( \frac{\partial h}{\partial x}(\zeta) \right),$$

ce qui donne  $0 = \Delta(\rho \circ h)_p = \mathcal{L}_p^J(\rho) \left( \frac{\partial h}{\partial x}(0) \right) > 0$  puisque  $\rho$  est strictement plurisousharmonique : d'où la contradiction.  $\square$

Une propriété importante des fonctions holomorphes, qui traduit leur rigidité, est qu'elles préservent l'orientation. Ce n'est plus forcément vrai dans le cadre presque complexe : ainsi, l'application  $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, \dots, z_{n-1}, \bar{z}_n)$  est  $(J_{st}, J')$ -holomorphe pour

$$J' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -I_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ I_{n-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mais inverse l'orientation. Néanmoins, la pseudo-holomorphie (c'est-à-dire le fait de "commuter" avec les structures presque complexes) suffit à garantir la rigidité d'une application vis-à-vis de l'orientation. En effet :

**Proposition 4.4** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n$ , et  $F$  une application  $(J, J')$ -holomorphe de  $D$  dans  $D'$ . Ou bien  $F$  conserve l'orientation en tout point, ou bien  $F$  inverse l'orientation en tout point.*

**Preuve**

Plaçons-nous en coordonnées locales : il s'agit de montrer que le jacobien de  $F$  garde un signe constant sur  $D$ . La structure presque complexe  $J$ , vérifiant la relation  $J^2 = -I_{2n}$ , s'écrit sous la forme  $J_p = P_p J_{st} P_p^{-1}$  où  $J_{st} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$  est la structure standard de  $\mathbb{R}^{2n}$  et où la matrice  $P_p$  est inversible. Cette décomposition n'est pas unique, mais si  $J_p = P_p J_{st} P_p^{-1} = Q_p J_{st} Q_p^{-1}$ , alors la matrice  $Q_p^{-1} P_p$  commute avec  $J_{st}$  et s'écrit donc sous la forme  $Q_p^{-1} P_p = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$  (où chaque bloc est de taille  $n$ ). Par conséquent,  $\det(Q_p^{-1} P_p) = |\det(B + iA)|^2 > 0$ , et  $\det P_p$  et  $\det Q_p$  ont même signe. Notons  $\delta^J(p)$  ce signe, et montrons que l'application  $\delta^J$  est localement constante sur  $D$ .

Soit  $p_0 \in D$  et  $(e_1^{(p_0)}, \dots, e_{2n}^{(p_0)})$  une base telle que  $\forall k \geq 1, e_{n+k}^{(p_0)} = J_{p_0} e_k^{(p_0)}$ , et  $P_p$  la matrice formée des vecteurs  $(e_1^{(p_0)}, \dots, e_n^{(p_0)}, J_p e_1^{(p_0)}, \dots, J_p e_n^{(p_0)})$  : il existe un voisinage  $V$  de  $p_0$  dans lequel la matrice  $P_p$  est inversible. En particulier, pour tout  $p \in V$ ,  $\det P_p$  et  $\det P_{p_0}$  ont le même signe :  $\delta^J(p_0) = \delta^J(p)$ . Ainsi  $\delta^J$  est localement constante sur  $D$ . Puisque  $D$  est connexe et localement connexe par arcs, donc connexe par arcs, cela entraîne que la fonction  $\delta^J$  est constante sur  $D$ .

Pour tout  $p \in D$  et  $q \in D'$ , écrivons  $J_p = P_p J_{st} P_p^{-1}$  et  $J'_q = P'_q J_{st} P'^{-1}_q$ . La pseudo-holomorphie de  $F$  donne  $dF_p J_p = J'_{F(p)} dF_p$ , autrement dit  $(P'^{-1}_{F(p)} dF_p P_p)$  commute avec la structure standard. De même que ci-dessus, on en déduit  $\det(P'^{-1}_{F(p)} dF_p P_p) > 0$ . Ainsi, en tout point non critique, le signe du jacobien de  $F$  est  $\delta^J \times \delta^{J'}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure à la surjectivité par des arguments de théorie du degré.

**Corollaire 4.5** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudo-convexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n$ , définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $C^2$ .*

*Une application pseudo-holomorphe propre  $F : D \rightarrow D'$  est surjective, et toutes ses valeurs régulières ont le même nombre (fini) d'antécédents. De plus, les valeurs régulières de  $F$  forment un ouvert connexe par arcs et dense dans  $D'$ .*

### Preuve

Rappelons le résultat suivant (voir par exemple [57]) : si  $X$  et  $Y$  sont deux variétés connexes orientées de même dimension,  $F : X \rightarrow Y$  une application propre et lisse, et  $q$  une valeur régulière de  $F$ , alors le degré de  $F$  vaut  $\sum_{p \in F^{-1}\{q\}} \text{sgn}(\det dF_p)$ . En particulier, si  $q$  n'est pas dans l'image de  $F$ , le degré de  $F$  est nul.

Puisque  $F$  possède au moins une valeur régulière, son degré est strictement positif si  $F$  conserve l'orientation et strictement négatif si  $F$  inverse l'orientation. Par conséquent,  $F$  est surjective et chacune de ses valeurs régulières possède exactement  $|\deg F|$  antécédents.

L'ensemble des points critiques de  $F$  est un fermé de  $D$  : comme  $F$  est propre donc fermée,  $D' \setminus F(C_F)$  est un ouvert de  $D'$ . De plus d'après le corollaire 4.2 et la proposition 14.4.2. de [54], son complémentaire dans  $D'$  est d'intérieur vide. Il reste à montrer que  $D' \setminus F(C_F)$  est connexe par arcs.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $q_1, q_2 \in D' \setminus F(C_F)$  tels que tout chemin continu reliant  $q_1$  à  $q_2$  dans  $D' \setminus F(C_F)$  rencontre  $F(C_F)$ . Comme  $D' \setminus F(C)$  est ouvert, il existe un  $(2n-1)$ -cube  $Q$  inclus dans  $D' \setminus F(C_F)$ , centré en  $q_2$  et orthogonal au segment  $[q_1; q_2]$  : pour tout  $q' \in Q$ , le segment  $[q_1; q']$  rencontre donc  $F(C_F)$ . Notons  $\pi$  l'application lipschitzienne qui à tout point  $x$  situé dans le demi-cône de sommet  $q_1$  et de base  $Q$  associe l'intersection de la demi-droite  $[q_1; x]$  avec  $Q$  : il vient  $\dim_H(\pi(F(C_F))) \leq \dim_H(F(C_F))$ . De plus  $Q$  est inclus dans  $\pi(F(C))$  ; ainsi,

$$2n - 1 = \dim_H(Q) \leq \dim_H(\pi(F(C_F))) \leq \dim_H(F(C_F)) \leq 2n - 2,$$

d'où la contradiction. □

### 4.1.2 Conservation des distances

**Théorème 4.6** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n$ , définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $C^2$ . Toute application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  se prolonge au bord en une application  $\frac{1}{2}$ -höldérienne.*

De même que dans la preuve de la proposition 3.3 de [15], le prolongement au bord découle d'estimées de la métrique de Kobayashi et de la propriété de conservation de la distance. Il s'agit donc de montrer :

**Proposition 4.7** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  de dimension  $2n$ , définis respectivement par*

$\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^2$ . Si  $F : D \rightarrow D'$  est une application pseudo-holomorphe propre, il existe des constantes strictement positives  $c_1$  et  $c_2$  telles que

$$\forall p \in D, \quad c_1 \leq \frac{\text{dist}(F(p), \partial D')}{\text{dist}(p, \partial D)} \leq c_2.$$

La démonstration de la proposition 4.7 fait intervenir la version presque complexe du lemme de Hopf :

**Proposition 4.8** [15] *Soit  $D'$  un domaine borné à bord de classe  $\mathcal{C}^2$  d'une variété presque complexe, et  $u$  une fonction plurisousharmonique sur  $D'$ . Il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $q \in D'$ ,  $|u(q)| \geq c \text{dist}(q, \partial D')$  (la distance étant prise pour une métrique riemannienne sur  $M$ ).*

Le lemme de Hopf appliqué à  $\rho' \circ F$  sur  $D$  donne une constante  $c > 0$  telle que

$$\forall p \in D, \quad |\rho'(F(p))| \geq c \text{dist}(p, \partial D). \quad (4.1)$$

L'idée, donnée dans [48] pour le cas standard, serait d'appliquer le lemme de Hopf à la fonction  $\rho \circ F^{-1}$  pour obtenir l'autre partie de l'inégalité. Pour pallier au fait que  $F$  ne soit pas inversible, on va utiliser la notion de plurisousharmonicité pour une fonction semi-continue supérieurement. Commençons par rappeler la définition suivante, équivalente dans le cas d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à celle donnée au chapitre 2 :

**Définition** *Une fonction semi-continue supérieurement est  $J$ -plurisousharmonique sur  $\Omega$  si pour tout disque  $J$ -holomorphe  $h : \Delta \rightarrow \Omega$ , la fonction  $u \circ h$  est sousharmonique.*

Il existe plusieurs définitions équivalentes de la sous-harmonicité d'une fonction  $v$  semi-continue supérieurement sur le disque unité  $\Delta$  de  $\mathbb{C}$  (voir [32] ou [53]). Nous utiliserons la suivante :  $v$  est dite *sous-harmonique* sur  $\Delta$  si pour tout  $\zeta_0 \in \Delta$ , il existe  $r_0 > 0$  tel que le disque fermé de centre  $\zeta_0$  et de rayon  $r_0$  soit inclus dans  $\Delta$  et

$$\forall 0 \leq r < r_0, \quad u \circ h(\zeta_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ h(\zeta_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (4.2)$$

*Remarque 4.9* Une fonction  $u$  est localement  $J$ -plurisousharmonique sur un ouvert  $\Omega$  si et seulement si elle est (globalement)  $J$ -plurisousharmonique sur  $\Omega$ .

En effet, il est immédiat que le caractère globalement  $J$ -plurisousharmonique implique la  $J$ -plurisousharmonicité locale. Pour la réciproque, il suffit pour tout disque  $J$ -holomorphe  $h : \Delta \rightarrow \Omega$  et tout  $\zeta_0 \in \Delta$  de considérer le disque  $J$ -holomorphe défini par  $\tilde{h}(\zeta) = h(\zeta_0 + \varepsilon\zeta)$ . Pour  $\varepsilon$  assez petit, la  $J$ -plurisousharmonicité locale donne  $r_0 > 0$  vérifiant (4.2), et par conséquent (4.2) est encore vraie pour  $h$  et  $\varepsilon r_0$ .

Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème 4.6. La fonction

$$u : D' \ni q \mapsto \text{Max}_{p \in F^{-1}(\{q\})} \{\rho(p)\}$$

est bien définie, à valeurs strictement négatives. De plus :

**Lemme 4.10** *La fonction  $u$  est continue et  $J$ -plurisousharmonique sur  $D' \setminus F(C_F)$ .*

**Preuve**

Soit  $q \in D' \setminus F(C_F)$ , et  $K := F^{-1}(\{q\})$ . Le compact  $K$  est formé de points non critiques, donc isolés d'après le théorème d'inversion locale : ainsi  $K$  est fini. Notons  $p_1, \dots, p_k$  les éléments deux-à-deux distincts de  $K$  (avec  $k = |\deg F|$ ). Pour tout  $j = 1, \dots, k$ , il existe un voisinage  $V_j$  de  $p_j$  et un voisinage  $W_j$  de  $q$  tels que  $F$  induise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $V_j$  sur  $W_j$ . Quitte à restreindre les  $V_j$ , on peut supposer que pour tous  $j$  et  $l$ ,  $V_j \cap V_l = \emptyset$  et que  $W_j = F(V_j) = F(V_l)$  est inclus dans l'ouvert  $D' \setminus F(C_F)$ .

