Sur une équation générale du type Duffing avec double puits de potentiel

C. Fitouri* et S. Gasmi*

Résumé : Sous une certaine condition de petitesse sur le terme f et pour c assez grand, nous prouvons l'existence d'exactement 3 solutions bornées asymptotes aux solutions quelconques de l'équation $u''+cu'+|u|^p u-u=f(t)$ lorsque t tend vers l'infini. Pour c quelconque, f T-périodique et vérifiant une certaine condition de petitesse, nous établissons l'existence d'exactement 3 solutions périodiques.

Abstract : Under a smallness condition on the bounded forcing term f and for c large enough, we prove the existence of exactly 3 different bounded solutions which asymptote any solution of the equation $u''+cu'+|u|^p u-u=f(t)$ as t tends to infinity. For any $c>0$, we establish the existence of exactly 3 different T- periodic solutions when f is T-periodic and satisfies a smallness condition.

1 Introduction

L'équation de Duffing décrit le mouvement d'un système non linéaire représentant un oscillateur unidimensionnel.
On peut l'écrire sous la forme :

$$u''+cu'+u^3-u=f(t)$$

où $c>0$ et $f\in L^\infty(\mathbb{R})$.
A.Haraux [9] a prouvé que sous une certaine condition de petitesse sur f et pour c assez grand on pouvait avoir pour ce système un comportement moins chaotique que celui décrit dans [5, 6, 10, 12].
Dans ce travail nous déterminons une condition de petitesse sur f dépendant

*Laboratoire J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris Cedex 05, FRANCE.

de $p \geq 2$ qui donne des résultats analogues pour l'équation un peu plus générale

$$u'' + cu' + |u|^p u - u = f(t) \tag{1.1}$$

où $c > 0$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Les méthodes de démonstration sont celles de [9] avec des difficultés techniques spplémentaires surtout pour les résultats globaux (théorèmes 2.2 et 2.5).
Nous améliorons au passage le résultat du théorème 1.2 de [9].

2 Les résultats principaux

Théorème 2.1. *Sous la condition*

$$\|f\|_\infty < \frac{p}{(p+1)^{\frac{p+1}{p}}} \tag{2.1}$$

l'équation (1.1) admet une solution unique $\omega_0 \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ *telle que*

$$\|\omega_0\|_\infty < \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \tag{2.2}$$

Si de plus $c \geq 2\sqrt{p}$ *et*

$$\|f\|_\infty < p((\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{p+1}{p}} - 2) \tag{2.3}$$

(1.1) admet une solution unique ω_+ *et une solution unique* $\omega_- \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\|\omega_+ - 1\|_\infty < (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1, \qquad \|\omega_- + 1\|_\infty < (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1 \tag{2.4}$$

Si $c \leq 2\sqrt{p}$ *et sous la condition supplémentaire*

$$\|f\|_\infty \leq (\frac{c\sqrt{p}}{2} + p + 1)[(\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{1}{p}} - 1] - (\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{p+1}{p}} := \eta(c) \tag{2.5}$$

(1.1) admet une solution unique ω_+ *et une solution unique* $\omega_- \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ *telles que*

$$\|\omega_+ - 1\|_\infty < (1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1, \quad \|\omega_- + 1\|_\infty < (1 + \frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1 \tag{2.6}$$

Finalement si $c \leq \sqrt{\frac{p}{2}}$, en supposant que

$$\|f\|_\infty \leq (\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}}+p+1)(\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)}+1)^{\frac{1}{p}}-(\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)})^{\frac{p+1}{p}}-p-\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}} := \eta_1(c) \tag{2.7}$$

(1.1) admet une solution unique ω_+et une solution unique $\omega_- \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ telles que

$$\|\omega_+-1\|_\infty < (1+\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)})^{\frac{1}{p}}-1, \quad \|\omega_-+1\|_\infty < (1+\frac{c\sqrt{p}}{\sqrt{2}(p+1)})^{\frac{1}{p}}-1 \tag{2.8}$$

Dans certains cas le résultat local du théorème 2.1 peut être raffiné en donnant un résultat global sous une restriction additionnelle sur f.

Théorème 2.2. *Sous les conditions*

$$c \geq 2\sqrt{p}, \quad f \in C_b(\mathbb{R}), \;\; \|f\|_\infty < \inf\{\frac{1}{6p\sqrt{2}}, \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\frac{\sqrt{3p-4}}{8\sqrt{3p}}\} \tag{2.9}$$

toute solution u de (1.1) sur un intervalle $J = (t_0, +\infty)$ est asymptote à une des 3 solutions $\omega_0, \omega_+, \omega_-$ quand $t \to +\infty$.

Corollaire 2.3. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, si f est presque périodique, (1.1) admet exactement 3 solutions presque périodiques $\omega_0, \omega_+, \omega_-$. De plus si f est T- périodique alors $\omega_0, \omega_+, \omega_-$ le sont aussi.*

Corollaire 2.4. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, si f est T- périodique, alors (1.1) n'admet pas de solutions sous harmoniques.*

Le dernier résultat est restreint aux solutions T- périodiques mais valable pour tout $c > 0$.

Théorème 2.5. *Soit f bornée et T- périodique. Sous la condition*

$$\|f\|_\infty(1+\frac{\sqrt{T}}{c}\sqrt{K\|f\|_\infty^p+(\frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)}+1)T})$$

$$< (\frac{p}{p+1})\inf\{(1+\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}}-1, (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}}-1\} \tag{2.10}$$

Avec $K = 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\dfrac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p} + 2^{(p-3)^+}p^2(p^2-1)\dfrac{T^{p-1}}{c^p}$
$+ p^p(p+1)T$
l'équation (1.1) admet au plus trois solutions T- périodiques.

