



N° D'ORDRE : E.C.L. 2004-19

ANNEE 2004

THESE

présentée devant

L'ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

(Arrêté du 30/03/1992)

Spécialité : Génie Electrique

Préparée au sein de

L'ECOLE DOCTORALE

ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE
DE LYON

par

Thierry TOLEDO

**MODELISATION DES ISOLATIONS AXISYMETRIQUES
BASEES SUR L'UTILISATION DES MATERIAUX SEMI-
CONDUCTEURS PAR COUPLAGE DES ELEMENTS FINIS
ET DES ELEMENTS DE FRONTIERE**

Soutenu le 30 septembre 2004 devant la commission d'examen

JURY :

P. DOMENS	Professeur – Université de Pau	Président
J.L. COULOMB	Professeur – INP-Grenoble	Rapporteur
J.A. VASCONCELOS	Professeur – UFMG (Brésil)	Rapporteur
L. KRÄHENBÜHL	Directeur de recherche CNRS - CEGELY	Examineur
Ph. AURIOL	Professeur – Ecole Centrale de Lyon	Examineur
F. BURET	Maître de conférence - Ecole Centrale de Lyon	Examineur

Je remercie les Professeurs de l'ECL, Alain Nicolas directeur du CEGELY, et Philippe Auriol, directeur du département EEA pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire. J'adresse tout particulièrement mes remerciements à Philippe Auriol pour la qualité de son encadrement administratif, me permettant ainsi de terminer ce travail dans les meilleures conditions.

J'exprime toute ma reconnaissance envers François Buret, Maître de Conférences de l'ECL, pour l'encadrement scientifique de ce travail. Ses vastes connaissances et la pertinence de ses conseils m'ont été d'un grand secours.

Une partie de ma thèse a été réalisée au sein du 'Centro de Pesquisas e Desenvolvimento em Engenharia Elétrica' de l'Université Fédérale du Minas Gerais (Brésil) sous la direction du Professeur João Antonio Vasconcelos. Je le remercie pour avoir accepté de m'encadrer durant mon séjour, ainsi que pour toute l'aide qu'il a pu m'offrir sur les méthodes numériques.

J'exprime ma gratitude envers Pierre Domens, Professeur de l'Université de Pau, qui en acceptant de présider le jury a prouvé une fois de plus la confiance et l'intérêt qu'il a toujours porté à mon travail.

Je remercie Jean-Louis Coulomb, Professeur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui m'a fait l'honneur de participer au jury et de rapporter mon travail.

J'adresse ma reconnaissance envers Laurent Krähenbühl pour son aide précieuse dans la compréhension de la méthode des éléments de frontière et pour avoir accepté de participer au jury.

Aussi, je n'oublie pas l'ensemble des chercheurs, techniciens, personnels administratifs, thésards et stagiaires des laboratoires de Lyon, de Belo Horizonte et de Pau, pour leur contribution de près ou de loin au bon déroulement de cette thèse.

Enfin, je remercie ma famille et mes amis, de France, d'Espagne et du Brésil qui ont toujours soutenu mes efforts.

Table des matières

Introduction	1
Chapitre I - L'isolation semi-conductrice en HT	3
Section 1 - L'isolation semi-conductrice en HT	4
1 Les contraintes dans l'isolation haute tension (HT)	4
1.1 Contraintes électriques des structures type support isolant	6
1.2 Contraintes électriques des structures type disjoncteur . .	9
1.3 Contraintes électriques des structures type traversée . . .	10
2 L'isolation semi-conductrice (SC)	12
2.1 Les polymères dans l'isolation	12
2.2 Propriétés diélectriques d'un polymère	13
2.3 Propriétés conductrices d'un polymère	14
3 Application des isolants SC en HT	17
3.1 Le câble à isolation synthétique	17
3.1.1 Les Polymères dans l'isolation des câbles [1] . . .	17
3.1.2 L'isolation des câbles à THT	19
3.1.3 La jonction pour câbles isolés	20
3.1.4 La terminaison pour câbles isolés	21
3.2 Autres applications de l'isolation SC	22
3.2.1 Isolation des fusibles HT [2]	22
3.2.2 Isolation des barres de machines en sortie [3] . . .	22
3.2.3 Isolation contre les effets de la pollution [4]	22
3.2.4 Câbles isolés pour la HT en courant continu . . .	24
4 Conclusion	24
Section 2 - Modélisation des matériaux diélectriques	25

1	Rappel d'Electromagnétisme	25
1.1	Champ électrostatique	25
1.2	Formulation en potentiel scalaire dans un diélectrique . . .	26
1.3	Conditions d'interface	27
1.4	Relation entre \vec{E} et \vec{B}	28
1.5	Les équations de l'électromagnétisme (Maxwell)	29
2	Modélisation des pertes dans les diélectriques	29
2.1	Pertes diélectriques de polarisation	31
2.1.1	Réponse temporelle	31
2.1.2	Réponse fréquentielle	32
2.1.3	Courant de conduction dans les diélectriques . . .	34
2.2	Equation des diélectriques faiblement conducteurs en régime électro-quasi-statique (EQS)	36
3	Modélisation des matériaux SC	38
3.1	Modèle unidimensionnel	39
3.1.1	Cas linéaire	41
3.1.2	Représentation par un circuit équivalent	41
3.1.3	Cas non linéaire	41
3.2	Modèles bidimensionnels	42
3.2.1	Modèle avec épaisseur du SC très faible (couche mince)	42
3.2.2	Modèle avec épaisseur du SC non négligeable . .	45
4	Conclusion	45
Chapitre II - Modélisation des SC par couplage FEM/BEM		47
Section 1 - Méthodes numériques employées dans le couplage		49
1	Formulation éléments finis pour la modélisation d'isolants SC	49
1.1	Formulation intégrale	49
1.1.1	Projection du Laplacien	49
1.1.2	Forme faible du Laplacien	50
1.1.3	Discrétisation	51
1.1.4	Approximation par éléments du deuxième ordre .	51
1.1.5	Discrétisation du Laplacien	53

1.2	Equation dans les isolants SC adaptée à la FEM	55
1.2.1	Conductivité volumique linéaire en régime harmonique	55
1.2.2	Conductivité volumique linéaire en régime temporel	57
1.2.3	Conductivité volumique non linéaire	59
2	Méthode des Eléments de Frontière adaptée au couplage	60
2.1	Méthode intégrale tirée de l'identité de Green	60
2.1.1	Identité de Green	60
2.1.2	Equation intégrale de frontière (EIF)	61
2.2	Formulation axisymétrique de l'EIF	62
2.3	Choix de la méthode de discrétisation	63
2.3.1	Frontière d'intégration	63
2.3.2	Discrétisation des équations intégrales de frontière	64
2.3.3	Assemblage des équations intégrales de frontière .	65
2.4	Cas des problèmes ouverts	65
3	Conclusion	66
	Section 2 - Les différentes étapes de la modélisation des SC	68
1	Couplage BEM/FEM	68
1.1	Technique du couplage	68
1.1.1	Equation du couplage	68
1.1.2	Forme de la matrice	71
1.2	Etude d'un cas particulier	72
1.3	Conclusion	74
2	Traitement de la non-linéarité	75
2.1	Schéma temporel	75
2.1.1	Intégration temporelle	75
2.1.2	Stabilité du schéma temporel	78
2.1.3	Précision du schéma	79
2.2	Modèle de conduction non-linéaire - Méthode du point fixe	80
2.3	Algorithme du schéma temporel	82
2.4	Résolution Matricielle	84
2.4.1	Méthodes de résolution itératives	84

2.4.2	Méthode de décomposition de domaine pour couplage BEM/FEM	84
2.5	Conclusion	85
3	Singularités géométriques dans les diélectriques conducteurs	86
3.1	Singularité géométrique dans les diélectriques parfaits	86
3.1.1	Deux diélectriques sur une électrode	87
3.1.2	Point de rencontre entre trois diélectriques	88
3.1.3	Autres types de points singuliers	90
	a) Angle sur une électrode en contact avec un seul diélectrique	90
	b) Angle entre deux diélectriques	91
3.2	Equation supplémentaire en présence d'un diélectrique conducteur	91
3.2.1	Approche en mode complexe	92
3.2.2	Estimation de la valeur propre en régime temporel	92
	a) Diélectrique parfait et diélectrique conducteur sur une électrode	93
	b) Diélectrique conducteur en contact avec deux diélectriques parfaits	94
3.2.3	Ecriture de l'équation supplémentaire	94
	a) Diélectrique parfait et diélectrique SC en contact avec une électrode	94
	b) Diélectrique SC en contact avec deux diélectriques parfaits	95
4	Conclusion	96
Chapitre III - Validation du code FEMBEM		97
	Section 1 - Validation analytique du couplage BEM/FEM	98
1	Validation en régime harmonique	98
1.1	Choix de la géométrie	98
1.2	Modèle analytique	99
1.3	Validation	100
1.4	Domaine de validité du couplage	102

2	Validation en régime temporel - Conductivité linéaire	104
2.1	Choix des conductivités pour la validation	104
2.2	Modèle analytique d'une réponse à une source de tension quelconque	105
2.2.1	Condensateur cylindrique	106
2.2.2	Condensateur sphérique	106
2.3	Réponse à un échelon de tension	106
2.4	Réponse à une onde de choc	108
2.5	Réponse à une tension sinusoïdale	109
3	Conclusion	109
Section 2 - Influence de l'estimation du champ normal en frontière du SC		111
1	Champ normal et conduction non-linéaire	111
1.1	Cas du condensateur cylindrique	112
1.2	Comparaison des deux calculs de la conductivité en fron- tière du SC	112
1.2.1	Conductivité en frontière via le champ normal issu de BEM	112
1.2.2	Conductivité en frontière via l'approximation du champ normal par éléments finis	113
2	Formulation éléments finis en champ normal (FEMNOR)	115
2.1	Modification de la FEM	115
2.1.1	FEM classique: FEMCLA	115
2.1.2	FEM utilisant le champ normal comme inconnue: FEMNOR	116
2.2	Précision de FEMNOR	117
2.2.1	Comparaison de FEMNOR avec FEMCLA	117
2.2.2	Comparaison de FEMNOR avec FEMBEM	118
3	Conclusion	118
Section 3 - Etude de géométries complexes		120
1	Singularités en présence d'un diélectrique conducteur	120
1.1	Modèle de couche mince linéaire	121
1.1.1	Modèle 1: méthode des différences finies (FD)	121

	a) Régime harmonique	123
	b) Régime temporel	123
1.1.2	Modèle 1 modifié: modification du modèle des différences finies (FD)	124
1.1.3	Modèle 2: Modélisation de la couche par FEMNOR	124
1.2	Validation de la prise en compte des singularités géométriques pour la géométrie couche mince par la FEMBEM	126
1.2.1	Equations supplémentaires	126
1.2.2	Régime harmonique	130
1.2.3	Régime temporel	130
2	Modélisation d'une extrémité de câble	133
2.1	Extrémité de câble choisie	133
2.2	Simulations numériques	133
2.2.1	Simulation avec une conductivité linéaire	135
2.2.2	Simulation avec une conductivité non-linéaire de type exponentiel	137
2.3	Influence de la forme de l'inclusion SC	139
3	Conclusion	139
	Conclusion	141
	Annexes	143
	Annexe 1 - Choc foudre et choc manœuvre	144
1	Définition	144
2	Choc de foudre normalisé	144
3	Choc de manœuvre normalisé	144
	Annexe 2 - Equations intégrales de frontière	146
1	Fonction de Green en $3D$	146
2	Fonction de Green en $2D$	146
2.1	Cas $2D$ plan	147
2.2	Cas axisymétrique	147
3	Angle solide	148
4	Singularité d'intégration	149

Annexe 3 - Laplacien en coordonnées cylindriques	150
1 Fonctions harmoniques	150
2 Repère cylindrique	150
3 Solution de Laplace en coordonnées cylindriques	150
Annexe 4 - Modèle de couche mince par différences finies	152
1 Modèle de couche mince simple	152
1.1 Equations en régime harmonique	152
1.2 Equations en régime temporel	152
2 Modèle modifié de couche mince	153
2.1 Régime harmonique	153
2.2 Régime temporel	153
Notations	161

Introduction

L'isolation haute tension (HT) à base de matériaux semi-conducteurs (SC) est devenue une technique très répandue pour la réduction des fortes contraintes en champ électrique. L'évolution des performances électriques des matériaux a permis de réduire les dimensions en augmentant du même coup les contraintes en champs. Des nouvelles technologies comme le câble HT à isolation synthétique n'ont pu être possibles qu'en association avec des matériaux SC comme le carbure de silicium (SiC) ou l'oxyde de zinc (ZnO).

Il existe une grande quantité de produits SC conçus pour l'isolation HT. Les non-linéarités rencontrées sont très variées, et leur utilisation reste assez empirique.

La modélisation du comportement de ces matériaux à l'aide de techniques numériques trouve donc un intérêt grandissant dans le domaine industriel. Seulement le double comportement conducteur/isolant, le caractère non-linéaire de la conductivité et de la permittivité, ainsi qu'une anisotropie de ces grandeurs rendent le travail de modélisation très délicat.

Ce travail de thèse présente une méthode de prise en compte du comportement non-linéaire isotrope de la conductivité volumique des matériaux SC à l'aide d'un couplage de la méthode des éléments de frontière (BEM) avec la méthode des éléments finis (FEM).

La BEM permet d'obtenir une bonne précision sur le calcul du champ électrique aux frontières des diélectriques, ainsi que de prendre facilement en compte les conditions de champ électrique nul à l'infini. Ces avantages sont forts appréciés dans le dimensionnement d'isolateurs où la contrainte principale est le champ électrique et où les systèmes sont généralement placés en champ ouvert. La méthode possède par contre l'inconvénient de ne pas pouvoir traiter facilement les comportements non-linéaires des matériaux. C'est pourquoi il a semblé intéressant de coupler cette méthode avec la FEM qui est très bien

adaptée à la prise en compte des propriétés non-linéaires. Une formulation en éléments finis de la région SC a donc été développée en vue de son couplage avec la BEM qui modélise le reste du système. Le couplage a enfin été intégré à un schéma temporel permettant ainsi la prise en compte du caractère non-linéaire de la conductivité.

Dans un premier Chapitre, nous présentons les différentes applications des matériaux SC à travers les contraintes rencontrées dans le matériel isolant. Nous terminons ce chapitre en dressant un bilan des différents modèles déjà existants qui permettent de simuler les matériaux SC. Cela permettra de situer notre modèle parmi ceux-ci et de juger de sa pertinence.

Le deuxième Chapitre contient la présentation du couplage avec la formulation de la BEM et de la FEM. Nous présenterons également le schéma temporel employé pour le traitement de la non-linéarité. Nous présenterons également le problème des singularités géométriques en électrostatique et les conséquences de l'introduction d'une région SC dans leur voisinage.

Le troisième et dernier Chapitre exposera les différentes simulations réalisées sur le code en régime harmonique et temporel. Quelques résultats sur la prise en compte des singularités géométriques en présence d'un SC ainsi que l'influence de la précision du champ normal sur la conductivité sont également présentés. Enfin nous avons modélisé une extrémité de câble composée d'une inclusion SC soumise à une perturbation de type choc de foudre.

Chapitre I - L'isolation semi-conductrice en HT

En ingénierie, on peut juger de la pertinence d'un modèle en estimant le domaine de validité, la précision des résultats ainsi que la rapidité de calcul. Dans le cas de l'emploi des matériaux semi-conducteurs pour l'isolation HT, on peut constater que leur modélisation reste généralement limitée par les nombreuses hypothèses restrictives appliquées. La difficulté de la modélisation vient du fait que ces matériaux sont souvent dépendants du champ électrique et de la température, qu'ils sont anisotropes, et peuvent être employés sous forme de couche mince.

Dans ce premier chapitre, après avoir présenté l'aspect technique de l'isolation SC, nous présenterons les modélisations de matériaux SC déjà existantes ainsi que les hypothèses limitant celles-ci.

Ceci nous permettra de justifier le choix de notre modèle.

Section 1 - L'isolation semi-conductrice en HT

La haute tension permet entre autre de diminuer les pertes lors du transport de l'énergie électrique sur de grandes distances. En France par exemple, le réseau de transport de l'électricité fonctionne sous 400 *kV* et 220 *kV*.

L'énergie électrique ne pouvant pas être stockée, ce réseau est une interface en permanente interaction avec les consommateurs et producteurs d'électricité afin d'accorder l'offre et la demande. Le bon fonctionnement de ces réseaux est de plus en plus délicat et dépend de la fiabilité des matériels de poste.

Le matériel employé pour acheminer l'énergie électrique est soumis à de très hautes tensions, entraînant des contraintes en champ d'autant plus fortes que leurs dimensions sont optimisées. La qualité de l'isolation sera donc un facteur déterminant pour le bon fonctionnement de tout ce matériel. Celui-ci doit pouvoir supporter les contraintes en champ électrique de fonctionnement pouvant dépasser la dizaine de *kV/mm* ainsi que des perturbations de dysfonctionnement durant un bref instant, comme un court-circuit ou un coup de foudre.

Dans cette partie, nous énumérerons les principales structures isolantes rencontrées dans le matériel de haute tension (HT). Chacune de ces structures est soumise à une contrainte électrique caractéristique entraînant la conception de technique spécifique à chaque type. Ceci nous permettra de présenter la technique de l'isolation semi-conductrice (SC) utilisée dans la réduction des contraintes rencontrées dans les structures de type traversée.

1 Les contraintes dans l'isolation haute tension (HT)

Compte tenu des conditions rigoureuses de fonctionnement des isolants HT, les matériaux employés pour son conditionnement doivent supporter diverses contraintes autres qu'électriques. Pour cela les concepteurs ont à leur disposition une grande variété de matériaux diélectriques, naturels ou synthétiques. On les classe généralement suivant leur origine organique ou minérale, suivant que l'on les rencontre sous la forme solide, liquide ou gazeuse. On peut également combiner plusieurs isolants différents et obtenir une isolation composite, technique de plus en plus courante.

Dans les transformateurs de puissance, où les températures de fonctionnement sont assez élevées, l'huile minérale est très appréciée pour sa bonne capacité thermique. Les

diélectriques solides sont généralement employés dans les isolations où règnent de fortes contraintes mécaniques, comme pour les supports de câble de transport d'électricité.

Le Tableau 1 inspiré de B. Pinel et al. [5], permet de se donner une idée des contraintes principales rencontrées sur divers matériels de poste.

Ce seront bien souvent les contraintes autres qu'électriques qui orienteront, voire même

Type de matériel	Contraintes principales
Condensateur de puissance	Electrique - Thermique
Câble d'énergie	Electrique - Thermique - Humidité
Isolateur de ligne	Mécanique - Climatique - Humidité - Electrique
Transformateur de puissance	Electrique - Thermique - Humidité
Extrémité de câble	Electrique - Climatique - Thermique
Câble isolé aérien	Climatique - Mécanique- Humidité

Tableau 1 : Classification des principales contraintes auquel est soumis le matériel de poste.

qui imposeront le choix du type de matériel d'isolation. Etant données les fortes puissances employées en haute tension, l'effet Joule, les pertes magnétiques dans les tôles ou bien encore les pertes diélectriques dans l'isolation ($\tan \delta$) font de la contrainte thermique un paramètre incontournable dans le dimensionnement de l'isolation.

En présence d'humidité ou de particules polluantes sur la surface d'un isolateur, les phénomènes d'arborescence électrique et électrochimique peuvent être initiés à un niveau de champ électrique inférieur.

Ces dernières années, avec l'approche de la fin de vie d'un grand nombre d'appareillage, la question de l'impact de ces futurs déchets sur l'environnement commence à influencer le choix des matériaux employés. Le SF_6 par exemple, diélectrique gazeux de prédilection en isolation, est employé de plus en plus modérément en raison de ses effets nocifs sur la couche d'ozone. Les appareils les plus directement concernés par cette contrainte environnementale sont les transformateurs à huile minérale et les disjoncteurs au SF_6 .

Suivant la structure isolante du matériel de poste, on rencontre différents types de contraintes électriques. Elles peuvent être classées en trois grandes catégories suivant la structure de l'isolation: isolant support, disjoncteur ou traversée. Pour chacune de ces catégories existe une technique d'isolation particulière.

Par la suite, on s'attardera sur la troisième contrainte car elle peut être réduite par l'emploi

de techniques à base de matériau isolant SC.

1.1 Contraintes électriques des structures type support isolant

Les pièces soumises à un potentiel élevé sont généralement tenues à distance des masses via des supports solides. L'isolant doit donc satisfaire aux contraintes mécaniques. C'est à proximité de l'électrode HT (Figure 1) que l'on rencontre la contrainte électrique la plus importante. C'est donc l'interface isolateur/milieu environnant qui dicte la qualité de l'isolation électrique. La technique efficace consiste à rendre cette surface la plus grande possible [6] et à protéger son état contre les agressions des particules polluantes (poussière, humidité, embruns ...).

L'exemple le plus courant, est la chaîne d'isolateur (Figure 2) qui relie les câbles de transport électrique au pylône. C'est un empilement d'assiettes en verre dont les extrémités sont soudées à une pièce métallique par une jonction cimentée, lui conférant une excellente tenue à la traction.

Lorsque l'espace le permet, le diélectrique entourant l'isolateur est de l'air. Dans des espaces confinés, comme dans un transformateur, l'isolateur peut baigner dans de l'huile. Des mélanges de gaz ayant de meilleures propriétés diélectriques que l'air peuvent aussi être employés (SF_6).

La principale propriété de ce type d'isolant est qu'il doit être inerte par rapport au milieu dans lequel il est placé afin d'éviter les réactions de surface et l'accumulation de charges pouvant diminuer sa tenue diélectrique. Les matériaux alors les mieux adaptés sont le verre et la porcelaine, mais ils possèdent l'inconvénient d'être lourds et fragiles.

Avec le développement des matériaux polymères, on utilise de plus en plus le polyéthylène pour ses bonnes propriétés isolantes et sa légèreté. Pour compenser sa mauvaise résistance mécanique, il peut être associé à une céramique (Matériaux composites [7]).

La rigidité diélectrique d'un isolant étant dépendante de l'état de surface, les performances d'isolation seront sensibles aux dépôts dus à la pollution atmosphérique ou bien à l'humidité. Les dépôts de poussières polluantes ou de vapeur d'eau peuvent provoquer un renforcement local du champ électrique créant une ionisation de l'air. À long terme, cette ionisation peut créer un dépôt conducteur en surface de l'isolant, ce qui a pour conséquence de réduire sa rigidité diélectrique surfacique [8].

Une solution préconisée pour éviter la formation de ces dépôts conducteurs, est déposer

sur la surface de l'isolant une couche de matériau semi-conducteur (isolant devenant conducteur en présence d'un fort champ électrique). Le déplacement de charge induit par le renforcement local de champ électrique se réalisera préférentiellement dans la couche plutôt que dans l'air.

Nous verrons dans la suite en détail ces matériaux et leurs diverses applications.

Ainsi pour réduire les contraintes rencontrées dans les structures de type isolateur support, toute l'attention est portée sur l'interface support/milieu environnant. Afin de réduire les contraintes électriques, l'isolant doit posséder une grande surface inerte et propre.

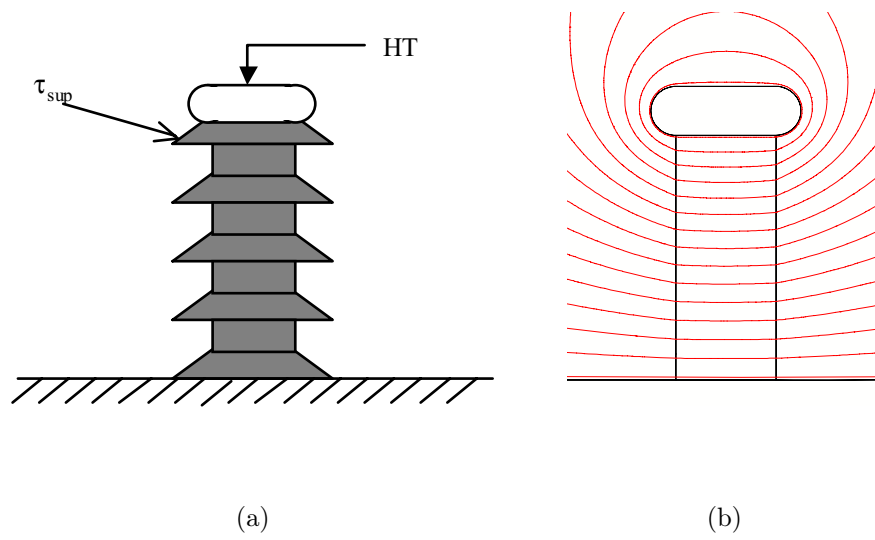


Figure 1 : Contrainte (τ_{sup}) dans les structures isolantes de type support isolant.

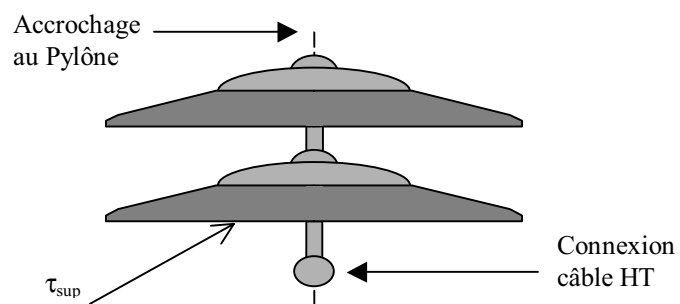


Figure 2 : Contrainte de type support isolant sur une chaîne d'isolateurs en verre.

1.2 Contraintes électriques des structures type disjoncteur

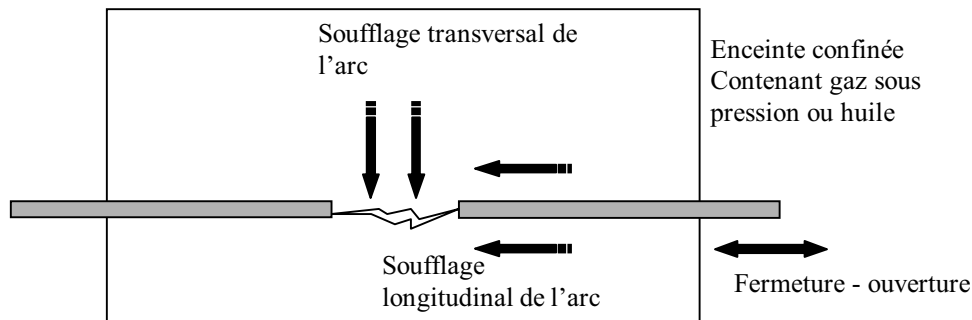


Figure 3 : Principe d'extinction d'un arc électrique dans un disjoncteur lors de la fermeture ou de l'ouverture.

Dans le réseau électrique, le disjoncteur constitue le premier rempart de sécurité contre un défaut de courant. Il est donc essentiel de garantir sa fiabilité. La difficulté vient notamment du fait que ce matériel peut rester une longue période en inactivité (fonctionnement normal). Techniquement, le disjoncteur doit être capable d'interrompre ou d'établir de forts courants de fonctionnement, de surcharge ou de court-circuit.

La contrainte électrique principale se trouve lorsque les deux électrodes sont proches l'une de l'autre. A la coupure cela se traduit par un problème d'arc électrique, et à la fermeture on observe un problème de surtension de manoeuvres (onde de choc).

Le disjoncteur constitue donc un matériel assez perfectionné pouvant être sollicité un grand nombre de fois ou pas du tout, et qui est généralement commandé à distance.

Le facteur influençant les capacités de coupure et de fermeture est le milieu dans lequel baigne le système de connexion. Afin de réduire ces surtensions, qui endommagent à la longue le disjoncteur et se propagent sur tout le réseau, on emploie un milieu possédant d'excellentes propriétés isolantes. Les milieux couramment employés dans ces appareils sont l'huile minérale, l'air comprimé, l'hexafluorure de soufre (SF_6) ou le vide.

La connexion ou la déconnexion du circuit est faite en déplaçant une électrode. L'extinction de l'arc se fait alors par auto-soufflage ou soufflage forcé de l'arc sauf pour les disjoncteurs sous vide (Figure 3). De l'efficacité de ce déplacement dépendra la fiabilité du système. Il est donc essentiel de diminuer ses dimensions. Cela permet en plus d'utiliser moins de diélectrique dans la chambre de coupure.

Le confinement des disjoncteurs entraîne un nouveau type de contrainte électrique. Le renforcement du champ lors du rapprochement des deux électrodes peut se répercuter sur

le bord extérieur de l'appareillage (Figure 4). La contrainte τ_{dis} s'applique en surface de l'isolant comme pour la contrainte de la structure support isolant, à la différence qu'ici les champs maximaux sont situés à mi-chemin entre les deux électrodes.

1.3 Contraintes électriques des structures type traversée

La dernière grande catégorie de contrainte que l'on peut citer en HT, est celle rencontrée dans les structures de type traversée. Elle nous intéresse tout particulièrement puisque la technique la plus courante pour la réduire est l'emploi de matériaux isolants semi-conducteurs (SC).

Les traversées sont des isolants solides en céramique le plus souvent, qui permettent le passage d'un conducteur à la haute tension à travers une électrode reliée à la masse.

Lorsqu'un conducteur HT change de milieu isolant ou bien passe à proximité d'une structure à la masse, il y a un renforcement de champ responsable d'un effet couronne qui peut à la longue endommager les diélectriques. On rencontre cette contrainte par exemple dans la zone de jonction d'une traversée avec son support métallique (Figure 5).

Afin de réduire la valeur du champ électrique au voisinage des points triples, il faut linéariser la répartition du potentiel. Il y a deux techniques bien distinctes pour y parvenir: soit par effet capacitif, soit par effet de conduction électrique.

On obtient en pratique un effet capacitif en plaçant des plaques métalliques en parallèle dans l'isolation. Cette technique étant assez coûteuse, on emploie plutôt la méthode 'résistive' qui consiste à rajouter un matériau faiblement conducteur en surface ou à l'intérieur de l'isolant.

Les propriétés conductrices de ces matériaux peuvent dépendre de l'intensité du champ électrique (isolants semi-conducteurs).

C'est généralement un diélectrique dans lequel on a injecté des particules conductrices. On les trouve sous forme de peinture ou de mastic, afin d'en faciliter l'application. On dépose le produit généralement sur la surface de l'isolant où a lieu le renforcement de champ. En devenant conducteur, l'isolant SC est censé écouler les charges électriques susceptibles de s'accumuler aux environs de la contrainte qui endommagent l'isolation à long terme.

Malgré la grande diversité de ces produits, leur emploi est resté empirique. Il semble alors intéressant de pouvoir modéliser ce type de matériau.