Posons alors  $W' := (F(V_1) \cap \dots \cap F(V_k)) \setminus F(D \setminus \bigcup_{j=1}^k V_j)$  : c'est une intersection finie d'ouverts contenant  $q$ . Si  $q' \in W'$ , alors par construction  $q'$  a un antécédent et un seul dans chaque  $V_j$ , et n'a pas d'autres antécédents puisque  $W'$  est disjoint de  $F(D \setminus \bigcup_{j=1}^k V_j)$ . On peut donc écrire  $F^{-1}(W') = \bigsqcup_j V_j$ .

Pour tout  $j = 1, \dots, k$ , posons  $F_j := F|_{V_j} : V_j \rightarrow W$  et  $u_j := \rho \circ F_j^{-1}$  :

$$\forall q' \in W', \quad u(q') = \text{Max}_{1 \leq j \leq k} u_j(q').$$

Les fonctions  $u_j$  sont continues et  $J$ -plurisousharmoniques : par suite,  $u$  est continue (en tant que composée de fonctions continues) et  $J$ -plurisousharmonique au voisinage de  $q$ , ce qui conclut la preuve d'après la remarque 4.9.  $\square$

Mentionnons le résultat suivant, qui généralise le théorème de Grauert et Remmert [26] :

**Proposition 4.11** [16] *Soit  $D'$  un domaine borné d'une variété presque complexe de dimension  $2n$ ,  $A$  une partie de  $D'$  de dimension de Hausdorff inférieure ou égale à  $2n - 2$ , et  $u$  une fonction à valeurs strictement négatives, continue et plurisousharmonique sur  $D' \setminus A$ . Alors la régularisée supérieure  $\limsup(u)$  est plurisousharmonique sur  $D'$  entier.*

**Preuve de la proposition 4.7**

Le lemme de Hopf s'applique à la fonction  $\limsup(u)$  sur  $D'$  : il existe une constante  $c'$  telle que pour tout  $q \in D'$ ,  $|\limsup(u)(q)| \geq c' \text{dist}(q, \partial D')$ . En particulier, comme  $\rho$  est continue,

$$\forall p \in D, \quad |\rho(p)| \geq |\limsup(u)(F(p))| \geq c' \text{dist}(F(p), \partial D').$$

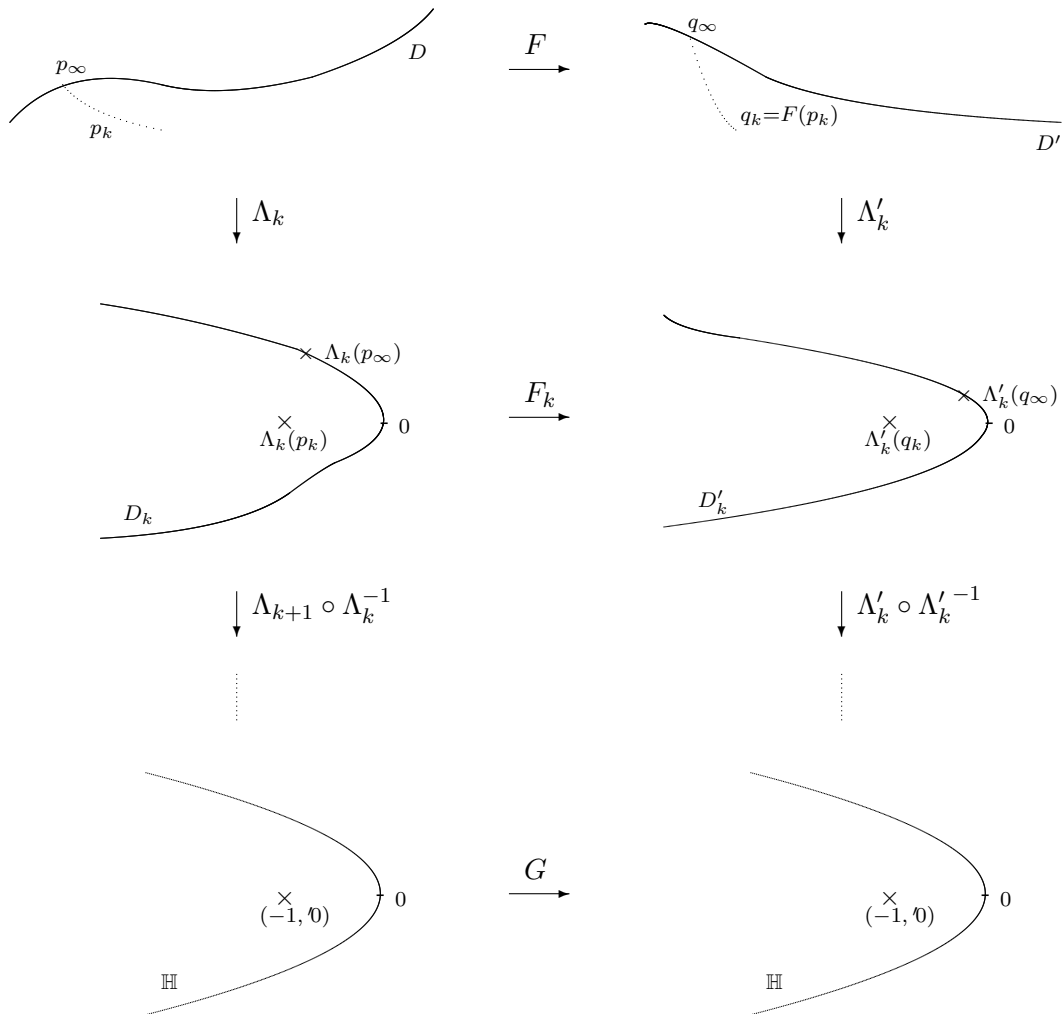
En combinant cette inégalité avec celle donnée par (4.1), on obtient que  $F$  conserve la distance au bord.  $\square$

## 4.2 Le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$

Dans cette section, on suppose que  $D$  et  $D'$  sont deux domaines strictement pseudo-convexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n + 2$ , définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^r$  ( $r \geq 2$ ).

4.2.1 La méthode des dilatations

Soit  $F$  une application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  : on vient de voir que  $F$  se prolonge à  $\bar{D}$  en une application 1/2-hölderienne. La méthode des dilatations va permettre d'obtenir une régularité supérieure. On adapte ici la présentation faite dans [22] et [40]. Soit  $(p_k)$  une suite de points de  $D$  convergeant vers  $p_\infty \in \partial D$ , et notons  $q_k = F(p_k)$  : d'après la proposition 4.7, la suite  $(q_k)$  converge vers  $q_\infty = F(p_\infty) \in \partial D'$ . Par des changements de variable successifs, on "redresse"  $\partial D$  et  $\partial D'$  de façon à obtenir à la limite  $\partial \mathbb{H}$  :



Choix des coordonnées locales

Un point de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  de coordonnées (réelles)  $(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)$  sera également noté en coordonnées complexes  $z = (z_0, \dots, z_n) = (z_0, 'z)$ , où  $z_j = x_j + iy_j$ . Pour cette identification

de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  avec  $\mathbb{C}^{n+1}$ , la structure complexe standard s'écrit matriciellement

$$\mathcal{J}_{st}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ 1 & 0 & & (0) & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quitte à choisir un système de coordonnées  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  au voisinage de  $p_\infty$  tel que  $\Phi(p_\infty) = 0$ , on identifie  $p_\infty$  à 0 et  $U$  à  $\mathbb{R}^{2n+2}$ ; on peut de plus demander que  $\rho \circ \Phi^{-1}$  reste bornée en norme  $\mathcal{C}^1$ , et supposer :

- $J(0) = J'(0) = \mathcal{J}_{st}$  ;
- $D = \{p \in \mathbb{R}^{2n+2} / \rho(p) < 0\}$  et  $T_0(\partial D) = \{x_0 = 0\}$ , où la fonction définissante  $\rho$  est bornée en norme  $\mathcal{C}^1$  et s'écrit

$$\rho(z) = \operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re} \left( z_0 \sum_{j \geq 1} (\rho_j z_j + \rho_j \bar{z}_j) \right) + P('z, '\bar{z}) + \rho_\epsilon(z)$$

pour  $P$  un polynôme homogène réel de degré 2 et  $\rho_\epsilon(z) = o(\|z\|^2)$  ;

- $D' = \{p \in \mathbb{R}^{2n+2} / \rho'(p) < 0\}$  et  $T_0(\partial D') = \{x_0 = 0\}$ , où la fonction définissante  $\rho'$  est bornée en norme  $\mathcal{C}^1$  et s'écrit

$$\rho'(z) = \operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re} \left( z_0 \sum_{j \geq 1} (\rho'_j z_j + \rho'_j \bar{z}_j) \right) + Q('z, '\bar{z}) + \rho'_\epsilon(z)$$

pour  $Q$  un polynôme homogène réel de degré 2 et  $\rho'_\epsilon(z) = o(\|z\|^2)$ .

### Construction des suites $(D_k, J_k)$ et $(D'_k, J'_k)$

Rappelons que si  $V$  est un voisinage borné de 0, on peut trouver (voir par exemple [23], Appendice, lemme 1) une constante  $\delta > 0$  telle que pour tout  $p \in V \cap \partial D$ , la boule fermée de centre  $p - \delta \vec{n}_p$  et de rayon  $\delta$  soit incluse dans  $D \cup \{p\}$  ( $\vec{n}_p$  désignant la normale sortante à  $D$  en  $p$ ). En particulier, pour  $k$  assez grand, il existe un unique  $\dot{p}_k \in \partial D$  et un unique  $\dot{q}_k \in \partial D'$  tels que

$$\operatorname{dist}(p_k, \partial D) = \|p_k - \dot{p}_k\| =: d_k \quad \text{et} \quad \operatorname{dist}(q_k, \partial D') = \|q_k - \dot{q}_k\| =: d'_k.$$

Construisons une application affine  $\phi_k : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  qui possède les propriétés suivantes :

- $\phi_k(\dot{p}_k) = 0$  et  $\phi_k(p_k) = (-d_k, 0, \dots, 0)$ .
- L'espace tangent à  $\partial(\phi_k(D))$  en 0 est  $\{\operatorname{Re} z_0 = 0\}$  et l'espace tangent complexe à  $\partial(\phi_k(D))$  en 0 (pour la structure presque complexe induite  $(\phi_k)_* J$ ) est  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ .
- L'application  $\phi_k$  converge vers l'application identité sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^2$ .