Corollaire 2.6. *Soit f bornée et T- périodique satisfaisant les deux conditions du théorème* 2.1 *et* 2.3*, alors (1.1) admet exactement trois solutions T-périodiques.*

Remarque 2.7. Si $p = 2$, la condition (2.9) du théorème 2.2 améliore la condition (1.9) de [9] d'un facteur $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

3 Existence de 3 solutions bornées pour f petite

On établit d'abord l'existence de la "petite" solution. On introduit l'opérateur Λ defini sur

$$X := L^\infty(\mathbb{R})$$

par

$$D(\Lambda) = W^{2,\infty} = \{u \in C^1(\mathbb{R}), u, u', u'' \in L^\infty(\mathbb{R})\}$$
$$\forall u \in D(\Lambda), \quad \Lambda u = u'' + cu' - u$$

alors une solution bornée u de (1.1) est juste une solution de

$$\Lambda u = u'' + cu' - u = f - |u|^p u$$

Puisque -Λ est un opérateur elliptique, il est clairement inversible sur X et on a

$$||\Lambda^{-1}||_{L(X)} = 1$$

On écrit l'équation précédente comme

$$u = \Lambda^{-1}(f - |u|^p u)$$

L'application

$$\mathcal{T}(v) = \Lambda^{-1}(f - |v|^p v)$$

conserve la boule

$$B_r = \{v \in X, ||v||_X \leqslant r\}$$

si

$$||f||_X + r^{p+1} \leqslant r.$$

ceci est satisfait pour un certain r positif si

$$||f||_X \leq \sup_{r>0}(r - r^{p+1}) = p(\frac{1}{p+1})^{\frac{p+1}{p}}$$

puisque le maximum est atteint pour $r = r_0 := (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}}$ et sous la condition (2.2) ci dessus il existe $r < r_0$ tel que

$$\mathcal{T}B_r \subset B_r$$

Puisque $r < (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}}$, l'application $v \to v^{p+1}$ est une contraction uniforme sur X et donc $\mathcal{T}$ l'est aussi. Alors il existe un unique point fixe u de $\mathcal{T}$ dans B_r qui est la solution de notre problème. De plus on a $||u||_X < (\frac{1}{p+1})^{\frac{1}{p}}$.
Vu le caractère impair de la non linéarité, quitte à changer f en $-f$, pour les deux autres solutions il suffit d'étudier l'existence d'une deuxième solution bornée au voisinage de 1. Posant $u = 1 + v$, on est alors ramené à considèrer l'équation

$$v'' + cv' + pv = f - \gamma(v) \text{ où } \gamma(v) = |1+v|^p(1+v) - (p+1)v - 1$$

qui peut être écrite sous la forme :

$$v = \mathcal{L}^{-1}(f - \gamma(v))$$

où

$$\mathcal{L} = \partial^2 + c\partial + p\mathrm{I}$$

1^{er}**cas** : Si $c \geq 2\sqrt{p}$

alors, d'après le théorème 2.1 dans [9], $||\mathcal{L}^{-1}|| = \frac{1}{p}$ et

$$\mathcal{T}(v) = \mathcal{L}^{-1}(f - \gamma(v))$$

conserve la boule

$$B_r = \{v \in X, ||v||_X \leqslant r\}$$

si

$$\frac{1}{p}(||f||_X + \gamma(r)) \leq r$$

Ceci est satisfait pour un certain r positif si

$$||f||_X \leq \sup_{r>0}(pr - \gamma(r))$$

Il suffit donc de prendre f telle que

$$||f||_X \leq \sup_{r>0}(2p+1)r - (1+r)^{p+1} + 1 := \mathrm{M}$$

avec

$$\mathrm{M} = (2p+1)r_0 - (1+r_0)^{p+1} + 1; \;\; r_0 = (\frac{2p+1}{p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1$$

De plus, puisque $(p+1)(1+r_0)^p = 2p+1$ on a

$$\forall v \in (-r_0, r_0), |((1+v)^{p+1})'| = |(p+1)(1+v)^p| < 2p+1$$

alors pour tout $r \in (0, r_0)$ tel que :

$$||f||_X \leq (2p+1)r - (1+r)^{p+1} + 1$$

on a $\mathcal{T}\mathcal{B}_r \subset \mathcal{B}_r$ et $\mathcal{T} : \mathcal{B}_r \to \mathcal{B}_r$ est une application uniformément contractante. Le point fixe de $\mathcal{T}$ correspond à la solution bornée positive qu'on cherche. Pour finir la démonstration dans ce cas, deux remarques sont nécessaires.
1) On a :

$$M = (2p+1)r_0 - (1+r_0)^{p+1} + 1 = p[(\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{p+1}{p}} - 2] < p(\frac{1}{p+1})^{\frac{p+1}{p}}$$

2) La solution au voisinage de 0 et la solution au voisinage de 1 sont distinctes puisque la seconde est plus grande que $1 - [(\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1] > (\frac{1}{p+1})^{\frac{p+1}{p}}$.

2^{eme}**cas** : Si $c \leq 2\sqrt{p}$

alors, d'aprés le théorème 2.1 [9], $||\mathcal{L}^{-1}|| \leq \frac{2}{c\sqrt{p}}$ et

$$\mathcal{T}(v) = \mathcal{L}^{-1}(f - \gamma(v))$$

conserve la boule

$$B_r = \{v \in X, ||v||_X \leqslant r\}$$

si

$$\frac{2}{c\sqrt{p}}(||f||_X + \gamma(r)) \leq r$$

Ceci est satisfait pour un certain r positif dès que

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0}(\frac{c\sqrt{p}}{2}r - \gamma(r))$$

Il suffit de prendre

$$\|f\|_X \leq \sup_{r>0}(p + \frac{c\sqrt{p}}{2} + 1)r - (1+r)^{p+1} + 1 := M$$

avec

$$M = (p + \frac{c\sqrt{p}}{2} + 1)r_1 - (1 + r_1)^{p+1} + 1; r_1 = (\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{1}{p}} - 1 \leq r_0$$

De plus $\mathcal{T}$ est toujours contractante sur B_r pour $r < r_1$ et la solution positive reste toujours plus grande que la solution proche de 0. La condition finale sur f dans ce cas est

$$\|f\|_X \leq (\frac{c\sqrt{p}}{2} + p + 1)[(\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{1}{p}} - 1] - (\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)} + 1)^{\frac{p+1}{p}} := \eta(c)$$