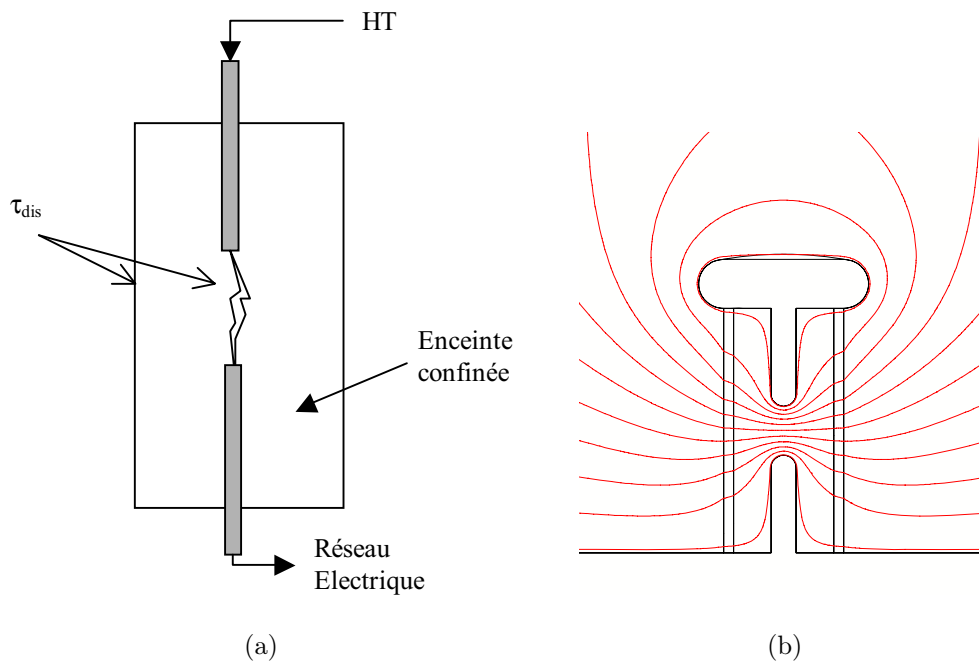


Figure 4 : Contrainte en champ électrique (τ_{dis}) dans un disjoncteur.

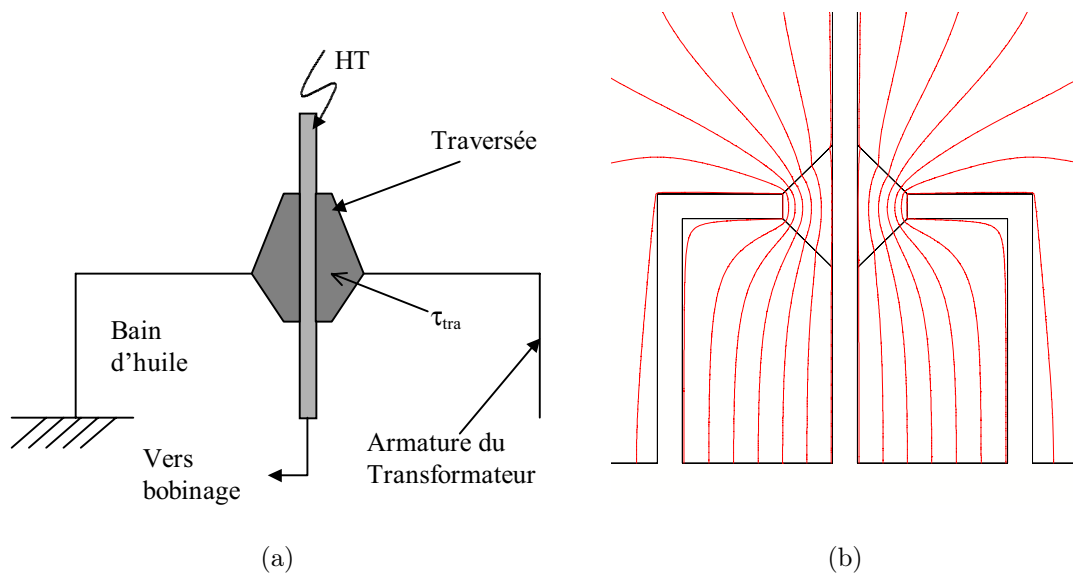


Figure 5 : Contrainte (τ_{tra}) dans une structure de type traversée - Sortie de transformateur HT.

2 L'isolation semi-conductrice (SC)

Il est reconnu depuis plusieurs décennies qu'un matériau conducteur possédant une conductivité qui dépend de l'intensité du champ électrique permet une homogénéisation correcte de la répartition du potentiel. Particulièrement ([9] et [10]) lorsque la conductivité varie exponentiellement en fonction du champ (1), i.e. qu'il y a une forte non-linéarité des propriétés conductrices du matériau.

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta|\vec{E}|) \quad (1)$$

On a donc commencé par employer des polymères chargés de grains d'un matériel conducteur, (polymère conducteur extrinsèque) qui servaient habituellement à l'élimination de l'électricité statique dans les emballages de composants électroniques, d'explosifs ou bien pour la conception de matériel chauffant auto-régulant. Grâce à leur simplicité et leur bon comportement mécanique, ils se sont vite imposés dans l'isolation SC haute tension. Bien qu'il ne soit pas nécessaire de connaître la physique de ces matériaux pour les modéliser en électrotechnique, nous rappellerons tout même les phénomènes de conduction dans les polymères. Ensuite nous présenterons diverses applications des SC en HT, en nous attardant sur le cas du câble de transport d'énergie à isolation synthétique où la technique à isolation SC est devenue incontournable.

2.1 Les polymères dans l'isolation

La grande diversité des polymères ainsi que leurs bonnes propriétés diélectriques, mécaniques et thermiques en font un matériel de choix dans l'isolation HT. A partir de 1970 par exemple, les diélectriques en polypropylène remplacent le papier imprégné d'huile minérale dans les condensateurs haute tension [5]. Ce changement de technologie a permis de passer d'un gradient de service de 15 kV/mm à un gradient de 40 kV/mm, et de diviser par trois les pertes énergétiques. La maîtrise du polyéthylène a permis aussi de remplacer cette même technique d'isolation dans les câbles de puissance. Actuellement, l'huile polychlorobiphényle (PCB) est le meilleur matériel d'isolation des transformateurs de puissance. Malheureusement, sa toxicité supposée en cas d'incendie rend délicate son utilisation dans les transformateurs de distribution placés à proximité des zones habitables. Après l'échec du *retrofilling* qui consistait à remplacer le PCB par une huile silicone, les recherches se sont portées sur le développement d'isolants solides ignifugés en injectant

des charges minérales dans une résine thermodurcissable (résine époxyde).

Le développement de matériaux composites sous différentes formes (substrat, film, isolant) a été permis grâce à l'excellente stabilité thermique obtenue par les polymères. Les propriétés mécaniques sont assurées par une résine époxyde renforcée par des fibres de verre [7] et le revêtement isolant est en silicone.

Il existe actuellement deux grandes familles de polymères thermostables. Il y a les thermoplastiques, souples, permettant une utilisation dans des conditions sévères. Et il y a les thermodurcissables, rigides, pouvant supporter des températures très élevées [11].

2.2 Propriétés diélectriques d'un polymère

Comme tout diélectrique, les polymères possèdent plusieurs modes de polarisation. Aux basses fréquences industrielles, seule la polarisation électronique a un rôle déterminant. En faisant varier la fréquence jusqu'au mégahertz, on peut tracer le diagramme de Cole et Cole qui met en évidence un mécanisme de relaxation propre aux diélectriques (Figure 6).

Aux températures d'utilisation, les pertes diélectriques caractérisées par la tangente de

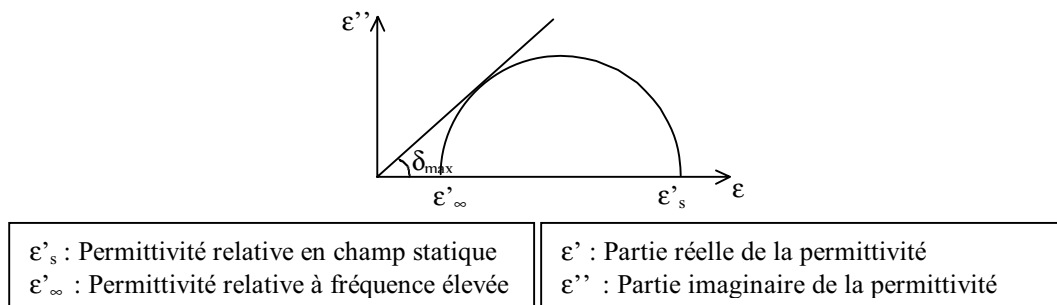


Figure 6 : Diagramme de Cole et Cole.

la phase δ de la permittivité complexe sont assez faibles, de l'ordre de 10^{-3} . Les polymères apolaires (polyéthylène, polypropylène) sont de très bon isolants. Dans le Tableau 2 est définie leur résistivité transversale [11].

Plusieurs facteurs sont susceptibles d'influencer la résistivité transversale. Parmi eux, il y a la température qui est liée à la résistivité par la loi d'Arrhénius (2).

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{W}{kT}\right) \quad (2)$$

W (J/mol) étant l'énergie d'activation, ρ_0 ($\Omega.cm$) la résistivité aux hautes températures, K ($8,314 J/^\circ K.mol$) la constante des gaz parfaits et T ($^\circ K$) la température thermodynamique. Pour le polyéthylène par exemple, l'énergie d'activation est de $125 kJ/mol$.

Polymères	Résistivité transversale ($\Omega \cdot cm$)
Poly tétrafluoréthylène	$> 10^{18}$
Polyéthylène	$10^{17} - 10^{19}$
Polypropylène	$10^{15} - 10^{17}$
Polystyrène	$10^{17} - 10^{21}$
Polyuréthane	10^{11}
Silicone	$10^{14} - 10^{15}$
Epoxy	$10^{12} - 10^{15}$

Tableau 2 : Résistivité transversale de quelques polymères isolants.

L'humidité est également un facteur déterminant pour la qualité de l'isolation, elle influence notamment la résistivité surfacique des polymères solides. Enfin, la résistivité peut subir de grandes variations lorsque le polymère contient des impuretés ou des additifs.

Les polymères employés pour l'isolation ont une résistivité suffisamment élevée pour être considérés comme de bons diélectriques, mais en modifiant suffisamment leur constitution on peut obtenir un matériel faiblement conducteur, voir bon conducteur.

2.3 Propriétés conductrices d'un polymère

Il existe deux grandes familles de polymères conducteurs.

- les conducteurs extrinsèques, constitués d'un polymère chargé de particules d'un matériau conducteur,
- les conducteurs intrinsèques qui sont des conducteurs ioniques.

Les conducteurs intrinsèques ont été mis au point il y a une vingtaine d'années, et ont trouvé une application dans les domaines de l'électronique ou pour les générateurs électrochimiques. Des polymères subissent un traitement thermique, puis par un dopage oxydant ou réducteur il est possible de faire varier la conductivité. Ces matériaux souffrent encore de problèmes de stabilité, mais ils seront destinés à remplacer tôt ou tard un grand nombre de matériaux du génie électrique, notamment les isolants SC [12].

Les conducteurs extrinsèques, sont utilisés depuis plus de cinquante ans, et sont largement employés en génie électrique pour l'écoulement des charges. Le polymère sert de matrice dans laquelle sont dispersées des particules conductrices. Suivant la concentration de ces

particules, on parvient à faire chuter considérablement la résistivité du polymère. En se basant sur le modèle de Bruggeman qui décrit la permittivité d'un milieu composite, Landauer [12] définit la conductivité d'un matériau composite comme étant:

$$\sigma = \frac{1}{4}(3x_c - 1) \sigma_c + (3x_p - 1) \sigma_p + \left[((3x_c - 1) \sigma_c + (3x_p - 1) \sigma_p)^2 + 8 \sigma_p \sigma_c \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

avec x_p et x_c étant respectivement la concentration volumique du polymère et de la charge. σ_p et σ_c sont les conductivités volumiques du polymère et de la charge.

En considérant le polymère comme étant un diélectrique parfait ($\sigma_p = 0 S/m$), on obtient le cas particulier de (3):

$$\sigma = \frac{1}{2}(3x_c - 1) \sigma_c \quad (4)$$

Ceci met en évidence un seuil, $x_c = 1/3$, pour lequel le composite devient conducteur.

Le seuil d'apparition de la conductivité peut aussi s'expliquer grâce au phénomène de percolation. Ce modèle un peu plus précis permet d'expliquer également le phénomène de conduction en milieu dispersé.

Il prend en compte le caractère aléatoire de la répartition des particules conductrices. Lorsque la concentration de ces particules atteint le niveau de percolation, il existe suffisamment de particules pour créer un chemin conducteur à travers la matrice. La résistivité décroît alors considérablement. La Figure 7 montre un exemple de l'évolution de la résistivité volumique en fonction du pourcentage de particules conductrices dans le polymère. Des exemples plus concrets sont fournis par Dubois dans les techniques de l'ingénieur [13]. Au seuil de percolation, l'échange d'électrons entre les grains, (i.e.

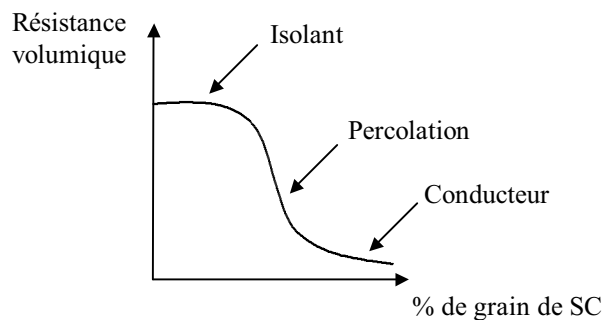


Figure 7 : Modèle du seuil de percolation obtenu à champ forcé - Suivant le pourcentage de grain de SC, le matériau composite a soit un comportement isolant, soit comportement conducteur.

la conduction électrique) peut avoir lieu par effet tunnel. Lorsque le champ électrique est suffisamment fort, la bande de conduction des atomes en périphérie du grain baisse

en-dessous du niveau de la bande de valence, et il se peut qu'un électron soit émis à un grain voisin, et ainsi de suite. Ce phénomène d'avalanche est à l'origine du caractère non linéaire de la conductivité.

Toujours d'après J.C. Dubois [12], les meilleures conductivités sont obtenues avec des particules conductrices en forme de fibre ou de paillette. L'ordre de grandeur des grains peut varier généralement de la dizaine de micromètre à la centaine ($10 - 100 \mu m$). La résistivité sera plus faible avec l'augmentation de la taille des grains.

Grâce à la grande diversité des polymères que permet cette technique, on rencontre les isolants semi-conducteurs sous différentes formes comme des films, des blocs ou des peintures, ce qui facilite leur emploi.

Les charges couramment employées sont à base de Carbone (C). On peut aussi utiliser des matériaux semi-conducteurs comme l'oxyde de Zinc (ZnO) ou le Carbure de Silicium (SiC).

Le Carbone [3] est généralement utilisé pour l'isolation des câbles haute tension. Il a la particularité de s'agglomérer sous forme de filaments favorisant la semi-conductivité.

L'oxyde de Zinc (ZnO) est un matériau intéressant car, suivant la concentration des grains dans le polymère, il présente un comportement différent.

- Lorsque la concentration est inférieure à 10 %, le large espacement entre les grains limite la conduction et confère au matériau des propriétés isolantes.
- Aux alentours d'une concentration de 14 %, le matériau possède des propriétés semi-conductrices sous un fort champ électrique (100 kV/cm).
- Au-delà de 30 %, le comportement est similaire à une varistance, à partir d'un seuil limite de champ électrique la conduction augmente brutalement, faisant passer le matériau d'un état de bon isolant à bon conducteur.

Le carbure de Silicium (SiC) est aussi très utilisé. Il est bon marché et de plus les propriétés intéressantes apparaissent pour des champs électriques de l'ordre du kV/cm , ordre de grandeur des contraintes en HT. Les différents types de SiC employés sont répertoriés dans le Tableau 3.

Nom	Dopage	Couleur
Extra	Al, type-p	Noir
Normal	Non	Gris
Spécial	N, type-n	Vert

Tableau 3 : Différents dopages des Carbures de Silicium employés dans la fabrication des matériaux semi-conducteurs isolants.

3 Application des isolants SC en HT

L'utilisation d'un matériel de poste à chaque fois plus confiné a entraîné l'apparition de contraintes en champ toujours plus importantes. Les matériaux isolants SC se sont alors avérés très utiles pour réduire les contraintes de certaines parties de ces dispositifs. Nous présenterons brièvement quelques applications de ces matériaux, et nous verrons qu'ils ont été associés aux techniques d'isolation existantes afin d'améliorer ces dernières.

Une attention particulière sera portée aux câbles de puissance à isolation synthétique, car contrairement aux autres applications des matériaux SC, cette technologie n'a été possible qu'en étroite association avec les SC.

3.1 Le câble à isolation synthétique

La technique d'isolation des câbles de puissance à base de papier imprégné d'huile sous pression, a permis à partir des années soixante dix de transporter de l'électricité sous très haute tension (THT). Cependant des inconvénients propres au matériel employé, comme le coût d'entretien et de surveillance de ces lignes, a toujours freiné son utilisation à grande échelle. Les progrès dans la fabrication de polymères, pouvant supporter des champs électriques intenses associés à une méthode d'extrusion de câbles par une combinaison de polymère et d'écrans SC, a permis de remplacer définitivement le procédé à papier imprégné. Des accessoires de connexion (jonctions et terminaisons de câble) à base d'élastomère de synthèse et de matériaux SC ont également été développés [14].

3.1.1 Les Polymères dans l'isolation des câbles [1]

La plupart des isolations de câbles sont à base de polyéthylène (PE). Il possède une faible permittivité relative (≈ 2 à 3) limitant ainsi le courant de déplacement. Les pertes diélectriques sont faibles ($\tan \delta$ faible), il a une bonne tenue diélectrique, et le procédé de

fabrication et d'extrusion est bien contrôlé.

Au niveau macro-moléculaire, les chaînes de polyéthylène peuvent s'associer sous deux structures différentes (Figure 8). Une structure cristalline correspondant à l'alignement des chaînes moléculaires qui lui donne les propriétés de perméabilité et de résistance mécanique, et une structure amorphe correspondant aux chaînes désordonnées. Cette dernière, bien qu'étant sensible aux impuretés, permet la manipulation du matériau lors de l'opération d'extrusion. Afin d'éviter la décomposition du polyéthylène dans l'extrudeuse, on rajoute des antioxydants. Pour conférer à l'isolant une meilleure résistance thermique,

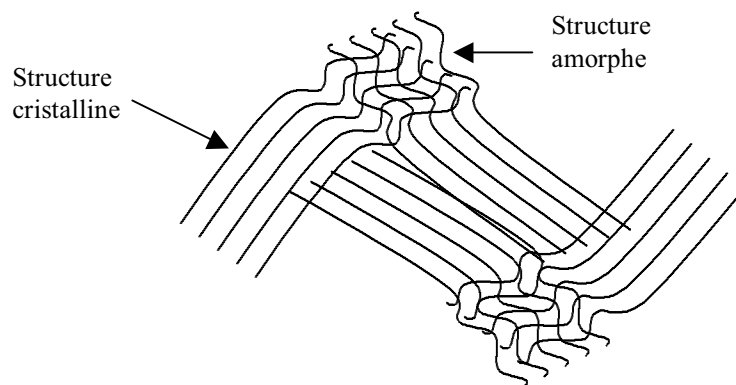


Figure 8 : Les deux structures macro-moléculaires du polyéthylène.

il subit une opération de réticulation (création de liaisons supplémentaires entre les chaînes moléculaires). Des agents à base de 'péroxyde' sont alors placés dans la partie amorphe du polymère. Une fois l'extrusion réalisée, le câble est passé dans un tube chauffant provoquant la réticulation. On obtient ainsi le polyéthylène réticulé (XLPE).

D'autres additifs peuvent ensuite être ajoutés afin de réduire par exemple les effets d'arborescence causés en surface par la combinaison de l'eau et du champ électrique.

Au final on aboutit à une isolation possédant les propriétés thermiques, mécaniques et électriques permettant l'isolation en milieu confiné (sous-terrain ou sous-marin).

Une autre isolation peut être employée dans les câbles HT. C'est un copolymère à base de polyéthylène et de propylène (EP). Ne possédant pas de phase cristalline, il est caoutchouteux. Il a donc besoin d'être renforcé par ajout de charges dans sa matrice. En plus des antioxydants classiques pour lutter contre les effets du temps, on y rajoute de l'oxyde de zinc. Il peut être également réticulé (EPR), ce qui améliore ses propriétés thermiques.

Grâce à sa malléabilité, l'EPR est employé dans les écrans semi-conducteurs. On lui rajoute alors des fibres de noir de carbone afin de lui donner les propriétés semi-conductrices.

3.1.2 L'isolation des câbles à THT

Les propriétés diélectriques du XLPE permettent des tenues aux forts champs électriques suffisantes pour les utiliser dans l'isolation de câbles à très haute tension (400 kV).

A ces niveaux de tension, les champs rencontrés aux interfaces sont extrêmement contraignants. Le moindre défaut en surface des conducteurs peut conduire à un renforcement de champ électrique pouvant endommager l'isolation. L'emploi de couches SC pour réduire ces contraintes s'est alors avéré essentiel. L'isolation d'un câble est constituée d'une première couche de matériau isolant SC déposée sur l'âme du conducteur, elle permet de réduire les renforcements de champ causés par des aspérités ou des mauvais contacts entre le conducteur et l'isolation (Figure 9). On dépose ensuite l'isolation en XLPE, puis une seconde couche SC qui va servir d'interface entre le polymère et l'écran de masse. Pour garantir un bon contact, l'isolant et les deux couches SC sont extrudées en même temps [15].

En plus de jouer le rôle d'écran électrique, les couches SC sont une protection contre les

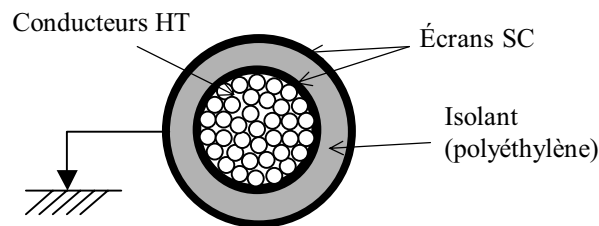


Figure 9 : Section d'un câble de transport d'énergie à isolation synthétique.

divers types d'agression sur l'isolation. Il faut donc également qu'elles soient résistantes chimiquement, mécaniquement et thermiquement.

Jusqu'à présent, on n'a pas eu de retour d'expérience suffisamment long pour garantir la fiabilité de ce système à très long terme. Plusieurs installations 400 kV existent déjà un peu partout dans le monde. Principalement au Japon où les besoins de confinement sont importants.

Par exemple, la ligne Shin-Keiyo Toyosu (Japon) est constituée d'un double terre de longueur 40 km connectant deux postes. Le conducteur en cuivre de section 2500 mm² est isolé par une épaisseur de 27 mm de polyéthylène. Il peut transmettre une énergie de 900 MW par circuit. Afin de compenser les effets capacitifs, des réactances ont été installées le long de la ligne. Avec le coût, l'effet capacitif est d'ailleurs actuellement le principal frein au développement de longues lignes isolées à THT [16].

En France, le taux d'enfouissement des lignes de tension supérieure à 200 kV, (i.e. la proportion de câbles souterrains) est de 2 pourcents dans le réseau national, ce qui correspond à un millier de kilomètres de lignes.

Pour des raisons d'encombrement, les câbles sont transportés sur le chantier par rouleaux de 500 à 1000 mètres de longueur, et sont ensuite connectés entre eux par des jonctions conçues spécialement. Les connexions de ces câbles avec une ligne aérienne ou un disjoncteur, sont également réalisées à l'aide d'un système spécialement conçu.

Ces connexions constituent le point faible de la technologie car on y voit apparaître des contraintes du même genre que celles des structures de type traversée. C'est pourquoi des technologies à base de SC ont également été développées pour les connecteurs.

3.1.3 La jonction pour câbles isolés

Lors de la jonction de deux câbles à isolation, il est nécessaire de déconnecter les écrans de masse et de retirer l'isolation extrudée du câble. En pratique les installateurs de câble profitent de cette déconnexion pour réaliser le cross-bonding (connexion croisée entre les écrans de masse de chaque phase afin de diminuer les courants induits à la masse).

On rencontre deux techniques de connexion pour les câbles isolés THT, les jonctions préfabriquées et les jonctions pré-moulées. Encore la plus répandue, la jonction préfabriquée renferme un déflecteur de champ électrique en matériau copolymère (poly[éthylène-propylène]) qui est maintenu à l'isolant en résine époxyde par une contrainte mécanique (Figure 10). L'opération d'assemblage étant réalisée *in situ*, cela demande une grande

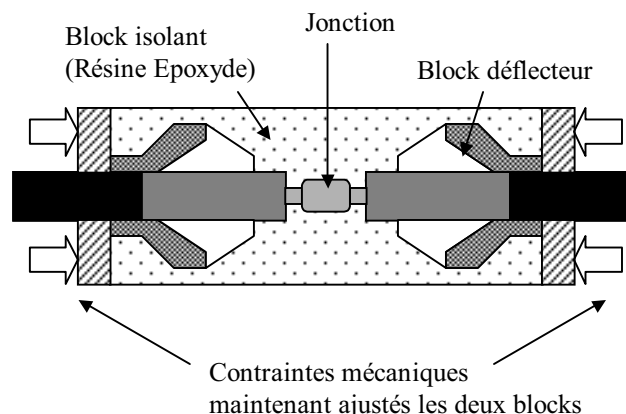


Figure 10 : Schéma d'une jonction préfabriquée.

attention afin d'éviter la pollution des surfaces de contact par des particules. Le temps d'assemblage est donc assez long (dizaine de jours). C'est pourquoi, actuellement on se

dirige vers des jonctions pré-moulées [17] où le déflecteur arrive in situ déjà assemblé dans un corps en élastomère (Figure 11).

Le joint est maintenu en contact avec le câble par la propre force d'élasticité du matériau.

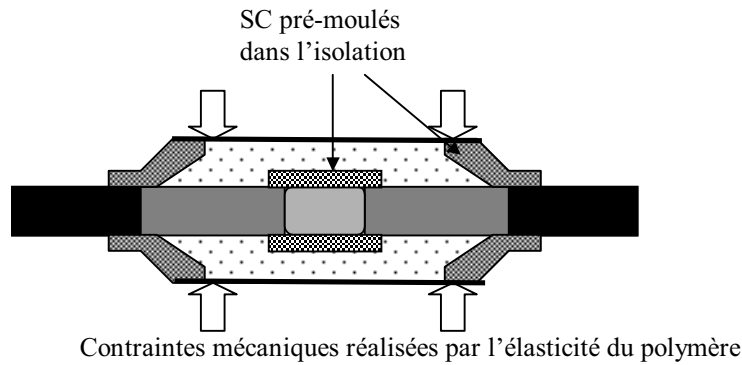


Figure 11 : Schéma d'une jonction pré-moulée.

Cette technique a permis de diminuer le nombre de pièces ainsi que le temps d'assemblage (quelques jours). Afin de garantir un bon contact à long terme entre le joint et l'isolation il faut que les matériaux soient compatibles électriquement, thermiquement et mécaniquement. Pour un câble à isolation XLPE, on emploie des joints à base de copolymère poly[éthylène-propylène] ou de silicone [18] qui permettent cette compatibilité.

3.1.4 La terminaison pour câbles isolés

La technologie de raccord des câbles isolés avec les transformateurs, les lignes aériennes et les disjoncteurs blindés, a également bénéficié de la technique d'isolation pré-moulée (Figure 12).

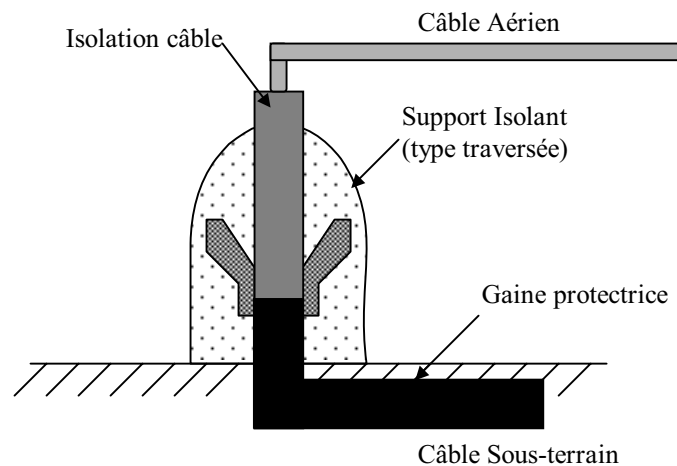


Figure 12 : Connexion de câble isolé avec câble aérien.

3.2 Autres applications de l'isolation SC

Voici d'autres applications des matériaux SC pour l'isolation HT.

3.2.1 Isolation des fusibles HT [2]

Suivant l'état du fusible, les contraintes en champ ont des directions différentes (Figure 13). En fonctionnement normal (état passant), l'ensemble du fusible est à la haute tension, ce qui crée un champ électrique normal à l'axe de symétrie du fusible.

Au contraire, lorsque le fusible est devenu non passant, il y a une différence de potentiel à chaque extrémité, ce qui crée un champ électrique de direction parallèle à l'axe du fusible (contrainte type disjoncteur). Pour éviter des arcs en surface, l'isolant du fusible doit être capable d'homogénéiser la répartition du potentiel en surface. On dépose alors une couche de matériel semi-conducteur qui réduira cette contrainte.

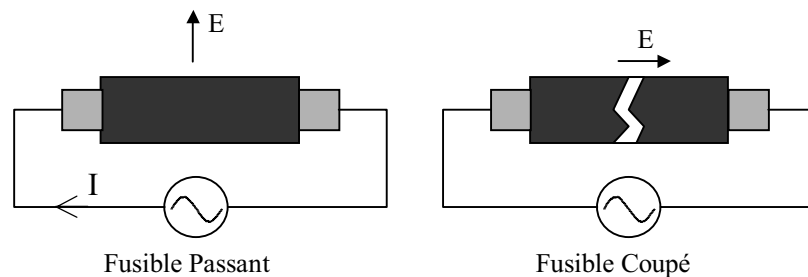


Figure 13 : Directions du champ électrique en surface d'un fusible HT. Pour un fusible passant, le champ est normal à la surface. Pour un fusible non passant, le champ est tangentiel à la surface du fusible.

3.2.2 Isolation des barres de machines en sortie [3]

Lorsque les barres des grosses machines tournantes sortent du blindage du stator, il y a un point triple air/isolant/métal qui provoque un renforcement de champ électrique responsable d'un effet couronne (contrainte de type structure traversée). Ces effets peuvent à long terme endommager l'isolation. En déposant sur la jonction une couche de peinture semi-conductrice, on homogénéise la répartition du potentiel réduisant ainsi le renforcement de champ à proximité du point triple.

3.2.3 Isolation contre les effets de la pollution [4]

Les particules issues de la pollution qui se déposent sur la surface des isolateurs peuvent renforcer le champ localement, ce qui conduit à des décharges locales diminuant ainsi la

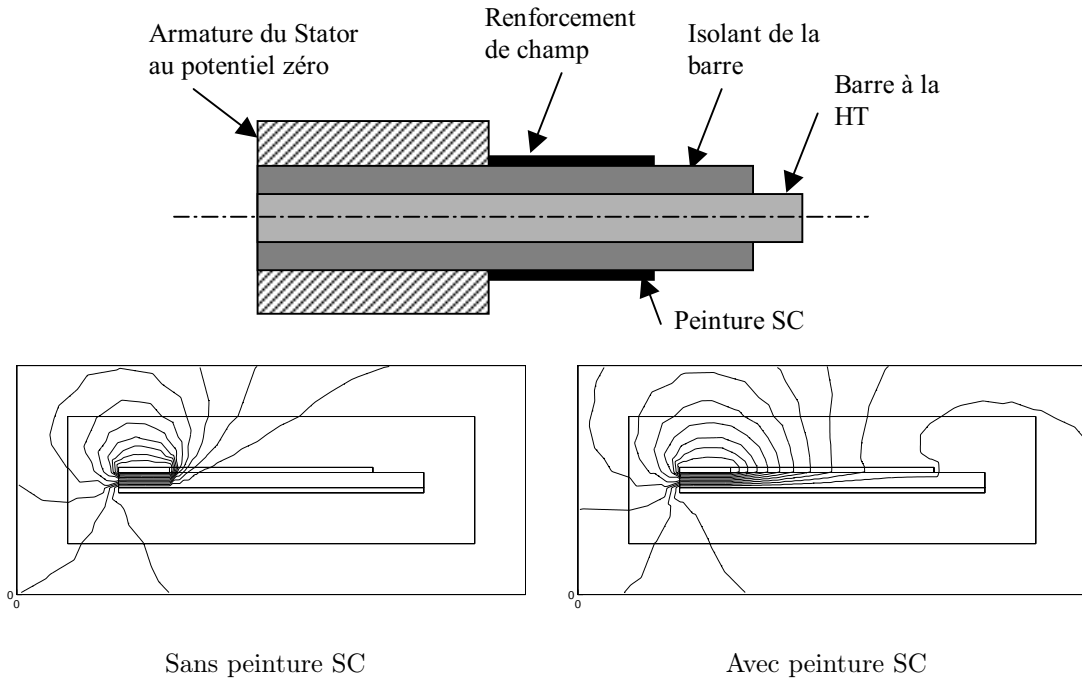


Figure 14 : Equipotentiels autour d'une barre de machine en sortie du stator. A proximité du point triple air/masse/isolant, il y a renforcement de champ électrique caractérisé par un resserrement des équipotentiels.

tenue en tension de l'isolant.