En coordonnées complexes, l'application définie par  $\phi_k(z) = (z - \dot{p}_k)^*$  de la façon suivante convient :

$$\begin{aligned} z_0^* &= \frac{1}{\|\nabla^{\mathbb{R}}\rho(\dot{p}_k)\|^2} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \rho}{\partial z_i}(\dot{p}_k) z_i; \\ z_j^* &= \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial z_0}(\dot{p}_k)} z_j - \frac{\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(\dot{p}_k)}{\frac{\partial \rho}{\partial z_0}(\dot{p}_k)} z_0^* \text{ pour } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Par conséquent,  $J^k = (\phi_k)_* J$  converge vers  $J$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  et  $J^k(0)$  est de la forme

$$J^k(0) = \begin{pmatrix} J_{(1,1)}^k(0) & 0_{2,2n} \\ J_{(2,1)}^k(0) & J_{(2,2)}^k(0) \end{pmatrix}.$$

De plus  $\rho_k = \rho \circ \phi_k^{-1}$  converge vers  $\rho$  à l'ordre 2 pour la topologie compacte-ouverte :

$$\rho_k(z) = \rho \circ \phi_k^{-1}(z) = \tau_k \left( \operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re} \left( z_0 \sum_{j \geq 1} (\rho_j^k z_j + \rho_j^k \bar{z}_j) \right) + P^k(z, \bar{z}) + \rho_\epsilon^k(z) \right)$$

où  $P^k$  est un polynôme homogène réel de degré 2 et  $\rho_\epsilon^k(z) = o(\|z\|^2)$  uniformément en  $k$ .

De même, on construit une transformation affine  $\phi'_k : \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$  possédant les propriétés suivantes :

- $\phi'_k(\dot{q}_k) = 0$  et  $\phi'_k(q_k) = (-d'_k, 0, \dots, 0)$ .
- L'espace tangent à  $\partial(\phi'_k(D'))$  en 0 est  $\{\operatorname{Re} z_0 = 0\}$  et l'espace tangent complexe à  $\partial(\phi'_k(D'))$  en 0 (pour la structure presque complexe induite  $(\phi'_k)_* J'$ ) est  $\{0\} \times \mathbb{C}^n$ .
- L'application  $\phi'_k$  converge vers l'application identité sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^2$ .

Par conséquent,  $J'^k = (\phi'_k)_* J'$  converge vers  $J'$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  et  $J'^k(0)$  est de la forme

$$J'^k(0) = \begin{pmatrix} J'_{(1,1)}{}^k(0) & 0_{2,2n} \\ J'_{(2,1)}{}^k(0) & J'_{(2,2)}{}^k(0) \end{pmatrix}.$$

De plus  $\rho'_k = \rho' \circ \phi'_k{}^{-1}$  converge vers  $\rho'$  à l'ordre 2 pour la topologie compacte-ouverte :

$$\rho'_k(z) = \rho' \circ \phi'_k{}^{-1}(z) = \tau'_k \left( \operatorname{Re} z_0 + \operatorname{Re} \left( z_0 \sum_{j \geq 1} (\rho'_j{}^k z_j + \rho'_j{}^k \bar{z}_j) \right) + Q^k(z, \bar{z}) + \rho'_\epsilon{}^k(z) \right)$$

où  $Q^k$  est un polynôme homogène réel de degré 2 et  $\rho'_\epsilon{}^k(z) = o(\|z\|^2)$  uniformément en  $k$ .

Posons  $\Lambda_k = \delta_k \circ \phi_k \circ \Phi$  et  $\Lambda'_k = \delta'_k \circ \phi'_k \circ \Phi'$ , où

$$\delta_k : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left( \frac{z_1}{d_k}, \frac{z_2}{\sqrt{d_k}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt{d_k}} \right) \text{ et } \delta'_k : (z_1, \dots, z_n) \mapsto \left( \frac{z_1}{d'_k}, \frac{z_2}{\sqrt{d'_k}}, \dots, \frac{z_n}{\sqrt{d'_k}} \right).$$

Notations :

$$D_k = \Lambda_k(D), \quad r_k = \frac{1}{d_k \tau_k} \rho \circ \Lambda_k^{-1}, \quad J^k = (\Lambda_k)_* J$$

$$D'_k = \Lambda'_k(D'), \quad r'_k = \frac{1}{d'_k \tau'_k} \rho' \circ \Lambda'_k{}^{-1}, \quad J'^k = (\Lambda'_k)_* J'$$

et  $F_k = \Lambda'_k \circ F \circ \Lambda_k^{-1} : D_k \rightarrow D'_k$ .

### Convergence des domaines

Après dilatation, on a

$$d_k r_k(z) = \frac{1}{\tau_k} \rho_k \circ \delta_k^{-1}(z) = d_k \left( \operatorname{Re} z_0 + P^k('z, 'z) \right) + O(d_k \sqrt{d_k}).$$

Le même raisonnement pour  $r'_k$  donne :

#### Lemme 4.12 [40]

1. La suite  $(r_k)$  converge à l'ordre 2 pour la topologie compacte-ouverte vers  $\tilde{r}$ , où

$$\tilde{r}(z) = \operatorname{Re} z_0 + P('z, 'z)$$

et  $D_k$  converge (au sens de la convergence de Hausdorff pour les ensembles) vers  $\tilde{D} = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} / \tilde{r}(z) < 0\}$ .

2. La suite  $(r'_k)$  converge à l'ordre 2 pour la topologie compacte-ouverte vers  $\tilde{r}'$ , où

$$\tilde{r}'(z) = \operatorname{Re} z_0 + Q('z, 'z)$$

et  $D'_k$  converge (au sens de la convergence de Hausdorff locale pour les ensembles) vers  $\tilde{D}' = \{z \in \mathbb{R}^{2n+2} / \tilde{r}'(z) < 0\}$ .

**Lemme 4.13 [40]** La suite de structures presque complexes  $(J^k)$  (respectivement  $(J'^k)$ ) converge vers une structure modèle  $\tilde{J}$  (respectivement  $\tilde{J}'$ ) pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ .

#### Preuve

Ecrivons  $J$  et  $J^k$  sous forme de matrices blocs :

$$J(z) = J(0) + \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{st}^{(1)} + A(z) & B(z) \\ C(z) & \mathcal{J}_{st}^{(n-1)} + D(z) \end{pmatrix}$$

$$j^k(z) = j^k(0) + \begin{pmatrix} \dot{A}^k(z) & \dot{B}^k(z) \\ \dot{C}^k(z) & \dot{D}^k(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_{(1,1)}^k(0) + \dot{A}^k(z) & \dot{B}^k(z) \\ j_{(2,1)}^k(0) + \dot{C}^k(z) & j_{(2,2)}^k(0) + \dot{D}^k(z) \end{pmatrix}$$

où  $\dot{A}^k \rightarrow A$ ,  $\dot{B}^k \rightarrow B$ ,  $\dot{C}^k \rightarrow C$  et  $\dot{D}^k \rightarrow D$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact. Alors

$$J^k(z) := \begin{pmatrix} \frac{1}{d_k} I_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{d_k}} I_{2n} \end{pmatrix} j^k(\delta_k^{-1}(z)) \begin{pmatrix} d_k I_2 & 0 \\ 0 & \sqrt{d_k} I_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} j_{(1,1)}^k + \dot{A}^k(\delta_k^{-1}(z)) & \frac{1}{\sqrt{d_k}} \dot{B}^k(\delta_k^{-1}(z)) \\ \sqrt{d_k} j_{(2,1)}^k + \sqrt{d_k} \dot{C}^k(\delta_k^{-1}(z)) & j_{(2,2)}^k + \dot{D}^k(\delta_k^{-1}(z)) \end{pmatrix}.$$

Comme  $\delta_k^{-1}$  converge uniformément vers 0 et que  $\tilde{J}^k$  converge uniformément vers  $J$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ , on obtient bien

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{(1,1)}^k + \dot{A}^k(\delta_k^{-1}(z)) &\rightarrow \mathcal{J}_{st}^{(1)} \\ \sqrt{d_k} \tilde{J}_{(2,1)}^k + \sqrt{d_k} \dot{C}^k(\delta_k^{-1}(z)) &\rightarrow 0 \\ \tilde{J}_{(2,2)}^k + \dot{D}^k(\delta_k^{-1}(z)) &\rightarrow \mathcal{J}_{st}^{(n)} \end{aligned}$$

sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$ . Les matrices  $\dot{B}^k(z)$  et  $B(z)$  s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{B}^k(z) &= \sum_{j=1}^n (B_{2j-1}^k x_j + B_{2j}^k y_j) + B_\epsilon^k(z) \\ B(z) &= \sum_{j=1}^n (B_{2j-1} x_j + B_{2j} y_j) + B_\epsilon(z) \end{aligned}$$

où  $B_j^k$  est une suite de matrices constantes de taille  $2 \times (2n)$  qui converge vers  $B_j$  quand  $k \rightarrow +\infty$ ,  $B_\epsilon^k \rightarrow B_\epsilon$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact et  $B_\epsilon^k = o(\|z\|)$  uniformément en  $k$ . On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{d_k}} \dot{B}^k(\delta_k^{-1}(z)) &= \sqrt{d_k} (B_1^k x_1 + B_2^k y_1) + \sum_{j=2}^n (B_{2j-1}^k x_j + B_{2j}^k y_j) + \frac{1}{\sqrt{d_k}} B_\epsilon^k(d_k z_1, \sqrt{d_k} z) \\ &\rightarrow \sum_{j=2}^n (B_{2j-1} x_j + B_{2j} y_j) \text{ quand } k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Finalement,  $J^k$  converge sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  vers  $\tilde{J}$  définie par

$$\tilde{J}(z) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{st}^{(1)} & \tilde{B}(\cdot z) \\ 0 & \mathcal{J}_{st}^{(n)} \end{pmatrix} \text{ où } \tilde{B}(\cdot z) = \sum_{j=2}^n (B_{2j-1} x_j + B_{2j} y_j).$$

□

**Lemme 4.14** [22]  $(\tilde{D}, \tilde{J})$  et  $(\tilde{D}', \tilde{J}')$  sont des domaines modèles.

### Preuve

Il reste à montrer que le domaine  $\tilde{D}$  est strictement  $\tilde{J}$ -pseudoconvexe en 0. Posons  $\tilde{r}_k = \rho \circ \delta_k^{-1}$  et  $\tilde{J}^k = \delta_{k*} J$ . De même que pour  $\tilde{r}_k$  et  $\tilde{J}^k$ , la suite  $\tilde{r}_k/d_k$  converge vers  $\tilde{r}$  à l'ordre 2 pour la topologie compacte-ouverte, et  $\tilde{J}^k$  converge vers  $\tilde{J}$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^{2n+2}$ . Par conséquent, pour tout  $v$  :

$$\mathcal{L}_0^{\tilde{J}^k} \left( \frac{\tilde{r}_k}{d_k} \right) (v) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \mathcal{L}_0^{\tilde{J}} \tilde{r}(v).$$

La forme de Levi étant invariante sous l'action d'applications pseudo-holomorphes, et les  $\delta_k$  étant  $(J, \tilde{J}^k)$ -holomorphes par construction de  $\tilde{J}^k$ , il vient  $\mathcal{L}_0^J \rho(v) = \mathcal{L}_0^{\tilde{J}^k} \tilde{r}_k(d\delta_k(v))$ . Or

$\tilde{J}^k(0) = \mathcal{J}_{st}$ , donc tout vecteur tangent complexe au domaine défini par  $\tilde{r}_k$  est de la forme  $(0, v')$  et  $d\delta_k(v) = v/\sqrt{d_k}$ . Pour un tel  $v$ ,

$$\mathcal{L}_0^J \rho(v) = \mathcal{L}_0^{\tilde{J}^k} \tilde{r}_k(d\delta_k(v)) = \mathcal{L}_0^{\tilde{J}^k} \tilde{r}_k(v/\sqrt{d_k}) = \mathcal{L}_0^{\tilde{J}^k} \left( \frac{\tilde{r}_k}{d_k} \right) (v).$$

En passant à la limite, on en déduit  $\mathcal{L}_0^{\tilde{J}} \tilde{r}(v) > 0$  pour tout  $v$  dans l'espace tangent complexe à  $\tilde{D}$  en 0.  $\square$

### Convergence de la suite $(F_k)$

Notons  $Q(0, \alpha) = \{(z_0, 'z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid |z_0| \leq \alpha, \||'z|\| \leq \sqrt{\alpha}\}$  la pseudo-boule, et rappelons le résultat suivant :

**Lemme 4.15** *Il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $k$  suffisamment grand, tout  $r \in [0; 1[$  et tout disque  $J^k$ -holomorphe  $h$  à valeurs dans  $D_k \cap U$  vérifiant  $h(0) \in Q(0, \alpha)$ , il existe une constante  $C_r$  ne dépendant que de  $r$  telle que*

$$h(\Delta_r) \subset Q(0, C_r \alpha).$$

### Preuve

On trouvera une démonstration dans [15] dans le cas  $n=2$ , faisant intervenir des dilatations anisotropes et une minoration de la métrique de Kobayashi. Pour le cas  $n \geq 2$ , nous renvoyons à [40]. Nous donnons ici une preuve dans le cas particulier de la structure complexe standard et d'un domaine modèle.