3^{eme}**cas** : $c \leq \sqrt{\frac{p}{2}}$

En utilisant la formule exacte donnée dans le théorème 2.1 dans [9] :

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)} = \frac{1}{\omega^2} \times \frac{1 + e^{\frac{-c\pi}{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}}}{1 - e^{\frac{-c\pi}{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}}} = \frac{1}{\omega^2} \coth\{\frac{c\pi}{\sqrt{4\omega^2 - c^2}}\}$$

on prouve que

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{p}}$$

En effet pour ω fixé, $c\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)}$ est une fonction croissante de c, d'où pour $c \leq \sqrt{\frac{p}{2}}$

$$c\|\mathcal{L}^{-1}\|_{L(X)} \leq \frac{1}{\sqrt{2p}} \times \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}}}{1 - e^{-\frac{\pi}{\sqrt{7}}}} < \sqrt{\frac{2}{p}}$$

puisque $\frac{\pi}{\sqrt{7}} > \ln 3$. La conclusion est donc la même que dans le deuxième cas.

4 Borne ultime de la solution générale

Dans cette section on établit une estimation non optimale de la borne ultime de la solution générale de (1.1).

Proposition 4.1. *Pour toute solution u de* (1.1) *on a*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |u|^{p+2}(t) \leq (\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{2}} + (p+2)[\frac{c^2 + (p+2)^2}{2p^2c^2}]\|f\|_\infty^2 \qquad (4.1)$$

Démonstration : On introduit l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}u'^2 + \frac{1}{p+2}|u|^{p+2} - \frac{1}{2}u^2$. On a

$$E'(t) = fu' - cu'^2 \leq (\frac{p+2}{2pc})f^2 - \frac{(p+4)}{2(p+2)}cu'^2$$

et

$$(uu')' = u'^2 + uu'' = u'^2 + u(f - cu' - |u|^p u + u)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(E + \frac{c}{p+2}uu') &\leq \frac{c}{p+2}u'^2 - \frac{(p+4)}{2(p+2)}cu'^2 - \frac{c}{p+2}uu' - \frac{c}{p+2}|u|^{p+2} + \frac{c}{p+2}u^2 \\
&+ \frac{c}{p+2}uf + \frac{f^2}{c}(\frac{p+2}{2p}) \\
&= -c(E + \frac{c}{p+2}uu') + \frac{c}{p+2}u^2 - \frac{c}{2}u^2 + \frac{c}{p+2}uf + \frac{f^2}{c}(\frac{p+2}{2p}) \\
&= -c(E + \frac{c}{p+2}uu') - \frac{pc}{2(p+2)}u^2 + \frac{f^2}{c}(\frac{p+2}{2p}) + \frac{c}{p+2}uf \\
&\leq -c(E + \frac{c}{p+2}uu') - \frac{pc}{2(p+2)}u^2 + \frac{pc}{2(p+2)}u^2 + \frac{c}{2p(p+2)}f^2 + \frac{f^2}{c}(\frac{p+2}{2p}) \\
&\leq -c(E + \frac{c}{p+2}uu') + \frac{1}{2p}(\frac{c}{p+2} + \frac{p+2}{c})f^2
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}(E(t) + \frac{c}{p+2}uu') \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2(p+2)}\|f\|_\infty^2$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour t assez grand

$$(E(t) + \frac{c}{p+2}uu') \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2(p+2)}\|f\|_\infty^2 + \varepsilon$$

Finalement considérons une suite "asymptotiquement maximisante" t_n telle que

$$\lim_{n\to\infty} u^2(t_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, u^2(t)$$

Supposons que cette limite soit positive, il est clair que $\lim_{n\to\infty} u'(t_n) = 0$ puisque u'' est bornée pour $t \geq 0$ et par conséquent pour n assez grand on a

$$\frac{1}{p+2}|u|^{p+2}(t_n) - \frac{1}{2}u^2(t_n) \leq E(t_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2(p+2)}\|f\|_\infty^2 + 2\varepsilon$$

$$\Rightarrow |u|^{p+2}(t_n) - \frac{p+2}{2}u^2(t_n) \leq \frac{c^2 + (p+2)^2}{2pc^2}\|f\|_\infty^2 + 2(p+2)\varepsilon$$

d'aprés l'inégalité de Young on a

$$\frac{p+2}{2}|u|^2 \leq \frac{p}{p+2}(\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + \frac{2}{p+2}|u|^{p+2}$$

d'où pour $t = t_n$

$$|u|^{p+2} \leq \frac{p}{p+2}(\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + \frac{2}{p+2}|u|^{p+2} + \frac{c^2+(p+2)^2}{2pc^2}\|f\|_\infty^2 + 2(p+2)\varepsilon$$

ce qui donne

$$\frac{p}{p+2}|u|^{p+2} \leq \frac{p}{p+2}(\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + \frac{c^2+(p+2)^2}{2pc^2}\|f\|_\infty^2 + 2(p+2)\varepsilon$$

et par conséquent

$$|u|^{p+2}(t_n) \leq (\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + (p+2)[\frac{c^2+(p+2)^2}{2p^2c^2}]\|f\|_\infty^2 + 2\frac{(p+2)^2}{p}\varepsilon$$

donc

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|u|^{p+2}(t) \leq (\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{2}} + (p+2)[\frac{c^2+(p+2)^2}{2p^2c^2}]\|f\|_\infty^2 + 2\frac{(p+2)^2}{p}\varepsilon$$

et puisque ε est arbitraire on obtient (4.1).

5 Une estimation précise pour c grand

Quand $c \geq 2\sqrt{p}$, l'inégalité (4.1) et la propriété de conservation de la positivité permettent une estimation plus précise de u pour t grand.

Proposition 5.1. *Pour tout $c \geq 2\sqrt{p}$, on a*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|u(t)| \leq 1 + \frac{1}{p}\|f\|_\infty \tag{5.1}$$

vrai pour $\|f\|_\infty \leq 1$.