Afin d'éviter ce phénomène destructeur, on peut appliquer sur la surface de l'isolant une couche SC constituée de Oxyde d'étain (SnO_2) et d'Antimoine (Sb^{5+}). Lors d'un renforcement local de champ, cette couche peut écouler les charges électriques via un courant de conduction, évitant ainsi l'apparition d'une décharge partielle (Figure 15).

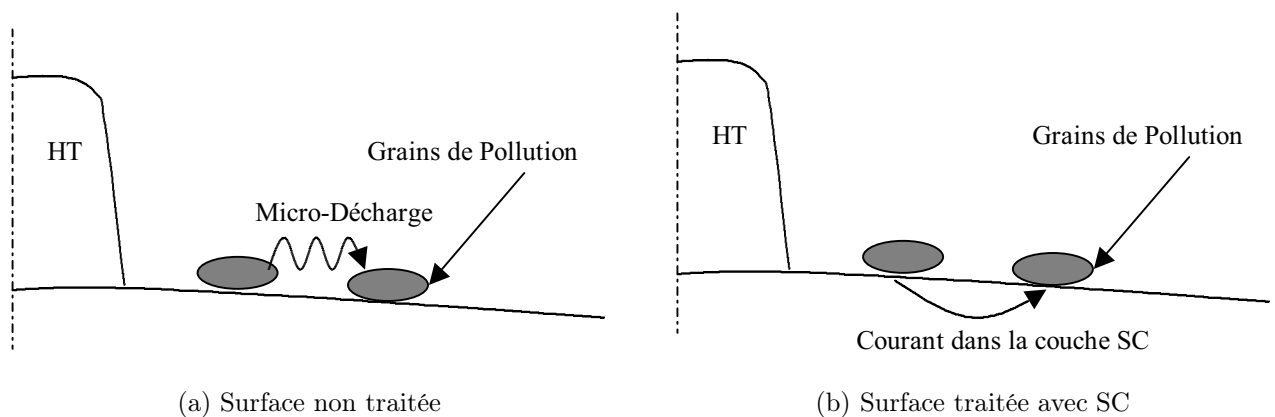


Figure 15 : Chemin du courant électrique entre deux grains pollués. Surface non traitée (a), apparition d'une décharge partielle. Surface traitée (b) écoulement des charges via la couches SC.

3.2.4 Câbles isolés pour la HT en courant continu

Le transport d'énergie électrique par câble isolé sous tension continue permet d'éviter les problèmes engendrés par les effets capacitifs. On peut ainsi transporter l'énergie électrique sur de longues distances. Une des applications de ce type de transport est la connexion sous-marine. Seulement, cette technologie s'avère délicate compte tenu des champs intenses créés par les charges accumulées à long terme. Lorsque le câble est mis sous court-circuit, cette accumulation provoque un phénomène d'arborescence rapide se développant vers l'âme du conducteur [19].

4 Conclusion

Malgré le vaste champ d'application de ces matériaux, leur utilisation est restée empirique. Il y a ainsi des doutes quant à leur réelle efficacité. Par exemple, l'existence d'un champ minimal permettant d'obtenir l'apparition de la propriété semi-conductrice, limite son efficacité.

Les essais prouvent que l'effet SC réduit les contraintes en champ, mais on ne sait pas optimiser son efficacité.

La vaste utilisation des isolations synthétiques pour le transport de l'électricité augmente le besoin d'un matériau SC efficace pour réduire des contraintes toujours plus grandes. Pour venir en aide aux ingénieurs dans le dimensionnement de ces isolations synthétiques, il serait intéressant d'avoir un outil pouvant modéliser correctement ces matériaux.

Avec en plus l'émergence des polymères ayant des propriétés semi-conductrices intrinsèques [12], la prise en compte du comportement non linéaire dans le dimensionnement des isolations devient incontournable.

Section 2 - Modélisation des matériaux diélectriques

A partir des hypothèses du régime quasi-statique appliquées aux lois générales de l'électromagnétisme (Maxwell), nous rappèlerons la formulation en potentiel scalaire du comportement des diélectriques en électrotechnique.

Les équations obtenues nous permettront d'énumérer les différents modèles de conduction déjà existants, comme le modèle de couche mince.

Ce bilan sur les différents modèles existants, ainsi que l'énumération du domaine d'application de chacun d'eux nous permettra enfin de justifier du choix de notre modèle qui sera développé au deuxième chapitre.

1 Rappel d'Electromagnétisme

Nous rappelons dans ce paragraphe l'écriture de la formulation du champ électrique en potentiel scalaire qui sera à la base de la formulation en régime quasi-statique des diélectriques faiblement conducteurs.

1.1 Champ électrostatique

L'électrostatique est la loi qui décrit les interactions de distributions de charge sans variation dans le temps. Un champ électrique issu d'une distribution de charge constante au cours du temps est appelé champ électrique permanent ou champ électrostatique.

Soit une particule de charge q , placée dans le vide possédant une densité de charge volumique $\rho(\vec{x}')$ (Figure 16). La force électrostatique exercée par la distribution de charge sur la particule correspond à l'intégrale des forces de Coulomb exercées sur q par les charges

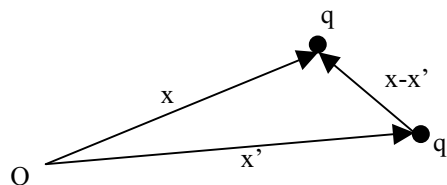


Figure 16 : Influence de la charge électrique élémentaire q' de coordonnée \vec{x}' sur la charge électrique q de coordonnée \vec{x} dans le repère d'origine O .

mique $\rho(\vec{x}')$ (Figure 16). La force électrostatique exercée par la distribution de charge sur la particule correspond à l'intégrale des forces de Coulomb exercées sur q par les charges

élémentaires q' dans tout l'espace.

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (5)$$

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad \text{dans le trièdre direct } (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

A partir de la force électrostatique, on peut définir le champ électrostatique comme étant le rapport de la force sur la charge q , charge supposée tendant vers zéro.

$$\vec{E}^{stat} \equiv \frac{\vec{F}}{q} \quad (6)$$

On remarque que \vec{E}^{stat} est à rotationnel nul. Le champ électrostatique dérive donc d'un potentiel scalaire électrique V :

$$\vec{E}^{stat} = -\vec{\nabla}V \quad (7)$$

Le calcul de la divergence de \vec{E}^{stat} , donne:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{stat}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{x}') \nabla^2 \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (8)$$

D'après la définition de la fonction de Dirac au sens des distributions:

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \nabla^2 \frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (9)$$

On déduit la loi de Gauss sous sa forme différentielle, qui donne la divergence de \vec{E}^{stat} , décrivant ainsi totalement le comportement du champ électrostatique (10).

$$\vec{E}^{stat}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{x}') \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^{stat}(\vec{x}) = \vec{0} \quad (b) \quad (10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^{stat}(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (Gauss) \quad (c)$$

1.2 Formulation en potentiel scalaire dans un diélectrique

En exprimant la loi de Gauss (10-c) en fonction du potentiel scalaire électrique, on obtient l'équation de Poisson suivante:

$$\nabla^2 V(\vec{x}) + \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} = 0 \quad (11)$$

Cette relation n'est valable que dans le vide ou bien dans un milieu faiblement polarisable comme l'air. Afin d'écrire la relation pour tout diélectrique, il est nécessaire de faire

apparaître la notion de vecteur de polarisation électrique \vec{P} , créé par la répartition des charges électriques dans le matériaux sous l'action d'un champ électrique:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (12)$$

avec χ_e , la susceptibilité électrique.

Il faut alors tenir compte de cette polarisation dans l'écriture de l'induction électrique dans le matériau:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (13)$$

$$\text{avec} \quad \varepsilon_r = 1 + \chi_e$$

avec ε_r , la perméabilité relative.

On peut à présent écrire l'équation de Poisson dans un diélectrique quelconque:

$$\nabla^2 V(x) + \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = 0 \quad (14)$$

En l'absence de charge dans le diélectrique, le potentiel scalaire obéit à l'équation de Laplace (15). Elle décrit le comportement des régions diélectriques parfaites

$$\varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla^2 V(x) = 0 \quad (15)$$

Les solutions de cette équation appartiennent à l'ensemble des fonctions harmoniques. Si deux fonctions sont solutions de (15), alors une combinaison linéaire de ces deux fonctions sera également solution de l'équation de Laplace.

Pour résoudre un problème électrostatique, la formulation en potentiel scalaire est très intéressante car elle évite d'avoir à prendre en compte les deux équations de Maxwell en même temps. Lorsque les conditions aux limites sont imposées, potentiel connu (CL de Dirichlet) ou champ normal connu (CL de Neumann), la solution devient unique.

En calcul numérique, l'intérêt de travailler avec des potentiels scalaires est grand puisque l'on n'a qu'une seule inconnue par noeud à déterminer. Une fois ce potentiel trouvé, on déduit les grandeurs vectorielles des champs via l'opérateur gradient.

1.3 Conditions d'interface

Pour la modélisation des diélectriques, il est utile de connaître la relation de passage du champ électrique à l'interface de deux régions.

Soient deux régions de permittivités relatives ε_1 et ε_2 . Par convention, (Figure 17) nous

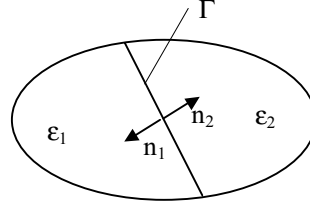


Figure 17 : Interface Γ entre deux régions diélectriques de permittivité respective ε_1 et ε_2 . Les vecteurs unitaires \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont normaux à l'interface Γ . Ils sont chacun orientés vers leur région respective.

choisissons les vecteurs normaux aux frontières \vec{n}_1 et \vec{n}_2 dirigés vers l'intérieur de leur région respective.

A l'interface Γ des deux régions, on peut écrire la relation de continuité du champ tangentiel, et la relation de discontinuité du champ normal (16).

$$\begin{aligned}\vec{n}_1 \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) &= \vec{0} \\ \vec{n}_1 \cdot (\varepsilon_1 \vec{E}_1 - \varepsilon_2 \vec{E}_2) &= \rho_s\end{aligned}\quad (16)$$

où ρ_s est la densité de charge sur l'interface Γ .

1.4 Relation entre \vec{E} et \vec{B}

En faisant pour l'induction magnétique \vec{B}^{stat} le même raisonnement que pour \vec{E}^{stat} , et en prenant comme sources les distributions de courant, nous pouvons tirer des lois décrivant la magnétostatique:

$$\vec{B}^{stat}(\vec{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{j} \times \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3x' \quad (a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^{stat}(\vec{x}) = \mu_0 \vec{j}(\vec{x}) \quad (b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{stat} = \vec{0} \quad (c)$$

Lorsque les sources à l'origine des champs électromagnétiques sont stationnaires, les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique sont indépendantes.

Si ces sources varient dans le temps, la divergence de la densité de courant n'est plus nulle, et les champs \vec{E} et \vec{B} sont liés via l'équation de continuité électrique (18).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (18)$$

On trouve [20] alors une nouvelle expression (19) du rotationnel qui appartient au groupe des équations de Maxwell.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times B &= -\mu_0 \iiint_V \vec{j} \nabla^2 \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3x' + \mu_0 \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) \vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \right) d^3x' \\ &= \mu_0 \mu_r \vec{j} + \mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E})\end{aligned}\quad (19)$$

Le terme $\partial(\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E})/\partial t$ se comporte comme une source de densité de courant électrique que l'on peut séparer en deux courants ayant des origines différentes. Il y a tout d'abord le courant de déplacement du à l'influence des charges à distance, et il y a le courant de polarisation du à la polarisation \vec{P} des molécules du matériau sous l'effet du champ électrique.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P} \quad (20)$$

1.5 Les équations de l'électromagnétisme (Maxwell)

L'ensemble des équations liant les interactions entre le champ magnétique et électrique est résumé dans les équations de Maxwell. Elles sont complétées par des relations propres aux matériaux (Tableau 4).

2 Modélisation des pertes dans les diélectriques

Pour obtenir un isolant parfait il faudrait que le matériau ait une structure cristalline parfaitement pure afin de n'avoir aucune charge supplémentaire. On pourrait ainsi atteindre une résistivité volumique de $10^{45} \Omega m$. Cette valeur limite correspondrait à l'apparition du phénomène de conduction par effet tunnel dans le cristal lorsque le champ est de l'ordre de $10^5 kV/cm$. Dans la pratique, les isolants ont, soit une structure semi-cristalline, soit une structure amorphe.

On dénombre plusieurs mécanismes de génération de charges. Il y a la polarisation des molécules polaires ou des groupements polaires qui, sous l'action du champ électrique d'excitation induit, créent une densité de charges liées. On rencontre également les porteurs ioniques, essentiellement dans les liquides et les polymères. Et il y a des charges dites extrinsèques, fournies par le milieu extérieur comme le phénomène de pollution sur les surfaces isolantes, sous l'effet des radiations solaires ou bien lors de la fabrication de l'isolant. Ces particules étrangères peuvent fournir des charges sous l'action d'un champ

Equations de Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \partial\vec{D}/\partial t$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Relations constitutives dans les matériaux linéaires

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Loi d'Ohm locale dans les conducteurs

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Nomenclature

\vec{E} : Champ électrique

\vec{H} : Champ magnétique (A/m)

\vec{D} : Induction électrique

\vec{B} : Induction magnétique (T)

ρ : Vensité volumique de charge (C/m_3)

\vec{j} : Densité surfacique de courant (A/m^2)

$\varepsilon_0 = 1/36\pi 10^9$: Permittivité du vide (F/m)

$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$: Perméabilité magnétique du vide (H/m)

ε_r : Permittivité relative

μ_r : Perméabilité magnétique relative

σ : Conductivité volumique (S/m)

Tableau 4 : Equations de Maxwell de l'électromagnétisme et relations constitutives dans les matériaux linéaires.

électrique intense [21]. La conséquence de ces charges créées au niveau microscopique dans le diélectrique est l'apparition d'un courant macroscopique.

Pour comprendre le phénomène de perte diélectrique dans les isolants, nous nous intéresserons seulement aux courants résultant de l'orientation dipolaire et aux courants de conduction.

2.1 Pertes diélectriques de polarisation

Les diélectriques possèdent des molécules polaires, molécules asymétriques possédant un moment dipolaire propre [22].

En l'absence de champ électrique, le moment dipolaire moyen résultant dans le matériau

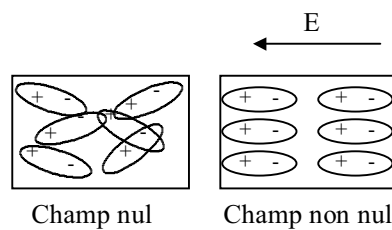


Figure 18 : Répartition des dipôles électriques dans un diélectrique.

est nul. Si l'on applique un champ électrique, les dipôles vont avoir tendance à s'orienter dans la direction de l'excitation (Figure 18), il en résulte un vecteur de polarisation \vec{P} macroscopique.

2.1.1 Réponse temporelle

Le vecteur \vec{P} englobe l'ensemble des polarisations possibles dans les diélectriques. Outre la polarisabilité dipolaire, il prend en compte la polarisabilité de charge d'espace, ionique et électronique. Du fait des différents temps de relaxation, chacune d'entre elles sera en phase avec le champ excitateur pour des fréquences différentes.

De manière générale, la réponse de l'induction à un champ électrique $\vec{E}(t)$ variable au cours du temps est de la forme:

$$\begin{aligned}\vec{D}(t) &= \varepsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P} \\ \vec{P}(t) &= \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \vec{E}(t) + \vec{p}\end{aligned}\tag{21}$$

On peut ainsi mettre en évidence la polarisation instantanée caractérisée par ε_∞ . Suivant la fréquence de la source, les phénomènes de polarisation en phase avec le champ auront une origine différente. Le vecteur $\vec{p}(t)$ représente le retard à la polarisation instauré par

les phénomènes de relaxation dans le diélectrique.

Afin de caractériser $\vec{P}(t)$ sous une excitation quelconque, on s'appuie sur la réponse $f(t)$ du matériau à une impulsion de Dirac $\delta(t)$.

En supposant qu'un signal quelconque est la somme d'impulsions de Dirac, et en appliquant le principe de superposition, la réponse en polarisation correspond au produit de convolution (22).

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \vec{E}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_0 f(u) \vec{E}(t-u) dt \quad (22)$$

On peut ainsi expliquer l'apparition de certains courants dans les diélectriques après avoir appliqué l'excitation. Un de ces courants dit d'absorption peut décroître exponentiellement dans le diélectrique durant des semaines. Il est dû à un phénomène de réorganisation lente de charges d'espace dans le diélectrique [23].

Si l'excitation électrique est une onde électromagnétique:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(0) \exp \left[j \left(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \quad (23)$$

Le produit de convolution (22) s'écrit sous la forme:

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \vec{E}(t) + \varepsilon_0 \vec{E}(0) \exp \left[j \left(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j \omega t) dt \quad (24)$$

ce qui met en évidence un coefficient complexe de couplage entre l'excitation et la polarisation dépendante de la fréquence et qui s'apparente à une permittivité complexe. Ce qui traduit le déphasage entre \vec{E} et \vec{D} à l'origine des pertes dans les diélectriques:

$$\vec{P}(t) = \underline{\varepsilon}_e(\omega) \vec{E}(t)$$

$$\text{avec} \quad \underline{\varepsilon}_e(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j \omega t) dt \quad (25)$$

Une étude en réponse fréquentielle est donc nécessaire pour bien caractériser ce type de pertes dans les diélectriques.

2.1.2 Réponse fréquentielle

Pour obtenir la réponse fréquentielle de la polarisation, on prend la transformée de Fourier de (22):

$$\underline{P}_\omega(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \exp(-j \omega t) dt \quad (26)$$

D'où:

$$\underline{P}_\omega(\omega) = \varepsilon_0 \underline{E}(\omega) \underline{\chi}(\omega) \quad (27)$$

$\underline{\chi}$ est la susceptibilité électrique complexe du matériau, correspondant à la transformée de Fourier de la réponse $f(t)$ du matériaux à un Dirac.

$$\begin{aligned} \underline{\chi}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-j\omega t) dt \\ &= \chi'(\omega) - j\chi''(\omega) \end{aligned} \quad (28)$$

La partie complexe représente les pertes diélectriques dues aux phénomènes de polarisation. On retrouve l'influence de ces pertes sur le déphasage entre la densité de courant et le champ électrique. En supposant un courant de conduction nul dans le diélectrique, la densité de courant total est de la forme (29).

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \underline{j}(\omega) &= j\omega \underline{D}(\omega) \text{ (régime harmonique)} \end{aligned} \quad (29)$$

Et d'après la définition de la susceptibilité complexe précédente:

$$\underline{j}(\omega) = [\omega\varepsilon_0\chi''(\omega) + j\omega\varepsilon_0(1 + \chi'(\omega))] \underline{E}(\omega) \quad (30)$$

la composante en phase avec le champ électrique (partie réelle) modélise les pertes diélectriques. Pour prendre en compte ces pertes dans les équations de Maxwell on représente la permittivité sous une forme complexe.

$$\begin{aligned} \underline{D}(\omega) &= \underline{\varepsilon}(\omega) \underline{E}(\omega) \\ \underline{\varepsilon}(\omega) &= \varepsilon_0(\varepsilon' - j\varepsilon'') \\ \text{avec } \varepsilon'(\omega) &= (1 + \chi'(\omega)) \quad \text{et} \quad \varepsilon''(\omega) = \chi''(\omega) \end{aligned} \quad (31)$$

On met ainsi très clairement en évidence une estimation des pertes purement diélectriques:

$$\tan(\delta) = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)} \quad (32)$$

L'angle des pertes δ et l'angle de déphasage entre le courant et la tension sont complémentaires.

Suivant la fréquence d'excitation, la source interagira avec des phénomènes de polarisation différents. Par exemple, à des fréquences de l'ordre du millier de GHz , on observe

un phénomène de résonance du à la polarisation atomique. L'interaction atomique agit comme une force de rappel qui détermine le seuil de la résonance.

A plus basse fréquence (domaine du GHz) un phénomène de relaxation apparaît (*ChapI-*

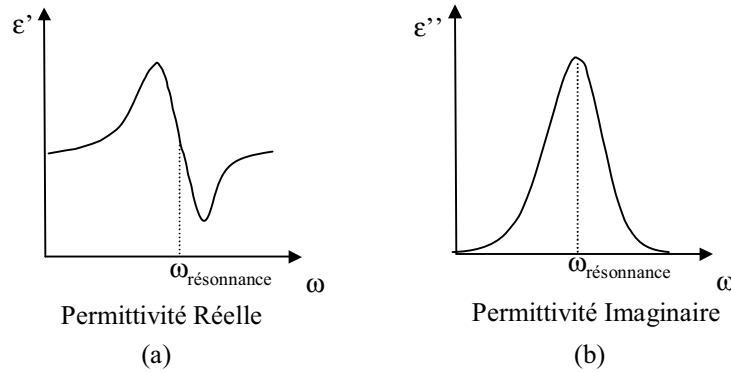


Figure 19 : Résonance dans les diélectriques.

Sect1-2.2). A partir d'une certaine valeur de la fréquence, le temps de réorganisation des moments dipolaires dans le matériau ne permet pas de suivre la variation de la source excitatrice et restent figés sur une position. Ces moments n'ont plus d'influence sur les propriétés électriques du matériau, et la permittivité réelle chute à un seuil se rapprochant de celui du vide.

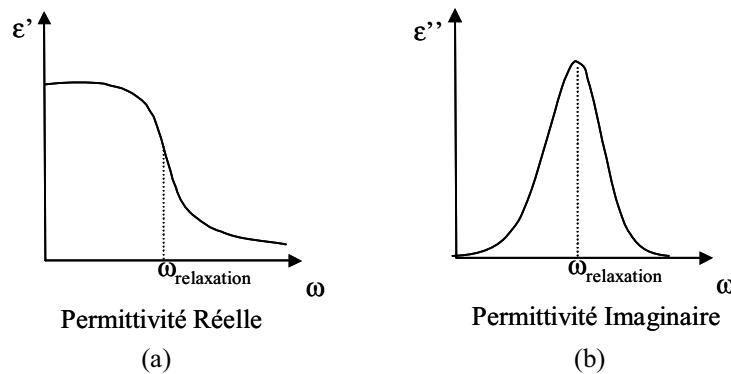


Figure 20 : Relaxation dans les diélectriques.

2.1.3 Courant de conduction dans les diélectriques

Une propriété remarquable de la conductivité volumique σ d'un matériau est de pouvoir varier de $10^6(\Omega m)^{-1}$ pour un bon conducteur à $10^{-15}(\Omega m)^{-1}$ pour un bon isolant. Cette grande plage de valeur de σ , causée par les nombreux phénomènes entrant en jeu dans la conduction électrique, rend délicate une modélisation globale.

Dans les conducteurs, les électrons libres de la couche externe des atomes se déplacent

sous l'effet d'un champ électrique. Si l'on augmente la température, l'agitation moléculaire rend plus difficile le déplacement de ces électrons, ce qui fait chuter la conductivité. Dans les isolants ou les semi-conducteurs, on observe le phénomène inverse. Ces matériaux ont leur dernière couche électronique saturée, et il faudrait pour libérer un électron pouvant participer à la conduction que le champ électrique atteigne un niveau d'énergie supérieur à celui de la bande de valence (énergie de la bande de conduction). Suivant la différence d'énergie entre ces deux bandes, le matériau sera plus ou moins facilement conducteur. Une augmentation de la température ou du champ électrique peut fournir l'énergie nécessaire.

$$\sigma = f(T, E) \quad (33)$$

Les matériaux n'étant pas parfaitement homogènes, les propriétés de conduction peuvent dépendre de l'orientation du champ, ce qui peut conférer à σ un caractère anisotrope. On a coutume de définir des conductivités transversales et longitudinales. La caractérisation d'un matériau isolant HT consiste à déterminer les valeurs du champ pour lequel il perd ses propriétés isolantes, ce qui se traduit par une augmentation brutale de la conductivité. C'est ce que l'on appelle la rigidité électrique.

D'un point de vue phénoménologique, on peut modéliser un courant de conduction dans un diélectrique comme étant une perte diélectrique. Il suffit de réécrire la définition de la densité de courant qui traverse un matériau de permittivité complexe $\underline{\epsilon}$ et de conductivité volumique σ est égale à la somme des densités de courant de conduction, de déplacement et polarisation.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (34)$$

En notation complexe, la relation (34) prend la forme:

$$\underline{J} = j \omega \epsilon_0 \left(\epsilon_r - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \underline{E} \quad (35)$$

ce qui fait apparaître une permittivité complexe, simulant une perte équivalente par polarisation. Un angle de perte δ peut ainsi être défini. Le Tableau 5 présente la forme de la permittivité complexe pour les différentes pertes rencontrées dans les diélectriques.

Types de Pertes	Conductivité volumique	Permittivité relative	Permittivité équivalente	Coefficient de perte $\tan(\delta)$
Sans perte	$\sigma = 0$	$\varepsilon_r = \varepsilon'$	$\varepsilon_e = \varepsilon'$	0
Conductrices	$\sigma > 0$	$\varepsilon_r = \varepsilon'$	$\varepsilon_e = \varepsilon' - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}$	$\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon'}$
Diélectriques	$\sigma = 0$	$\varepsilon_r = \varepsilon' - j \varepsilon''$	$\varepsilon_e = \varepsilon' - j \varepsilon''$	$\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$
Diélectriques et Conductrices	$\sigma > 0$	$\varepsilon_r = \varepsilon' - j \varepsilon''$	$\varepsilon_e = \varepsilon' - j(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0})$	$\frac{\sigma + \omega \varepsilon_0 \varepsilon''}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon'}$

Tableau 5 : Les différents angles de perte dans les diélectriques.

2.2 Equation des diélectriques faiblement conducteurs en régime électro-quasi-statique (EQS)

Dans le domaine de l'isolation HT, l'énergie magnétique mise en jeu est négligeable devant l'énergie électrique, ce qui nous permet de travailler en régime électro-quasi-statique (EQS). C'est grâce à cette hypothèse que les équations des champs sont découplées ($\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}$) permettant ainsi d'écrire la formulation en potentiel scalaire:

$$(H_1) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (36)$$

La fréquence des contraintes rencontrées varie de la dizaine de Hz (fonctionnement normal) au MHz (onde impulsionnelle de type foudre ou manoeuvre). Les relativement basses fréquences de ces excitations permettent de supposer que les pertes diélectriques dues au retard de déplacement des moments dipolaires sont négligeables. On ne prendra pas en compte les pertes diélectriques (37).

$$(H_2) \quad \varepsilon'' = 0 \quad (37)$$

A partir des hypothèses (H_1) et (H_2) nous pouvons écrire l'équation à laquelle satisfait le potentiel électrique dans un diélectrique faiblement conducteur tel qu'une isolation semi-conductrice. Pour cela, repartons de la définition de la densité de courant de conduction (loi d'Ohm locale):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (38)$$

σ est la conductivité volumique du milieu exprimée en $(\omega m)^{-1}$. La plupart du temps c'est un tenseur, mais pour notre modélisation nous prendrons un scalaire (conductivité

isotrope). Cette conductivité pourra varier cependant en fonction de l'intensité du champ électrique uniquement.

Notons que (38) n'est en fait que le premier terme du développement en série de Taylor de \vec{J} en fonction de \vec{E} . Considérer la conductivité dépendante de \vec{E} revient d'un point de vue analytique à prendre compte les termes de degrés supérieurs du développement de σ . En prenant la divergence de l'équation de Maxwell faisant intervenir le rotationnel du champ magnétique (Tableau 4, première ligne à droite) et en remplaçant l'expression de \vec{j} par (38), on trouve l'expression générale sous sa forme vectorielle de l'équation régissant les diélectriques faiblement conducteurs:

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0 \quad (39)$$

Pour la modélisation, on emploie généralement la formulation en potentiel scalaire. Afin de l'obtenir dans notre cas, repartons de l'expression du rotationnel du champ électrique:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (40)$$

On peut toujours définir un potentiel vecteur \vec{A} étant le rotationnel de \vec{B} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (41)$$

Ce qui nous permet de définir un nouveau champ électrique irrotationnel:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0} \quad (42)$$

Ce champ dérive donc d'un gradient de potentiel scalaire V :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} V \quad (43)$$

Connaissant le rotationnel du potentiel vecteur \vec{A} , il ne reste plus qu'à définir sa divergence pour qu'il soit entièrement connu. Comme on s'intéresse au potentiel électrique scalaire, on pourra imposer n'importe quelle valeur au potentiel vecteur. Afin de simplifier l'expression de l'équation de conduction, nous employons la jauge dite de Coulomb [24], qui impose que le flux du potentiel vecteur soit conservatif:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (44)$$

L'hypothèse du régime EQS permet de négliger le terme faisant intervenir la dérivée temporelle du potentiel vecteur \vec{A} , le champ est alors issu d'un gradient de potentiel (45).

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \quad (45)$$

L'équation (39) s'écrit en fonction du potentiel scalaire:

$$\vec{\nabla}\sigma \cdot \vec{\nabla}V + \sigma\nabla^2V + \varepsilon_0\varepsilon_r\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2V) = 0 \quad (46)$$

C'est cette relation générale de l'équation de conduction qui est utilisée pour la modélisation. Elle fait intervenir les propriétés diélectrique et conductrice du matériau. A partir des équations de Maxwell nous avons pu développer la formulation en potentiel scalaire de la conduction électrique. Lorsque la conductivité est non linéaire, un nouvel opérateur apparaît, le gradient de cette conductivité. Ces équations ont besoin d'être discrétisées afin d'appliquer la méthode des éléments finis, méthode bien adaptée dans le traitement des régions non-linéaires. Ce développement sera présenté au *ChapII*.

3 Modélisation des matériaux SC

Dans la partie précédente, nous avons pu mettre en évidence deux grandes catégories de courant: le courant de conduction \vec{J} , créé par un champ électrique dans un matériau possédant une conductivité σ non nulle et le courant de déplacement $\partial\vec{D}/\partial t$, créé par la variation du champ électrique dans un matériau possédant des propriétés diélectriques. Dans les bons conducteurs, le courant de déplacement peut être négligé. Si la conduction est constante, l'équation du potentiel électrique dans le diélectrique devient une équation de Laplace et la résoudre revient à traiter une région diélectrique possédant une permittivité complexe. Lorsque la conductivité est faible et que les courants de déplacement ne peuvent plus être négligés, on travaillera avec une permittivité ayant une partie réelle et une partie imaginaire. Plusieurs logiciels comme Flux2d [25] ou Phi3d [26] utilisent ce principe pour simuler une région conductrice.