Il suffit de prouver que si  $h_0$  est un disque holomorphe à valeurs dans le demi-disque inférieur  $\Delta^- = \{\zeta \in \Delta \mid \operatorname{Re} \zeta < 0\}$  et si  $|h_0(0)|$  est assez petit, alors

$$h_0(\Delta_r) \subset \Delta_{C_r \alpha}. \quad (4.3)$$

Si  $h = (h_0, 'h)$  est à valeurs dans un domaine modèle, le lemme de Schwarz permet alors de conclure puisque  $\||'h|\| \leq C\sqrt{|h_0|}$ .

Pour prouver (4.3), considérons une représentation conforme  $\psi : (\Delta^-, 0) \rightarrow (\Delta, 1)$ . On peut de plus imposer que  $\psi$  soit un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme près de 0, par exemple en choisissant  $\psi(\zeta) = (\zeta^2 - 2\zeta - 1)/(\zeta^2 + 2\zeta - 1)$ . Le lemme de Schwarz donne :

$$|\psi \circ h_0(\zeta) - 1| \leq |\psi(h_0(0)) - 1| \cdot \frac{1 + |\zeta|}{1 - |\zeta|}.$$

Il existe alors un voisinage  $\Omega$  de 0 ne dépendant que du choix de  $\psi$  tel que, si  $h(0) \in \Omega$ , on ait  $|h_0(\zeta)| \leq \frac{C}{1-|\zeta|} |h_0(0)|$ , d'où la conclusion avec  $C_r = 1/(1-r)$ .  $\square$

A l'aide du lemme 4.15, on montre :

**Lemme 4.16** *La suite  $(F_k)$  possède une sous-suite convergeant à l'ordre 1 pour la topologie compacte-ouverte vers une application  $\tilde{F}$  définie dans  $\tilde{D}$ , à valeurs dans l'adhérence de  $\tilde{D}'$ . De plus  $\tilde{F}$  est  $(\tilde{J}, \tilde{J}')$ -holomorphe et fixe le point  $(-1, \mathbf{0})$ .*

**Preuve**

Soit  $K$  un compact inclus dans  $\tilde{D}$  : pour  $k$  assez grand,  $K \subset \tilde{D}_k$ .

Remarquons que pour obtenir l'existence d'une sous-suite convergeant à l'ordre 1 pour la topologie compacte-ouverte, il suffit de montrer que la suite  $(F_k)$  est bornée en norme  $\mathcal{C}^0$  sur  $K$ . En effet, considérons un recouvrement de  $K$  par des bi-disques. Quitte à restreindre l'ouvert  $U$  de départ,  $J$  est assez proche de la structure standard. On peut donc trouver, sur chaque bi-disque, deux feuilletages transverses par des disques  $J$ -holomorphes (pour une petite perturbation de la structure standard, un tel feuilletage est une petite perturbation du feuilletage par des droites complexes [45]). La restriction de  $F_k$  à chacune de ces courbes est uniformément bornée en norme  $\mathcal{C}^0$ , et les estimées elliptiques entraînent qu'elle est bornée en norme  $\mathcal{C}^1$  (voir [56]). Puisque les bornes obtenues ne dépendent que de  $F_k$ , elles sont uniformes par rapport aux courbes. Le principe de régularité séparée rappelé dans la proposition 4.22 montre que la suite  $(F_k)$  est bornée en norme  $\mathcal{C}^1$  sur  $K$ .

Pour montrer que la suite  $(F_k)$  est bornée en norme  $\mathcal{C}^0$  sur  $K$ , on suit [40]. Pour tout point  $p \in \tilde{D}$ , il existe un voisinage  $U_p$  de  $p$  et une famille  $\mathcal{H}_p$  de disques pseudo-holomorphes centrés en  $p$  tels que  $U_p \subset \bigcup_{h \in \mathcal{H}_p} h(\Delta_r(p))$  (voir [17, 33, 36]). Par conséquent, il existe un recouvrement fini  $\{U_{t_j}\}_{j=0, \dots, m}$  de  $K$  et des constantes associées  $r(t_j)$  tels que  $t_0 = (-1, \mathbf{0})$  et  $U_{t_j} \cap U_{t_{j+1}} \neq \emptyset$ . Posons  $r = \max\{r(t_j)\}$ .

Puisque  $\delta'_k{}^{-1} \circ F_k(-1, \mathbf{0}) = (-d'_k, \mathbf{0}) \in Q(0, d'_k)$ , il vient  $\delta'_k{}^{-1} \circ F_k \circ h(\Delta_r) \subset Q(0, C_r d'_k)$  pour tout  $h \in \mathcal{H}_{t_0}$  et donc

$$\delta'_k{}^{-1} \circ F_k(U_{t_0}) \subset Q(0, C_r d'_k).$$

Pour tout  $h \in \mathcal{H}_{t_1}$ , il existe  $\omega \in \Delta_r$  tel que  $h(\omega) \in U_{t_0} \cap U_{t_1}$ . Le disque pseudo-holomorphe

$$g : \zeta \mapsto h \left( \frac{\zeta + \omega}{1 + \bar{\omega}\zeta} \right)$$

vérifie  $g(0) = h(\omega) \in Q(0, C_r d'_k)$  et  $g(\omega) = h(0)$ , donc  $\delta'_k{}^{-1} \circ F_k(t_1) \in Q(0, C_r^2 d'_k)$  et  $\delta'_k{}^{-1} \circ F_k(U_{t_1}) \subset Q(0, C_r^2 d'_k)$ . Par induction, on a  $\delta'_k{}^{-1} \circ F_k(U_{t_m}) \subset Q(0, C_r^{2m+1} d'_k)$ , et finalement  $F_k(K) \subset \delta'_k(Q(0, C_K d'_k)) = Q(0, C_K)$ . Ainsi la famille  $(F_k)$  est uniformément bornée sur  $K$ .

Pour tout compact  $K \Subset \tilde{D}$ , la suite  $(F_k|_K)$  possède donc une sous-suite convergeant pour la topologie  $\mathcal{C}^1$ . Une exhaustion de  $\tilde{D}$  par des compacts fournit alors une sous-suite  $(F_k)$  convergeant à l'ordre 1 pour la topologie compacte-ouverte : quitte à réindexer, on suppose que la suite  $(F_k)$  converge à l'ordre 1 pour la topologie compacte-ouverte vers une application  $\tilde{F} : \tilde{D} \rightarrow \tilde{D}'$ . En particulier,  $\tilde{F}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Par construction, on a pour tout  $k$  :

$$F_k(-1, \mathbf{0}) = (-1, \mathbf{0}) \quad \text{et} \quad dF_k \circ J^k = \tilde{J}'^k \circ dF_k. \quad (4.4)$$

Puisque  $(J^k)$  et  $(J'^k)$  convergent respectivement vers  $\tilde{J}$  et  $\tilde{J}'$  pour la topologie  $\mathcal{C}^1$  sur tout compact, on obtient en passant à la limite dans (4.4) que  $\tilde{F}$  fixe le point  $(-1, 0)$  et vérifie la condition de  $(\tilde{J}, \tilde{J}')$ -holomorphic.  $\square$

### 4.2.2 Construction et propriétés de la fonction $G$

Rappelons la notation  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} / r(z) < 0\}$ , où  $r(z) = \operatorname{Re} z_0 + \|z\|^2$ . D'après la proposition 2.12, il existe des structures modèles simples  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  et des pseudo-biholomorphismes  $\Psi : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{H}$  et  $\Psi' : \tilde{D}' \rightarrow \mathbb{H}$  fixant le point  $(-1, 0)$ , continus et bijectifs jusqu'au bord. Posons  $G := \Psi' \circ \tilde{F} \circ \Psi^{-1}$  : par construction,  $G : \mathbb{H} \rightarrow \bar{\mathbb{H}}$  est  $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -holomorphic et fixe le point  $(-1, 0)$ .

*Remarque 4.17* Vu la remarque 2.14, si la structure  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{J}'$ ) est intégrable, on peut même imposer que  $\mathcal{J}$  (resp.  $\mathcal{J}'$ ) soit la structure standard.

#### Conservation des distances au bord

**Lemme 4.18** *Pour tout borné  $K \subset \mathbb{H}$ , il existe des constantes  $C_K, C'_K > 0$  telles que pour tout  $p \in K$ ,*

$$C_K \leq \frac{\operatorname{dist}(G(p), \partial\mathbb{H})}{\operatorname{dist}(p, \partial\mathbb{H})} \leq C'_K.$$

*En particulier,  $G$  est à valeurs dans  $\mathbb{H}$  (et non  $\bar{\mathbb{H}}$ ), et se prolonge en une application localement 1/2-hölderienne jusqu'au bord, tel que  $G(\partial\mathbb{H}) \subset \partial\mathbb{H}$ .*

#### Preuve

La démonstration de la proposition 4.7 donne deux constantes  $c, c' > 0$  telles que pour tout  $p \in D$ ,

$$|\rho'(F(p))| \geq c \operatorname{dist}(p, \partial D) \quad \text{et} \quad |\rho(p)| \geq c' \operatorname{dist}(F(p), \partial D').$$

Par construction,  $F_k = \Lambda'_k \circ F \circ \Lambda_k^{-1}$  et par conséquent, pour tout  $p \in D_k = \Lambda_k(D)$ ,

$$\begin{aligned} c \operatorname{dist}(\Lambda_k^{-1}(p), \partial D) &\leq |\rho' \circ \Lambda_k'^{-1}(F_k(p))| = d'_k \tau'_k |r'_k(F_k(p))| \\ c' \operatorname{dist}(F \circ \Lambda_k^{-1}(p), \partial D') &\leq |\rho \circ \Lambda_k^{-1}(p)| = d_k \tau_k |r_k(p)|. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si  $q \in \partial D$  :

$$\|\Lambda_k^{-1}(p) - q\| \geq \frac{1}{\operatorname{Max}_{\bar{D}} \|d\phi_k\|} \times \|\delta_k^{-1}(p - q^*)\|$$

où  $q^* = \Lambda_k(q) \in \Lambda_k(\partial D) = \partial \tilde{D}_k$ . Or pour  $z = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ,

$$\|\delta_k^{-1}(z)\| = \left( d_k^2 |z_0|^2 + \sum_{j=1}^n d_k |z_j|^2 \right)^{1/2} \geq d_k \|z\|$$

pour  $k$  assez grand, et, finalement,  $\text{dist}(\Lambda_k^{-1}(p), \partial D) \geq \frac{d_k}{\text{Max}||d\phi_k||} \times \text{dist}(p, \partial \tilde{D}_k)$ . En remplaçant dans (4.5), il vient :

$$c_k \text{dist}(p, \partial \tilde{D}_k) \leq |\tilde{r}'_k(F_k(p))| \quad \text{où} \quad c_k = c \frac{d_k}{d'_k \tau'_k \text{Max}||d\phi_k||}$$

$$c'_k \text{dist}(F_k(p), \partial \tilde{D}'_k) \leq |\tilde{r}_k(p)| \quad \text{où} \quad c'_k = c' \frac{d'_k}{d_k \tau_k \text{Max}||d\phi'_k||}.$$