Démonstration Quand $c \geq 2\sqrt{p}$, l'opérateur $\mathcal{L} = \partial^2 + c\partial + pI$ a un inverse positif sur L^∞. En plus l'estimation (4.1) donne dans ce cas

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|u|^{p+2}(t) \leq (\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + (p+2)[\frac{4p+(p+2)^2}{8p^3}]\|f\|_\infty^2$$

En particulier si on suppose

$$\|f\|_\infty \leq 1$$

alors on trouve

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |u|^{p+2}(t) \leq (\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + (p+2)[\frac{4p+(p+2)^2}{8p^3}]$$

or pour $p \geq 2$ on a $\frac{4p+(p+2)^2}{8p^3} \leq \frac{1}{2}$
donc

$$\begin{aligned} |u|^{p+2} &\leq (\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} + \frac{p+2}{2} \\ &\leq 2(\frac{p+2}{2})^{\frac{p+2}{p}} \end{aligned}$$

d'où

$$|u| \leq 2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}}$$

Si u une solution de (1.1) on pose $u = 1 + v$ on a

$$v'' + cv' + pv + [|v+1|^p(v+1) - ((p+1)v+1)] = f$$

$h(u) = |v+1|^p(v+1) - ((p+1)v+1) = |u|^p u - (p+1)u + p \geq 0$ pour $u \geq -2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}}$; en effet

$$h'(u) = (p+1)(|u|^p - 1)$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		$+$	0	$-$	0	$+$	
h		$\nearrow$	$1+3p$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'aprés le tableau de variation $h(u) \geq 0\ \forall\ u \in [-1, +\infty[$.
Sur $]-\infty, -1]$; h est croissante alors $h(u) \geq h(-2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}})\ \forall u \geq -2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}}$ puisque $-2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}} \in]-\infty, -1]$
D'autre part $2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}} \leq (p+2)^{\frac{1}{p}}$ donc

$$h(-(p+2)^{\frac{1}{p}}) \leq h(-2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}})$$

or

$$h(-(p+2)^{\frac{1}{p}}) = -(p+2)^{\frac{1}{p}} + p \geq 0$$

puisque $p^p \geq p+2 \; \forall \; p \geq 2$
donc

$$h(u) \geq 0 \quad \forall \; u \geq -2^{\frac{1}{p+2}}(\frac{p+2}{2})^{\frac{1}{p}}$$

En particulier on a

$$v'' + cv' + pv \leq f$$

On veut montrer d'abord que

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \, u(t) \leq 1 + \frac{1}{p}\|f\|_\infty$$

supposons que cette inégalité est fausse, on peut choisir $\delta > 0$ et t_n une suite tendant vers ∞ telle que

$$u(t_n) \geq 1 + \frac{1}{p}\|f\|_\infty + \delta$$

remplaçons v par $v(t+t_n)$ et f par $f(t+t_n)$. On peut passer à la limite par une sous suite pour laquelle la suite de translatés de f converge faiblement dans L^2. On peut aussi supposer que les translatés de v convergent dans C^1, d'où les fonctions limites vérifient l'équation limite. Finalement il suffit de considérer le cas où v est bornée sur $\mathbb{R}$. Dans ce cas, puisque

$$v'' + cv' + pv \leq \|f\|_\infty$$

on obtient

$$v \leq \frac{1}{p}\|f\|_\infty$$

en contradiction avec

$$v(t_n) \geq \frac{1}{p}\|f\|_\infty + \delta$$

On a donc

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \, u(t) \leq 1 + \frac{1}{p}\|f\|_\infty$$

Finalement on obtient une inégalité analogue en changeant u en $-u$, et le résultat en découle.
Remarque : Le résultat de la proposition 5.1 n'est pas vrai pour les petites valeurs de c même pour $p = 2$, cf.[9].

6 Démonstration du Théorème 2.2 et de ses corollaires

L'un des principaux outils de la démonstration est une formulation précise de la stabilité asymptotique des solutions bornées ω_+, ω_-. Il suffit de considérer ω_+ puisque pour ω_- on peut changer u et f en leurs opposées. Dans ce cas on a

Lemme 6.1. *Soit*

$$\|f\|_\infty < \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \frac{\sqrt{3p-4}}{8\sqrt{3p}} \tag{6.1}$$

Alors pour tout $\delta < \frac{1}{2\sqrt{6p}}$, il existe $\eta > 0$ tel que les conditions

$$|u(t_0) - 1| \leq \delta \text{ et } |u'(t_0)| \leq \eta$$

impliquent que

$$\forall t \geq t_0 \ , \ |u(t) - 1| \leq \frac{1}{2p} \tag{6.2}$$

et

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |u(t) - 1| \leq \frac{\sqrt{1+c^2}}{c} \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3p-4}} \quad \|f\|_\infty \tag{6.3}$$

de plus si $c \geq 2\sqrt{p}$, sous les mêmes hypothèses on a

$$\lim_{t\to+\infty} (|u(t) - \omega_+(t)| + |u'(t) - \omega'_+(t)|) = 0 \tag{6.4}$$

Démonstration : En posant $u = 1 + v$ on obtient l'équation en v

$$v'' + cv' + |1+v|^p(1+v) - (v+1) = f$$

On pose

$$P(v) = \frac{(v+1)^{p+2}}{p+2} - \frac{1}{2}(v+1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p+2}$$

Il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$P(v) = \frac{p}{2}v^2 + \frac{p(p+1)}{6}(1+\theta v)^{p-1}v^3$$

On remarque que

$$|v| \leq \frac{1}{2p} \Longrightarrow \frac{5p}{16}v^2 \leq P(v) \leq \frac{11p}{16}v^2$$

En effet

$$|P(v) - \frac{p}{2}v^2| \le \frac{p+1}{12}(1+\theta v)^{p-1}v^2 \quad si\,|v| \le \frac{1}{2p}$$