Ce type de simulation ne présente aucune originalité, par contre en électrotechnique on peut rencontrer des configurations où interviennent des conceptions particulières et qui demandent à être étudiées plus attentivement. C'est le cas de la conduction superficielle ou de la conduction non linéaire.

La conduction superficielle se rencontre par exemple lors de la modélisation des couches de peinture semi-conductrices afin de diminuer le champ électrique (*ChapI-Sect1-3.2.2*). L'épaisseur faible de ces couches en comparaison avec les dimensions du système total, en font une région difficile à mailler de façon pertinente. Des modèles ont déjà été développés pour traiter ce type de conductivité [27].

3.1 Modèle unidimensionnel

L'application la plus commune des peintures SC consiste à la déposer sur la surface de l'isolant des barres des machines tournantes en sortie de la carcasse du stator (Figure 21).

Via quelques approximations, on décrit le phénomène par une modélisation à une di-

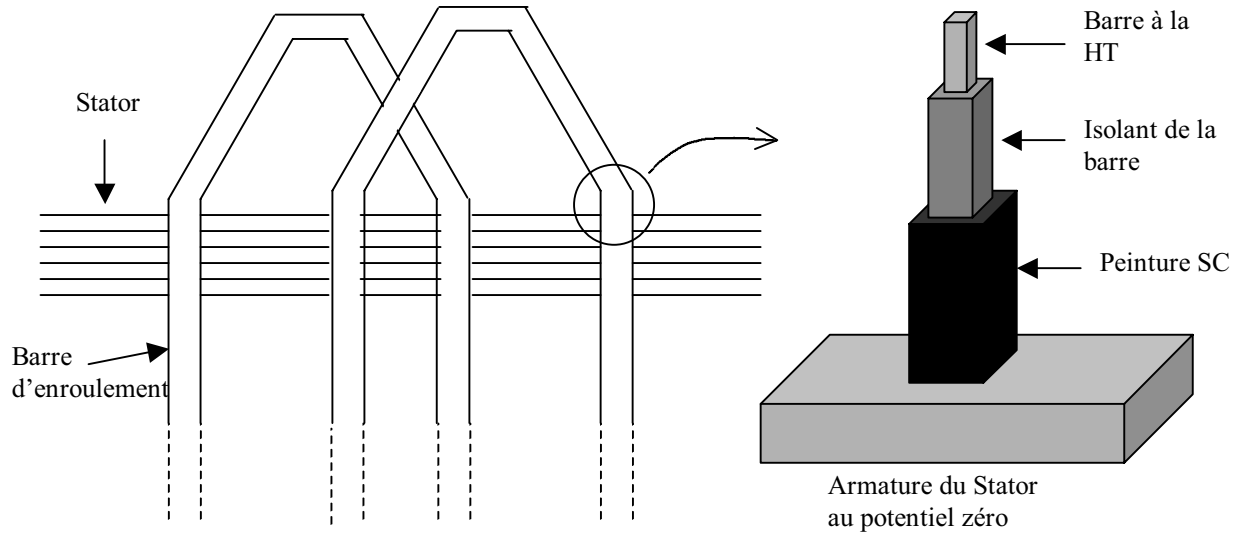


Figure 21 : Sortie de barres d'enroulement du stator de machine tournante.

mension (1D):

- (H_1) Epaisseur de la couche SC faible devant l'épaisseur de l'isolation. Les courants de conduction et capacitifs sont nuls suivant l'axe (Oy) dans ce milieu (Figure 22).
- (H_2) Le courant dans l'isolant est uniquement un courant de déplacement. Il est homogène dans toute la section et dirigé suivant l'axe (Oy) (Figure 22).
- (H_3) Le courant de déplacement normal à la frontière supérieure de la couche SC est négligeable.

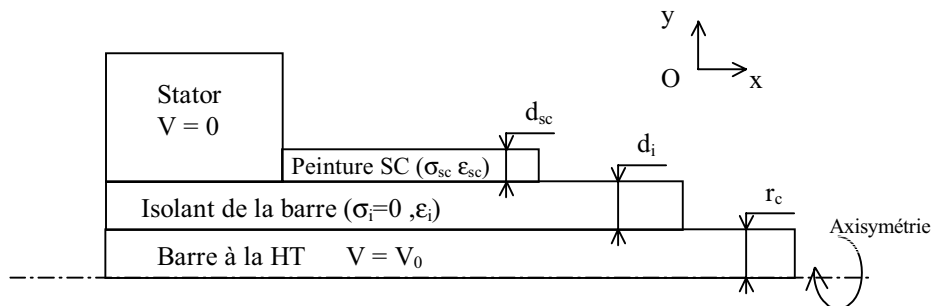


Figure 22 : Représentation axisymétrique d'une barre de machine sortant du stator.

Densité de courant dans la couche SC:

On associe la couche SC à un tube d'épaisseur d_{sc} dont la densité de courant est constante dans toute la section S_{sc} de ce tube (H_1).

$$\begin{aligned}
 i_{sc} &= S_{sc} j_{sc} \\
 \text{avec} \quad j_{sc} &= -\sigma_{sc} \frac{\partial V}{\partial x} - \varepsilon_0 \varepsilon_{sc} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \\
 \text{et} \quad S_{sc} &= \pi [(r_c + d_i + d_{sc})^2 - (r_c + d_i)^2]
 \end{aligned} \tag{47}$$

Charge dans l'isolation du câble:

D'après (H_2), l'isolation du câble se comporte comme un condensateur parfait. Une longueur l de celui-ci peut emmagasiner une quantité de charge Q_i :

$$\begin{aligned}
 Q_i &= l C_i V \\
 \text{avec} \quad C_i &= \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_i}{\log(r_c + d_i) - \log(r_c)}
 \end{aligned} \tag{48}$$

C_i étant la capacité équivalente par unité de longueur.

Equation dans la couche SC:

L'hypothèse (H_3), garantit que la quantité de charge stockée par le câble se retrouve en intégralité dans le SC. Dans le tube de longueur l , la densité volumique de charge Θ_{sc} est de la forme:

$$\Theta_{sc} = \frac{Q_i}{l S_{sc}} \tag{49}$$

En écrivant l'équation de diffusion de la charge dans le tube:

$$\frac{\partial \Theta_{sc}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{sc} = 0 \tag{50}$$

et en remplaçant dans (50) les expressions (47) et (49), on obtient une relation du comportement du potentiel dans la couche similaire à celle trouvée par Rhyner et al. [28]:

$$C_i \frac{\partial V}{\partial t} = S_{sc} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{sc} \frac{\partial V}{\partial x} + \varepsilon_0 \varepsilon_{sc} \frac{\partial^2 V}{\partial t \partial x} \right) \tag{51}$$

Cette équation décrit le comportement du potentiel de la couche dans le cas général. C'est à dire pour un comportement non linéaire de la permittivité ou de la conductivité. La solution sera trouvée en imposant des conditions aux limites et des conditions initiales.

3.1.1 Cas linéaire

Lorsque les paramètres électriques du tube sont constants, et que la source de tension est sinusoïdale de pulsation ω , (51) prend une forme plus simple:

$$V = \frac{S_{sc}}{C_i} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} - j \frac{\sigma_{sc}}{\omega} \right) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (52)$$

En prenant comme conditions aux limites:

$$\begin{aligned} V(x=0) &= V_0 \\ \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=l} &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

La solution analytique de (52) est donnée par:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_0 \frac{\cosh(\delta(L-x))}{\cosh(\delta L)} \\ \text{avec} \quad \delta &= \sqrt{\frac{S_{sc}}{C_i} \left(\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} - j \frac{\sigma_{sc}}{\omega} \right)} \end{aligned} \quad (54)$$

Ce résultat largement cité dans les travaux sur les couches semi-conductrices ([28] et [29]), permet d'estimer le rôle prédominant de la permittivité ou de la conductivité sur la répartition du potentiel le long de la couche. A ce sujet, J. P. Rivenc et T. Lebey [30] parlent d'effet capacitif et d'effet résistif. Ils montrent entre autre que l'homogénéisation de la répartition du potentiel le long de la couche peut être obtenue similairement avec les deux effets.

3.1.2 Représentation par un circuit équivalent

Le modèle unidimensionnel linéaire présenté précédemment, peut être également décrit par un modèle de circuit. Le câble est modélisé par une ligne de capacité linéique C_i , et la couche par une capacité linéique C_{sc} en parallèle avec une résistance linéique R_{sc} (Figure 23).

3.1.3 Cas non linéaire

Lorsqu'un des paramètres de la couche dépend du champ électrique, il est difficile de trouver une solution analytique de l'équation (51). On a alors recours à une résolution numérique. Lupo et al. [29] ont utilisé une méthode d'éléments finis en 1D. La non-linéarité est traitée par la méthode de Newton-Raphson.

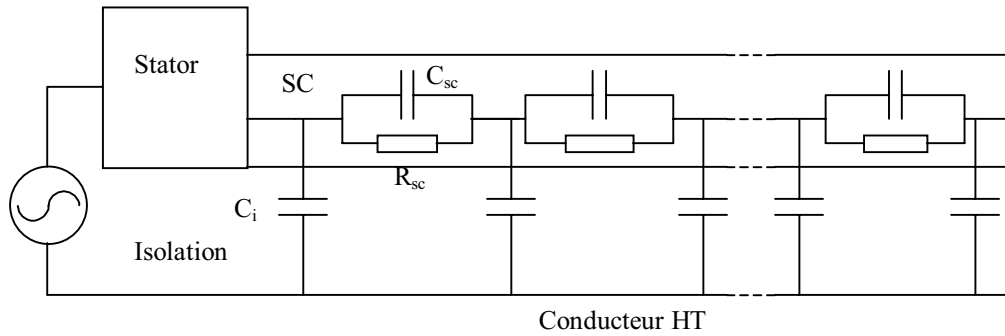


Figure 23 : Représentation circuit de la couche SC en sortie d'une barre de machine.

Ainsi, le problème de sortie des barres des machines peut être modélisé de manière correcte grâce aux approximations permises par sa structure simple. Seulement, lorsque la géométrie du système se complique, ce modèle n'est plus valable.

3.2 Modèles bidimensionnels

Une solution plus pertinente et surtout plus flexible pour modéliser un système électrique est d'utiliser des méthodes numériques telles que la méthode des éléments de frontière (BEM), la méthode des éléments finis (FEM), ou la méthode des différences finies (FDM). Ces méthodes sont mieux adaptées car elles prennent en compte la complexité des géométries sans pour autant s'embarrasser d'hypothèses contraignantes.

3.2.1 Modèle avec épaisseur du SC très faible (couche mince)

Lorsque les dimensions de l'épaisseur de la couche SC sont faibles devant les dimensions du reste du système, il est délicat d'utiliser une méthode maillant la totalité de la région. Yeo et al [27] ont développé un modèle permettant de prendre en compte une couche conductrice extrêmement fine dans un code simulant des problèmes à symétrie axisymétrique via la BEM, nous l'appellerons le modèle de couche mince. L'idée est de ramener une fine région conductrice comprise entre deux régions diélectriques (Régions 1 et 2, Figure 24) à une interface entre ces deux diélectriques.

En supposant que l'épaisseur h de la région conductrice est suffisamment faible pour que les propriétés ne changent pas suivant cette direction, on peut remplacer cette couche par une surface dotée de propriétés électriques surfaciques. Les grandeurs électriques dans le volume SC et dans la couche SC équivalente sont récapitulées dans le Tableau 6. Ces grandeurs sont liées par (55).

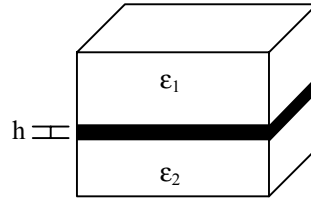


Figure 24 : Région conductrice d'épaisseur h assez fine, comprise entre deux régions diélectriques de permittivités respectives ϵ_1 et ϵ_2 .

j_v : Densité volumique de courant (A/m^2)	j_s : Densité surfacique de courant (A/m)
D_v : Induction volumique (VF/m^2)	D_s : Induction surfacique (VF/m)
σ_v : Conductivité volumique (S/m)	σ_s : Conductivité surfacique (S)
ϵ_v : Permittivité volumique (F/m)	ϵ_s : Permittivité surfacique (F)
ρ_v : Densité volumique de charge (C/m^3)	ρ_s : Densité surfacique de charge (C/m^2)

Tableau 6 : Grandeurs électriques de la couche SC et de la surface équivalente.

$$\begin{aligned}
 j_s &= h j_v \\
 D_s &= h D_v \\
 \sigma_s &= h \sigma_v \\
 \epsilon_s &= h \epsilon_v \\
 \Theta_s &= h \Theta_v
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

Pour déterminer l'équation qui régit les grandeurs surfaciques, nous allons procéder d'une manière à peu près analogue à celle employée pour la relation unidimensionnelle.

En supposant que l'épaisseur h de la couche est suffisamment faible pour que la densité

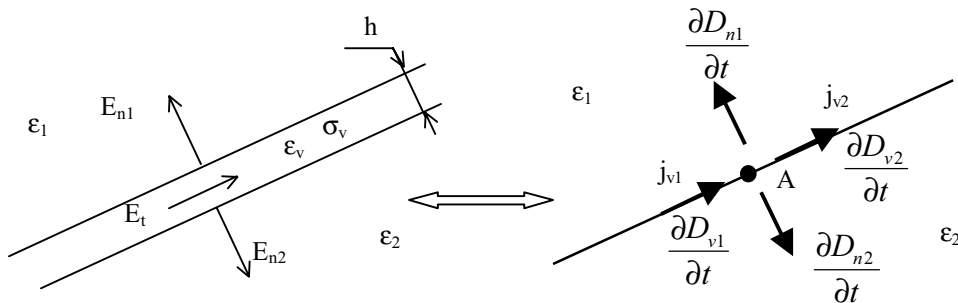


Figure 25 : Bilan de densités de courant dans la couche SC.

de courant de conduction soit constante dans la section de la couche, et que le courant de

déplacement est négligeable dans la couche, on écrit la loi des nœuds au point A :

$$j_{v1} = j_{v2} + \frac{\partial D_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n2}}{\partial t} \quad (56)$$

j_{vi} étant la projection du flux de courant de conduction volumique sur la couche et $\frac{\partial D_{ni}}{\partial t}$ étant la projection du flux du courant de déplacement sur la normale à la couche:

$$\begin{aligned} j_{vi} &= \sigma_v E_{ti} \\ D_{ni} &= \varepsilon_0 \varepsilon_i E_{ni} \end{aligned} \quad (57)$$

D'après (55), on réécrit (56) avec les caractéristiques surfaciques de la couche:

$$\frac{j_{s2} - j_{s1}}{h} + \frac{\partial}{\partial t} (D_{n1} + D_{n2}) = 0 \quad (58)$$

La valeur limite du premier terme correspond à une divergence:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{j_{s2} - j_{s1}}{h} \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s \quad (59)$$

Le deuxième terme, correspond au saut du champ électrique à l'interface, c'est la densité de charge surfacique Θ_s :

$$D_{n1} + D_{n2} = \Theta_s \quad (60)$$

L'équation de conduction dans la couche mince est alors:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s + \frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = 0 \quad (61)$$

équation proposée par Yeo et al. [27]. Elle sert d'équation d'interface dans le calcul numérique via la méthode des équations intégrales de frontière (BEM).

Si l'on suppose à présent que la projection du courant de déplacement $\partial D_v / \partial t$ sur la couche SC n'est pas négligeable, on peut écrire une nouvelle équation d'interface à partir d'un bilan des courants au nœud A plus complète qui tient compte des courants capacitifs dans la couche:

$$j_{v1} + \frac{\partial D_{v1}}{\partial t} = j_{v2} + \frac{\partial D_{v2}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n1}}{\partial t} + \frac{\partial D_{n2}}{\partial t} \quad (62)$$

Comme pour le courant de conduction \vec{j}_s , l'hypothèse de couche mince permet de faire apparaître la divergence d'un courant surfacique capacitif dans la couche SC:

$$\frac{\partial D_{v2}}{\partial t} - \frac{\partial D_{v1}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{D_{s2} - D_{s1}}{h} \right] \right) \rightarrow \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{D}_s}{\partial t} \quad (63)$$

La nouvelle équation d'interface est alors:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_s + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}_s) + \frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

\vec{D}_s est l'induction électrique surfacique. L'écriture de (64), en fonction du potentiel électrique donne:

$$\vec{\nabla} \sigma_s \cdot \vec{\nabla} V + \sigma_s \nabla^2 V + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \varepsilon_s \cdot \vec{\nabla} V + \varepsilon_s \nabla^2 V) + \frac{\partial \Theta_s}{\partial t} = 0 \quad (65)$$

Cette relation peut être intégrée dans une méthode de calcul de champ électrique par la BEM. Une formulation adaptée permet de traiter des systèmes en trois dimensions axisymétriques via la modélisation bidimensionnelle. Chaque région est traitée par la BEM, et on rajoute (65) lors de l'écriture des équations de passage aux interfaces.

Pour tenir compte des différentes non-linéarités, un algorithme itératif à pas à pas dans le temps est employé comme pour le cas 1D.

3.2.2 Modèle avec épaisseur du SC non négligeable

Si aucune approximation n'est possible quand au dimensionnement du SC, on peut implémenter directement l'équation des diélectriques conducteurs présentée en (46):

$$\vec{\nabla} \sigma_v \cdot \vec{\nabla} V + \sigma_v \nabla^2 V + \varepsilon_0 \varepsilon_v \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 V) = 0 \quad (66)$$

La conductivité et la permittivité sont ici des caractéristiques volumiques: linéaire pour ε_v et non-linéaire pour σ_v . La région SC est alors décrite par (66), tandis que le reste du système est décrit par l'équation de Laplace en régime électro-quasi-statique [31].

Un des intérêts de cette modélisation est de pouvoir prendre en compte le caractère anisotrope des propriétés électriques [32]. C'est cette équation que nous avons implémentée au travers du couplage FEM/BEM.

4 Conclusion

Nous avons pu remarquer dans cette section que la modélisation de la conduction électrique n'est pas toujours évidente. La conduction dans les couches minces en est un bon exemple, car elle fait appel à la notion de conduction surfacique.

On débouche alors sur des modèles qui ont un domaine de validité d'autant plus restreint que les hypothèses sont fortes. Dans le cas du modèle de couche mince, il faut que les

grandeurs électriques soient constantes dans le sens de l'épaisseur de la couche.

L'objectif proposé par ce travail de thèse est de construire un modèle capable de simuler un volume quelconque de diélectrique conducteur dans une géométrie à trois dimensions axisymétrique. Cela consiste à mailler uniquement la région conductrice afin de la traiter par la méthode des éléments finis. Ce calcul sera couplé avec la méthode des éléments de frontière qui effectuera le calcul dans le reste de la géométrie, i.e. dans les régions diélectriques sans conductivité. Un algorithme sera présenté afin de prendre en compte la conductivité non-linéaire.

Chapitre II - Modélisation des SC par couplage FEM/BEM

Il existe deux principales catégories de méthodes numériques pour résoudre les équations aux dérivées partielles. La plus ancienne, la méthode aux différences finies procède par approximation de l'opérateur différentiel. Le résultat est la solution exacte d'un système différentiel simplifié. Ce type d'approximation limite souvent l'ingénieur dans son choix du pas de discrétisation car l'on rencontre des problèmes de convergence de la solution.

La seconde catégorie de méthode numérique regroupe les méthodes dites variationnelles. Elles sont très répandues et doivent leur succès au fait que l'approximation est faite sur l'inconnue et non plus sur l'opérateur. La méthode des éléments finis (FEM) fait partie de cette catégorie, et elle approche l'inconnue grâce à l'approximation par éléments finis. Grâce à la diversité des éléments pouvant être employés, notamment les triangles en 2D ou les tétraèdres en 3D, cette méthode est très répandue pour la modélisation de géométries complexes. Le caractère répétitif de la méthode qui consiste à appliquer le même opérateur sur chaque élément a rendu cette méthode très efficace.

En marge de ces deux principales catégories existent des méthodes dites semi-analytiques comme la méthode des éléments de frontière (BEM). En considérant la linéarité des propriétés du problème, la solution est approchée par une somme de solutions élémentaires. Elle permet de prendre facilement en compte les conditions de champ nul à l'infini ou encore de n'avoir à mailler que les frontières de la géométrie. Sa formulation fournit une valeur assez précise de la projection du champ sur la normale aux frontières des régions, information qui est importante pour le dimensionnement du matériel d'isolation. Par contre elle n'est pas bien adaptée pour traiter les non-linéarités.

Les qualités énumérées précédemment font de la BEM une méthode intéressante pour le

calcul des contraintes en champ électrique rencontrées dans l'appareillage dédié au transport de l'énergie électrique.

Nous avons choisi d'employer une formulation axisymétrique car elle permet à partir d'un modèle bi-dimensionnel, de modéliser de manière pertinente les géométries à symétrie de révolution comme le matériel de poste (traversée, câble, isolateur ...). Afin de prendre en compte la non-linéarité des isolants SC, nous traitons ces régions à l'aide de la FEM via un couplage BEM/FEM.

Dans ce chapitre nous présentons la formulation de la FEM dans le domaine temporel et de la BEM dans le cas électrostatique, et nous détaillons les principales étapes du couplage de ces deux méthodes. Enfin nous traitons le cas des singularités géométriques en présence d'une région faiblement conductrice.

Section 1 - Méthodes numériques employées dans le couplage

Afin de rendre la FEM compatible avec la BEM, il est nécessaire d'exprimer la formulation de la FEM en fonction des champs normaux.

Dans cette section nous commençons par présenter l'écriture de l'équation de conduction dans les SC et sa discrétisation pour la FEM adaptée au couplage, puis nous écrivons la formulation de la BEM.

1 Formulation éléments finis pour la modélisation d'isolants SC

La méthode des éléments finis (FEM) permet de résoudre une équation aux dérivées partielles dotée de conditions aux limites. Elle est basée sur la technique d'approximation par éléments finis [33] qui permet d'approcher une fonction dans un espace donné à partir de la connaissance de ces valeurs en certains nœuds du domaine. Il faut pour cela diviser le domaine d'étude de la fonction en sous domaines élémentaires appelés éléments. A l'aide de fonctions d'approximation ayant un domaine de validité limité à l'élément, nous pouvons faire une approximation de la valeur de la fonction en tout point de cet élément. C'est sa naturelle adaptabilité à traiter des problèmes non-linéaires qui nous a conduit à la choisir pour modéliser les isolants SC.

1.1 Formulation intégrale

La FEM discrétise une formulation intégrale issue de la projection de l'équation aux dérivées partielles décrivant le système physique sur un espace de fonctions (méthode des résidus pondérés). Pour diminuer les erreurs d'approximation, on réduit le degré de dérivation en écrivant l'équation sous sa forme faible.

1.1.1 Projection du Laplacien

L'opérateur qui permet de décrire les phénomènes de conduction dans les diélectriques est le Laplacien (∇^2). Etudions de manière générale cet opérateur afin d'en déduire les propriétés utiles pour la modélisation qui nous intéresse.

Soit V , une fonction définie en tout point du domaine Ω borné par la frontière Γ (Figure 1)

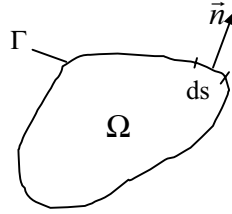


Figure 1 : Sens du vecteur normal à la frontière Γ du domaine Ω

et qui satisfait l'équation de Poisson:

$$\nabla^2 = -f \quad (1)$$

où f est un scalaire représentant le terme source.

On peut alors définir $R(V)$ le résidu suivant:

$$R(V) = \nabla^2 V + f \quad (2)$$

En définissant par W les fonctions de poids, la forme intégrale de ce système est:

$$I(V) = \iint_{\Omega} \langle W \rangle \{R(V)\} d\Omega \quad (3)$$

Toute solution V vérifiant l'équation de Poisson, doit aussi vérifier l'égalité (4).

$$I(V) = 0 \quad (4)$$

Lorsque V vérifie l'équation de Laplace ($f = 0$), on déduit la forme intégrale du Laplacien:

$$\iint_{\Omega} W \nabla^2 V d\Omega = 0 \quad (5)$$

1.1.2 Forme faible du Laplacien

Afin de diminuer les conditions de dérivabilité des fonctions de poids qui sont du deuxième ordre dans le cas du Laplacien, on écrit une forme dite «faible» de la relation intégrale (5).

Pour y parvenir, il faut réduire le degré de dérivation du Laplacien via une intégration par partie. Cette relation se déduit à partir de la relation vectorielle suivante:

$$\vec{\nabla} \cdot (W \vec{\nabla} V) = W \nabla^2 V + \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V \quad (6)$$

En intégrant (6) et connaissant la relation (7),

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (W \vec{\nabla} V) d\Omega = \oint_{\Gamma} W \vec{\nabla} V \cdot \vec{n} d\Gamma = \oint_{\Gamma} W \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma \quad (7)$$

nous obtenons la formulation faible de (5) qui sera utilisée dans la formulation en éléments finis:

$$\iint_{\Omega} W \nabla^2 d\Omega = - \iint_{\Omega} \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V d\Omega + \oint_{\Gamma} W \frac{\partial V}{\partial n} d\Gamma \quad (8)$$

L'autre intérêt de (8), est que dans le second terme intégral de droite, les conditions de Neumann sont prises en compte. En effet, $\partial V / \partial n$ est la projection du gradient du potentiel sur la normale à la frontière du domaine. Imposer des conditions de Neumann revient à imposer la valeur de cette projection. C'est ce terme qui permettra le couplage avec la méthode des éléments de frontière (BEM).

1.1.3 Discrétisation

Dans ce qui suit, nous allons présenter la discrétisation qui permet d'aboutir à une représentation matricielle de l'équation différentielle. Elle remplace la forme intégrale globale par une somme d'intégrales sur les éléments.

La géométrie de notre problème est décrite par un maillage à deux dimensions constitué d'éléments triangulaires du deuxième ordre (Figure 2).

Les fonctions de poids n'étant définies que sur un domaine Ω_e à la fois, l'intégrale (3)

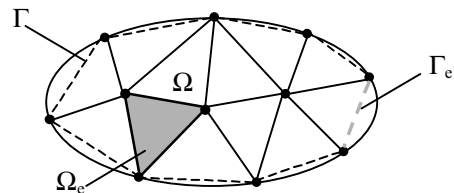


Figure 2 : Maillage du domaine bidimensionnel Ω borné par la frontière Γ . Ω_e représente le domaine d'un élément triangulaire.

s'écrit comme une somme d'intégrales élémentaires:

$$I(V) = \sum_e \iint_{\Omega_e} \langle W_e \rangle \{R(u)\} d\Omega \quad (9)$$

1.1.4 Approximation par éléments du deuxième ordre

L'approximation de la valeur du potentiel dans un élément est faite par éléments finis via des éléments triangulaires quadratiques (Figure 3). On augmente ainsi la précision des calculs et on peut prendre en compte les frontières courbes de la géométrie.

Le potentiel en un point de l'élément peut être décrit comme la combinaison au second

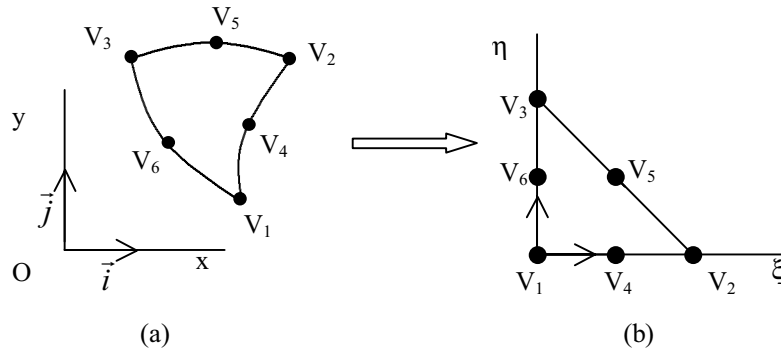


Figure 3 : En (a), un élément triangulaire deuxième ordre quelconque d'un maillage. En (b), l'élément de référence sur lequel seront faits tous les calculs intégraux.

ordre suivante:

$$V(x, y) = \sum_{r=1}^6 N_r(x, y) V_r \quad (10)$$

avec N_k , fonctions d'interpolation associées au nœud r .

Ce type d'élément fait partie des éléments de haute précision de Lagrange. Ils sont obtenus en ajoutant des nœuds d'interpolation sur les frontières de l'élément linéaire (3 nœuds). Les fonctions d'interpolation N_r sont ici quadratiques. La continuité de l'élément est de type C^0 , c'est à dire que le potentiel V et la projection tangentielle du gradient ($\partial V / \partial n$) sont continus, alors que la projection du gradient sur la normale à la frontière de l'élément est discontinue.

Pour un élément de référence défini dans le repère (ξ, η) (Figure 3-(b)), nous connaissons ces fonctions de forme (Tableau 1).

$N_1(\xi, \eta) = -\lambda(1 - 2\lambda)$	$N_2(\xi, \eta) = -\xi(1 - 2\xi)$	$N_3(\xi, \eta) = -\eta(1 - 2\eta)$
$N_4(\xi, \eta) = 4\xi\lambda$	$N_5(\xi, \eta) = 4\xi\eta$	$N_6(\xi, \eta) = 4\eta\lambda$
$\lambda = 1 - \xi - \eta$	$0 \leq \xi \leq 1$ et $0 \leq \eta \leq 1$	

Tableau 1 : Fonctions de forme dans le repère de référence (ξ, η) .

De la même manière, nous définissons les éléments linéiques du deuxième ordre permettant de discrétiser les intégrales de frontière (Figure 4).

Le potentiel en un point de l'élément de frontière s'écrira alors:

$$V(x, y) = \sum_{r=1}^3 N'_r(x, y) V_r \quad (11)$$

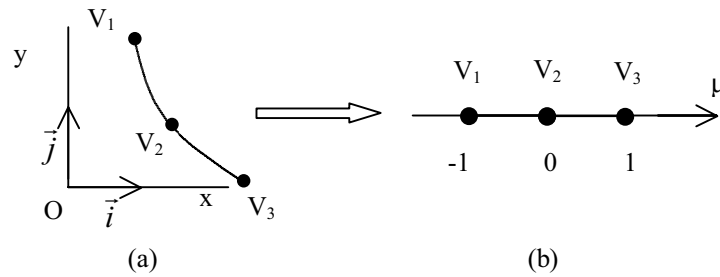


Figure 4 : En (a), un élément linéique deuxième ordre quelconque d'un maillage. En (b), l'élément de référence.

V est donc exprimé comme une combinaison linéaire des potentiels V_r aux nœuds de l'élément et des fonctions de pondération N'_r qui sont des polynômes de Lagrange du 2^{nd} ordre (Figure 2).

Dans la suite de l'exposé, nous utiliserons la notation d'Einstein afin de représenter les

$N'_1(\mu) = \frac{1}{2}\mu(\mu - 1)$	$N'_2(\mu) = 1 - \mu^2$	$N'_3(\mu) = \frac{1}{2}\mu(\mu + 1)$
$-1 \leq \mu \leq +1$		

Tableau 2 : Fonctions de forme dans le repère de référence (μ).

combinaisons linéaires. Ainsi les relation (10) et (11) s'écrivent:

$$V(x, y) = N_n(x, y)V_n \text{ sur } \Omega \quad (12)$$

$$V(x, y) = N'_k(x, y)V_k \text{ sur } \Gamma$$

En plus d'alléger l'écriture, cette notation permet de mieux comprendre l'écriture matricielle.