Toujours d'après la proposition 4.7,  $\frac{d'_k}{d_k} = \frac{\text{dist}(F(p_k), \partial D')}{\text{dist}(p_k, \partial D)}$  est compris entre deux constantes strictement positives. Par suite, en passant à la limite, il existe des constantes  $C, C' > 0$  telles que pour tout  $p \in \tilde{D}$  (et donc  $p \in \tilde{D}_k$  dès que  $k$  assez grand),

$$\begin{aligned} c \text{dist}(\tilde{F}(p), \partial \tilde{D}') &\leq |\tilde{r}(p)| \\ c' \text{dist}(p, \partial \tilde{D}) &\leq |\tilde{r}'(\tilde{F}(p))|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Composons par les difféomorphismes  $\Psi'$  et  $\Psi^{-1}$  intervenant dans la définition de  $G$ . Puisque, d'après la remarque 2.13,  $r = \tilde{r} \circ \Psi^{-1} = \tilde{r}' \circ \Psi'^{-1}$ , on obtient l'encadrement voulu.

Le même raisonnement que dans la section 4.1 donne le prolongement localement  $1/2$ -hölderien au bord.  $\square$

**Corollaire 4.19** *En notant  $G = (G_0, 'G) : \text{Re}(G_0(t, '0)) \xrightarrow[t \in \mathbb{R}, t \rightarrow -\infty]{} -\infty$ .*

### Preuve

Il suffit de montrer que  $r(G(t, '0)) \xrightarrow[t \in \mathbb{R}, t \rightarrow -\infty]{} -\infty$  : dans ce cas, si la suite  $(\text{Re } G_0(t_l, '0'))_l$  était bornée pour une certaine suite  $(t_l)_l$  de réels tendant vers  $-\infty$ , la suite  $(||'G(t_l, '0)||^2)_l$  resterait bornée puisque  $G$  est à valeurs dans  $\mathbb{H}$ , et donc  $r(G(t_l, '0))$  aussi. De plus pour tout  $t \in \mathbb{R}^-$ ,

$$r(G(t, '0)) = \tilde{r}'(\tilde{F}(\Psi^{-1}(t, '0))) = \tilde{r}'(\tilde{F}(t, '0)) \geq c \text{dist}((t, '0), \partial \tilde{D})$$

vu la remarque 2.13 et (4.6).

Rappelons que l'équation de  $\tilde{D}$  est  $0 = \text{Re } z_0 + P('z, 'z)$ , où  $P$  est un polynôme réel homogène de degré 2 : par conséquent, il existe une constante  $\gamma > 0$  telle que pour tout  $'z \in \mathbb{C}^n$ ,  $|P('z, 'z)| \leq \gamma ||'z||^2$ . Montrons que pour  $t \gg 1$ ,  $\text{dist}((t, '0), \partial \tilde{D}) \geq \sqrt{\frac{|t|}{1+\gamma}}$ , ce qui conclura la preuve. Soit donc  $z = (z_0, 'z) \in \mathbb{C}^{n+1}$  vérifiant  $|(t, '0) - z| < \sqrt{\frac{|t|}{1+\gamma}}$ . Alors

$$\begin{aligned} \tilde{r}(z) = \text{Re } z_0 + P('z, 'z) &= t + (\text{Re } z_0 - t) + (P('z, 'z) - P('0, '0)) \\ &< t + \sqrt{\frac{|t|}{1+\gamma}} + \gamma \frac{|t|}{1+\gamma} \\ &< -|t| + (1+\gamma) \frac{|t|}{1+\gamma} = 0 \end{aligned}$$

dès que  $\frac{|t|}{1+\gamma} \geq 1$  : d'où  $z \in \tilde{D}$ , et  $\text{dist}((t, '0), \partial \tilde{D}) \geq \sqrt{\frac{|t|}{1+\gamma}}$ .  $\square$

**Etude du jacobien**

Pour alléger les notations, on supposera désormais  $\tilde{D} = \tilde{D}' = \mathbb{H}$  et  $\Psi = \Psi' = id$ .

**Lemme 4.20** *Il existe des constantes  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$  telles que pour tout  $p \in \mathbb{H}$ ,*

$$\alpha |\text{Jac}_p G| \leq \liminf \left| \text{Jac}_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p)} F \right| \leq \limsup \left| \text{Jac}_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p)} F \right| \leq \beta |\text{Jac}_p G|.$$

**Preuve**

Soit  $p \in \mathbb{H}$  : pour  $k$  assez grand,  $p \in D_k$  et

$$d(F_k)_p = d(\delta'_k) \circ d(\Lambda'_k) \circ dF_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p)} \circ d\Lambda_k^{-1} \circ d\delta_k^{-1}.$$

L'application  $\delta_k$  est linéaire, et  $\det \delta_k^{-1} = d_k^{n+1}$ . L'application  $\Lambda_k$  est affine et converge vers l'identité, donc

$$\text{Jac}_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p)} F = \mu_k \text{Jac}_p F_k, \quad (4.7)$$

où  $\mu_k$  ne dépend que de  $k$  et  $\mu_k \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} (d'_k/d_k)^{n+1}$ . Or d'après la propriété de conservation de la distance pour  $F$ , le rapport  $d'_k/d_k$  reste borné entre deux constantes strictement positives. Comme  $\text{Jac}_p F_k = \det(d(F_k)_p) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \text{Jac}_p G$ , on obtient le résultat voulu en passant à la limite dans (4.7).  $\square$

**Lemme 4.21** *Soit  $\mathcal{P} = (p_k)_k$  une suite de points de  $D$  convergeant vers  $p_\infty \in \partial D$  : alors la suite  $(\text{Jac}_{p_k} F)_k$  est bornée. De plus, si  $\text{Jac}_{p_k} F \xrightarrow[+\infty]{} 0$ , alors pour toute suite  $(p'_k)_k$  de points de  $D$  convergeant vers  $p_\infty$ , on a  $\text{Jac}_{p'_k} F \xrightarrow[+\infty]{} 0$ .*

**Preuve**

Notons  $G^{\mathcal{P}}$  la fonction limite obtenue par la méthode des dilations appliquée à la suite  $\mathcal{P}$ . Le lemme 4.20 en  $p = (-1, 0) \in \mathbb{H}$  donne :

$$\alpha |\text{Jac}_{(-1, 0)} G^{\mathcal{P}}| \leq \liminf |\text{Jac}_{p_k} F| \leq \limsup |\text{Jac}_{p_k} F| \leq \beta |\text{Jac}_{(-1, 0)} G^{\mathcal{P}}|,$$

ce qui implique que la suite  $(\text{Jac}_{p_k} F)_k$  est bornée.

Supposons que  $\text{Jac}_{p_k} F \rightarrow 0$ , et que  $(p'_k)_k$  converge aussi vers  $p_\infty$ . Soit  $\lambda$  une valeur d'adhérence de  $(\text{Jac}_{p'_k} F)$ . Posons  $p''_{2k} = p_k$  et  $p''_{2k+1} = p'_k$  : alors 0 et  $\lambda$  sont deux valeurs d'adhérence de  $(\text{Jac}_{p''_k} F)$ . La méthode des dilatations appliquée à  $\mathcal{P}'' = (p''_k)$  et le lemme 4.20 en  $p = (-1, 0) \in \mathbb{H}$  donnent :

$$\alpha'' |\text{Jac}_{(-1, 0)} G^{\mathcal{P}''}| \leq 0 \leq |\lambda| \leq \beta'' |\text{Jac}_{(-1, 0)} G^{\mathcal{P}''}|,$$

ce qui force  $\text{Jac}_{(-1, 0)} G^{\mathcal{P}''} = 0$  et donc  $\lambda = 0$ . Ainsi  $\text{Jac}_{p'_k} F \rightarrow 0$ .  $\square$

**Lemme 4.22** *Soit  $\mathcal{P} = (p_k)$  une suite de points de  $D$  convergeant vers  $p_\infty \in \partial D$ . Le jacobien de l'application  $G = G^{\mathcal{P}}$  ne s'annule pas dans  $\mathbb{H}$ .*

**Preuve**

On peut supposer  $p_\infty = 0$ .

• Montrons que si le jacobien de  $G$  s'annule en un point  $p \in \mathbb{H}$ , il est identiquement nul. La méthode des dilatations appliquée à  $\mathcal{P}$  et le lemme 4.20 en  $p$  donnent une suite  $(p_k'')$ , où  $p_k'' = \Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p)$ , telle que  $\text{Jac}_{p_k''} F \rightarrow 0$ .

Pour tout  $p' \in \mathbb{H}$  :

$$\alpha |\text{Jac}_{p'} G| \leq \liminf \left| \text{Jac}_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p')} F \right| \leq \limsup \left| \text{Jac}_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p')} F \right| \leq \beta |\text{Jac}_{p'} G|, \quad (4.8)$$

donc  $\text{Jac}_{p'} G = 0$  si et seulement si  $\text{Jac}_{\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p')} F \rightarrow 0$ . Vu le lemme 4.21, il suffit de montrer que la suite  $(p_k')$  converge vers 0, avec  $p_k' = \Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p')$ . Or en coordonnées complexes, en notant  $a_j = \frac{\partial p}{\partial z_j}(\dot{p}_k)$  et  $p' = (z_0, \dots, z_n)$  :

$$\Lambda_k^{-1} \circ \delta_k^{-1}(p') = {}^t \left( \bar{a}_0 d_k z_0 - \sum_{j=1}^n a_j \sqrt{d_k} z_j, \bar{a}_1 d_k z_0 + a_0 \sqrt{d_k} z_1, \dots, \bar{a}_n d_k z_0 + a_0 \sqrt{d_k} z_n \right) \\ \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0,$$

d'où le résultat.

• Supposons par l'absurde que le jacobien de  $G$  est identiquement nul.

Puisque  $\mathcal{J}(0) = \mathcal{J}_{st}$ , le lemme 3.4, appliqué à la fonction  $\tilde{r}$  donne un voisinage  $U$  de 0, une constante  $\delta > 0$  et une fonction  $\varphi$  continue sur  $\overline{U} \cap \mathbb{H}$ , strictement  $J$ -plurisousharmonique sur  $U \cap \mathbb{H}$ , tels que :

$$\forall z \in U \cap \mathbb{H}, \varphi(z) < -\delta \|z\|^2.$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , on note  $H^\varepsilon := \{z \in U \cap \mathbb{H} / \varphi(z) > -\varepsilon\}$ . L'ouvert  $U$  étant un voisinage de 0, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\mathbb{B}(0, \sqrt{\varepsilon/\delta}) \subset U$ . Pour un tel  $\varepsilon$ , on a  $\overline{H^\varepsilon} \subset U$ . En effet,  $H^\varepsilon \subset U$ , et si  $(z_k)_k$  est une suite d'éléments de  $H^\varepsilon$  convergeant vers  $z \in \overline{U} \cap \mathbb{H}$ , alors  $\varphi(z_k) > -\varepsilon$ , donc  $\|z_k\|^2 < \varepsilon/\delta$  et  $\|z\| \leq \sqrt{\varepsilon/\delta}$ .