Or

$$(p+1)(1+\theta v)^{p-1} \le (p+1)(1+\frac{1}{2p})^{p-1} = p(1+\frac{1}{p})(1+\frac{1}{2p})^{p-1}$$
$$\le \sqrt{e}p(1+\frac{1}{2p}) \le \frac{9}{5}p(1+\frac{1}{4})$$

d'où

$$|P(v) - \frac{p}{2}v^2| \le \frac{3p}{16}v^2$$

Soit

$$F(t) = \frac{1}{2}v'^2(t) + P(v)(t)$$

et

$$\Phi(t) = F(t) + \alpha vv'(t)$$

où α une constante > 0 qui sera choisie plus tard. On remarque d'abord que si $\alpha < \frac{1}{4}$, on a

$$|\alpha vv'| \le \frac{1}{8}v'^2 + \frac{p}{16}v^2$$

alors

$$\frac{1}{4}(pv^2 + v'^2) \le \Phi(t) \le \frac{3}{4}(pv^2 + v'^2)$$

tant que la condition

$$|v| \le \frac{1}{2p}$$

est satisfaite.
Soit

$$T = \sup\{t \ge t_0,\, |v(t)| \le \frac{1}{2p}\} \; et \; J := [t_0, T).$$

On donne une suite d'estimations valables pour $t \in J$. On a

$$F'(t) = -cv'^2 + fv' \le -\frac{c}{2}v'^2 + \frac{f^2}{2c}$$

$$(vv')' = v'^2 + vv'' = v'^2 - cvv' - vg(v) + fv$$

Avec $g(v) = |1+v|^p(1+v) - (1+v) = pv + \frac{p(p+1)}{2}(1+\theta v)^{p-1}v^2$

• Si $v \geq 0$ alors $g(v)v \geq pv^2$.
• Si $v \leq 0$, on a $(1+\theta v)^{p-1} \leq 1$ alors $g(v)v \geq v^2(\frac{3p}{4} - \frac{1}{4})$.
D'où
$$(vv')' \leq v'^2 - cvv' - v^2(\frac{3p}{4} - \frac{1}{2}) + f^2$$
et en utilisant
$$-cvv' \leq \frac{1}{2}v^2 + \frac{c^2}{2}v'^2$$
on en déduit que
$$\Phi' \leq (\alpha(1+\frac{c^2}{2}) - \frac{c}{2})v'^2 - \alpha(\frac{3p}{4} - 1)v^2 + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2$$
On prend
$$\alpha = \frac{c}{4(1+\frac{c^2}{2})}$$
alors $\alpha(1+\frac{c^2}{2}) = \frac{c}{4}$ et
$$\begin{aligned}\Phi' &\leq \frac{c}{4}v'^2 - \alpha(\frac{3p}{4} - 1)v^2 + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2 \\ &\leq -\frac{\alpha(\frac{3p}{4}-1)}{p}(pv^2 + v'^2) + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2\end{aligned}$$
donc on trouve
$$\Phi' \leq \frac{-4\alpha(\frac{3p}{4}-1)}{3p}\Phi + (\alpha + \frac{1}{2c})f^2$$
d'où
$$\forall t \in J,\ \ \Phi(t) \leq \exp[-4\alpha(\frac{\frac{3p}{4}-1}{3p})(t-t_0)]\Phi(t_0) + (\frac{6p}{3p-4})(\frac{1+c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2$$
Pour avoir $T = \infty$, on doit avoir $|v| < \frac{1}{2p}$ sur J qui est satisfaite dès que
$$\Phi(t_0) + (\frac{6p}{3p-4})(\frac{1+c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2 \leq \frac{p}{4}(\frac{1}{2p})^2 = \frac{1}{16p}$$
Pour avoir cette condition il est suffisant de prendre
$$\Phi(t_0) \leq \frac{1}{32p} \quad \text{et} \quad (\frac{6p}{3p-4})(\frac{1+c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2 \leq \frac{1}{32p}$$
La première condition est vérifiée dès que $\frac{3}{4}pv^2(t_0) < \frac{1}{32p}$ et $\frac{3}{4}v'^2(t_0) \leq \frac{1}{32p} - \frac{3}{4}v^2(t)$ ce qui correspond à nos hypothèses. La deuxième condition est équivalente à
$$\|f\|_\infty < \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\frac{\sqrt{3p-4}}{8\sqrt{3p}}$$

Pour p=2 elle se réduit à

$$\|f\|_\infty \le \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\frac{\sqrt{2}}{16\sqrt{3}}$$

Sous ces conditions on a $T=\infty$ et

$$\forall t \ge t_0,\ \Phi(t) \le \exp[-4\alpha(\frac{\frac{3p}{4}-1}{3p})t]\Phi(t_0) + (\frac{6p}{3p-4})(\frac{1+c^2}{c^2})\|f\|_\infty^2$$

et l'inégalité

$$|u(t)-1| \le \frac{2}{\sqrt{p}}\Phi(t)^{\frac{1}{2}}$$

nous donne

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}|u(t)-1| \le \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3p-4}}\quad \|f\|_X$$

Pour prouver la deuxième partie, on remarque que la distance asymptotique entre u et 1 est plus petite que

$$\frac{1}{2p} < (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1 = r_0$$

en effet $\frac{2p+1}{p+1} = 1 + \frac{p}{p+1} \ge \frac{5}{3}$ et $(1+\frac{1}{2p})^p < \sqrt{e} < \frac{5}{3}$.

On veut alors montrer que $u \to \omega_+$ quand $t \to +\infty$ et puisque u'' est bornée dans S^2 on aura $u' \to \omega'_+$. Pour prouver cela on va utiliser la méthode de “translation-compacité” de Amerio-Biroli [2, 3]. Supposons qu il existe α_n tendant vers l'infini avec

$$\lim_{n\to\infty}|u(\alpha_n)-\omega_+(\alpha_n)| = \eta > 0$$

on peut remplacer α_n par une sous-suite qu'on note aussi α_n telle que

$$u(\alpha_n+t),\ \ \omega_+(\alpha_n+t),\ \ f(\alpha_n+t)$$

convergent respectivement vers v, ω et g dans $\mathbb{R}$ uniformément sur tout compact pour les deux premières fonctions, localement faible sur L^2 pour la troisième. Alors v et ω sont deux solutions bornées de

$$z'' + cz' + |z|^p z - z = g$$

avec

$$Max\{\|v-1\|_\infty, \|\omega-1\|_\infty\} < r_0$$

En particulier $v=\omega$ et pour $t=0$ on obtient une contradiction avec

$$\lim_{n\to\infty}|u(\alpha_n)-\omega_+(\alpha_n)| = \eta > 0$$

Cette contradiction complète la démonstration du lemme 6.1.