1.1.5 Discrétisation du Laplacien

Nous allons employer la formulation de type Galerkin, qui utilise comme fonction de pondération W les fonctions d'interpolation N . La forme intégrale sur chaque élément surfacique e devient:

$$\sum_e \sum_{m=1}^6 \iint_{\Omega_e} N_m (\nabla^2 N_n) V_n d\Omega = 0 \quad (13)$$

Pour éviter d'écrire le terme de sommation, nous n'écrirons dans la suite que les termes représentant les matrices élémentaires. Dans le cas de (13), c'est la matrice 6×6 $[A_{mn}]$ dont la valeur de la m -ième ligne et n -ième correspond à:

$$[A_{mn}] = \iint_{\Omega_e} N_m \nabla^2 N_n d\Omega \quad (14)$$

Ce qui permet l'écriture la relation matricielle (15), qui pourra ensuite être assemblée dans la matrice principale.

$$[A_{mn}] \{V_n\} = \{S_m\} \quad (15)$$

Le vecteur $\{V_n\}$ représente les inconnues en potentiel et $\{S_m\}$ le terme source (conditions de Dirichlet et de Neumann).

Après intégration par partie de (13) qui permet de réduire le degrés de dérivation du Laplacien, on se retrouve finalement avec deux types de matrice à assembler (16):

- E_{mn} une matrice 6×6 représentative de l'intégration sur l'élément surfacique,
- E'_{kl} une matrice 3×3 issue de l'intégration des élément linéiques de frontière.

$$-\sum_e \sum_{m=1}^6 \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n d\Omega + \sum_{e'} \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_{e'}} N_k \frac{\partial N_l}{\partial \mathbf{n}} V_l d\Gamma = 0 \quad (16)$$

Afin de rendre l'équation compatible avec les équations intégrales de frontière, nous prenons le vecteur normal à la frontière Γ orienté vers l'intérieur de la région Ω (Figure 1). Et nous définissons une nouvelle inconnue Ψ qui est le champ normal à cette frontière Γ :

$$\Psi(x, y) = -\frac{\partial V(x, y)}{\partial \mathbf{n}} \quad (17)$$

Cette inconnue est employée dans la formulation des équations intégrales de frontières. Les méthodes pourront être couplées grâce à l'équation de continuité de l'induction électrique. L'approximation en élément fini de (17) donne:

$$\Psi(x, y) = -\frac{\partial (N'_l(x, y) V_l)}{\partial \mathbf{n}} = N'_l(x, y) \Psi_l \quad (18)$$

Les deux types de matrice élémentaire à calculer sont finalement $[E_{mn}]$ et $[E'_{mn}]$:

$$\begin{aligned} \sum_e \sum_{m=1}^6 [E_{mn}^e] \{V_n\} + \sum_{e'} \sum_{k=1}^3 [E'_{kl}] \{\Psi_l\} &= 0 \\ [E_{mn}^e] &= \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n d\Omega \\ [E'_{kl}] &= \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l d\Gamma \end{aligned} \quad (19)$$

Pour calculer ces intégrales nous utilisons la méthode de Gauss étendue à deux dimensions. L'intégrale est définie comme une somme de la valeur de la fonction à intégrer pour certaines valeurs pondérées par un poids.

$$\iint_S y(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^r w_i y(x_i, y_i) \quad (20)$$

L'intérêt de cette méthode est qu'elle nécessite un nombre restreint de points de Gauss. Par exemple pour intégrer exactement un polynôme d'ordre 2, six points de Gauss suffisent. Pour garantir la précision de nos calculs, nous avons utilisé 12 points ($r = 12$). Les coordonnées de ces points, ainsi que les poids associés sont répertoriés dans des tables [33].

1.2 Equation dans les isolants SC adaptée à la FEM

Les matériaux que nous souhaitons modéliser possèdent des propriétés diélectriques et conductrices non négligeables. C'est la combinaison de ces deux propriétés dans les bonnes proportions qui confèrent à ces matériaux un grand intérêt dans l'isolation HT.

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 V) = 0 \quad (21)$$

Nous allons discrétiser l'équation de conduction dans un isolant SC (21) obtenue au *Chap I-Sect 2-3.2.2*. Il faut alors séparer deux types de formulation suivant que cela est un problème 2D plan ou à symétrie axiale.

Pour une conductivité linéaire, nous avons développé une formulation harmonique. Lorsque la conductivité est non linéaire (dépendante du module du champ électrique), nous avons développé une formulation discrétisée dans le temps (pas à pas dans le temps).

1.2.1 Conductivité volumique linéaire en régime harmonique

Lorsque le SC est homogène et linéaire (conductivité linéaire), nous pouvons sortir σ de la divergence. Si de plus la source de tension est sinusoïdale (régime harmonique), l'équation de conduction se réduit à l'équation de Laplace précédée d'une constante complexe:

$$\sigma \nabla^2 V + j \omega \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla^2 V = 0 \quad (22)$$

Cela correspond à l'équation de comportement du potentiel électrique dans un diélectrique non parfait dont les pertes diélectriques dues à la permittivité complexe ($\tan \delta$)

représenteraient les pertes réelles causées par le courant de conduction.

$$\begin{aligned} j\omega\varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r\nabla^2V &= 0 \\ \underline{\varepsilon}_r &= \varepsilon_r - j\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (23)$$

ω est la pulsation de la source de tension.

Les deux types de matrice élémentaire prennent alors la forme:

$$\begin{aligned} [E_{mn}] &= \varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla}N_m \cdot \vec{\nabla}N_n d\Omega \\ [E'_{kl}] &= \varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l d\Gamma \end{aligned} \quad (24)$$

a) Cas 2D plan

Ce sont les géométries dont les propriétés sont invariantes suivant une direction du repère cartésien. On peut aussi traiter des problèmes d'onde plane ou de condensateur plan suffisamment larges. En mécanique cette géométrie est employée pour décrire les écoulements plans laminaires. En électrotechnique on l'a largement utilisée en éléments finis, et elle nous servira à étudier la répartition du champ électrique dans la section d'un câble HT. A partir des notations de la Figure 1, la surface et la frontière élémentaires de la géométrie 2D plane sont:

$$\begin{aligned} d\Omega &= dx dy \\ d\Gamma &= ds \end{aligned} \quad (25)$$

On peut alors développer (24):

$$\begin{aligned} [E_{mn}] &= \varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r \iint_{\Omega_e} \left(\frac{\partial N_m}{\partial \rho} \frac{\partial N_n}{\partial \rho} + \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) d\rho dz \\ [E'_{kl}] &= \varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r \int_{\Gamma_e} N'_k N'_l ds \end{aligned} \quad (26)$$

b) Cas axisymétrique

Une géométrie axisymétrique (Figure 5) est couramment définie par un système de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) , l'axe (Oz) étant l'axe de symétrie du problème.

La géométrie et les sources étant symétriques par rotation suivant l'angle θ , les grandeurs physiques sont alors indépendantes de la position suivant θ . Il est donc possible de traiter le problème comme un problème 2D contenant l'axe (Oz) . La surface et la frontière

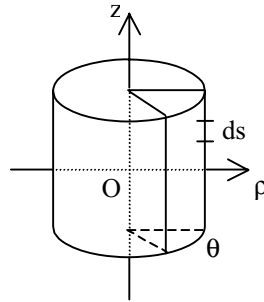


Figure 5 : Figure axisymétrique dans un repère cylindrique (ρ, θ, z) . La figure est invariante par rotation suivant θ .

élémentaires sont dans ce cas:

$$\begin{aligned} d\Omega &= 2\pi\rho d\rho dz \\ d\Gamma &= 2\pi\rho ds \end{aligned} \quad (27)$$

Ce type de géométrie intéresse l'électrotechnicien puisqu'un grand nombre de dispositifs tels que les isolateurs où les disjoncteurs présentent en première approximation une symétrie de ce type.

D'après l'intégration par partie (8), la relation (24) s'écrit:

$$\begin{aligned} [E_{mn}] &= \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \iint_{\Omega_e} \rho \left(\frac{\partial N_m}{\partial \rho} \frac{\partial N_n}{\partial \rho} + \frac{\partial N_m}{\partial z} \frac{\partial N_n}{\partial z} \right) d\rho dz \\ [E'_{kl}] &= \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}_r \int_{\Gamma_{e'}} \rho N'_k N'_l ds \end{aligned} \quad (28)$$

On remarque que la seule différence entre les deux formulations est la présence de ρ sous les signes intégraux dans le cas axisymétrique. Il en sera de même en régime temporel. Pour simplifier l'écriture, nous exposerons les formulations sous la forme générale (22). Pour obtenir la formulation il suffira de remplacer la surface et la frontière élémentaires adéquat (27) et (25).

1.2.2 Conductivité volumique linéaire en régime temporel

Lorsque la source de tension n'est plus sinusoïdale, par exemple lorsque c'est une onde de choc de tension type foudre (Annexe 1), nous ne pouvons plus employer le modèle de permittivité complexe.

Pour tenir compte de la dérivée temporelle de (21) il faut discrétiser suivant la méthode des différences finies. Dans le but de simplifier la représentation des équations de conduction, nous avons choisi d'utiliser dans la formulation suivante le schéma d'Euler explicite. Mais

dans la deuxième section de ce chapitre nous exposerons le schéma d'intégration temporel réellement employé (semi-implicite).

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \quad (29)$$

$V(t + \Delta t)$ et $V(t)$ sont les potentiels électriques aux instants respectifs $t + \Delta t$ qui est l'instant présent auquel on veut déterminer le potentiel et t l'instant précédent. Pour alléger l'écriture, nous noterons les valeurs des variables pour les deux instants:

$$\begin{aligned} V(t + \Delta t) &= V^i \\ V(t) &= V^{i-1} \end{aligned} \quad (30)$$

Lorsque l'on parle d'instant i , cela représentera l'instant auquel on ne connaît pas encore la valeur du potentiel. Avec ce schéma, l'équation (21) s'écrit:

$$(\sigma \Delta t + \varepsilon_0 \varepsilon_r) \nabla^2 V^i = \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla^2 V^{i-1} \quad (31)$$

Après intégration par partie, l'équation discrétisée est:

$$\begin{aligned} & \sum_e \sum_m a \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^i d\Omega + \sum_{e'} \sum_k a \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \Psi_l^i d\Gamma \\ &= \sum_e \sum_m b \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^{i-1} d\Omega + \sum_{e'} \sum_k b \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \Psi_l^{i-1} d\Gamma \end{aligned} \quad (32)$$

$$\text{avec} \quad a = \sigma \Delta t + \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad \text{et} \quad b = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

Les termes à gauche du signe égal correspondent à l'assemblage des matrices élémentaires $[E_{mn}]$ et $[E'_{mn}]$ et les termes de droite correspondent aux termes source puisque les valeurs du potentiel et du champ normal à l'instant $(i - 1)\Delta t$ sont connues. On y retrouve une intégrale de surface $\{S_m\}$ et une intégrale de frontière $\{S'_k\}$, qui sont des vecteurs.

$$\begin{aligned} [E_{mn}] &= a \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n d\Omega \\ [E'_{kl}] &= a \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l d\Gamma \\ \{S_m^i\} &= b \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^{i-1} d\Omega \\ \{S'^i_{kl}\} &= \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \Psi_l^{i-1} d\Gamma \end{aligned} \quad (33)$$

Le principe de ce schéma temporel est donc de calculer la solution en un instant donné grâce aux valeurs de la solution à l'instant précédent, c'est ce que l'on nomme le pas à pas dans le temps.

1.2.3 Conductivité volumique non linéaire

L'objectif principal du couplage est de pouvoir traiter les régions possédant une conductivité non linéaire par la FEM tout en utilisant la BEM pour le calcul du champ dans les régions linéaires. Réécrivons la relation de l'équation de conduction sous sa forme la plus générale (21):

$$\vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{\nabla} V) + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 V) = 0 \quad (34)$$

Supposons que la conductivité dépende du module $|\vec{E}|$ du champ électrique:

$$\sigma = f(|\vec{E}|) \quad (35)$$

En prenant en compte la discrétisation temporelle, (34) devient:

$$\Delta t \vec{\nabla} \sigma^{i-1} \cdot \vec{\nabla} V^i + (\sigma^{i-1} \Delta t + \varepsilon_0 \varepsilon_r) \nabla^2 V^i = \varepsilon_0 \varepsilon_r \nabla^2 V^{i-1} \quad (36)$$

Après intégration par partie de (36), le terme contenant $\vec{\nabla} \sigma^{i-1}$ s'annule et on obtient:

$$\begin{aligned} \Delta t \iint_{\Omega} \sigma^{i-1} \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V^i d\Omega + \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega} \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V^i d\Omega + \oint_{\Gamma} \sigma^{i-1} W \Psi^i d\Gamma + \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_{\Gamma} W \Psi^i d\Gamma \\ = \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega} \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V^{i-1} d\Omega + \varepsilon_0 \varepsilon_r \oint_{\Gamma} W \Psi^{i-1} d\Gamma \end{aligned} \quad (37)$$

Comme précédemment, le terme de gauche représente les matrices élémentaires à assembler:

$$\begin{aligned} [E_{mn}^i] &= \Delta t \iint_{\Omega_e} \sigma^{i-1} \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n d\Omega + \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n d\Omega \\ [E_{kl}^i] &= \Delta t \int_{\Gamma_{e'}} \sigma^{i-1} N'_k N'_l d\Gamma + \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l d\Gamma \end{aligned} \quad (38)$$

et le terme de droite, représente le vecteur source:

$$\begin{aligned} \{S_{mn}^i\} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^{i-1} d\Omega \\ \{S_{kl}^i\} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \Psi_l^{i-1} d\Gamma \end{aligned} \quad (39)$$

Ces différentes formulations ont été implantées lors du couplage de la FEM avec la BEM. Elles ont été présentées sous forme matricielle dans le but d'offrir une vue un peu plus

concrète de ce que représente un assemblage du point de vue du programmeur. Notons le caractère répétitif et donc intéressant pour la programmation de la méthode qui se réduit à calculer la matrice $[E_{mn}]$, et le vecteur $\{S_m\}$ pour chaque élément triangulaire du maillage, ainsi que $[E'_{mn}]$ et $\{S'_k\}$ pour chaque élément linéique des frontières.

Avant de présenter le couplage à proprement parler, voici une brève présentation de la formulation en équation intégrale utilisée pour calculer le champ dans les régions linéaires.

2 Méthode des Eléments de Frontière adaptée au couplage

La formulation des problèmes de champ par la méthode des éléments de frontière (BEM) basée sur «l'identité de Green» permet une résolution de l'équation de Laplace pour n'importe quelle condition aux limites. L'originalité de cette formulation est de traiter chaque région diélectrique de manière séparée. Elle est donc tout à fait adaptée à un couplage avec une autre méthode numérique comme la méthode des éléments finis (FEM). Dans cette partie nous présentons les points essentiels de la formulation tirée de l'identité de Green en vue d'effectuer le couplage avec la méthode des éléments finis. Pour plus de détails concernant les diverses formulations nous renvoyons le lecteur au mémoire de thèse de L. Krähenbül [34].

2.1 Méthode intégrale tirée de l'identité de Green

L'objectif est de décrire un problème électro-quasi-statique (*ChapI-Sect-2.2*) dans un domaine Ω borné par une frontière Γ . Celui-ci est régi de manière générale par l'équation de Poisson en trois dimensions:

$$\nabla^2 V + f_\Omega = 0 \quad (40)$$

V est le potentiel électrique et f_Ω la densité volumique de charge dans le domaine Ω .

2.1.1 Identité de Green

Une équation aux intégrales de frontières (EIF) peut être écrite à partir de l'identité de Green [34]. Retrouvons cette équation en partant de la forme intégrale de l'équation de Poisson, et ce afin de faire apparaître les points communs entre la formulation en éléments finis et celle aux éléments de frontière.

Pour une fonction de pondération W quelconque, deux fois dérivable, la forme intégrale de (40) est:

$$R = \iiint_{\Omega} W (\nabla^2 V + f_{\Omega}) \, d\Omega \quad (41)$$

En intégrant une première fois par parties nous obtenons la formulation faible (42) couramment employée dans la méthode des éléments finis, où le degré de dérivation a été réduit de un.

$$R = - \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V - W f_{\Omega}) \, d\Omega + \oint_{\Gamma} W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma = 0 \quad (42)$$

En intégrant une seconde fois par partie, W s'écrit:

$$R = - \iiint_{\Omega} [(\nabla^2 W) V - W f_{\Omega}] \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \left(W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\Gamma = 0 \quad (43)$$

En remplaçant dans l'intégrale sur W les Laplaciens correspondants, on retrouve la seconde identité de Green, qui est à la base des équations intégrales de frontière:

$$\iiint_{\Omega} (V \nabla^2 W - W \nabla^2 V) \, d\Omega = \oint_{\Gamma} \left(W \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} - V \frac{\partial W}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\Gamma = 0 \quad (44)$$

Notons que l'ordre de dérivation ici est zéro, alors qu'il est de un pour la forme faible utilisée dans la méthode des éléments finis.

2.1.2 Equation intégrale de frontière (EIF)

Afin de retrouver les EIF, il faut prendre comme fonction de projection W , la fonction de Green G définie en Annexe 2. L'équation (44) s'écrit alors:

$$c_p V(\vec{r}) = - \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 V(\vec{r}') \, d\Omega - \oint \left(\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \mathbf{n}} V(\vec{r}') - G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial V(\vec{r}')}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\Gamma' \quad (45)$$

$$\text{avec} \quad c_p = \frac{\alpha}{\pi}$$

α est l'angle solide de la frontière Γ vue depuis le point d'observation P (Annexe 2).

En l'absence de charge électrique, le terme intégral dans le domaine Ω de l'équation (45) s'annule et l'on obtient l'équation intégrale de frontière (46) adaptée à un problème d'électrostatique sans charge ou à un problème de magnétostatique sans courant. Suivant le cas, V est respectivement soit le potentiel électrique scalaire soit le potentiel vecteur magnétique.

$$c_p V = - \oint_{\Gamma} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} V - G \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \right) \, d\Gamma \quad (46)$$

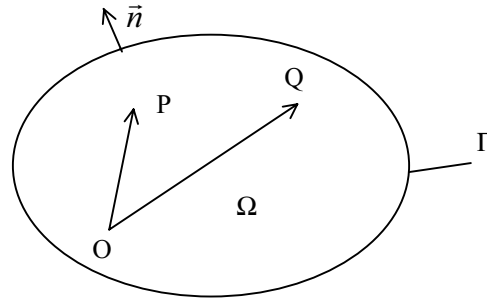


Figure 6 : Point d'observation P et point d'intégration Q dans le domaine Ω de frontière Γ ayant pour vecteur directeur \vec{n} .

Ecrire l'équation (46) revient donc à annuler l'intégrale I_P au point d'observation P .

$$I_P = - \iiint_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}') \nabla^2 V(\vec{r}') d\Omega \quad (47)$$

Ce qui ne correspond pas exactement à annuler le Laplacien mais plutôt à annuler sa projection sur la fonction de Green au point d'observation P . C'est d'ailleurs en cela que la méthode peut être considérée comme une méthode projective [34].

2.2 Formulation axisymétrique de l'EIF

La profusion de géométries axisymétriques en électrotechnique, notamment dans le domaine de l'isolation électrique, nous a poussés à travailler sur la modélisation des géométries axisymétriques.

Considérons une géométrie axisymétrique placée dans un repère cylindrique (ρ, θ, z)

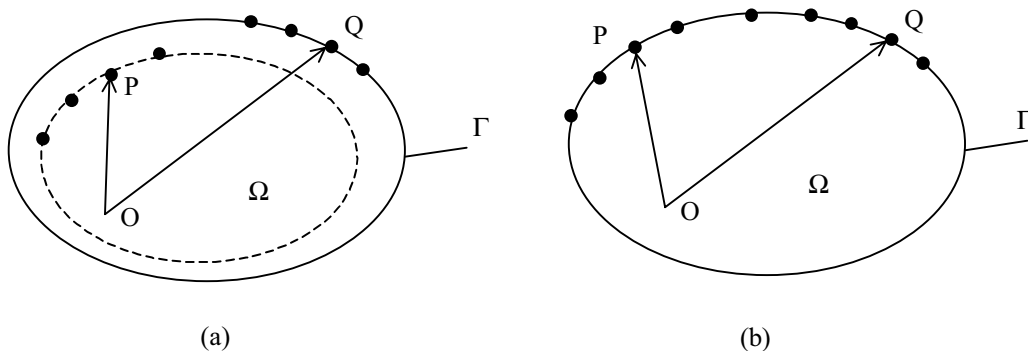


Figure 7 : Figure possédant une symétrie axisymétrique. Le problème est inchangé par rotation autour de (Oz) .

(Figure 7). Si les sources respectent la même symétrie, alors le potentiel V et le champ normal $\partial V/\partial n$ sont indépendants de la coordonnée θ . On peut donc intégrer l'EIF suivant le chemin dc indépendamment des autres variables. Les noyaux G et $\partial G/\partial n$ sont tout

d'abord pré-intégrés suivant θ pour ensuite être intégrés dans le plan (ρ, z) avec le reste de l'EIF.

Sachant que la surface élémentaire sur ce type de géométrie est $d\Gamma = dc ds$, en intégrant (46) sur un tour complet, on obtient une EIF axisymétrique:

$$c_p V = - \oint_L \left(V \oint_C \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dc - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{n}} \oint_C G dc \right) ds \quad (48)$$

Les noyaux pré-intégrés seront nommés G_{ax} et G'_{ax} :

$$\begin{aligned} G_{ax} &= \oint_C G dc \\ G'_{ax} &= \oint_C \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dc \end{aligned} \quad (49)$$

G_{ax} correspond au potentiel d'une distribution linéique uniforme de charge sur un cercle de rayon r . L'expression exacte de G_{ax} et G'_{ax} est donnée en Annexe 2 et les calculs pour les obtenir peuvent être consultés dans le volume I, page 202 du Durand [35].

2.3 Choix de la méthode de discrétisation

2.3.1 Frontière d'intégration

Le mode de discrétisation a été choisi de manière à rendre possible le couplage avec une méthode variationnelle. La frontière est divisée en éléments linéiques quadratiques et les variables sont approchées par une approximation aux éléments finis.

En pratique, on ne peut évidemment pas écrire l'EIF (48) sur toute la frontière, il va donc falloir outre la discrétisation, n'écrire l'équation que pour un nombre fini de points d'observation P . Ces points peuvent être placés sur une frontière se situant à l'intérieur (Figure 8-a) ou à l'extérieur du domaine. Dans ces deux cas, les points d'observation P ne sont jamais confondus avec les points d'intégration Q , mais cela demande un travail supplémentaire pour discrétiser une nouvelle frontière. Afin d'éviter ce coût numérique, les EIF sont écrites sur les points de la frontière du domaine (Figure 8-b).

Ainsi les nœuds de ces éléments seront à la fois les points d'intégration Q et les points d'observation P . Lorsque Q est proche ou confondu avec le point d'observation, on va rencontrer des singularités d'intégration pour le calcul des noyaux G_{ax} et G'_{ax} . Il est alors nécessaire d'intégrer en ayant pris soin d'extraire la singularité [36].

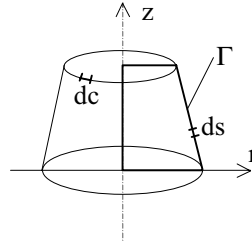


Figure 8 : (a) points d'observation P à l'intérieur du domaine Ω et (b) points d'observation P sur la frontière Γ du domaine.

2.3.2 Discrétisation des équations intégrales de frontière

En général, le calcul des intégrales se fera en développant les variables en éléments finis. L'ordre deux qui est l'ordre minimum pour une description des lignes courbes a été choisi. La méthode consiste à exprimer les grandeurs physiques sur chaque élément en fonction de l'abscisse curviligne locale (11).

V est donc exprimé comme une combinaison linéaire des potentiels V_k aux nœuds de l'élément et des fonctions de pondération N'_k qui sont des polynômes de Lagrange du 2^{nd} ordre ((12) et Tableau 2, page 53).

En chaque nœud de la frontière, le degré de liberté est égal à deux, c'est à dire qu'il existe deux inconnues par nœud, le potentiel V et sa dérivée normale $\partial V/\partial n$ par rapport à la frontière que nous noterons:

$$\Psi = -\frac{\partial V}{\partial n} \quad (50)$$

La discrétisation de l'équation (48) donne donc une somme d'intégrales I_k sur l'élément de référence:

$$I_k = \sum_l V_l A_l - \sum_l \Psi_l B_l$$

$$\text{avec} \quad A_l = \int_{-1}^{+1} N_l(\mu) G'_{ax} ds \quad \text{et} \quad B_l = \int_{-1}^{+1} N_l(\mu) G_{ax} ds \quad (51)$$

$$\text{et} \quad ds = J(\mu) d\mu$$

L'EIF sous sa forme discrétisée s'exprime comme la somme d'intégrales I_k sur chaque élément de la frontière:

$$c_p V = -\sum_{k=1}^{N_{el}} I_k \quad (52)$$

Les intégrales (51) sont intégrées numériquement par la méthode de Gauss avec 4 coefficients de pondération, ce qui donne déjà une assez bonne estimation puisque cela permet d'intégrer parfaitement un polynôme de degré 7 [33].

2.3.3 Assemblage des équations intégrales de frontière

La méthode d'assemblage choisie est dite «directe». Pour chaque nœud du maillage des frontières, on écrit autant d'équations intégrales qu'il y a de région en contact avec le nœud. Le résultat donne une matrice pleine par morceau et il est souvent difficile de résoudre le système matriciel par une méthode efficace.

Lorsque le nombre d'inconnues reste inférieur à 10000, la méthode de triangularisation de Gauss avec test du pivot et substitution inverse reste encore applicable.

Une image de la matrice est donnée via la fonction 'spy' de Matlab pour un problème à trois régions (Figure 9). Cette matrice correspond à la zone 2 de la Figure 13.

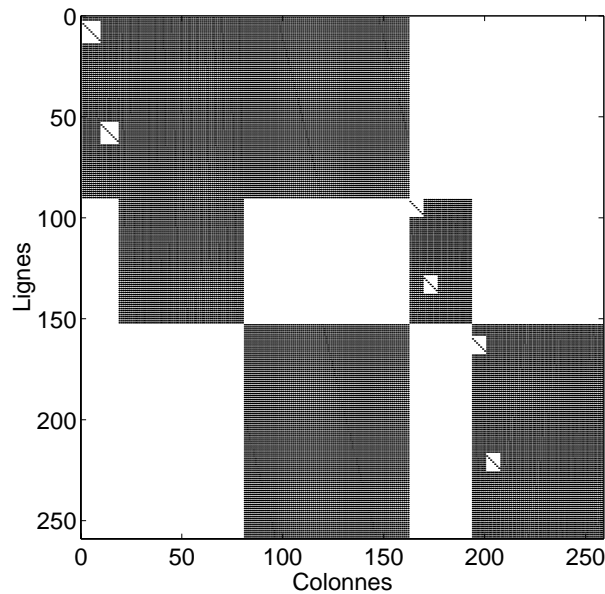


Figure 9 : Image d'une matrice donnée par la fonction 'spy' de Matlab - Matrice résultant de l'assemblage par la BEM d'un problème électrostatique à 3 régions diélectriques.

2.4 Cas des problèmes ouverts

Les EIF sont particulièrement bien adaptées pour la prise en compte des régions s'étendant jusqu'à l'infini (problèmes ouverts). Il suffit pour cela de modifier quelque peu l'équation (45).

Soit une région Ω_{ext} bornée par deux frontières Γ_{int} et Γ_{ext} (Figure 10). L'EIF écrite pour

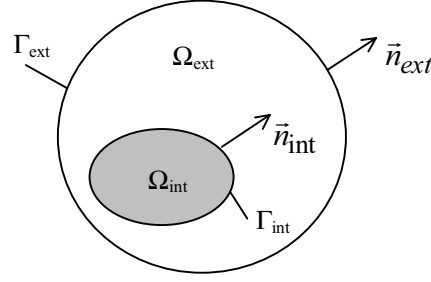


Figure 10 : Notations du vecteur normal directeur des frontières d'une région tendant vers l'infini.

un point de la région Ω_{ext} donne (53):

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) & \left(\oint_{\Gamma_{ext}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{ext}} d\Gamma - \oint_{\Gamma_{int}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{int}} d\Gamma \right) \\ & = \oint_{\Gamma_{ext}} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{ext}} V(\vec{r}') - G \frac{\partial V(\vec{r}')}{\partial \mathbf{n}_{ext}} \right) d\Gamma - \oint_{\Gamma_{int}} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{int}} V(\vec{r}') - G \frac{\partial V(\vec{r}')}{\partial \mathbf{n}_{int}} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (53)$$

En supposant que Γ_{ext} est une sphère de rayon r , la première intégrale surfacique du terme de droite de (53) se comportent en r^{-1} [36], ce qui annule ce terme lorsque r tend vers l'infini.

L'intégrale sur la région extérieure du terme de gauche, peut aussi être aisément calculée [34]:

$$\oint_{\Gamma_{ext}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{ext}} d\Gamma = -1 \quad (54)$$

L'EIF écrite dans une région Ω_{ext} lorsque r tend vers l'infini prend finalement la forme (55).

$$V(\vec{r}) \left(\oint_{\Gamma_{int}} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{int}} d\Gamma + 1 \right) = \oint_{\Gamma_{int}} \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_{int}} V(\vec{r}') - G \frac{\partial V(\vec{r}')}{\partial \mathbf{n}_{int}} \right) d\Gamma \quad (55)$$

Ecrire l'EIF dans une région infinie revient donc à rajouter la valeur 1 au coefficient de l'angle solide.

Ainsi, la prise en compte des conditions en champ infini nul dans les équations intégrales de frontière a l'avantage d'être simple à implémenter.

3 Conclusion

Nous avons présenté la formulation axisymétrique des équations intégrales de frontière en vue d'un couplage de la BEM avec la FEM. Outre le faible nombre d'inconnues permis

en ne maillant que les frontières, cette méthode semi-analytique a l'avantage de prendre naturellement en compte les conditions en champ ouvert. Comme les inconnues en chaque noeud sont le potentiel et le champ normal aux interfaces, cela permet une bonne précision dans l'estimation du champ électrique à proximité des frontières, ce qui est très intéressant dans le dimensionnement du matériel HT. Comme l'orientation du champ normal dépend de la frontière sur laquelle il s'appuie, on va rencontrer plusieurs inconnues en champ normal sur les nœuds où plusieurs régions se rencontrent, c'est ce que l'on appelle des singularités géométriques.

Dans la deuxième partie, consacrée à la technique de couplage, nous présentons une méthode de prise en compte des singularités géométriques associées à une région faiblement conductrice.

Section 2 - Les différentes étapes de la modélisation des SC

Dans cette section nous présentons en détail la technique de couplage des deux méthodes numériques ainsi que le schéma temporel employé pour prendre en compte le caractère non-linéaire de la conductivité. Nous rappelons également la méthode de traitement des singularités géométriques dans le cas électrostatique et proposons des adaptations de cette méthode pour prendre en compte la présence d'une région SC.