Soit  $r_0$  le rang maximal de  $dG$  sur  $U \cap \mathbb{H}$  : par hypothèse,  $r_0 \leq 2n + 1$  (et même  $r_0 \leq 2n$  puisque  $G$  est pseudo-holomorphe). On sait également (lemme 4.18) que  $G(U \cap \mathbb{H}) \subset U \cap \mathbb{H}$ , et  $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est continue et envoie le bord dans le bord :  $G$  n'est donc pas constante sur  $U \cap \mathbb{H}$ , et  $r_0 > 0$ .

Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 4.3 montre qu'il existe un point  $q \in G(U \cap \mathbb{H})$  tel que  $N := G^{-1}(\{q\})$  soit une sous-variété presque complexe de dimension  $2n + 2 - r_0$  de  $U \cap \mathbb{H}$ . La fonction continue  $\varphi$  atteint son maximum sur le compact  $N \cap \overline{H^\varepsilon}$  en un point  $p_0$ . Deux cas sont possibles :

\* soit  $p_0 \in N \cap H^\varepsilon$  :  $N \cap H^\varepsilon$  étant un ouvert de  $N$ , il existe un disque pseudo-holomorphe  $h$ , à valeurs dans  $N \cap H^\varepsilon$ , centré en  $p_0$  et tel que  $\frac{\partial h}{\partial x}(0) \neq 0$  [45]. Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 4.3 amène une contradiction.

\* soit  $p_0 \in N \cap \partial H^\varepsilon$  : la fonction  $\varphi$  étant continue,

$$\partial H^\varepsilon = (U \cap \partial \mathbb{H}) \cup \{z \in U \cap \mathbb{H} / \varphi(z) = -\varepsilon\}.$$

D'après la propriété de conservation des distances pour l'application  $G$ ,  $N$  n'intersecte pas  $\partial \mathbb{H}$ , donc nécessairement  $\varphi(p_0) = -\varepsilon$  : ainsi  $\text{Max}_{N \cap \overline{H^\varepsilon}} \varphi = -\varepsilon$ . Par définition de  $H^\varepsilon$ , la fonction

$\varphi$  est constante égale à  $-\varepsilon$  sur  $N \cap \overline{H^\varepsilon}$ , ce qui contredit la stricte plurisousharmonicité.  $\square$

Calcul de  $\frac{\partial G_0}{\partial z_0}$

**Lemme 4.23** Pour tout  $z \in \mathbb{H}$ ,  $\frac{\partial G_0}{\partial z_0}(z) = 1$ .

**Preuve**

Remarquons d'abord que d'après le lemme 4.22, la structure  $\mathcal{J}$  est intégrable si et seulement si  $\mathcal{J}'$  est intégrable.

• Premier cas :  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  sont intégrables. Vu la remarque 4.17, on se ramène alors au cas  $\mathcal{J} = \mathcal{J}' = \mathcal{J}_{st}$ . L'application  $G : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est donc holomorphe (au sens standard), et se prolonge continuellement au bord d'après le lemme 4.18. Soit  $\Phi$  le biholomorphisme (au sens standard) de  $\mathbb{H}$  sur la boule unité  $\mathbb{B}$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$  défini par

$$\Phi(z_0, 'z) \mapsto \left( \frac{z_0 + 1}{z_0 - 1}, \frac{1}{1 - z_0} 'z \right),$$

qui se prolonge en un homéomorphisme encore noté  $\Phi : \overline{\mathbb{H}} \rightarrow \overline{\mathbb{B}}$  en posant  $\Phi(\infty) = (1, '0)$  et  $\Phi^{-1}(1, '0) = \infty$ .

Considérons  $\tilde{G} = \Phi \circ G \circ \Phi^{-1} : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$ . C'est une application holomorphe de la boule dans la boule et continue sur  $\mathbb{B} \cup S^*$ , où  $S^* := \partial\mathbb{B} \setminus \{(1, '0)\}$ . De plus,  $\tilde{G}(S^*) \subset \partial\mathbb{B}$ . D'après [51] (proposition 2.3), une telle application est un automorphisme de la boule. Par construction,  $\tilde{G}(0) = 0$ , et pour tout  $u \in [0; 1[$  :

$$\tilde{G}(u, '0) = \Phi \circ G \left( \frac{u+1}{u-1}, '0 \right) = \left( \frac{Z_0 + 1}{Z_0 - 1}, \frac{\sqrt{1}}{1 - Z_0} 'Z \right)$$

où l'on a posé  $G(\frac{u+1}{u-1}, '0) = (Z_0, 'Z)$ . D'après le corollaire 4.19, si  $u$  tend vers  $1^-$ , alors la partie réelle de  $Z_0$  tend vers  $-\infty$  et donc

$$\operatorname{Re} \frac{Z_0 + 1}{Z_0 - 1} = 1 + \frac{2(X_0 - 1)}{(X_0 - 1)^2 + Y_0^2} \rightarrow 1.$$

Puisque  $\Phi$  est à valeurs dans la boule unité, on en déduit  $\tilde{G}(u, '0) \xrightarrow[u \in [0; 1[, u \rightarrow 1]{} (1, '0)$ . Par conséquent (voir [13] p. 467),  $\tilde{G}_0 \equiv id$  et

$$\forall z \in \mathbb{H}, G_0(z_0, 'z) = z_0.$$

• Second cas :  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{J}'$  sont non-intégrables.

Dans ce cas, on a vu en (2.5) que  $G$  s'écrit

$$G(z_0, 'z) = (cz_0 + f_1('z) + if_2('z), 'G('z)),$$

où  $c$  est une constante réelle non nulle, et  $f_1$  et  $f_2$  sont à valeurs réelles. En particulier, à  $'z \in \mathbb{C}^n$  fixé, la fonction  $G$  étant continue jusqu'au bord et envoyant  $\partial\mathbb{H}$  dans  $\partial\mathbb{H}$ , on a pour tout  $z_0$  :

$$\operatorname{Re} z_0 + \|\prime z\|^2 = 0 \implies c \operatorname{Re}(z_0) + f_1('z) + \|\prime G('z)\|^2 = 0,$$

donc  $f_1(z) = c\|z\|^2 - \|G(z)\|^2$ , et  $f_1(0) = \|G(0)\|^2$ . Ainsi

$$(-1, 0) = G(-1, 0) = (-c + f_1(0) + if_2(0), G(0)) \implies \begin{cases} G(0) = 0 \\ c = 1. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout  $z \in \mathbb{H}$ ,  $\frac{\partial G}{\partial z_0}(z) = 1$ . □

### 4.2.3 Application à l'étude du comportement au bord

Les différentes propriétés de  $G$  établies précédemment permettent d'obtenir des informations supplémentaires sur  $F$ ; notamment, le lemme 4.22 implique qu'il n'existe pas de suite  $(p_k)$  de points de  $D$  convergeant vers un point du bord et telle que  $\text{Jac}_{p_k} F \rightarrow 0$ .

**Théorème 4.24** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n$ , définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^2$ .*

*Si  $F$  est une application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$ , alors  $\liminf_{p \rightarrow \partial D} |\text{Jac}_p F| > 0$ .*

*En particulier, l'ensemble des points critiques de  $F$  est un compact inclus dans  $D$ .*

Ainsi, hors d'un compact, l'application  $F$  est un biholomorphisme local : pour la régularité au bord, il suffit donc de raisonner sur le cas biholomorphe. Par ailleurs, des estimations fines de la métrique de Kobayashi donnent le comportement asymptotique précis de la différentielle selon la direction ([15], proposition 3.5). Commençons par fixer les notations. On reprend la présentation faite dans la section 4.1 de [22]. Considérons

$$v^j := (\partial\rho/\partial x_0)\partial/\partial x_j - (\partial\rho/\partial x_j)\partial/\partial x_0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

$$\text{et } v^0 := (\partial\rho/\partial x_0)\partial/\partial y_0 - (\partial\rho/\partial y_0)\partial/\partial x_0.$$

Quitte à restreindre le voisinage  $U$  de 0 sur lequel on travaille, les champs de vecteurs définis par  $X^j = v^j - iJv^j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , forment une base de l'espace tangent complexe à  $\{\rho = \rho(z)\}$  en tout point  $z \in U$ . De plus, en posant  $X^0 = v^0 - iJv^0$ , la famille  $X = (X^0, X^1, \dots, X^n)$  forme une base de champs de vecteurs  $(1, 0)$  sur  $U$ . De même, on construit une base  $X' = (X'^0, X'^1, \dots, X'^n)$  de champs de vecteurs  $(1, 0)$  sur  $U'$  telle que  $(X'^1(w), \dots, X'^n(w))$  définisse une base de l'espace tangent complexe à  $\{\rho' = \rho'(w)\}$  en tout  $w \in U'$ . Notons  $A(p_k)$  la matrice de l'application  $dF_{p_k}$  dans les bases  $X(p_k)$  et  $X'(F(p_k))$ .

**Proposition 4.25** [15] *La matrice  $A(p_k)$  vérifie les estimations suivantes :*

$$A(p_k) = \begin{pmatrix} O_{1,1}(1) & O_{1,n}(\text{dist}(p_k, \partial D)^{1/2}) \\ O_{n,1}(\text{dist}(p_k, \partial D)^{-1/2}) & O_{n,n}(1) \end{pmatrix}.$$

*Remarque 4.26* Le comportement asymptotique de  $A(p_k)$  dépend uniquement de la distance de  $p_k$  au bord du domaine, et non du choix de la suite  $(p_k)_k$ .

Dans le cas d'un biholomorphisme, on en déduit immédiatement une estimation identique pour  $(dF_{p_k})^{-1} = d(F^{-1})_{F(p_k)}$ . Dans notre cas, le contrôle de la matrice inverse repose sur la proposition 4.25 et le contrôle du jacobien.

**Proposition 4.27** *La matrice  $A(p_k)$  est inversible, et son inverse vérifie les estimations suivantes :*

$$A(p_k)^{-1} = \begin{pmatrix} O_{1,1}(1) & O_{1,n}(\text{dist}(p_k, \partial D)^{1/2}) \\ O_{n,1}(\text{dist}(p_k, \partial D)^{-1/2}) & O_{n,n}(1) \end{pmatrix}.$$

**Preuve**

La formule  $A^{-1} = \frac{1}{\text{Jac } F} \times {}^t\text{com } A$ , combinée avec le lemme 4.21 et le théorème 4.24, montre qu'il suffit d'obtenir les estimations souhaitées pour la matrice  $B := {}^t\text{com } A$ . Le déterminant extrait de  $A$  intervenant dans le coefficient  $B_{i,j}$  se calcule en développant par rapport à la 0-ième ligne et/ou la 0-ième colonne de  $A$ , ce qui donne le résultat grâce à la proposition 4.25.  $\square$

Le lemme 4.23 permet d'obtenir, exactement comme dans [22], proposition 4.5, des informations supplémentaires sur le coefficient  $(0,0)$  de la matrice  $A(p_k)$ . Remarquons d'abord que les bases  $X$  et  $X'$ , et donc la matrice  $A(p_k)$ , dépendent de la renormalisation par la condition  $J(p_\infty) = \mathcal{J}_{st}$  : on notera donc  $A(p_\infty, p_k)$  au lieu de  $A(p_k)$ .