Lemme 6.2. *([9], lemma 6.2) Soit $J = (a, +\infty)$ et $u \in C^2(J)$ tel que $u \leq M$ sur$J$. Soit*

$$U := \overline{\lim_{t \to +\infty}} u(t)$$

Alors il existe une suite de réels $t_n \in J$ telle que $t_n \to +\infty$ et

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} u''(t_n) \leq 0, \quad \lim_{n \to +\infty} u(t_n) = U$$

Lemme 6.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, l'inégalité $u - |u|^p u \leq \varepsilon$ implique : $u \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon$ ou $u \geq 1 - \sqrt{3}\varepsilon$.*

Démonstration : Si $u \leq 0$ il n'y a rien à prouver.
Si $u > 0$ on distingue deux cas
i) Si $u \leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$, alors $1 - |u|^p \geq \frac{p}{p+1}$ et donc

$$u - |u|^p u = u(1 - |u|^p) \leq \varepsilon \Rightarrow \frac{p}{p+1} u \leq \varepsilon \Rightarrow u \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon$$

ii) Si $u \geq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$, alors $u(1 - u^p) = u(1 - u)[\frac{1-u^p}{1-u}] \geq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}(1 - u)$ et donc puisque $(p+1)^{\frac{1}{p}} leq \sqrt{3}$ on trouve

$$u \geq 1 - \sqrt{3}\varepsilon$$

Démonstration du théorème 2.2.

Soit u une solution de (1.1) sur $\mathbb{R}$ et introduisons

$$M = \overline{\lim_{t \to +\infty}} u(t), \quad m = \underline{\lim_{t \to +\infty}} u(t), \quad \varepsilon = \|f\|_\infty$$

Comme conséquence du lemme 6.2, il existe une suite de réels t_n telle que

$$\lim_{n \to +\infty} u''(t_n) \leq 0, \quad \lim_{n \to \infty} u(t_n) = M$$

Puisque u'' est bornée $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} u'(t_n) = 0$ On a

$$(u - |u|^p u)(t_n) = -f(t_n) + u''(t_n) + cu'(t_n)$$

donc

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} (u - |u|^p u)(t_n) \leq \varepsilon$$

Comme conséquence du lemme 6.3, pour n suffisament grand on a soit

$$u(t_n) \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon < 2\varepsilon$$

soit

$$u(t_n) \geq 1 - \sqrt{3}\varepsilon$$

Dans le premier cas on conclut que

$$M \leq 2\varepsilon$$

Dans le deuxième cas, d'aprés la section 5, on a

$$1 - \sqrt{3}\varepsilon \leq u(t_n) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{p}$$

Comme conséquence du lemme 6.1, puisque (2.9) entraîne

$$\sqrt{3}\varepsilon \leq \frac{1}{2p\sqrt{6}} \text{ et de plus } \lim_{n\to\infty} u'(t_n) = 0$$

on conclut que u est asymptote à ω_+ en $+\infty$. Dans ce cas la démonstration est terminée. Revenant au premier cas, on considére une suite s_n telle que

$$u''(s_n) \geq 0, \quad \lim_{n\to\infty} u(s_n) = m$$

et par le même argument on conclut que u est soit asymptote à ω_- en $+\infty$, soit

$$m \geq -2\varepsilon$$

Dans ce second et dernier cas on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} |u(t)| \leq 2\varepsilon$$

et par les hypothèses faites sur f ceci implique que

$$\lim_{t\to\infty} |u(t) - \omega_0(t)| = 0$$

On prouve cette dernière propriété en utilisant à nouveau la méthode de translation.
En effet supposant, au contraire, l'existence de α_n tendant vers l'infini avec

$$\lim_{n\to\infty} |u(\alpha_n) - \omega_0(\alpha_n)| = \eta > 0$$

on peut remplacer α_n par une sous-suite, notée α_n, telle que

$$u(\alpha_n + t), \ \ \omega_0(\alpha_n + t), \ \ f(\alpha_n + t)$$

convergent respectivement vers v, ω et g sur $\mathbb{R}$, uniformément sur tout compact pour les premières fonctions, localement faiblement dans L^2 pour la troisième. Alors v, ω sont deux solutions bornées de

$$z'' + cz' + |z|^p z - z = g$$

avec

$$Max\{\|v\|_\infty, \|\omega\|_\infty\} \leq 2\varepsilon$$

En particulier $v = \omega$ et pour $t = 0$ on obtient une contradiction avec

$$\lim_{n\to\infty} |u(\alpha_n) - \omega_0(\alpha_n)| = \eta > 0$$

Cette contradiction termine la démonstration du théorème 2.2

7 Démonstration du théorème 2.5.

On commence par montrer que pour T fixé, les solutions u T-périodiques sont telles que $|||u|^p u - u||_\infty$ tend vers 0 avec $||f||_\infty$.