1 Couplage BEM/FEM

L'intérêt de ce couplage est de traiter les régions par une méthode différente suivant la linéarité ou la non-linéarité des régions. Dans notre modèle, les régions diélectriques sont traitées par la méthode des éléments de frontière (BEM), et les régions conductrices par la méthode des éléments finis (FEM). Le but du couplage est de prendre en compte la dépendance au champ électrique de la conductivité dans les isolations SC. On aurait pu effectivement traiter tout le problème par la FEM mais la non-linéarité du matériau oblige à employer des algorithmes de résolution nécessitant un grand nombre de fois l'assemblage de matrices. La possibilité de réduire le nombre d'inconnues est donc intéressante. De plus, la BEM permet d'estimer de manière très précise le champ normal aux interfaces de la région, information essentielle dans le dimensionnement du matériel isolant en haute tension (HT).

Ce type de couplage déjà employé pour traiter les non-linéarités en magnétostatique, [37], [38] ou [39] est adapté dans ce qui suit à la prise en compte des non-linéarités en isolation SC. Pour des raisons de lisibilité, nous présentons le couplage dans le cas d'une formulation 2D plane.

1.1 Technique du couplage

1.1.1 Equation du couplage

Soient une interface entre une région faiblement conductrice et une région diélectrique ne possédant aucune perte (Figure 11).

Reprenons sous forme matricielle les équations dont nous disposons dans les deux types de région à traiter (région SC et région diélectrique).

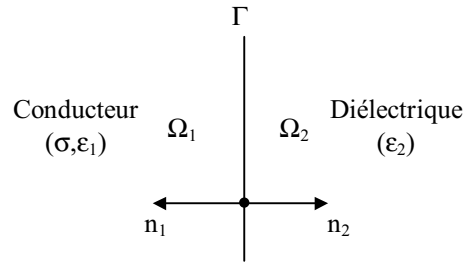


Figure 11 : Interface Γ entre une région conductrice Ω_1 de permittivité ε_1 et de conductivité σ et une région diélectrique Ω_2 de permittivité ε_2 .

Dans la région SC, l'équation à implémenter par la FEM peut être présentée sous la forme matricielle suivante:

$$[E] \{V_{ef}\} + [E'] \{\Psi_{ef}\} = \{S_{ef}\} \quad (56)$$

Les inconnues sont le potentiel V_{ef} en chaque nœud de la région conductrice, et le champ Ψ_{ef} normal à la frontière de la région. Si la région est en contact avec une électrode, la valeur imposée du potentiel en ce nœud est prise en compte dans le terme source S_{ef} .

L'écriture matricielle de l'équation intégrale régissant le phénomène électrique dans la région parfaitement isolante sera représenté par (57).

$$[A] \{V_{ei}\} + [A'] \{\Psi_{ei}\} = \{S_{ei}\} \quad (57)$$

Dans la première section de ce chapitre, nous avons expliqué que la formulation des éléments de frontière utilisée était bien adaptée au couplage avec une autre méthode numérique car elle s'applique à chaque région séparément. L'interaction entre les différentes régions se fait par l'intermédiaire des équations d'interface. Pour une interface entre deux régions diélectriques par exemple, ce sont l'équation de continuité du potentiel et l'équation du saut du champ normal sans charge surfacique qui sera écrite:

$$V_1 = V_2 \quad (a)$$

$$\varepsilon_1 \Psi_1 + \varepsilon_2 \Psi_2 = 0 \quad (b) \quad (58)$$

$$\text{avec} \quad \Psi_i = -\frac{\partial V}{\partial n_i}$$

Pour coupler la région traitée par la MEF, on va procéder de la même manière. On remplace l'équation intégrale de frontière par l'équation de Laplace discrétisée. Ce qui va changer, c'est l'équation du saut du champ électrique (58-b). La conductivité de la région 1 va entraîner la présence de charges électriques à sa frontière. Soit Θ_s la densité surfacique

de charge à la frontières de cette région. La condition de saut du champ électrique pour une interface conducteur/diélectrique, Γ (Figure 11) s'écrit alors:

$$\varepsilon_1 \Psi_1 + \varepsilon_2 \Psi_2 = \frac{\Theta_s}{\varepsilon_0} \quad (59)$$

Cette densité de charge crée une discontinuité de l'induction électrique normale.

Le couplage passe par une estimation de la densité surfacique de charge sur les frontières

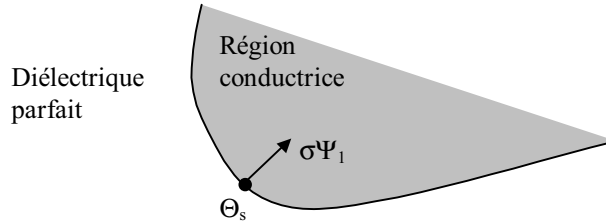


Figure 12 : Courant normal à la région conductrice créé par la densité de charge Θ_s .

du conducteur. D'un point de vue numérique, cela revient à considérer une nouvelle inconnue Θ_s . Afin d'équilibrer le système d'équations à résoudre obtenu après assemblage, il est nécessaire d'écrire une nouvelle relation faisant intervenir Θ_s . Ce sera la définition du courant électrique normal à la frontière de cette région (Figure 12), que l'on peut définir comme suit:

$$\sigma\Psi_1 = -\frac{\partial\Theta_s}{\partial t} \quad (60)$$

Sauf dans le cas particulier des singularités géométriques, on a une inconnue Θ_s en chaque nœud du maillage de la frontière. Il faut donc écrire (60) en chaque nœud. En régime harmonique, (60) prend la forme:

$$\sigma\Psi_1 = -j\omega\Theta_s \quad (61)$$

Pour une conductivité non linéaire, la dérivée temporelle sera approchée par un schéma temporel implicite comme pour la dérivée de l'équation de conduction. En pratique, nous avons employé un schéma un peu plus complexe, que nous présenterons plus loin (*ChapII-Sect2-2.1*).

$$\Delta t\sigma\Psi_1 + \Theta_s^i = \Theta_s^{i-1} \quad (62)$$

Θ_s^i étant la densité de charge à l'instant $i\Delta t$.

1.1.2 Forme de la matrice

La matrice principale sera composée de trois parties bien distinctes correspondant aux trois groupes d'équations assemblées (Figure 13).

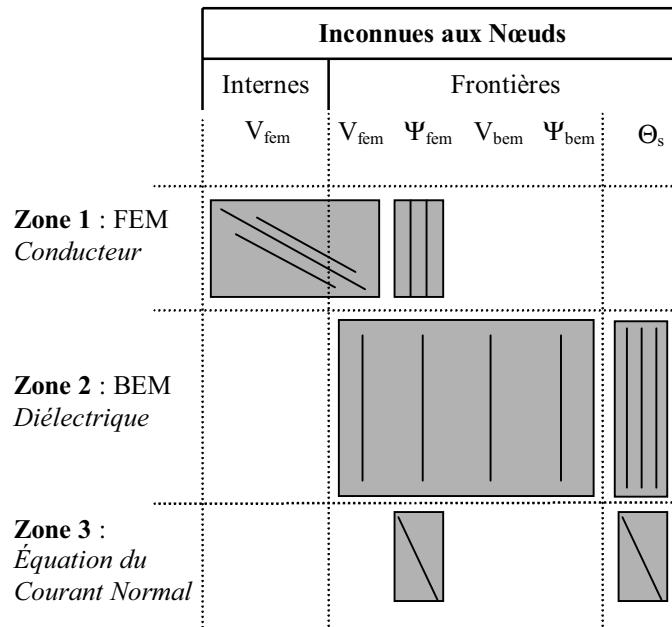


Figure 13 : Structure d'une matrice assemblée d'après un couplage entre la FEM et la BEM.

- La **zone 1** correspond à l'assemblage par éléments finis de l'équation de conduction. Elle n'est pas parfaitement à symétrie diagonale comme les matrices éléments finis classiques car dans la formulation, la dérivée du potentiel par rapport à la normale de la frontière est remplacée par une inconnue Ψ , le champ normal à la frontière.
- La **zone 2** correspond à l'assemblage des régions diélectriques parfaites par la BEM. Les détails de cette zone sont donnés à la Figure 9. Cette partie de matrice est pleine par morceau et non symétrique. Cela est dû au fait que dans les équations intégrales de frontière, chaque nœuds subit l'influence de tout les autres nœuds de la frontière associée. Ce qui est un avantage pour la précision des résultats devient ici un inconvénient, car ce type de matrice va nous limiter dans l'utilisation de méthodes efficaces de résolution de systèmes matriciels.
- La **zone 3** correspond aux équations du courant normal aux frontières du conducteur qui permettent le couplage. Ce sont des matrices diagonales puisque c'est une équation écrite en chaque nœud sans aucune influence des uns sur les autres (60).

1.2 Etude d'un cas particulier

Pour bien comprendre le couplage il est possible d'en faire une présentation matricielle sur un exemple simple. Voici donc l'exemple d'un couplage pour un problème possédant deux domaines (Figure 14):

- Le domaine Ω_{FEM} qui représente la région faiblement conductrice, de permittivité ε_F et de conductivité σ , est traité par la FEM.
- Le domaine Ω_{BEM} , qui représente une région diélectrique parfaite de permittivité ε_B , est traité par la BEM.

L'interface entre ces deux domaines est notée Γ^I . Le reste de la frontière de Ω_{FEM} est noté Γ^F et le reste de la frontière de Ω_{BEM} est noté Γ^B .

Dans le domaine Ω_{FEM} , les différents types de potentiels et de champs que l'on peut

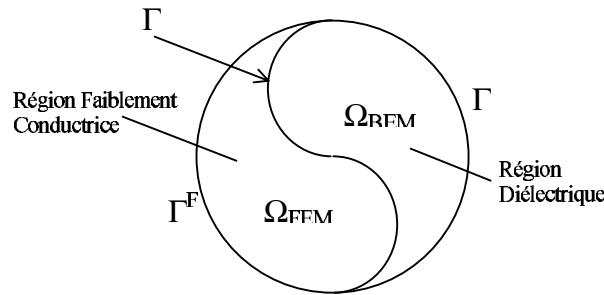


Figure 14 : Problème simple constitué d'une région conductrice Ω_{FEM} de permittivité ε_F et de conductivité σ et d'une région diélectrique Ω_{BEM} de permittivité ε_B . Les deux régions étant séparées par l'interface Γ^I .

rencontrer dans la région traitée par la FEM sont notés au Tableau 3.

De la même manière nous pouvons définir pour le domaine Ω_{BEM} les variables suivantes:

Potentiel	Champs normaux
V_F^K : Connue sur la frontière de Ω_{FEM}	Ψ_F^K : Connue sur la frontière de Ω_{FEM}
V_F^U : Inconnue dans Ω_{FEM}	Ψ_F^U : Inconnue sur la frontière de Ω_{FEM}
V_F^I : Inconnue sur l'interface Γ^I	Ψ_F^I : Inconnue sur l'interface Γ^I

Tableau 3 : Potentiel et champ sur les nœuds de la région Ω_{BEM} .

$V_B^K, V_B^I, \Psi_B^K, \Psi_B^U, \Psi_B^I$. Notons qu'il n'y a pas d'inconnues V_B^U puisque l'on ne maille que la frontière de Ω_{BEM} .

Notons que les directions des champs normaux sont prises orientées vers l'intérieur du

domaine auquel elles appartiennent. En respectant ces notations, la formulation en éléments finis de l'équation de conduction en régime harmonique peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_F^K \\ V_F^U \\ V_F^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_F^K \\ \Psi_F^U \\ \Psi_F^I \end{Bmatrix} \quad (63)$$

Une relation similaire peut être écrite pour la formulation en élément de frontière du domaine Ω_{BEM} :

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_B^K \\ V_B^U \\ V_B^I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_B^K \\ \Psi_B^U \\ \Psi_B^I \end{Bmatrix} \quad (64)$$

Les équations du courant normal aux frontières s'écrivent sous la forme matricielle suivante:

$$\sigma [I] \{\Psi_F^I\} + j\omega [I] \{\Theta_s\} = 0 \quad (65)$$

la matrice I étant la matrice unité:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & 1 & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

et Θ_s étant la densité surfacique de charge à l'interface Γ_I .

Sur cette interface, il y a aussi la relation de continuité du potentiel électrique et l'équation de saut du champ normal entre les deux domaines:

$$\begin{aligned} \{V_B^I\} &= \{V_F^I\} \\ \{\Psi_B^I\} &= \frac{1}{\varepsilon_B} [I] \{\Theta_s\} - \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_B} [I] \{\Psi_F^I\} \end{aligned} \quad (67)$$

Nous pouvons à présent écrire le système matriciel obtenu après assemblage:

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & -L_{11} & -L_{12} & -L_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & -L_{31} & -L_{32} & -L_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & H_{13} & 0 & 0 & \varepsilon_F \varepsilon_B^{-1} G_{13} & H_{11} & H_{12} & -G_{11} & -G_{12} & -\varepsilon_B^{-1} G_{13} \\
 0 & 0 & H_{23} & 0 & 0 & \varepsilon_F \varepsilon_B^{-1} G_{23} & H_{21} & H_{22} & -G_{21} & -G_{22} & -\varepsilon_B^{-1} G_{23} \\
 0 & 0 & H_{33} & 0 & 0 & \varepsilon_F \varepsilon_B^{-1} G_{33} & H_{31} & H_{32} & -G_{31} & -G_{32} & -\varepsilon_B^{-1} G_{33} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma I & 0 & 0 & 0 & 0 & j\omega I
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 V_F^K \\
 V_F^U \\
 V_F^I \\
 \Psi_F \\
 \Psi_F \\
 \Psi \\
 V_B \\
 V_B \\
 \Psi_B \\
 \Psi_B \\
 \Theta_s
 \end{pmatrix}
 = \{0\}
 \tag{68}$$

En pratique, pour réduire la taille du système matriciel, les variables que l'on connaît déjà (V_F^K , Ψ_F^K , V_B^K et Ψ_B^K) sont reportées dans le terme source.

Le couplage est réalisé par l'intermédiaire des colonnes 3 et 6, ainsi que par la dernière ligne de la matrice principale (68).

1.3 Conclusion

Ce type de couplage, couramment utilisé en électromagnétisme, est ici employé de manière originale pour le traitement de la conduction non-linéaire dans les diélectriques. L'originalité du couplage a consisté à implémenter les équations du courant normal aux frontières du SC.

La formulation du couplage n'est ici présentée qu'en régime harmonique. Étant donné que le régime temporel consiste à effectuer une série de résolutions de problèmes électrostatiques, le principe du couplage reste le même. Il serait donc inutile d'en faire une description.

Le principe du couplage étant à présent admis nous pouvons nous pencher sur le schéma temporel adopté pour prendre en compte la non-linéarité.

2 Traitement de la non-linéarité

Lorsqu'une des propriétés électriques du matériau à modéliser est non linéaire, il est nécessaire d'utiliser une formulation temporelle de l'équation en potentiel électrique dans la région de ce matériau. Dans cette section, nous présentons de manière générale le schéma temporel employé ainsi que l'influence des différents paramètres sur sa stabilité et sa précision.

La matrice principale du système qui dépend de σ étant également non-linéaire, il faut utiliser une méthode adaptée afin de résoudre ce système. On utilise généralement à cet effet des méthodes basées sur le principe d'approche de la solution par itérations successives. Les plus employées sont la méthode du point fixe et la méthode de Newton-Raphson. Elles diffèrent sur la façon de trouver l'approximation de la solution à chaque itération. Dans notre travail, afin de traiter la non-linéarité de la conduction, nous avons utilisé la méthode du point fixe qui a donné de bons résultats lors de la validation. La méthode de Newton-Raphson, qui permet une convergence plus rapide à condition de bien estimer la solution initiale est certes plus efficace, nécessite une plus grande attention lors de son implémentation.

Après couplage des deux méthodes numériques, la matrice obtenue après assemblage, est mal conditionnée. Dans le cas de notre couplage, il y a une partie de la matrice à quasi-symétrie diagonale et une autre partie pleine par morceaux. Les méthodes numériques actuelles de résolution matricielle étant généralement adaptées à un type précis de matrice, nous avons employé une méthode directe de résolution de notre système matriciel, la technique du pivot de Gauss. Elle fonctionne souvent sur les matrices aussi mal conditionnées que la nôtre. Etant donné que la taille du système est de l'ordre du millier d'inconnues, l'emploi de cette méthode est resté judicieux. Nous présenterons tout de même une autre méthode de résolution matricielle adaptée aux problèmes utilisant un couplage et basée sur la méthode de décomposition de domaine.

2.1 Schéma temporel

2.1.1 Intégration temporelle

Dans un schéma temporel explicite, seul l'état du système au temps $(i-1)\Delta t$ est utilisé pour calculer l'état du système à l'instant $i\Delta t$. Les matrices élémentaires $[E_{mn}]$ et $[E'_{kl}]$ contiennent uniquement σ^{i-1} la conductivité définie à $i\Delta t$ (*chapII-sect1-1.2*).

En pratique, pour obtenir un schéma plus stable, on emploie plutôt un schéma semi-implicite. Dans ce cas, l'état du système à l'instant $(i-1)\Delta t$ ainsi qu'une prévision de l'état à l'instant $i\Delta t$ sont utilisés pour calculer l'état à l'instant $i\Delta t$. Pour pouvoir passer au schéma implicite, il faut réécrire les matrices $[E_{mn}]$ et $[E'_{kl}]$ pour faire intervenir une estimation à l'instant présent.

Soit à l'instant $(i-1)\Delta t$, le potentiel V^{i-1} connu ((31) et Figure 15), et à l'instant

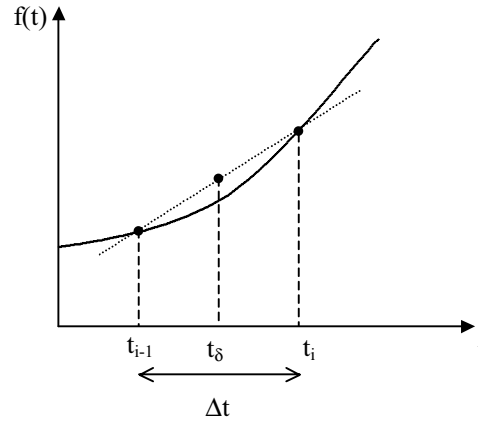


Figure 15 : Interpolation linéaire entre les instants $(i-1)\Delta t$ et $i\Delta t$.

$i\Delta t$ le potentiel V_i inconnu (Δt est le pas de temps de la discrétisation). On peut écrire le potentiel V^δ à un instant t_δ compris entre les instants $(i-1)\Delta t$ et $i\Delta t$ comme la combinaison linéaire (69).

$$V^\delta = \delta V^{i-1} + (1 - \delta)V^i \quad (69)$$

avec $0 \leq \delta \leq 1$

La dérivé temporelle à l'instant t_δ s'écrit:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{t=\delta} = \frac{V^\delta - V^{i-1}}{\delta \Delta t} = \frac{V^i - V^{i-1}}{\Delta t} \quad (70)$$

Pour présenter le schéma temporel implicite appliqué à l'équation de conduction, il faut tout d'abord séparer dans les matrices $[E_{mn}]$ et $[E'_{kl}]$ (*chapII-sect1-1.2*) la partie non-linéaire contenant la conductivité de la partie linéaire contenant la permittivité. Ce qui donne pour la matrice élémentaire issue de l'intégration d'un élément surfacique:

$$\begin{aligned} [E_{mn}^\delta] \{V_n^\delta\} &= [NL_{mn}^\delta] \{V_n^\delta\} + [L_{mn}^\delta] \{V_n^\delta\} \\ [NL_{mn}^\delta] &= \Delta t \iint_{\Omega_e} \sigma^\delta \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n \, d\Omega \\ [L_{mn}^\delta] &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n \, d\Omega \end{aligned} \quad (71)$$

La matrice élémentaire issue de l'intégration d'un élément de frontière se décompose comme suit:

$$\begin{aligned}
 [E'_{kl}] \{\Psi_l^\delta\} &= [NL'_{kl}] \{\Psi_l^\delta\} + [L'_{kl}] \{\Psi_l^\delta\} \\
 [NL'_{kl}] &= \Delta t \int_{\Gamma_{e'}} \sigma^\delta N'_k N'_l \, d\Gamma \\
 [L'_{kl}] &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{72}$$

Le terme source, qui ne possède pas de partie non-linéaire, reste pour l'instant inchangé:

$$\begin{aligned}
 \{S_m\} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^{i-1} \, d\Omega \\
 \{S'_k\} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \Psi_l^{i-1} \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{73}$$

Les matrices $[NL_{mn}^\delta]$ et $[NL'_{mn}^\delta]$ sont approchées par le développement suivant [24]:

$$\begin{aligned}
 [NL_{mn}^\delta] \{V_n^\delta\} &\approx \delta [NL_{mn}^i] \{V_n^i\} + (1 - \delta) [NL_{mn}^{i-1}] \{V_n^{i-1}\} \\
 [NL'_{kl}^\delta] \{\Psi_l^\delta\} &\approx \delta [NL'_{kl}^i] \{\Psi_l^i\} + (1 - \delta) [NL'_{kl}^{i-1}] \{\Psi_l^{i-1}\}
 \end{aligned} \tag{74}$$

Le coefficient δ appelé paramètre du schéma permet de relaxer l'influence du temps précédent par rapport au temps présent.

Lorsque le paramètre est égal à zéro, cela correspond à un schéma explicite, car on se sert uniquement du potentiel connu dans l'écriture matricielle. Lorsque le paramètre est égal à un, c'est un schéma totalement implicite. Pour les valeurs comprises entre zéro et un, on parle de schéma implicite. En prenant $\delta = 1/2$ cela revient à intégrer par la méthode des trapèzes. Lorsque $\delta = 2/3$, on obtient le schéma d'intégration de Galerkin.

C'est ce paramètre ainsi que le pas de temps qui déterminent la stabilité et la précision du schéma.

Les matrices élémentaires et le terme issus de l'équation de la conduction s'écrivent fi-

nalement:

$$\begin{aligned}
[E_{mn}^i] &= \delta \Delta t \iint_{\Omega_e} \sigma^i \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n \, d\Omega + \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega_e} \vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n \, d\Omega \\
[E_{kl}^{i'}] &= \delta \Delta t \int_{\Gamma_{e'}} \sigma^i N'_k N'_l \, d\Gamma + \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \, d\Gamma \\
\{S_m\} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \iint_{\Omega_e} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^{i-1} \, d\Omega - (1 - \delta) \Delta t \iint_{\Omega_e} \sigma^{i-1} (\vec{\nabla} N_m \cdot \vec{\nabla} N_n) V_n^{i-1} \, d\Omega \\
\{S'_k\} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_{\Gamma_{e'}} N'_k N'_l \Psi_l^{i-1} \, d\Gamma + (1 - \delta) \Delta t \int_{\Gamma_{e'}} \sigma^{i-1} N'_k N'_l \Psi_l^{i-1} \, d\Gamma
\end{aligned} \tag{75}$$

C'est le terme source qui s'en trouve le plus modifié puisqu'il dépend à présent des matrices non-linéaires du temps précédent. En faisant varier δ entre 0 et 1, on peut modifier l'importance de l'influence de l'estimation de V et Ψ au temps présent. Ceci aura pour conséquence de modifier la stabilité du schéma. Nous verrons son influence sur notre code au *ChapIII-Sect1-2*.

2.1.2 Stabilité du schéma temporel

En pratique, l'analyse de la stabilité du schéma est faite en étudiant sa réponse temporelle à un échelon de tension. On observe alors l'établissement de l'équilibre sous excitation constante.

Pour étudier la stabilité de notre schéma temporel, écrivons sous une forme simplifiée (76) l'équation de conduction dans un SC (21). Le vecteur des inconnues u correspond soit à un potentiel scalaire V , soit à un champ normal interfacial Ψ , ou bien à une densité surfacique de charge Θ_s .

$$[NL_{ij}] \{u_i\} + [L_{ij}] \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\} = 0 \tag{76}$$

$[NL]$ représente la matrice issue de l'assemblage du Laplacien contenant la conductivité, et $[L]$ est celle issue de l'assemblage du Laplacien contenant la permittivité.

L'ensemble des solutions du système (76) sont de la forme:

$$u_i(t) = \kappa_0 \exp(-\alpha_i t) \tag{77}$$

On peut alors déterminer le spectre $(\nu_1^2, \nu_2^2, \dots, \nu_{N_t}^2)$ du système comme étant solution de:

$$([NL_{ij}] - \nu_i^2 [L_{ij}]) \kappa_i = 0 \tag{78}$$

Les κ_i sont les modes de répartition spatiale des inconnues. Ils forment une base dans laquelle toute solution peut être décomposée de manière unique.

Les ν_i^2 sont les pulsations propres, représentant le taux de décroissance exponentielle de chaque mode. N_t représente la taille des matrices $[NL]$ et $[N]$.

En théorie, la stabilité de la solution est obtenue lorsque chaque mode est borné. Pour effectuer ce test, on calcule le facteur d'amplification G correspondant au rapport d'un mode entre les instants $i\Delta t$ et $(i+1)\Delta t$:

$$G = \frac{\kappa(t_{i+1})}{\kappa(t_i)} \quad (79)$$

En utilisant notre schéma, le facteur est de la forme:

$$G_\delta = \frac{1 - (1 - \delta)\Delta t\nu^2}{1 + \delta\Delta t\nu^2} \quad (80)$$

Suivant la condition imposée sur G_δ , on aura différents modes de stabilité:

- Pour le critère $G_\delta < 1$, le schéma est stable.
- Pour le critère $|G_\delta| < 1$, qui est une condition moins contraignante, le schéma sera toujours stable avec toutefois des oscillations.
- Pour le critère $|G_\delta| > 1$, le schéma sera instable.

2.1.3 Précision du schéma

On a vu que suivant la rigueur du critère de stabilité on pouvait obtenir une stabilité du schéma moyennant des oscillations. Cela se traduit en pratique par une imprécision plus importante sur le résultat de l'intégration. En annulant le facteur G_δ , on peut obtenir un pas de temps limite des oscillations:

$$G_\delta = 0 \Rightarrow \nu^2\Delta t = \frac{1}{1 - \delta} \quad (81)$$

Pour diminuer ces oscillations, on a alors deux possibilités:

- Augmenter le paramètre δ du schéma.
- Diminuer le pas de temps Δt .

On serait alors tenté d'employer un schéma totalement implicite. Seulement en jouant sur le paramètre δ on modifie la précision du schéma. Soit le développement en série du

facteur d'amplification exact:

$$G_{exact} = \exp(-\nu^2 \Delta t) = 1 - \nu^2 \Delta t + \frac{1}{2} (\nu^2 \Delta t)^2 - \frac{1}{6} (\nu^2 \Delta t)^3 + \dots \quad (82)$$

Alors que celui de G_δ est:

$$G_\delta = \frac{1 - (1 - \delta)\Delta t\nu^2}{1 + \delta\Delta t\nu^2} = 1 - \nu^2 \Delta t + \delta (\nu^2 \Delta t)^2 - \delta^2 (\nu^2 \Delta t)^3 + \dots \quad (83)$$

Ainsi lorsque $\nu^2 \Delta t \ll 1$, la seule possibilité d'obtenir une approximation du facteur d'amplification exacte jusqu'à l'ordre 3, est pour $\delta = 1/2$ (schéma du trapèze). Pour un schéma explicite, on sur-estime G_{exact} alors que l'on le sous-estime pour un schéma totalement explicite

Lors du choix du paramètre du schéma et du pas de temps, il faut donc toujours trouver le meilleur compromis entre précision et stabilité tout en garantissant un temps de calcul raisonnable.

2.2 Modèle de conduction non-linéaire - Méthode du point fixe

Les matériaux SC sont caractérisés par leur conductivité volumique en fonction du champ électrique appliqué. La Figure 16 présente l'exemple d'un matériau industriel actuel [40].

On peut modéliser ces matériaux par une relation exponentielle entre la conductivité et

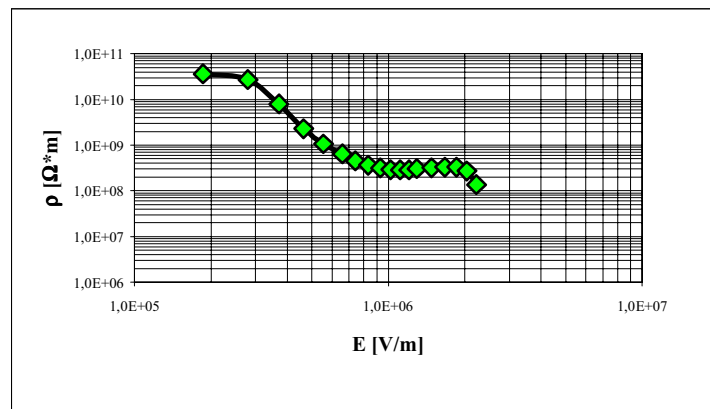


Figure 16 : Résistivité d'un isolant SC en fonction du module du champ électrostatique.

le module du champ électrique:

$$\sigma(|\vec{E}|) = \sigma_0 \exp(-\alpha|\vec{E}|) \quad (84)$$

Pour résoudre le système non-linéaire, nous avons employé la méthode du point fixe [41], (Figure 17). Bien qu'étant une méthode assez rudimentaire, elle s'est avérée très efficace

pour notre utilisation.

Supposons que le système matriciel $[M]$ non-linéaire à résoudre dépend du vecteur d'inconnues $\{X\}$:

$$[M(X)] \{X\} = \{S\} \quad (85)$$

Le but de cette méthode est de faire tendre vers zéro le résidu $\{R\}$, par approximations successives:

$$\{R(X_k)\} = -[M(X_k)] \{X_k\} + \{S_k\} \quad (86)$$

A chaque pas on en déduit une variation de la solution, telle que:

$$\{X_{k+1}\} = \{X_k\} + \{\Delta X_{k+1}\} \quad (87)$$

Cette variation de la solution est obtenue à partir d'une approximation $\{X_k\}$ de cette solution issue d'un développement de Taylor:

$$\{R(X_{k+1})\} = \{R(X_k + \Delta X_{k+1})\} = \{R(X_k)\} + \left[\frac{\partial R}{\partial X} \right] \{\Delta X_k\} \quad (88)$$

Comme l'on cherche à annuler le résidu, la variation est obtenue en posant la relation (88) égale à zéro:

$$\{\Delta X_k\} = \left[\frac{\partial R}{\partial X} \right]^{-1} \{R(X_k)\} \quad (89)$$

Dans la méthode du point fixe on va supposer la dérivée du résidu comme étant égale à la matrice du système:

$$\{\Delta X_k\} \approx [M(X_k)]^{-1} \{R(X_k)\} \quad (90)$$

En réitérant plusieurs fois le processus on arrive à une bonne approximation de la solution. C'est le critère de convergence qui arrêtera l'itération. Le critère de convergence que nous avons choisi est le test sur la valeur maximale du rapport $\Delta X/X$ pour chaque inconnues en potentiel des nœuds intérieurs de la région SC. Pour améliorer la vitesse de convergence, on peut rajouter un coefficient de sur-relaxation ϖ . Sa valeur est déterminée par expérimentation numérique.

$$\{X_{k+1}\} = \{X_k\} + \varpi \{\Delta X_{k+1}\} \quad (91)$$

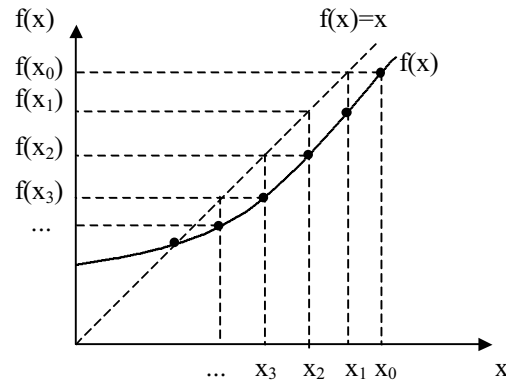


Figure 17 : Méthode du point fixe pour résoudre une fonction f à une inconnue.