**Proposition 4.28** *Le coefficient  $(0,0)$  de la matrice  $A$  vérifie les propriétés suivantes :*

- tout point d'adhérence de la fonction  $z \mapsto A_{0,0}(p, z)$  est réel quand  $z$  tend vers  $p \in \partial D$  ;
- pour  $z \in D$ , soit  $p \in \partial D$  réalisant la distance de  $z$  au bord du domaine. Il existe une constante  $A > 0$ , indépendante de  $z \in D$ , telle que  $|A_{(0,0)}(p, z)| \geq A$ .

Le théorème 4.24 et les propositions 4.27 et 4.28 permettent d'appliquer tels quels les arguments de la démonstration du théorème 0.1 de [22].

**Théorème 4.29** *Soit  $D$  et  $D'$  deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de variétés presque complexes  $(M, J)$  et  $(M', J')$  orientées de dimension  $2n$ , définis respectivement par  $\rho < 0$  et  $\rho' < 0$  où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^2$ . Toute application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  se prolonge en une application de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\overline{D}$  dans  $\overline{D}'$ .*

### 4.3 Régularité supérieure et estimation au bord

On se place sous les hypothèses du théorème 4.30. Près du bord, puisque  $F$  est un biholomorphisme local, la structure  $J'$  est définie par  $J'_q = dF_q \circ J \circ (dF_q)^{-1}$ , qu'on notera  $F_*J$ . Appliquons la proposition 3.21 à  $N = N^*M$  et  $N' = N^*M'$  (qui sont munies de structures presque complexes de classe respectivement  $\mathcal{C}^{k+\alpha-1}$  et  $\mathcal{C}^{k'+\alpha'-1}$ ) pour l'application  $(F, {}^t(dF)^{-1})$  : on obtient que cette application est localement de classe  $\mathcal{C}^{s-1}$ , où

$s = \min(k - 1 + \alpha/2, k' + \alpha'/2)$ , et

$$\|(F, {}^t(dF)^{-1})\|_{\mathcal{C}^{s-1}(\bar{D})} \leq c(s) \|(F, {}^t(dF)^{-1})\|_{\infty} \left(1 + \frac{c'}{\sqrt{\lambda_{N'}}}\right).$$

En particulier  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^s$ , et

$$\|F\|_{\mathcal{C}^{s-1}(\bar{D})} \leq c(s) \|(F, {}^t(dF)^{-1})\|_{\infty} \left(1 + \frac{c'}{\sqrt{\lambda_{N'}}}\right).$$

Finalement :

**Théorème 4.30** *Soit  $k, k' \geq 1$  des entiers et  $0 < \alpha, \alpha' < 1$ ,  $(M, J)$  une variété  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$ -presque complexe et  $(M', J')$  une variété  $\mathcal{C}^{k', \alpha'}$ -presque complexe. On suppose  $M$  et  $M'$  orientées, de dimension  $2n$ , et soit  $D$  (resp.  $D'$ ) un domaine borné strictement pseudo-convexe de  $M$  (resp.  $M'$ ) défini par  $\rho < 0$  (resp.  $\rho' < 0$ ) où  $\rho$  et  $\rho'$  sont deux fonctions strictement plurisousharmoniques de classe  $\mathcal{C}^{k+1, \alpha}$  et  $\mathcal{C}^{k'+1, \alpha'}$ .*

*Toute application pseudo-holomorphe propre de  $D$  dans  $D'$  se prolonge en une application de classe  $\mathcal{C}^s$  de  $\bar{D}$  dans  $\bar{D}'$ , où*

$$s = \min(k - 1 + \alpha/2, k' + \alpha'/2).$$

De plus,

$$\|F\|_{\mathcal{C}^{s-1}(\bar{D})} \leq c(s) \|(F, {}^t(dF)^{-1})\|_{\infty} \left(1 + \frac{c'}{\sqrt{\lambda_{N^*M'}}}\right).$$

## Chapitre 5

# Perspectives

Suite aux travaux menés dans cette thèse, nous proposons quelques pistes de recherche susceptibles d'en constituer un prolongement naturel.

La première idée est bien entendu d'étendre les résultats du premier chapitre au cas presque complexe. Adapter la méthode de paramétrisation des disques réguliers à de petites déformations de la structure standard (voir [14]) conduirait à des propriétés d'unicité sur les pseudo-biholomorphismes. L'emploi de la méthode des dilatations pour les espaces source et but a par ailleurs de bonnes chances de donner des résultats d'unicité sous des hypothèses plus larges que celles exigées ici.

Concernant l'étude des applications pseudo-holomorphes propres entre deux domaines bornés strictement pseudoconvexes  $D$  et  $D'$ , on peut s'attendre à ce que d'autres propriétés connues en complexe restent vraies en presque complexe. Ainsi, on sait qu'en complexe une telle application est ouverte. Cette propriété liée à la rigidité de la condition d'holomorphie, et qui donne directement la surjectivité de l'application, permettrait également vu la densité des valeurs régulières de prouver que l'image réciproque de tout point est finie, de cardinal inférieur ou égal au degré de l'application. On peut envisager une démonstration utilisant les disques pseudo-holomorphes, et penser que le caractère ouvert reste stable par petites perturbations de la structure standard.

Il est également intéressant de chercher à obtenir davantage de renseignements sur le lieu  $Crit$  des points critiques. On sait déjà que le jacobien reste loin de 0 hors d'un compact. Les résultats connus en complexe laissent espérer mieux : si  $D'$  est simplement connexe, ou si  $D = D'$ , l'application est-elle nécessairement un biholomorphisme ? Une première étape consiste à étudier la structure de  $Crit$ . Il paraît peu probable de pouvoir affirmer, comme dans le cas standard, que c'est une hypersurface (ou l'ensemble vide), l'un des principaux obstacles étant l'absence de notion d'ensemble analytique. Un objectif plus réaliste serait de montrer que le compact  $Crit$  est une réunion de disques analytiques, et donc vide par les mêmes arguments que ceux intervenant dans le chapitre 4.

Quelques pistes moins nettes. On peut bien sûr chercher à améliorer la régularité obtenue pour le prolongement au bord (ou à montrer que celle-ci est maximale !). Rappelons que, dans le cas standard, où les structures complexes sont constantes, la régularité  $\mathcal{C}^{r-1/2}$  est optimale pour des domaines à bord de classe  $\mathcal{C}^r$  (voir l'exemple construit par Hurumov,

cité dans [50]). Les preuves données dans cette thèse s'adaptent immédiatement au cas où les structures presque complexes sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , et les bords des domaines de classe  $\mathcal{C}^r$  : on obtient alors que le prolongement est de classe  $\mathcal{C}^{r-1}$ . La perte de régularité lorsque l'on déduit la régularité de l'application de celle le long des disques est due à l'emploi d'un principe de régularité séparée [59], étape qui semble difficilement contournable. Il s'agirait donc plutôt d'affiner la régularité elliptique des disques attachés à une sous-variété totalement réelle. On peut aussi prendre en compte de façon plus précise la régularité des variétés, en introduisant la classe  $S^k$  définie dans [42].

D'autre part, nous avons travaillé sur des domaines  $D$  et  $D'$  possédant des fonctions définissantes  $\rho$  et  $\rho'$  globalement strictement plurisousharmoniques. En réalité, l'hypothèse de stricte plurisousharmonicité globale est superflue pour la fonction  $\rho'$ . En ce qui concerne  $\rho$ , elle intervient dans la preuve de la propriété de conservation des distances au bord. Il est naturel de se demander si l'on peut supprimer cette hypothèse, et s'il suffit de supposer  $D$  simplement strictement pseudoconvexe, voire pseudoconvexe de type fini.

Enfin, une direction de travail très prometteuse concerne le caractère  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov des domaines strictement pseudoconvexes munis de la métrique de Kobayashi. Dans le cas complexe, la preuve de Z. Balogh et M. Bonk [2] repose sur la connaissance d'un équivalent pour la métrique de Kobayashi au bord [43]. La difficulté est d'obtenir un tel équivalent en presque complexe. L'encadrement donné dans [21, 15] s'avère suffisamment précis en termes d'informations sur le comportement de la métrique selon les directions, mais les constantes ne sont pas optimales. Les constantes explicites obtenues dans le chapitre 3 pourraient donner l'équivalent voulu.

Il semble par ailleurs possible d'adapter la preuve de [2] en partant seulement de l'encadrement déjà connu de la métrique de Kobayashi. Pour cela, nous avons besoin de montrer que la pseudo-métrique sur  $D$  construite à partir de la métrique induite sur  $\partial D$  par la forme de Levi est en fait une métrique, quasi-isométrique à la métrique de Kobayashi. Remarquons que, de nouveau, les hypothèses topologiques sur le bord du domaine (connexité, existence d'une fonction strictement plurisousharmonique globale,...) jouent un rôle important. La  $\delta$ -hyperbolicité redonnerait que les applications holomorphes propres, en tant que quasi-isométries, se prolongent continûment jusqu'au bord.

# Bibliographie

- [1] H. ALEXANDER, Holomorphic Mappings from the Ball and Polydisc, *Math. Ann.* **209** (1974), 249-256.
- [2] Z. M. BALOGH, M. BONK, Gromov hyperbolicity and the Kobayashi metric on strictly pseudoconvex domains, *Comment. Math. Helv.* **75** (2000) no. 3, 504-533.
- [3] S. BELL, E. LIGOCKA, A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings, *Invent. Math.* **57** (1980), 283-289.
- [4] G. D. BIRKHOFF, A theorem on matrices of analytic functions, *Math. Ann.* **74** (1913) no. 1, 122-133.
- [5] E. BISHOP, Differentiable manifolds in complex Euclidean space, *Duke Math. J.* **32** (1965), 1-21.
- [6] M. ČERNE, Regularity of discs attached to a submanifold of  $\mathbb{C}^n$ , *Journal d'analyse mathématique* **72** (1997).
- [7] S.-C. CHEN, M.-C. SHAW, *Partial Differential Equations in Several Complex Variables*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, **19**. American Mathematical Society, Providence, RI, International Press, Boston, MA (2001).
- [8] S.S. CHERN, J.K. MOSER, Real hypersurfaces in complex manifolds, *Acta mathematica* **133** (1975).
- [9] E.M. CHIRKA, Regularity of the boundaries of analytic sets, *Mat. Sb.* **45** (1983), 291-336.
- [10] E. CHIRKA, C. COUPET, A. SUKHOV, On boundary regularity of analytic discs, *Mich. Math. J.* **46** (1999), 271-279.
- [11] K. CLANCEY, I. GOHBERG, *Factorization of matrix functions and singular integral operators*, Birkhäuser Verlag, 1981.
- [12] R. COIFMAN, Y. MEYER, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque* **57** (1978).
- [13] B. COUPET, Precise regularity up to the boundary of proper holomorphic mappings, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)* **20** (1993), 461-482.
- [14] B. COUPET, H. GAUSSIER, A. SUKHOV, Riemann maps in almost complex manifolds, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **2** (2003), no. 4, 761-785.
- [15] B. COUPET, H. GAUSSIER, A. SUKHOV, Fefferman's mapping theorem on almost complex manifolds in complex dimension two, *Math. Z.* **250** (2005), 1, 59-90.
- [16] B. COUPET, H. GAUSSIER, A. SUKHOV, Some aspects of analysis on almost complex manifolds with boundary, *Vinity Math. Survey* (à paraître).