Proposition 7.1. *Soit f bornée, T-périodique et soit $u \in C^2(\mathbb{R})$ une solution T-périodique de* (1.1)*. Alors on a l'estimation suivante :*

$$\||u|^p u - u\|_\infty \leq \|f\|_\infty (1 + \frac{\sqrt{T}}{c}\sqrt{K\|f\|_\infty^p + (\frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)} + 1)T})$$

avec $K = 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)} \frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}} c^p} + 2^{(p-3)^+} p^2(p^2-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}$
$+ p^p(p+1)T$

Démonstration : En intégrant (1.1) sur $J = (0, T)$ on trouve :

$$\int_J (|u|^p u - u)dt = \int_J f dt$$

En particulier

$$|\frac{1}{T}\int_J (|u|^p u - u)dt| = ||f||_\infty$$

Ensuite en multipliant (1.1) par u' et en intégrant sur J on trouve :

$$c\int_J u'^2 dt = \int_J f u' dt \Rightarrow c\int_J u'^2 dt \leq (\int_J f^2 dt)^{\frac{1}{2}} (\int_J u'^2 dt)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$||u'||_2 \leq \frac{\sqrt{T}}{c}||f||_\infty \tag{7.1}$$

Puis en mutipliant (1.1) par $u|u|^{p-2}$ et en intégrant sur J on obtient :

$$\int_J (|u|^{2p} - |u|^p)dt = \int_J fu|u|^{p-2}dt + (p-1)\int_J u'^2|u|^{p-2}dt$$

$$\Longrightarrow \int_J (|u|^{2p} - |u|^p)dt \leq ||f||_\infty \int_J |u|^{p-1}dt + (p-1)\|u\|_\infty^{p-2}dt \int_J u'^2 dt \tag{7.2}$$

D'une part, d'aprés l'inégalite de Young on a :

$$||f||_\infty |u|^{p-1} \leq \frac{p-1}{p^2}|u|^p + p^{p-2}\|f\|_\infty^p$$

donc

$$||f||_\infty \int_J |u|^{p-1}dt \leq \frac{p-1}{p^2}\int_J |u|^p dt + p^{p-2}\|f\|_\infty^p T \tag{7.3}$$

D'autre part :

$$\|u\|_\infty^{p-2} \leq 2^{(p-3)^+} T^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_p^{p-2} + 2^{(p-3)^+} T^{\frac{p-2}{2}} \|u'\|_2^{p-2} \tag{7.4}$$

où

$$(p-3)^+ = \begin{cases} p-3 & \text{si} \quad p \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad 2 \leq p < 3 \end{cases}$$

en effet

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{T}\|u\|_1 + \|u'\|_1$$

en appliquant l'inégalité de hölder à $\|u\|_1$ et à $\|u'\|_1$ on a

$$\|u\|_1 \leq T^{\frac{p-1}{p}} \|u\|_p \quad et \quad \|u'\|_1 \leq T^{\frac{1}{2}} \|u'\|_2$$

enfin si $2 \leq p < 3$

$$\|u\|_\infty^{p-2} \leq T^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_p^{p-2} + T^{\frac{p-2}{2}} \|u'\|_2^{p-2}$$

et si $p \geq 3$ la fonction x^{p-2} est convexe donc

$$\|u\|_\infty^{p-2} \leq 2^{p-3} T^{\frac{2-p}{p}} \|u\|_p^{p-2} + 2^{p-3} T^{\frac{p-2}{2}} \|u'\|_2^{p-2}.$$

En appliquant l'inégalité de Young on a

$$\|u\|_p^{p-2} \leq \frac{(p^2 - p + 3)c^2}{2^{(p-3)^+} p^2 (p-1) T^{\frac{2}{p}} \|f\|_\infty^2} \int_J |u|^p dt$$

$$+2^{(\frac{(p-2)(p-3)^+}{2}+1)}[\frac{p(p-1)(p-2)}{p^2-p+3}]^{\frac{p-2}{2}}\frac{T^{\frac{p-2}{p}}}{pc^{p-2}}\|f\|_\infty^{p-2} \tag{7.5}$$

en effet il suffit d'écrire

$$\forall\ \lambda>0\ ,\quad \lambda\|u\|_p^{p-2}\times\frac{1}{\lambda}\le\frac{\lambda^r}{r}\|u\|_p^{(p-2)r}+\frac{1}{r'\lambda^{r'}}$$

avec

$$r=\frac{p}{p-2}\quad;\quad r'=\frac{p}{2}$$

et de choisir $\lambda>0$ défini par

$$\frac{\lambda^r}{r}=\frac{(p^2-p+3)c^2}{2^{(p-3)^+}p^2(p-1)T^{\frac{2}{p}}\|f\|_\infty^2}$$

Donc d'aprés (7.1), (7.4) et (7.5) on a

$$\begin{aligned}(p-1)\|u\|_\infty^{p-2}\int_J u'^2dt\le\frac{p^2-p+3}{p^2}\int_J|u|^pdt\\ +2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p-4}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p\\ +2^{(p-3)^+}(p-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p\end{aligned} \tag{7.6}$$

d'où en remplaçant (7.3) et (7.6) dans (7.2) on a

$$\begin{aligned}\int_J(|u|^{2p}-|u|^p)dt\le&\frac{p^2+2}{p^2}\int_J|u|^pdt+p^{p-2}T\|f\|_\infty^p\\ &+2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p-4}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p\\ &+2^{(p-3)^+}(p-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p\end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}\int_J(|u|^{2p}-\frac{2}{p^2}|u|^p)dt\le&2\int_J|u|^pdt+p^{p-2}T\|f\|_\infty^p+2^{(p-3)^+}(p-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p\\ &+2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p-4}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Young on a

$$|u|^p\le\frac{p^2-p-1}{2p^2}|u|^{2p}+\frac{p^2}{2(p^2-p-1)}$$

en effet

$$|u|^p \leq \frac{{\lambda_1}^r}{r}|u|^{pr} + \frac{1}{r'{\lambda_1}^{r'}}$$

avec

$$r = r' = 2$$

et

$$\frac{{\lambda_1}^r}{r} = \frac{p^2-p-1}{2p^2}$$

par conséquent on a

$$\begin{aligned}\int_J (|u|^{2p} - \frac{2}{p^2}|u|^p)dt \leq & \frac{p^2-p-1}{p^2}\int_J |u|^{2p}dt + \frac{p^2}{(p^2-p-1)}T \\ & + p^{p-2}T\|f\|_\infty^p + 2^{(p-3)+}(p-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p \\ & + 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p-4}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\int_J (\frac{(p+1)}{p^2}|u|^{2p} - \frac{2}{p^2}|u|^p)dt \leq & \frac{p^2}{(p^2-p-1)}T + 2^{(p-3)^+}(p-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p \\ & + 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p-4}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p \\ & + p^{p-2}T\|f\|_\infty^p\end{aligned}$$