2.3 Algorithme du schéma temporel

Les méthodes itératives, comme la méthode du point fixe que nous avons employée pour traiter la non-linéarité, ont une certaine dépendance aux conditions initiales. De plus, le processus d'itération pas à pas dans le temps employé, ajoute une certaine instabilité à l'algorithme. Le schéma temporel du *ChapII-Sect2-2.1* permet de réduire cette instabilité. L'organigramme du code (Figure 18) est composé de deux boucles:

- Une boucle de temps qui permet d'initialiser les conditions aux limites de Dirichlet, ainsi que de donner une valeur initiale aux inconnues du problème,
- une boucle de résolution d'un problème non-linéaire par la méthode du point fixe. On reste dans cette boucle jusqu'à obtention de l'estimation voulue de la solution pour le pas de temps.

Une fois le critère de convergence atteint, on incrémente la boucle temporelle. La solution initiale prise pour un nouveau pas de temps est la solution du pas de temps précédent. Au niveau de l'assemblage, l'intérêt est de n'assembler que la partie «équation intégrale» qu'une fois au départ, ensuite ce n'est que la partie contenant les termes sources qui est modifiée à chaque pas de temps. Par contre, les matrices élémentaires non-linéaires $[NL_{mn}]$ et $[NL'_{kl}]$, ainsi que les termes source $\{S_m\}$ et $\{S'_k\}$ sont recalculés à chaque itération de la deuxième boucle.

Le coefficient ζ du test de convergence est de l'ordre du pour-cent et un coefficient de relaxation ϖ de l'ordre de 0,8 assurent une convergence en un nombre d'itérations raisonnable.

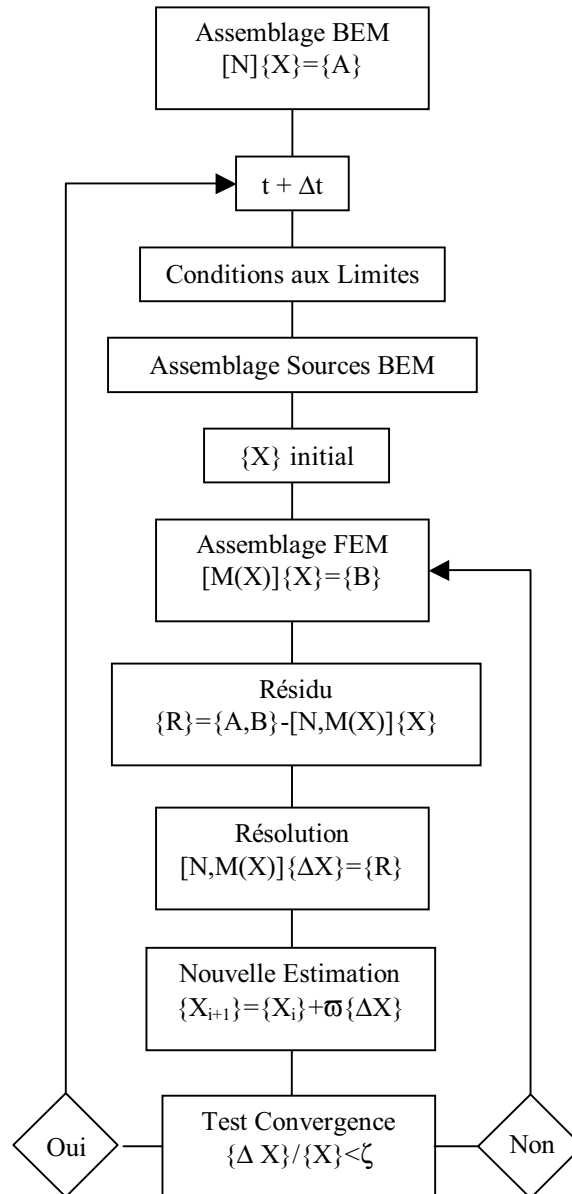


Figure 18 : Algorithme du code de résolution de la conduction non-linéaire.

2.4 Résolution Matricielle

2.4.1 Méthodes de résolution itératives

Avec l'augmentation de la taille des systèmes à résoudre, les techniques de résolution matricielles se sont en général largement développées ces dernières décennies. Pour une matrice ayant un nombre d'inconnues supérieur à 10000, il devient impossible de l'inverser par une méthode directe comme la méthode du pivot de Gauss. On a alors recourt à des méthodes itératives [42]. Comme c'est la méthode des éléments finis qui est la technique la plus employée en modélisation, les méthodes de résolution ont été principalement optimisées pour des systèmes matriciels creux avec symétrie qui sont caractéristiques d'un assemblage par cette la FEM. Pour résoudre des systèmes ne possédant pas ces propriétés, il existe la méthode par décomposition de domaine [43]. Elle doit son succès avant tout au fait qu'elle est appropriée au calcul parallèle. Cette technique permet de décomposer la matrice principale en sous-matrices de tailles inférieures et qui peuvent être résolues plus rapidement.

2.4.2 Méthode de décomposition de domaine pour couplage BEM/FEM

Cette méthode a déjà été employée par Kurz [43] pour résoudre un problème de calcul de courants de Foucault par couplage BEM/FEM. Le principe est d'approcher la solution en résolvant successivement la partie éléments finis puis la partie équation intégrale, en prenant comme condition initiale le résultat de la solution de l'autre méthode.

Détaillons la formulation de cette méthode dans le cas de notre couplage. Pour cela, reprenons la formulation matricielle de notre problème de conduction (63). Il traite une région conductrice en contact avec une région diélectrique (Figure 14).

Le principe est de travailler sur les matrices obtenues par chacune des méthodes. Pour la partie FEM, l'assemblage donne le système matriciel (92):

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & -L_{11} & -L_{12} & -L_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & -L_{21} & -L_{22} & -L_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & -L_{31} & -L_{32} & -L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_F^K \\ V_F^U \\ V_F^I \\ \Psi_F^K \\ \Psi_F^U \\ \Psi_F^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (92)$$

L'assemblage de la région diélectrique par la BEM donne le système matriciel (93):

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & -G_{11} & -G_{12} & -G_{13} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & -G_{21} & -G_{22} & -G_{23} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & -G_{31} & -G_{32} & -G_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_B^K \\ V_B^U \\ V_B^I \\ \Psi_B^K \\ \Psi_B^U \\ \Psi_B^I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (93)$$

On commence par résoudre le système traitant la région conductrice. Sur les frontières de la région conductrice où l'on ne connaît pas le potentiel, on impose une valeur initiale du potentiel, ce qui nous permet de résoudre (92). On trouve donc une valeur du champ normal sur les frontières de la région conductrice, ce qui permet de déduire une valeur du champ normal dans la région diélectrique via les relations:

$$\begin{aligned} \sigma [I] \{ \Psi_F^I \} + j \omega [I] \{ \Theta_s \} &= \{ 0 \} \\ \{ \Psi_B^I \} &= \varepsilon_B^{-1} [I] \{ \Theta_s \} - \varepsilon_B^{-1} \varepsilon_F [I] \{ \Psi_F^I \} \end{aligned} \quad (94)$$

[I] étant la matrice diagonale unité.

Ces valeurs du champ trouvées serviront de condition de Neumann pour résoudre le système (93). La résolution donnera une nouvelle valeur du potentiel sur les frontières de la région conductrice et servira de condition de Dirichlet pour une nouvelle résolution du système (92). On arrête l'itération lorsque les variations des valeurs du potentiel à l'interface sont estimées négligeables.

2.5 Conclusion

Notre but étant avant tout d'étudier la possibilité du couplage BEM/FEM pour traiter la conduction non-linéaire, nous avons employé des techniques numériques assez rudimentaires, telles que la méthode du point fixe, mais qui a donné de bons résultats. Cependant il serait nécessaire d'améliorer la convergence du schéma temporel, en implémentant une méthode de type Newton-Raphson.

Pour la résolution d'un système ayant une taille supérieure à 10^4 inconnues, la méthode de résolution par décomposition de domaine semble la meilleure alternative à la méthode de triangularisation par recherche du pivot. Notons qu'il existe également une méthode itérative nommée GMRES, et qui est spécialement adaptée pour résoudre des matrices

très mal conditionnées comme celles issues du couplage entre deux méthodes numériques bien différentes [44].

3 Singularités géométriques dans les diélectriques conducteurs

Dans la BEM, les deux grandeurs à déterminer sont le potentiel et le champ normal à la frontière. Le champ normal est une grandeur qui dépend de la surface sur laquelle il s'appuie.

Au point de rencontre de plusieurs frontières, le champ normal prend une valeur par frontière. On se retrouve alors en ces points singuliers avec un nombre d'inconnues supérieur au nombre d'équations. Le traitement numérique de ces points consiste alors à estimer analytiquement le comportement de la singularité. Ce qui permet d'écrire une équation supplémentaire pertinente pour équilibrer le système à résoudre.

En génie électrique, cela fait plus de vingt ans que Takuma et al. ([45], [46] et [47]) étudient les singularités géométriques dans les diélectriques. Leurs travaux sont principalement basés sur l'expérimentation numérique. Ils ont de plus tenté des descriptions du comportement du champ en présence d'une région faiblement conductrice.

Du point de vue théorique, Defourny [48] a apporté une bonne synthèse du comportement analytique du champ électrique dans le voisinage de points singuliers dans le cas électrostatique.

Afin de prendre en compte les singularités dans notre couplage, nous avons cherché à adapter les équations connues dans les diélectriques parfaits.

3.1 Singularité géométrique dans les diélectriques parfaits

En électrostatique, les singularités géométriques sont situées aux points de rencontre de plusieurs diélectriques possédant des permittivités différentes. Les deux cas les plus rencontrés sont lorsque le point de rencontre des deux régions est en contact avec une électrode ayant un potentiel imposé (Figure 19-a) et lorsque trois régions se rencontrent (Figure 19-b). A chaque fois, le champ électrique dans ce voisinage peut être infini, nul ou à valeur finie. Il est donc très intéressant de pouvoir estimer le comportement de ce champ puisqu'il permettra de juger de l'intérêt que l'on doit porter à cette inconnue lors de l'assemblage.

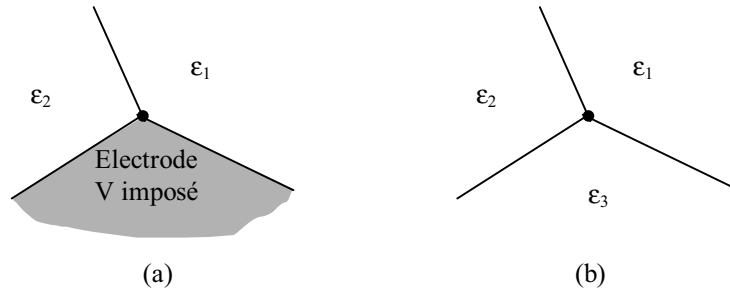


Figure 19 : (a) point de rencontre de deux diélectriques et d'une électrode - (b) point de rencontre de trois diélectriques.

3.1.1 Deux diélectriques sur une électrode

L'estimation du comportement du champ à proximité d'un point singulier s'effectue à partir du développement en série [49] du potentiel au voisinage de celui-ci. Prenons le cas de deux régions isolantes se rencontrant sur une électrode plane reliée à la masse (Figure 20).

Soit Φ_m le potentiel au point P de coordonnées cylindriques (ρ, θ) dans la région m ($m = 1$ ou 2). Φ_m satisfait à l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques:

$$\frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_m}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_m}{\partial \theta^2} = 0 \quad (95)$$

Lorsqu'il n'y a pas de source dans la région m , la solution générale de (95) est (Annexe3):

$$\Phi_m(r, \theta) = r^\lambda (A_m \cos(\lambda\theta) + B_m \sin(\lambda\theta)) \quad (96)$$

Grâce aux conditions aux limites imposées sur le potentiel Φ_m et $\frac{\partial \Phi_m}{r \partial \theta}$ le champ normal aux frontières dans chaque région:

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, 0) &= 0 \\ \Phi_1(r, \alpha_1) &= \Phi_2(r, \alpha_1) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_1} \\ \Phi_2(r, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (97)$$

On obtient un système d'équations ayant pour inconnues les coefficients A_m et B_m du développement du potentiel dans chaque région:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos(\lambda\alpha_1) & \sin(\lambda\alpha_1) & -\cos(\lambda\alpha_1) & -\sin(\lambda\alpha_1) \\ -\epsilon_1 \sin(\lambda\alpha_1) & \epsilon_1 \cos(\lambda\alpha_1) & \epsilon_2 \sin(\lambda\alpha_1) & \epsilon_2 \cos(\lambda\alpha_1) \\ 0 & 0 & \cos(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & \sin(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (98)$$

Pour que le système possède une infinité de solutions, il faut que le déterminant de la matrice principale de (98) soit nul, ce qui donne une équation aux valeurs propres λ [50]. Lorsque l'on se rapproche de la singularité, c'est le terme possédant la plus petite valeur propre qui va dicter le comportement du potentiel. En notant λ^* cette valeur, l'équation à laquelle elle doit satisfaire correspond à l'équation transcendante suivante:

$$\frac{1}{\varepsilon_1} \tan(\lambda^* \alpha_1) + \frac{1}{\varepsilon_2} \tan(\lambda^* \alpha_2) = 0 \quad (99)$$

Cette équation a été proposée par Takuma [46] en 1978 dans le cas de l'électrode plane. En 1987 dans son travail de thèse, Defourny [51] expose une méthode originale basée sur la représentation matricielle du passage des champs normaux et tangentiels entre les différentes régions diélectriques. Ceci lui permet de construire une matrice globale liant le champ de la première frontière de la première région au champ de la dernière frontière de la dernière région. Cette matrice possède les propriétés des matrices de domaine de chaque région en contact avec la singularité. Suivant les conditions aux limites imposées aux frontières de la singularité, la matrice ainsi construite devra satisfaire une condition qui donnera l'équation transcendante nécessaire à la détermination du coefficient λ^* . Dans le cas d'une électrode en contact avec deux isolants (Figure 20), il obtient la même équation transcendante que Takuma (99) mais pour le cas général d'une électrode faisant un angle quelconque (21).

Comme le champ électrique à proximité de la singularité varie en r^{λ^*-1} on obtiendra un champ infini ou à valeur nulle, suivant que λ^* estimé par (99) est plus ou moins grand que 1. Le Tableau 4 décrit les différents cas possibles.

Combinaisons possibles	λ^*	$ \vec{E} $
$(\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \text{ et } \alpha_1 < \alpha_2)$ OU $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \text{ et } \alpha_1 > \alpha_2)$	> 1	0
$(\varepsilon_1 > \varepsilon_2 \text{ et } \alpha_1 > \alpha_2)$ OU $(\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \text{ et } \alpha_1 < \alpha_2)$	< 1	∞

Tableau 4 : Comportement du champ électrique aux environs d'un point singulier suivant les caractéristiques des matériaux.

3.1.2 Point de rencontre entre trois diélectriques

Cette singularité aussi appelée point triple, se rencontre dans les systèmes électrotechniques où deux isolants solides différents sont en présence d'un troisième isolant gazeux ou liquide (Figure 22). On peut alors y appliquer de nouveau la même méthode que

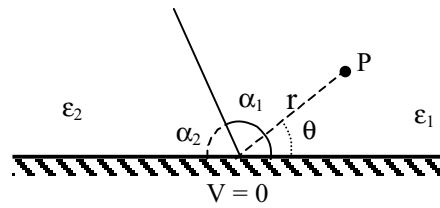


Figure 20 : Coordonnées cylindriques du point Q dans le domaine formé par un coin du point singulier P .

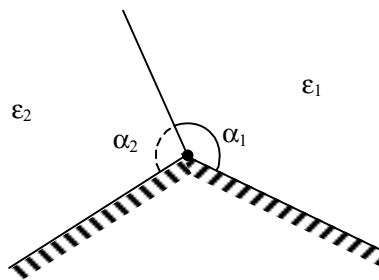


Figure 21 : Point de rencontre de deux diélectriques parfaits avec un électrode faisant un angle quelconque.

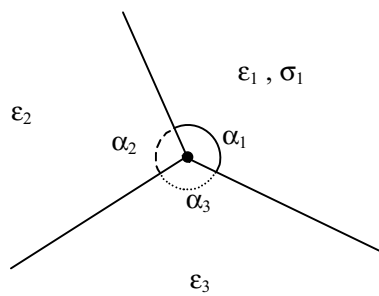


Figure 22 : Point de rencontre entre trois régions diélectriques.

précédemment, ce qui donne une matrice 6×6 , représentant un système de 6 équations ayant pour inconnues les coefficients A_m et B_m :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos(\lambda 2\pi) & -\sin(\lambda 2\pi) \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \sin(\lambda 2\pi) & -\varepsilon_3 \cos(\lambda 2\pi) \\ \cos(\lambda \alpha_1) & \sin(\lambda \alpha_1) & -\cos(\lambda \alpha_1) & -\sin(\lambda \alpha_1) & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1 \sin(\lambda \alpha_1) & \varepsilon_1 \cos(\lambda \alpha_1) & \varepsilon_2 \sin(\lambda \alpha_1) & -\varepsilon_2 \cos(\lambda \alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & \sin(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & -\cos(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & -\sin(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \sin(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & \varepsilon_2 \cos(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & \varepsilon_3 \sin(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) & -\varepsilon_3 \cos(\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (100)$$

En annulant le déterminant de (100) on retrouve l'équation transcendante de Defourny permettant de déterminer la valeurs propre λ^* [48]:

$$\begin{aligned} & 2 \cos(\lambda^* \alpha_1) \cos(\lambda^* \alpha_2) \cos(\lambda^* \alpha_3) - \varepsilon_a \cos(\lambda^* \alpha_1) \sin(\lambda^* \alpha_2) \sin(\lambda^* \alpha_3) \\ & - \varepsilon_b \sin(\lambda^* \alpha_1) \cos(\lambda^* \alpha_2) \sin(\lambda^* \alpha_3) - \varepsilon_c \sin(\lambda^* \alpha_1) \sin(\lambda^* \alpha_2) \cos(\lambda^* \alpha_3) - 2 = 0 \quad (101) \\ \text{avec} \quad & \varepsilon_a = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \quad ; \quad \varepsilon_b = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \quad ; \quad \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \end{aligned}$$

3.1.3 Autres types de points singuliers

En électrotechnique, il existe deux autres types de configurations géométriques qui conduisent à une singularité:

- Le coin de Dirichlet.
- L'angle entre deux régions diélectriques.

Ces singularités peuvent être levées en dédoublant par exemple le nœud en ce point [34]. Dans le domaine de l'isolation électrique, on rencontre ces singularités à des endroits qui ne nous intéressent pas forcément. Si l'on désire tout de même obtenir une meilleure estimation du champ dans son voisinage, on pourra facilement arrondir l'angle en maillant finement.

Au voisinage de ces singularités, le champ est soit très grand, soit très faible. Dans les deux cas, on peut alors supposer que les deux champs normaux qui se rencontrent en ce point sont du même ordre de grandeur. Cela permet ainsi de ne considérer qu'une seule inconnue en champ en ce nœud [48].

a) Angle sur une électrode en contact avec un seul diélectrique

Lorsqu'une électrode en contact avec un diélectrique quelconque forme un angle α , la

plus petite valeur propre du développement du champ électrique est:

$$\lambda^* = \frac{\pi}{\alpha} \quad (102)$$

Ce qui est bien conforme au comportement du champ:

- A proximité des angles saillants ($\alpha > \pi$), le champ tend vers l'infini ($\lambda^* < 1$).
- Pour un angle rentrant ($\alpha < \pi$), il tend vers zéro ($\lambda^* > 1$).

Comme la valeur du champ obtenue n'a pas de sens physique, il n'est pas nécessaire de dédoubler le nombre d'inconnue en champ normal en ce point. On se contente alors d'assembler avec une seule inconnue en champ en ce point.

b) Angle entre deux diélectriques

Comme précédemment, il y a une inconnue supplémentaire par rapport au nombre d'équations intégrales de frontière (EIF) en ce nœud. Deux inconnues en champ (une pour chaque face de l'angle) et une inconnue en potentiel, pour deux EIF (une dans chaque région diélectrique).

Ce cas avait été étudié par Weiss [52] ainsi que Takuma [46] de manière numérique dans la fin des années 1970. Et c'est encore Defourny [51] qui apporte une vision synthétique du problème en retrouvant l'équation transcendante permettant d'estimer λ^* :

$$2 \cos(\lambda^* \alpha_1) \cos(\lambda^* \alpha_2) - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \sin(\lambda^* \alpha_1) \sin(\lambda^* \alpha_2) - 2 = 0 \quad (103)$$

Pour ce type de singularité, il ne sera pas non plus nécessaire d'écrire deux inconnues en champ puisque la valeur numérique n'aura pas de sens physique comme pour le cas précédent.

3.2 Equation supplémentaire en présence d'un diélectrique conducteur

Ce cas a été étudié de manière assez complète par Takuma [47], [53] et [54]. Dans cette configuration, il n'est pas aussi aisé d'obtenir une approximation analytique du développement du champ. Pour résoudre ce problème, on peut discerner deux approches, suivant que les conductivités sont linéaires ou pas.

3.2.1 Approche en mode complexe

Lorsque les propriétés des matériaux sont linéaires, on peut se ramener au cas électrostatique en considérant des permittivités complexes $\underline{\varepsilon}_i$ telles que:

$$\underline{\varepsilon}_i = \sigma + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_i \quad (104)$$

Dans (104), σ_i est la conductivité de la région i et ε_r sa permittivité relative en ne considérant aucune perte. Le comportement du potentiel à proximité de la singularité est décrit comme au (96):

$$\underline{\Phi}_m(r, \theta) = r^\lambda (\underline{A}_m \cos(\lambda\theta) + \underline{B}_m \sin(\lambda\theta)) \quad (105)$$

Les coefficients $\underline{\lambda}_m$, \underline{A}_m et \underline{B}_m étant cette fois des coefficients complexes, et sachant que l'équation de saut du champ électrique reste la même:

$$\underline{\varepsilon}_1 E_{n1} + \underline{\varepsilon}_2 E_{n2} = 0 \quad (106)$$

On écrit les mêmes équations de continuité que (97) afin d'obtenir un système homogène dont la matrice principale dépend de $\underline{\lambda}_m$ comme dans le cas électrostatique (98).

En annulant le déterminant de ce système matriciel homogène, ce qui correspond à garantir une infinité de couples $(\underline{A}_m, \underline{B}_m)$ solutions du système, on retrouve les mêmes équations transcendantes que dans le cas électrostatique pouvant fournir le spectre des $\underline{\lambda}_m$. Le terme qui dictera le comportement du champ à proximité de la singularité sera la plus petite partie réelle des $\underline{\lambda}_m$.

Il faut noter que nous n'avons pas été capables de résoudre l'équation transcendante dans le cas complexe.

3.2.2 Estimation de la valeur propre en régime temporel

Pour des conductivités non-linéaires, il n'est plus possible d'utiliser la notation complexe. A chaque pas de temps, on est ramené à résoudre un problème de type électrostatique avec en plus une densité de charge surfacique Θ_s aux frontières de la région conductrice. Cette densité, responsable de la brisure de la continuité de l'induction électrique à ces interfaces, ne permet plus d'obtenir un système matriciel homogène comme pour le cas électrostatique sans charge (98), puisque le deuxième terme du système matriciel n'est plus nul. On ne peut plus alors obtenir un spectre infini dénombrable des λ_m .

Voici dans ce qui suit une procédure pour estimer λ_m^* lorsqu'une des régions possède une conductivité.

a) Diélectrique parfait et diélectrique conducteur sur une électrode

Supposons que l'une des régions devienne faiblement conductrice. Au fur et à mesure

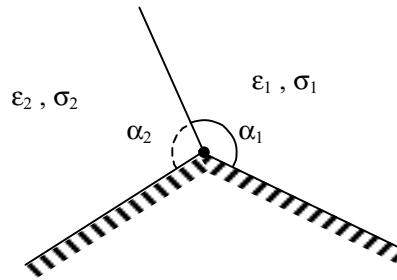


Figure 23 : Diélectrique conducteur en contact avec un diélectrique parfait et une électrode à un potentiel fixe.

que cette conductivité augmente, l'influence du courant de conduction deviendra plus importante que celle du courant de déplacement. Nous verrons *ChapIII-Sect1-1.3* que cette bande de transition est assez courte.

Pour estimer λ_m , on va considérer deux cas extrêmes: le cas où la conductivité joue un rôle négligeable, la singularité est alors traitée comme pour un cas électrostatique classique, et l'autre cas où la conductivité ne devient plus négligeable, on fera alors une estimation en ne prenant en compte que les conductivités. Takuma [47] a écrit que lorsque l'on était en présence de deux régions possédant chacune une conductivité volumique σ_1 et σ_2 , l'équation transcendante pouvait s'écrire sous la forme:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tan(\lambda^* \alpha_1) + \tan(\lambda^* \alpha_2) = 0 \quad (107)$$

Lorsque seule la région 1 possède une conductivité non nulle, le rapport des conductivités tend vers l'infinie et la valeur positive minimale du spectre des λ_m^* est:

$$\lambda_m^* = \frac{\pi}{2\alpha_2} \quad (108)$$

Pour savoir lequel des deux cas on doit considérer, on peut comparer les paramètres conducteurs et diélectriques. En pratique cela revient à comparer les facteurs capacitif $\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{\Delta t}$ et résistif σ .

Lorsque le facteur capacitif est dominant, on traite la singularité comme dans le cas électrostatique, sinon on estime λ_m^* avec (107).

Lors de validations du code, (*ChapIII-Sect3-1.2.1*), nous avons pu constater qu'en prenant comme valeur de λ_m celle obtenue dans le cas électrostatique, la singularité était tout de même bien traitée. Il n'est donc pas nécessaire de discerner les cas suivant le niveau

de la conductivité. Le calcul de λ_m se fera comme dans le cas électrostatique, et seule l'équation supplémentaire sera modifiée en conséquence.

b) Diélectrique conducteur en contact avec deux diélectriques parfaits

Comme nous n'avons pas trouvé l'équation du comportement du champ électrique au

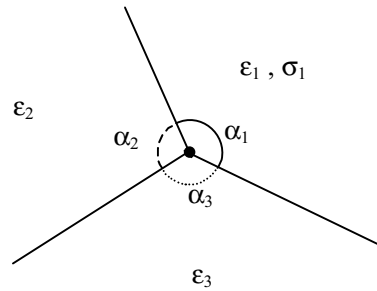


Figure 24 : Diélectrique faiblement conducteur en contact avec deux diélectriques parfaits.

voisinage de la rencontre d'une région faiblement conductrice avec deux diélectriques parfaits, il a fallu utiliser le λ_m^* estimé en électrostatique. Lorsque cela n'a tout de même pas donné un bon résultat, la singularité a alors été traitée par une relation de projection géométrique (*ChapIII-Sect3-1.2.1*).

3.2.3 Ecriture de l'équation supplémentaire

Parmi les nombreuses possibilités d'équations supplémentaires que l'on peut écrire, nous avons choisi de nous inspirer de celle proposée par Defourny [48]. L'intérêt est qu'elle fait intervenir les différents champs situés à proximité du point singulier. Pour cela elle se base sur les lois de la physique, contrairement à certaines d'autres qui ne sont que de relations de projection.

A partir de la relation de Gauss suivante:

$$\oint_C \vec{E}^{stat} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (109)$$

il déduit une relation liant les champs normaux aux interfaces. Suivant la singularité cette équation est bien sûr différente. Nous avons montré précédemment que nous ne considérons que deux types.

a) Diélectrique parfait et diélectrique SC en contact avec une électrode

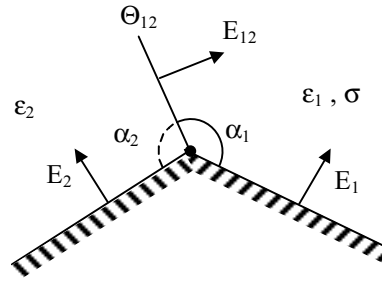


Figure 25 : Diélectrique conducteur en contact avec un diélectrique parfait et une électrode.

Dans cette configuration, on rencontre à proximité du point singulier, 3 inconnues en champ normal E_1 , E_2 et E_{12} , et une en densité surfacique de charge Θ_{12} . Dans ce cas, (109) s'écrit:

$$-C_1 E_1 + \left[C_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_2 \right] E_{12} + C_2 E_2 - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} C_2 \Theta_{12} = 0 \quad (110)$$

avec $C_i = \tan\left(\frac{\lambda^* \alpha_i}{2}\right)$

b) Diélectrique SC en contact avec deux diélectriques parfaits

De la même manière, l'équation (109) écrite pour la configuration de la Figure 26, fait

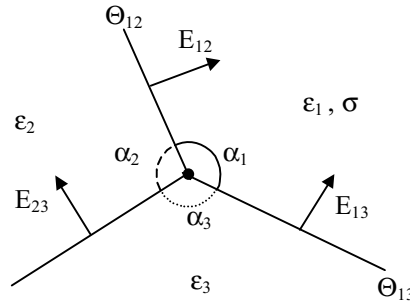


Figure 26 : Diélectrique conducteur en contact avec deux diélectriques parfaits.

intervenir trois champs normaux E_{12} , E_{13} et E_{23} , et deux densités surfaciques de charge Θ_{12} et Θ_{13} :

$$- \left[C_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} C_2 \right] E_{12} + \left[C_1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} C_3 \right] E_{13} - \left[C_2 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} C_3 \right] E_{23} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} C_2 \Theta_{12} - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_3} C_3 \Theta_{13} = 0$$

avec $C_i = \tan\left(\frac{\lambda^* \alpha_i}{2}\right)$

(111)

Bien que cette dernière équation n'ait pas donné de bons résultats en pratique, nous avons tout de même décidé de la présenter car par principe elle est correcte. Le problème réside certainement dans l'estimation de λ_m^* .

4 Conclusion

La souplesse de la formulation FEM a permis de traiter facilement le comportement d'une région SC par couplage avec la BEM. Le schéma temporel couplé avec la méthode du point fixe permet la prise en compte du comportement non-linéaire de la conductivité dans le couplage.

L'utilisation d'une formulation ayant pour inconnue le champ normal en frontière, entraîne la formation de singularités géométriques aux points de rencontre des régions. Lorsque l'une des régions est faiblement conductrice on ne sait pas décrire le comportement du champ au voisinage de la singularité. Nous avons alors proposé des équations basées sur le cas des singularités en électrostatique.

Dans le prochain chapitre, nous étudions la stabilité et la précision du schéma temporel en validant des géométries simples et nous avons testé les équations proposées dans ce chapitre permettant de traiter les singularités géométriques dans le cas d'une géométrie complexe.

Chapitre III - Validation du code

FEMBEM

Nous commençons ce dernier chapitre par valider le couplage FEM/BEM en simulant une géométrie simple en régime harmonique. Le schéma temporel est validé pour plusieurs formes de tension.

Afin de justifier du choix de la BEM, nous avons comparé les précisions sur le calcul du champ électrique en frontière du SC avec un modèle employant uniquement la FEM.

Grace à un modèle 1D de couche mince, les équations employées pour prendre en compte les singularités géométriques en présence d'un SC sont validées.

Enfin, le cas d'une extrémité de câble HT contenant une inclusion SC a été modélisé.

Section 1 - Validation analytique du couplage BEM/FEM

Afin de valider le couplage entre la BEM et la FEM, nous avons modélisé une géométrie dont la solution est connue analytiquement via la méthode de la transformée de Laplace. Pour des conductivités linéaires, le code est validé en régime harmonique et en régime temporel pour différentes formes d'onde (sinus, impulsion et échelon).