- [17] R. DEBALME, Kobayashi hyperbolicity of almost complex manifolds, *preprint de l'Université de Lille, IRMA* **50** (1999), math.CV/9805130.
- [18] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag (1969).
- [19] CH. FEFFERMAN, The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains, *Invent. Math.* **26** (1974), 1-65.
- [20] F. FORSTNERIČ, Proper holomorphic mappings : a survey, *Several Complex Variables (Proc. Special Year, Stockholm, 1987/88, J. E. Fornæss editor)* 297-363, *Math. Notes* **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1993).
- [21] H. GAUSSIER, A. SUKHOV, Estimates of the Kobayashi-Royden metric in almost complex manifolds, *Bull. Soc. Math. France* **133** (2005) no. 2, 259-273.
- [22] H. GAUSSIER, A. SUKHOV, On the geometry of model almost complex manifolds with boundary, *Math. Z.* **254** (2006) no. 3, 567-589.
- [23] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (1977).
- [24] J. GLOBEVNIK, Perturbation by analytic discs along maximal real submanifolds of  $\mathbb{C}^N$ , *Math. Z.* **217** (1994), 287-316.
- [25] I. GRAHAM, Boundary behavior of the Carathéodory and Kobayashi metrics on strongly pseudoconvex domains in  $\mathbb{C}^n$  with smooth boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.* **207** (1975), 219-240.
- [26] H. GRAUERT, R. REMMERT, Plurisubharmonische Funktionen in Komplexen Räumen, *Math. Z.*, **65** (1956), 175-194.
- [27] M. GROMOV, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, *Invent. Math.* **82** (1985) no. 2, 307-347.
- [28] F. HAGGUI, Fonctions PSH sur une variété presque complexe, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **335** (2002), 509-514.
- [29] G. M. HENKIN, An analytic polyhedron is not biholomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **210** (1973), 1026-1029; translation in *Soviet Math. Dokl.* **14** (1973), 858-862.
- [30] C.D. HILL, G. TAIANI, Families of analytic discs in  $\mathbb{C}^n$  with boundaries on a prescribed CR submanifold, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **5** (1978), 327-380.
- [31] H. HOFER, V. LIZAN, J.-C. SIKORAV, On genericity for holomorphic curves in four-dimensional almost complex manifolds, *J. Geom. Anal.* **7** (1997) no. 1, 149-159.
- [32] L. HÖRMANDER, *An introduction to complex analysis in several variables*, North-Holland Publishing Company (1973).
- [33] S. IVASHKOVICH, J.-P. ROSAY, Schwarz-type lemmas for solutions of  $\bar{\partial}$ -inequalities and complete hyperbolicity of almost complex manifolds, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **54** (2004) no. 7, 2387-2435 (2005).
- [34] S. IVASHKOVICH, V. SHEVCHISHIN, Reflection principle and  $J$ -complex curves with boundary on totally real immersions, *Comm. in Contemp. Math.* **4** (1) (2002), 65-106.

- [35] S. G. KRANTZ, *Function theory of several variables*, John Wiley & Sons, Pure and applied mathematics (Bers-Hilton-Hochstadt) (1982).
- [36] B.S. KRUGLIKOV, M. OVERHOLT, Pseudoholomorphic mappings and Kobayashi hyperbolicity, *Differential Geom. Appl.* **11** (1999) no. 3, 265-277.
- [37] L. LAZZARINI, Existence of a somewhere injective pseudo-holomorphic disc, *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000) no. 4, 829-862.
- [38] K.-H. LEE, *Automorphism groups of almost complex manifolds*, Thèse, Pohang University of Science and Technology (2005).
- [39] K.-H. LEE, Almost complex manifolds and Cartan's uniqueness theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2005) no. 5, 2057-2069.
- [40] K.-H. LEE, Domains in almost complex manifolds with an automorphism orbit accumulating at a strongly pseudoconvex boundary point, *Michigan Math. J.* **54** (2006) 1, 179-205.
- [41] L. LEMPERT, La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, *Bull. Math. Soc. France* **109** (1981), 427-474.
- [42] L. LEMPERT, A Precise Result on the Boundary Regularity of Biholomorphic Mappings, *Math. Z.* **193** (1986) no. 4, 559-579.
- [43] D. MA, Sharp Estimates of the Kobayashi Metric Near Strongly Pseudoconvex Points, *Contemp. Math.* **137** (1992), 329-338.
- [44] A. NEULANDER, L. NIRENBERG, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, *Ann. Math.* **65** (1957), 391-404.
- [45] A. NIJENHUIS, W. WOOLF, Some integration problems in almost complex and complex manifolds, *Ann. Math.* **77** (1963), 424-489.
- [46] Y.-G. OH, Riemann-Hilbert problem and application to the perturbation theory of analytic discs, *Kyungpook Math. J.* **35** (1995) no. 1, 39-75.
- [47] Y.-G. OH, On the structure of pseudo-holomorphic discs with totally real boundary conditions, *J. Geom. Anal.* **7** (1997) no. 2, 305-327.
- [48] S. PINCHUK, Proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains, *Sibirsk. Mat. Zh.* **15** (1974), 909-917. English transl. in *Siberian Math. J.* **15** (1974).
- [49] S. PINCHUK, Holomorphic inequivalence of some classes of domain in  $\mathbb{C}^n$ , *Mat. Sb.* **111** (153) (1980), 67-94. English transl. in *Math. USSR-Sb.* **39** (1981), 61-86.
- [50] S. PINCHUK, The Scaling Method and Holomorphic Mappings, *Several complex variables and complex geometry, Part 1 (Santa Cruz, CA, 1989)*, 151-161, *Proc. Sympos. Pure Math.* **52** Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
- [51] S.I. PINCHUK, S.H. I. TSYGANOV, The smoothness of CR-mappings between strictly pseudoconvex hypersurfaces, *Math. USSR Izvestiya* **35** (1990) no. 2, 457-467.
- [52] H. POINCARÉ, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **23** (1907), 185-220.
- [53] T. RANSFORD, *Potential Theory in the Complex Plane*, Cambridge University Press (1995).

- [54] W. RUDIN, *Function Theory in the Unit Ball of  $\mathbb{C}^n$* , Springer-Verlag (1980).
- [55] S. SEMMES, Generalization of Riemann mappings and geometric structures on a space of domains in  $\mathbb{C}^n$ , *Mem. Amer. Math. Soc.* **98** (1992).
- [56] J.-C. SIKORAV, "Some properties of holomorphic curves in almost complex manifolds", 165-189, in *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Michèle Audin, Jacques Lafontaine Editors, Birkäuser (1994).
- [57] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1, Second Edition, Publish or Perish (1979).
- [58] A. SUKHOV, A. TUMANOV. Stationary discs and geometry of CR manifolds of codimension two, *Internat. J. Math.* **12** no. 8 (2001), 877-890.
- [59] A. TUMANOV, Analytic discs and the regularity of CR mappings in higher codimension, *Duke Math. J.* **76** (1994) no. 3, 793-807.
- [60] A. TUMANOV, Extremal discs and the regularity of CR mappings in higher codimension, *Amer. J. Math.* **123** (2001) no. 3, 445-473.
- [61] I.N. VEKUA, *Generalized analytic functions*, Addison-Wesley Publishing Company, International series of monographs in pure and applied mathematics (1962).
- [62] S. WEBSTER, On the reflection principle in several complex variables, *Proc. Amer. Math. Soc.* **71** (1978), 26-28.
- [63] K. YANO, SH. ISHIHARA, Tangent and cotangent bundles : differential geometry, *Marcel Dekker, Inc., New York* (1973).

**Résumé.** Dans cette thèse, on s'intéresse à une famille particulière de disques analytiques attachés à une sous-variété : les disques réguliers, introduits par L. Lempert en 1981 comme les géodésiques pour la métrique de Kobayashi. Ces disques sont invariants sous l'action des biholomorphismes, et leurs propriétés au bord sont intimement liées à la géométrie de la variété à laquelle ils sont attachés. L'étude des disques analytiques réguliers apparaît particulièrement pertinente lorsque l'on s'intéresse au comportement des applications (pseudo-)holomorphes au bord d'un domaine. Dans le premier chapitre, nous obtenons une paramétrisation explicite des disques réguliers attachés à différents types d'hypersurfaces réelles non-dégénérées de  $\mathbb{C}^n$ . Plus précisément, nous montrons qu'un tel disque  $h$  est entièrement déterminé par  $h'(0)$ , ainsi que par  $h(1)$ . Cela donne une représentation circulaire locale de l'hypersurface par le biais de l'application de Riemann  $h(1) \mapsto h'(0)$ , et des propriétés d'unicité pour les biholomorphismes. La suite de cette thèse est consacrée à l'étude, dans le cadre presque complexe, du comportement au bord d'une application pseudo-holomorphe propre  $F$  entre deux domaines strictement pseudo-convexes. Ce problème a été largement traité dans le cas standard, mais les arguments utilisés (holomorphicité du jacobien, analyticité...) ne se généralisent pas en presque complexe. Nous commençons par montrer que le lieu des points critiques de  $F$  reste loin du bord, l'outil essentiel étant la méthode de dilatation des coordonnées (introduite en complexe par S. Pinchuk). Nous en déduisons que  $F$  se prolonge au bord, et nous établissons le lien entre la régularité du prolongement et la régularité des structures presque complexes. Nous donnons également des estimations explicites des normes hölderiennes, à partir d'estimations pour les disques attachés à une sous-variété totalement réelle.

---

**Abstract.** In this thesis, we are interested in a special family of analytic discs attached to a submanifold: the regular discs. They have been introduced by L. Lempert in 1981 as geodesics for the Kobayashi metric. They are invariant under the action of biholomorphisms, and their boundary properties are strongly related to the geometry of the manifold to which they are attached. The study of regular analytic discs is particularly helpful in understanding the boundary behaviour of (pseudo-)holomorphic maps. In the first chapter, we obtain an explicit parametrization of the regular discs attached to different types of non-degenerate real hypersurfaces in  $\mathbb{C}^n$ . More precisely, we prove that such a disc  $h$  is entirely determined by  $h'(0)$ , and also by  $h(1)$ . This yields a local circular representation of the hypersurface by means of the Riemann map  $h(1) \mapsto h'(0)$ . We also get some uniqueness properties of the biholomorphisms. The sequel of this thesis is devoted to the problem, in the almost complex situation, of extending up to the boundary a proper pseudo-holomorphic map  $F$  defined between two strictly pseudoconvex domains. This problem has been widely studied in the standard case, but the arguments (holomorphy of the Jacobian, analyticity...) cannot be used in the almost complex case. We first prove that the set of all critical points of  $F$  is far from the boundary of the domain. The key-point is the scaling method, introduced by S. Pinchuk. We then deduce that  $F$  extends up to the boundary, and we establish the link between the H lderian regularity of the extension and the regularity of the almost complex structures. We also give some explicit estimates of the H lderian norms, using estimates for the discs attached to a totally real submanifold.

---

*Mots clés : Application de Riemann, Disques analytiques, Domaines strictement pseudo-convexes, Régularité au bord, Variétés presque complexes.*

**Classification mathématique :** 32A40, 32H35, 32H40, 32Q45, 32Q60, 32Q65, 32T15, 32U05, 32V40, 53C15.