en mutilpliant cette inégalité par $(p+1)p^2$ on a

$$\begin{aligned}&(p+1)^2\int_J |u|^{2p}dt - 2(p+1)\int_J |u|^p dt \\ &\leq 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p \\ &+ 2^{(p-3)^+}p^2(p-1)(p+1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p + p^p(p+1)T\|f\|_\infty^p \\ &+ \frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)}T\end{aligned}$$

en ajoutant T on obtient

$$\begin{aligned}\|(p+1)|u|^p-1\|_2^2 \leq & 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p}\|f\|_\infty^p \\ & + 2^{(p-3)^+}p^2(p^2-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}\|f\|_\infty^p + p^p(p+1)T\|f\|_\infty^p \\ & + (\frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)}+1)T\end{aligned}$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned}\||u|^pu-u\|_\infty & \leq \|f\|_\infty + \|(|u|^pu-u)'\|_1 \\ & \leq \|f\|_\infty + \|(p+1)|u|^p-1\|_2\|u'\|_2 \\ & \leq \|f\|_\infty(1+\frac{\sqrt{T}}{c}\sqrt{K\|f\|_\infty^p + (\frac{p^4(p+1)}{(p^2-p-1)}+1)T})\end{aligned}$$

avec $K = 2^{(1+\frac{p}{2}(p-3)^+)}\frac{p^{\frac{p}{2}}(p-1)^{\frac{p}{2}}(p-2)^{\frac{p-2}{2}}(p+1)T}{(p^2-p+3)^{\frac{p-2}{2}}c^p} + 2^{(p-3)^+}p^2(p^2-1)\frac{T^{p-1}}{c^p}$
$+ p^p(p+1)T$

Pour prouver le théorème 2.5, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 7.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$,l'inégalité $||u|^pu-u| \leq \varepsilon$ implique*

$$\inf\{|u|, |1-u|, |1+u|\} \leq (\frac{p+1}{p})\varepsilon$$

Démonstration : i) Si $|u| < \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$ alors $1-|u|^p > \frac{p}{p+1}$ donc
$||u|^p-u| = |u||1-|u|^p| \leq \varepsilon \Longrightarrow \frac{p}{p+1}|u| \leq \varepsilon \Longrightarrow |u| \leq \frac{p+1}{p}\varepsilon$
ii)Si $|u| \geq \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$, alors $|u||1-|u|^p| = |u(1-u)||\frac{1-|u|^p}{1-u}| \geq \frac{p|1-u|}{(p+1)[(p+1)^{\frac{1}{p}}-1]}$ et donc

$$u \geq 1-\varepsilon\frac{(p+1)}{p}[(p+1)^{\frac{1}{p}}-1]$$

$$\Longrightarrow |1-|u|| \leq \varepsilon(\frac{p+1}{p})$$

d'où le résultat puisque

$$|1-|u|| = \inf\{|1-u|, |1+u|\}$$

Démonstration du théorème 2.5.
Sous l'hpothèse (2.10), D'après la proposition 7.1 et le lemme 7.2 , toute solution T- périodique u de (1.1) satisfait, pour tout t,

$$\inf\{|u(t)|, |1-u(t)|, |1+u(t)|\} \leq \inf\{(1+\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}}-1, (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}}-1\}$$

Puisque u est continue et les 3 intervalles fermés centrés en $0, 1, -1$ de rayon

$$\rho = \inf\{(1+\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1, (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1\}$$

sont disjoints, on a soit

$$\|u-1\|_\infty \leq \ \inf\{(1+\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1, (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1\}$$

auquel cas $u = \omega_+$, soit

$$\|u+1\|_\infty \leq \inf\{(1+\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1, (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1\}$$

auquel cas $u = \omega_-$, soit

$$\|u\|_\infty \leq \inf\{(1+\frac{c\sqrt{p}}{2(p+1)})^{\frac{1}{p}} - 1, (\frac{2p+1}{p+1})^{\frac{1}{p}} - 1\} < \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{p}}}$$

auquel cas $u = \omega_0$. $\diamond$

Références

[1] J.M. Alonso, J. Mawhin, R. Ortega, Bounded solutions of second order semilinear evolution equations and applications to the telegraph equation, J. Math. Pures Appl. 78 (1999), 49-63.

[2] L. Amerio, soluzioni quasi periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi periodici, o limitati, Ann. Mat. Pura. Appl. 39 (1955), 97-119.

[3] M. Biroli, sur les solutions bornées et presque périodiques des équations et inéquations d'évolution, Ann. Mat. Pura Appl. 93 (1972), 1-79.

[4] M.L. Cartwright & J.E. Littlewood, On non-linear differential equations of the second order, Ann. Math. 48 (1947), 472-494.

[5] S.N. Chow, J.K. Hale & J. Mallet-Paret, An example of bifurcation to homoclinic orbits, J.D.E. 37 (1980), 351-373.

[6] J.K. Hale & P.Z. Taboas, Interaction of damping and forcing in a second order evolution equation, Nonlinear analysis, T.M.A. 2, 1 (1978), 77-84.

[7] A. Haraux, *Nonlinear evolution equations : Global behavior of solutions*, Lecture Notes in Math. 841, Springer (1981)

[8] A. Haraux, *Systèmes dynamiques dissipatifs et applications*, R.M.A.**17**, P.G. Ciarlet et J.L. Lions (eds.), Masson, Paris, 1991.

[9] A. Haraux, On the double well Duffing equation with a small bounded forcing term, Rc. Accad. Naz. Sci. dei 40 (Memorie di Matematica) 122, 28, fasc.1 (2006).

[10] W. S. Loud, Periodic solutions of x"+cx' +g(x) = f(t), Mem. Amer. Math. Soc., 31, 1959, 1-57.

[11] J. Mawhin, R. Ortega and A.M. Robles-Perez, A maximun principle for bounded solutions of the telegraph equations and applications to nonlinear forcings, J. Math. Anal. Appl. 251 (2000), 695-709.

[12] F. C. Moon and P. J. Holmes, A magnetoelastic strange attractor, Journal of Sound and Vibration 65, 2 (1979), 275-296.