En régime harmonique, cela a permis d'estimer le domaine de validité du code, c'est à dire la plage des conductivités pour lesquelles le calcul reste pertinent. Cette information est essentielle lorsque l'on désire modéliser des conductivités ayant une très forte non-linéarité par rapport au champ électrique.

En régime temporel cela a permis d'observer la stabilité du schéma en fonction du pas de temps et du coefficient de relaxation choisis.

1 Validation en régime harmonique

1.1 Choix de la géométrie

Parmi les géométries possédant une solution analytique, nous avons choisi de modéliser des condensateurs qui possèdent soit la symétrie d'un cylindrique infini, soit la symétrie d'une sphère. La région SC est placée entre deux diélectriques parfaits, parallèlement aux armatures du condensateur.

Pour valider la formulation 2D plane, nous utilisons un condensateur cylindrique infini, et pour valider la formulation axisymétrique nous utilisons un condensateur sphérique. L'intérêt est que ces deux modèles peuvent être représentés par la même géométrie (Figure 1).

- Formulation **2D PLANE** \Rightarrow Condensateur **CYLINDRIQUE infini**.
- Formulation **AXISYMETRIQUE** \Rightarrow Condensateur **SPHERIQUE**.

Dans le domaine de l'isolation haute tension, le modèle axisymétrique est bien sûr le plus intéressant, mais nous ne négligerons pas la symétrie 2D plane infinie car elle permet de modéliser des sections de câble de transport d'énergie électrique. Les deux modèles sont donc validés avec la même attention.

Le choix des constantes diélectriques a été fait de manière à obtenir une chute de tension

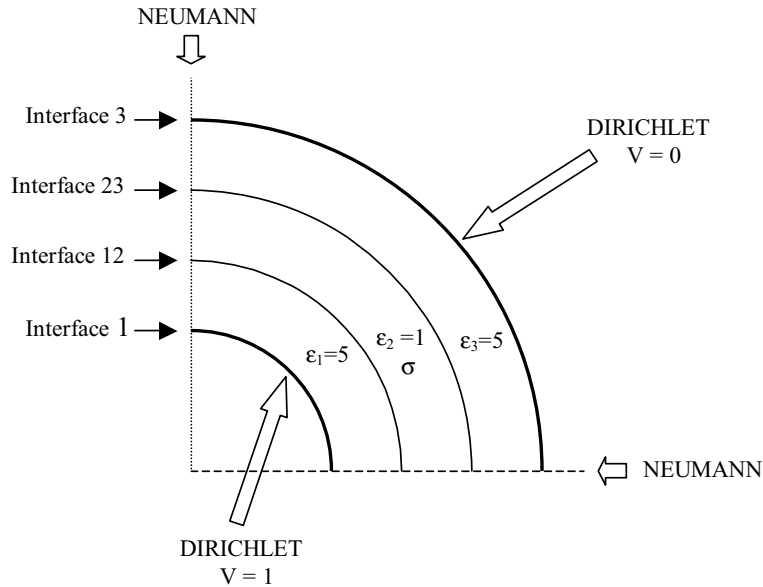


Figure 1 : Géométrie modélisant un condensateur cylindrique ou sphérique avec trois couches isolantes.

notable aux bornes de la frontière semi-conductrice. La permittivité est donc prise plus faible dans la région conductrice que dans les autres régions:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = 5 ; \varepsilon_2 = 1 ; \varepsilon_3 = 5 \\ 0 < \sigma < 10^{-4} \text{ [S/m]} \end{aligned} \quad (1)$$

Les rayons de chaque interface sont:

$$\begin{aligned} r_1 = 1 \text{ mm} ; r_3 = 4 \text{ mm} \\ r_{12} = 2 \text{ mm} ; r_{23} = 3 \text{ mm} \end{aligned} \quad (2)$$

La Figure 2 représente le maillage adopté, il est considéré comme étant assez fin compte tenu de la simplicité de la géométrie. Il a été conçu à l'aide du logiciel Flux2d [25]. Seul le maillage surfacique de la région SC (gris foncé) est utilisé par le code FEMBEM. Pour les autres régions, on n'utilise que le maillage des frontières.

1.2 Modèle analytique

Grâce à la symétrie de la géométrie, le potentiel dans chaque région ne dépend que de la distance r du point avec le centre des cercles constituant les différentes interfaces (modèle 1D). Pour le condensateur cylindrique, le potentiel varie de manière logarithmique (3-a), et il varie en $1/r$ pour le condensateur sphérique (3-b).

$$\begin{aligned} V_i(x) &= a_i \ln(x) + b_i & (a) \\ V_i(x) &= \frac{a_i}{x} + b_i & (b) \end{aligned} \quad (3)$$

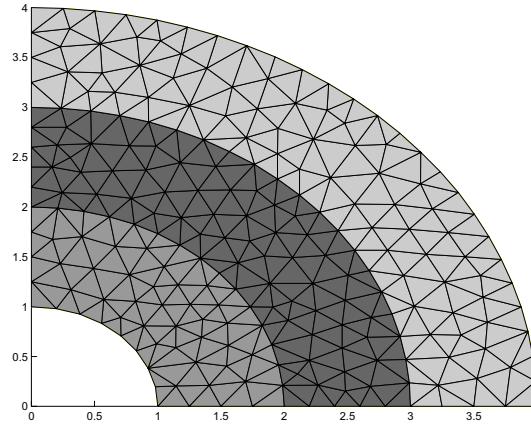


Figure 2 : Dimensions et maillage de la géométrie de base. 870 Nœuds - 405 Eléments triangulaires 2nd Ordre. (Maillage: Flux2D, [25])

On détermine les constantes a_i et b_i dans chaque région i en résolvant le système (4) constitué par les relations de continuité du potentiel et de saut du champ normal aux interfaces.

$$\begin{aligned}
 V_1(r_{12}) &= V_2(r_{12}) \\
 j\omega\varepsilon_1 \left. \frac{\partial V_1}{\partial x} \right|_{x=r_{12}} &= (\sigma + j\omega\varepsilon_2) \left. \frac{\partial V_2}{\partial x} \right|_{x=r_{12}} \\
 V_2(r_{23}) &= V_3(r_{23}) \\
 (\sigma + j\omega\varepsilon_2) \left. \frac{\partial V_2}{\partial x} \right|_{x=r_{23}} &= j\omega\varepsilon_3 \left. \frac{\partial V_3}{\partial x} \right|_{x=r_{23}}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Une solution analytique peut également être donnée en utilisant un modèle de circuit équivalent. Au *ChapIII-Sect1-2*, nous proposons les solutions pour différents types de sources dont la source sinusoïdale (Figure3, (10) et (16)).

1.3 Validation

Pour valider le modèle harmonique, nous estimons la précision de la valeur moyenne du potentiel aux interfaces 12 et 23 (Figure 1) pour une conductivité comprise entre $10^{-10} S/m$ qui correspond à un diélectrique parfait, à $10^{-6} S/m$ correspondant à une région parfaitement conductrice à la fréquence $50 Hz$.

Le Tableau 1 représente les potentiels réels et imaginaires en fonction de la conductivité, ainsi que l'erreur relative (5) par rapport au calcul analytique. V_a est le potentiel analytique en un nœud de l'interface, et V_n est la valeur du potentiel en un nœud calculée par

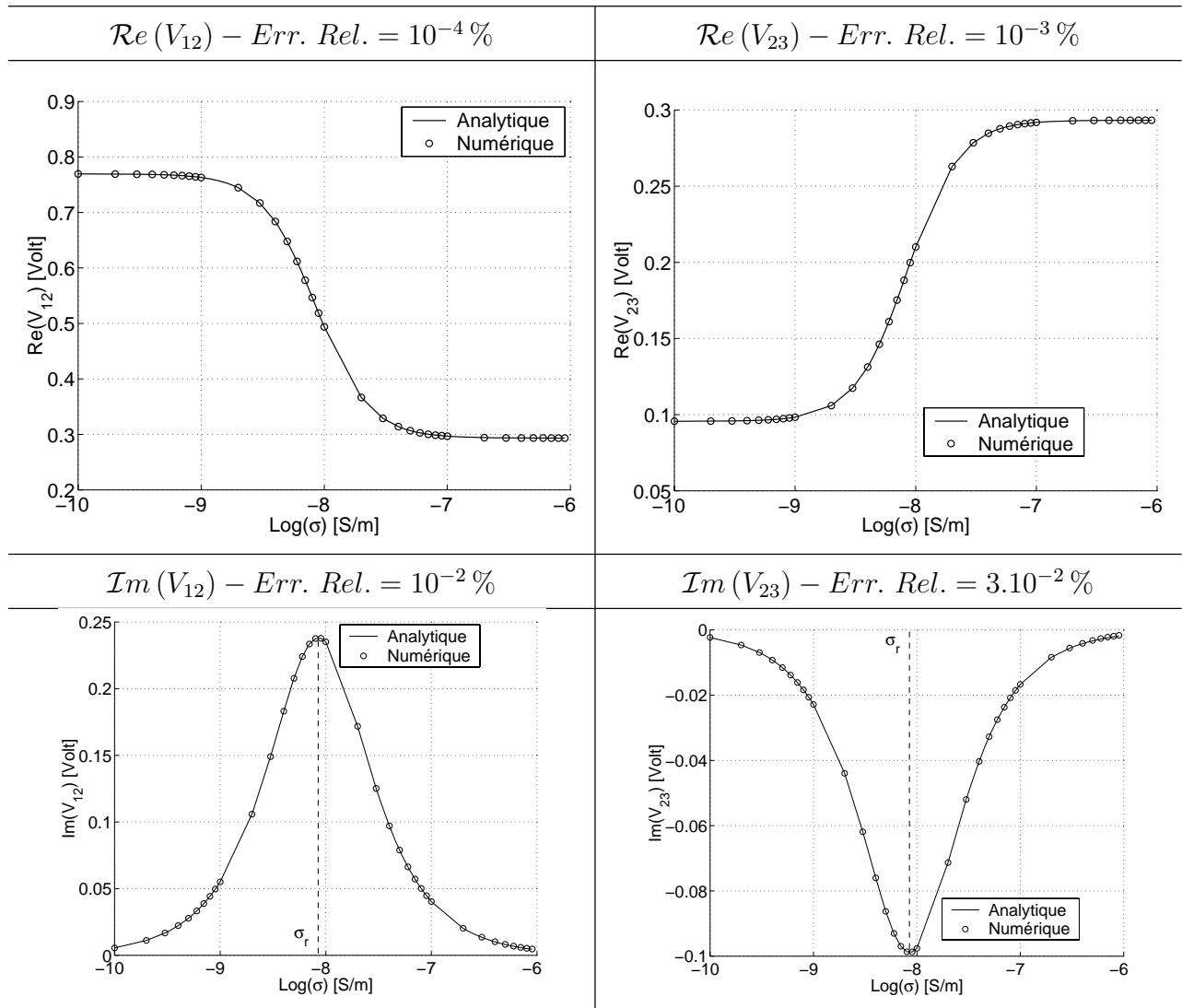


Tableau 1 : Comparaison des calculs numériques et analytiques du potentiel aux interfaces 12 et 23 pour le condensateur cylindrique.

FEMBEM:

$$Err. Rel. = \left| \frac{V_a - V_n}{V_a} \right| \quad (5)$$

Outre la concordance du couplage avec la méthode analytique, on voit apparaître les deux états extrêmes du SC:

- $\sigma < 1.10^{-9} S/m$: SC se comporte comme un diélectrique parfait.
- $\sigma > 1.10^{-7} S/m$: SC se comporte comme un conducteur parfait.

Entre les deux, on remarque une phase assez étroite de transition. On notera σ_r (6) la valeur de la conductivité pour laquelle l'effet du courant de déplacement est du même

ordre de grandeur que l'effet du courant de conduction.

$$\sigma_r \approx 8.10^{-9} \text{ S/m} \quad (6)$$

Nous avons effectué la même simulation pour la formulation axisymétrique. Ce qui a donné également de bons résultats au niveau de la précision (Tableau 2) et l'on a pu estimer une conductivité de transition σ_r du même ordre que pour la symétrie 2D plane.

	$\mathcal{R}e(V_{12})$	$\mathcal{I}m(V_{12})$	$\mathcal{R}e(V_{23})$	$\mathcal{I}m(V_{23})$
Err. Rel. (%)	1.10^{-3}	7.10^{-3}	2.10^{-3}	4.10^{-2}

Tableau 2 : Comparaison de la précision sur les calculs numériques et analytiques du potentiel aux interfaces 12 et 23 pour le condensateur sphérique (modèle FEMBEM axisymétrique).

1.4 Domaine de validité du couplage

Toujours à 50 Hz, lorsque l'on balaie une plus large gamme de conductivité, on note une divergence de la solution du système (Tableau 3) à dessus de la conductivité limite σ_{lim} (7).

$$\sigma_{lim} \approx 1.10^{-6} \text{ S/m} \quad (7)$$

La première explication de ces résultats, serait d'accuser le mauvais conditionnement de la matrice principale. Seulement, les résultats respectent la symétrie de la géométrie, ce qui signifie que l'inversion par la méthode du pivot de Gauss est correcte.

Ces résultats nous font penser que le problème se trouve au niveau de l'équation du courant normal en frontière du SC (8):

$$\sigma\Psi + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc}\Theta_s = 0 \quad (8)$$

En effet, pour obtenir un système plus homogène, il a été nécessaire d'effectuer un changement de variable, en posant $\Theta'_s = \Theta_s/\varepsilon_0$, on a assemblé en réalité l'équation suivante:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\Psi + j\omega\Theta'_s = 0 \quad (9)$$

On note qu'à 50 Hz, pour une conductivité supérieure à σ_{lim} , l'ordre de grandeur du coefficient associé à Ψ est 10^5 alors que l'ordre du coefficient associé à Θ'_s n'est toujours que de 10^2 .

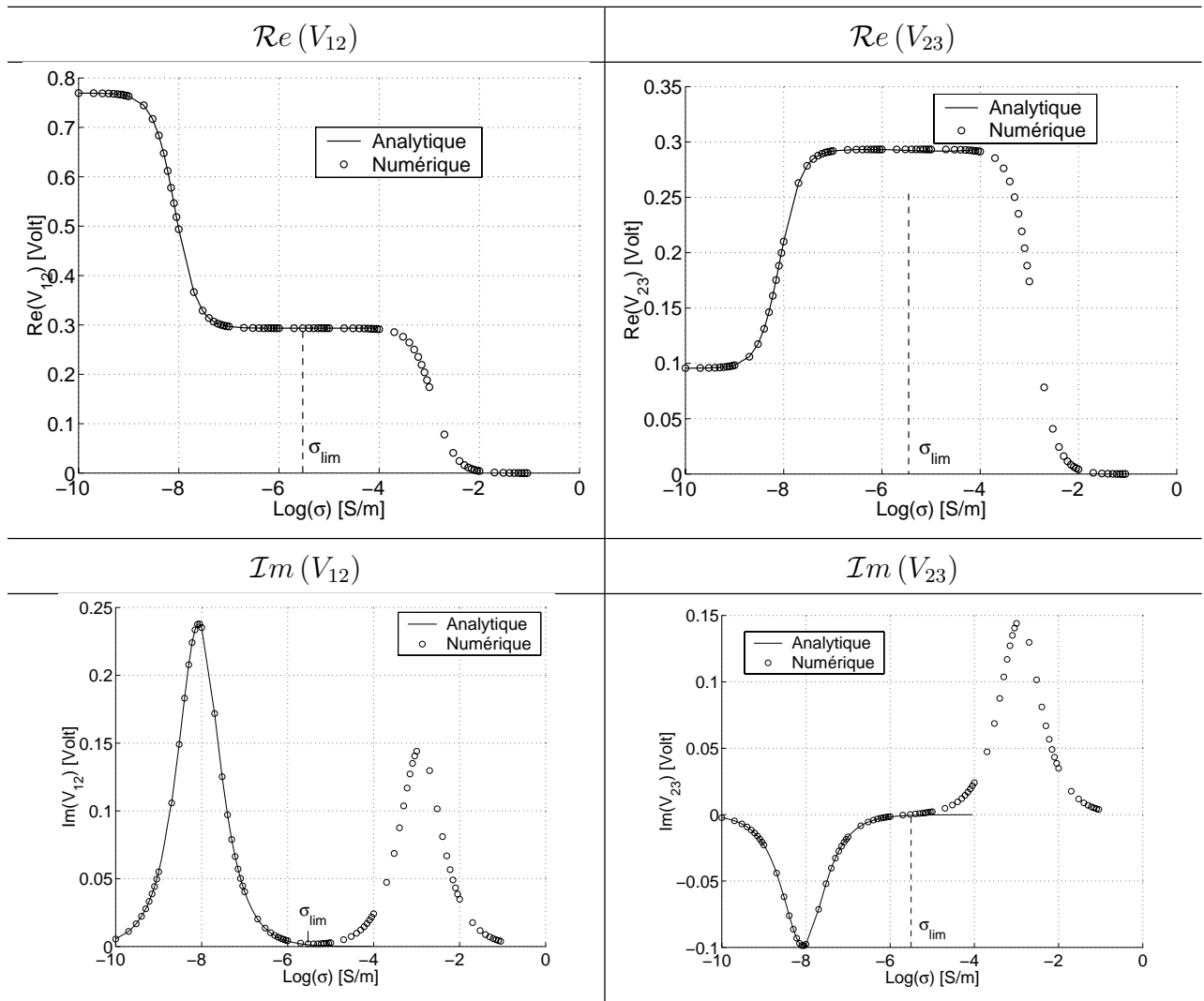


Tableau 3 : Limite de validité du couplage numérique pour le condensateur cylindrique.

tel-00139534, version 1 - 1 Apr 2007

Pour vérifier l'influence de cette équation, nous avons développé sous Mathcad [45] un modèle 1D simplifié du condensateur cylindrique. Les régions diélectriques sont traitées par la BEM et la région SC qui est traitée par la FEM, est constituée de deux éléments. L'équation du courant normal a été écrite sous la même forme que (9).

Pour ce modèle, on a observé une divergence numérique, i.e. que la région SC passe au potentiel zéro, pour des valeurs de la conductivité beaucoup plus grandes: $\sigma_{lim} = 10^8 S/m$. Cette valeur semble beaucoup trop élevée pour affirmer que ce phénomène de divergence numérique apparaît également dans le modèle 1D.

Quoi qu'il en soit, lors de la modélisation avec une conduction non-linéaire, il faudra limiter la plage de variation de la conductivité dans la région SC. D'un point de vue phénoménologique, cela n'est pas gênant puisque lorsque l'on atteint σ_{lim} , la région se comporte déjà comme un conducteur parfait.

On aura d'ailleurs l'occasion de remarquer que lorsque la conductivité est non-linéaire (i.e., dans notre cas, dépendante du module du champ électrique), σ_{lim} n'est jamais atteint car la contrainte en champ est réduite par cette même conductivité, ce qui limite donc l'augmentation de σ .

2 Validation en régime temporel - Conductivité linéaire

Afin de pouvoir valider le modèle en régime temporel nous avons développé la solution analytique du potentiel aux bornes de la région SC de la géométrie précédente. Nous avons comparé la réponse pour trois types de source de tension: échelon, impulsion et sinus. La structure du modèle analytique ne traitant que les cas où la conductivité est linéaire, nous n'avons validé que ces cas.

2.1 Choix des conductivités pour la validation

Nous ne pouvons effectuer une validation sur une grande plage de conductivités puisque cela nécessiterait un grand nombre de résolutions. Nous nous sommes contentés de valider la simulation pour plusieurs conductivités caractéristiques en observant l'évolution du potentiel en fonction du temps. Nous avons choisi trois conductivités caractéristiques des trois principaux états dans lesquels peut se trouver un SC (Tableau 4).

Pour chaque conductivité, nous estimons une erreur obtenue en faisant la moyenne des

σ	Estimation	Courant de Déplacement	Courant de Conduction	Description
σ_1	0	Non Négligeable	Négligeable	Diélectrique
σ_2	σ_r	Non Négligeable	Non Négligeable	Semi-conducteur
σ_3	σ_{lim}	Négligeable	Non Négligeable	Conducteur

Tableau 4 : Les différentes conductivités employées lors de la validation du modèle temporel.

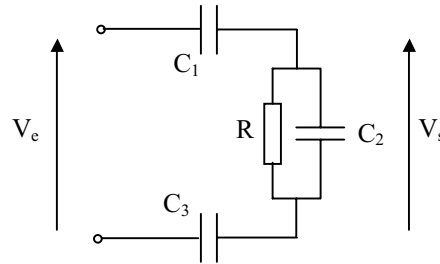


Figure 3 : Circuit équivalent d'un condensateur triple couche avec région faiblement conductrice au centre.

erreurs relatives (5) à chaque nœud des interfaces 12 et 23.

2.2 Modèle analytique d'une réponse à une source de tension quelconque

Lorsque les sources de tension ne sont plus sinusoïdales, l'équation de conduction nécessite d'être discrétisée dans le domaine temporel également. L'impossibilité d'utiliser le formalisme complexe rend plus délicat l'emploi d'un modèle 1D simple pour valider le code. Nous avons alors utilisé un circuit électrique équivalent (Figure 3).

Grâce aux différentes symétries, on peut représenter les régions diélectriques parfaites par une capacité constante, et la région diélectrique faiblement conductrice par une capacité en parallèle avec une résistance.

Connaissant la forme de la source de tension V_e et la fonction de transfert $H_t(\omega)$ du circuit dans le domaine fréquentiel, on détermine la différence de potentiel V_s entre les armatures de la région conductrice grâce à la relation suivante:

$$\begin{aligned}
 V_s &= H_t(\omega)V_e \\
 H_t(\omega) &= \frac{j\omega}{b + aj\omega} \\
 \text{avec} \quad a &= 1 + \frac{(C_1 + C_3)C_2}{C_1C_3} \quad \text{et} \quad b = \frac{C_1 + C_3}{C_1C_3R}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Les grandeurs électriques de ce circuit dépendent de la permittivité et de la conductivité de chaque région. Suivant le type de symétrie, ces grandeurs seront différentes.

2.2.1 Condensateur cylindrique

En prenant les notations de la Figure 3, les grandeurs du circuit électrique équivalent sont [55] et [56]:

$$\begin{aligned} C_1 &= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 h (\ln r_{12} - \ln r_1)^{-1} \\ C_2 &= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 h (\ln r_{23} - \ln r_{12})^{-1} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma h} (\ln r_{23} - \ln r_{12})^{-1} \\ C_3 &= 2\pi\varepsilon_0\varepsilon_3 h (\ln r_3 - \ln r_{23})^{-1} \end{aligned} \quad (11)$$

2.2.2 Condensateur sphérique

De même pour une symétrie sphérique [55] et [56]:

$$\begin{aligned} C_1 &= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_{12}} \right)^{-1} \\ C_2 &= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{23}} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{2\pi\sigma h} \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{23}} \right)^{-1} \\ C_3 &= 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_3 \left(\frac{1}{r_{23}} - \frac{1}{r_3} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (12)$$

2.3 Réponse à un échelon de tension

En passant par les transformées de Laplace, la réponse temporelle V_s (Figure 3) à un échelon de tension est de la forme:

$$V_s(t) = \frac{V_0}{a} \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) \quad (13)$$

La réponse temporelle pour $\sigma = 7.10^{-9} S/m$ est présentée dans la Figure 4.

Le Tableau 5 présente la précision sur V_s pour différentes valeurs de δ , pour une conductivité $\sigma_2 = 7.10^{-9} S/m$ et un pas de temps $\Delta t = 4.10^{-4} s$.

⇒ on remarque que le paramètre temporel optimal pour ce pas de temps est $\delta_0 = 1/2$,

Coefficient temporel (δ)	($\delta = 1/3$)	Trapèze ($\delta = 1/2$)	Galerkin ($\delta = 2/3$)	Totalement implicite ($\delta = 1$)
Err. Rel. sur V_s (%)	8	4	12	60
Ecart Type (%)	3	1	7	60

Tableau 5 : Erreur sur V_s pour différents paramètres du schéma temporel δ . L'erreur est obtenue à partir d'une moyenne de V_s pour chaque pas de temps.

correspondant au schéma du trapèze.

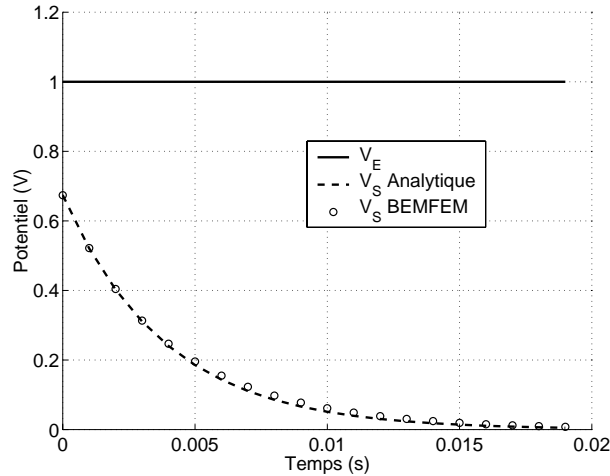


Figure 4 : Réponse à un échelon pour $V_0 = 1 V$ et $\sigma_r = 7.10^{-9} S/m$.

- Pour $\sigma_3 = 1.10^{-6} S/m$, i.e. lorsque le phénomène de conduction est dominant sur le phénomène capacitif, le paramètre optimal est $\delta_0 = 1/2$.
- Pour $\sigma_1 = 0 S/m$, i.e. lorsque le courant de déplacement est dominant, le coefficient d'amplification G est égal à l'unité, garantissant une stabilité inconditionnelle du schéma temporel. En pratique, on remarque qu'effectivement la précision du schéma est convenable pour toute valeur de δ comprise entre 0 et 1.

Le Tableau 6 récapitule les différents paramètres optimaux (δ_0) obtenus pour plusieurs conductivités caractéristiques. L'erreur correspond à l'erreur obtenue sur le calcul de la différence de potentiel V_s entre l'interface 12 et l'interface 23 por chaque pas de temps dans le cas de la géométrie 2D plane.

Le même type de raisonnement s'applique à la configuration axisymétrique, et conduit

σ (S/m)	Δt (s)	Paramètre optimal (δ_0)	Err. Rel. sur V_s (%)	Ecart type (%)
$\sigma_1 = 0$	4.10^{-4}	indifférent	5.10^{-4}	1.10^{-4}
$\sigma_2 = 7.10^{-9}$	4.10^{-4}	1/2	4	1
$\sigma_3 = 1.10^{-7}$	4.10^{-5}	1/2	5	3

Tableau 6 : Récapitulatif du paramètre du schéma temporel optimal (δ_0) et la précision pour différentes conductivités en réponse à un échelon de tension pour le condensateur cylindrique.

aux même conclusions, concernant le paramètre du schéma temporel optimal.

2.4 Réponse à une onde de choc

Ce cas nous intéresse tout particulièrement puisque l'une des principales fonctions de l'isolation semi-conductrice est généralement de protéger le matériel contre des perturbations induites par des manœuvres sur le réseau ou des coups de foudres. L'Annexe 1 présente les formes normalisées de ces types d'onde.

La réponse de notre configuration à une onde de choc est de la forme :

$$V_s = V_0(\beta - \alpha) \left[\frac{-b}{(\alpha a - b)(\beta a - b)} \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) \dots \right. \\ \left. \dots - \frac{\alpha}{(\beta - \alpha)(\alpha a - b)} \exp(-\alpha t) + \frac{\beta}{(\beta - \alpha)(\beta a - b)} \exp(-\beta t) \right] \quad (14)$$

avec $\alpha = 2.10^4 \text{ s}$ et $\beta = 1.10^{-1} \text{ s}$

La limite haute du spectre de fréquence du phénomène peut être estimée en multipliant

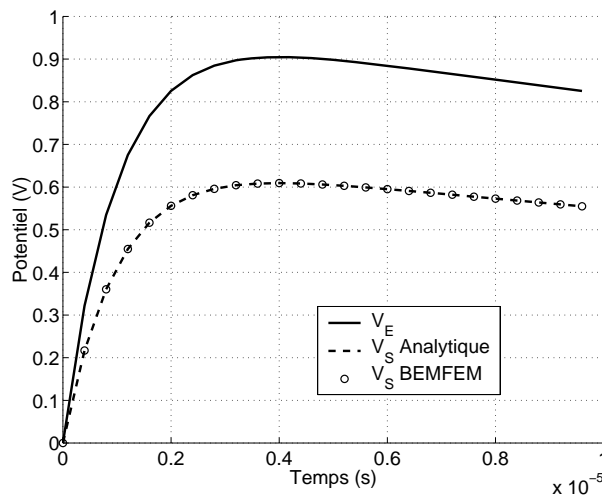


Figure 5 : Réponse à une onde de choc pour $V_0 = 1 \text{ V}$ et $\sigma_r = 5.10^{-6} \text{ S/m}$.

par quatre le front de montée de l'onde. Pour la tension représentée en Figure 5, le temps de montée est de $1,25 \mu\text{s}$, on estime alors la pulsation à $\omega_r = 1,25.10^6 \text{ rad/s}$.

La conductivité pour laquelle le courant de déplacement et le courant de conduction sont du même ordre de grandeur est à peu près de:

$$\sigma_r = \omega_r \varepsilon_0 \varepsilon_{sc} \approx 5.10^{-6} \text{ S/m} \quad (15)$$

Le seuil à partir duquel la conductivité a un effet non négligeable est ici bien supérieur à celui que l'on trouve à 50 Hz car les effets du courant de déplacement augmentent avec la fréquence.

L'obtention d'un coefficient d'amplification G_δ proche de 1, ne peut se faire qu'en prenant un pas de temps extrêmement fin. Nous avons donc fixé un pas de temps plus raisonnable, et en jouant sur le coefficient de relaxation nous atténuons l'influence de l'oscillation pour la convergence de la solution. Une nouvelle fois c'est le schéma du trapèze ($\delta_0 = 1/2$) qui a donné le résultat le plus acceptable en terme de précision et de stabilité (Tableau 7).

Sauf pour une conductivité nulle où le schéma temporel est en théorie inconditionnelle-

σ (S/m)	Δt (s)	Paramètre optimal (δ_0)	Err. Rel. sur V_s (%)	Ecart type (%)
$\sigma_1 = 0$	2.10^{-7}	indifférent	5.10^{-5}	3.10^{-3}
$\sigma_2 = 5.10^{-6}$	2.10^{-7}	1/2	2.10^{-1}	1.10^{-1}
$\sigma_3 = 1.10^{-5}$	2.10^{-7}	1/2	3.10^{-1}	3.10^{-1}

Tableau 7 : Récapitulatif du paramètre d optimal (d_0) et la précision sur V_s pour différentes conductivités en réponse à une onde de choc de type foudre pour le condensateur cylindrique.

ment stable.

Les simulations réalisées sur la géométrie axisymétrique donnent des résultats du même ordre de grandeur.

2.5 Réponse à une tension sinusoïdale

En procédant de la même manière que pour les deux cas précédents, nous allons étudier la réponse à une excitation sinusoïdale de fréquence 50 Hz (16).

$$\begin{aligned}
 V_e(t) &= V_0 \sin(\omega t) \\
 V_s(t) &= \frac{\omega V_0}{\omega^2 a^2 + b^2} \left[-b \exp\left(-\frac{b}{a}t\right) + b \cos(\omega t) + a\omega \sin(\omega t) \right]
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Nous avons discrétisé en 50 pas de temps par période ($\Delta t = 4.10^{-4} \text{ s}$), (Figure 6).

Lorsque la conductivité n'est pas nulle, on trouve encore un meilleur compromis entre stabilité et précision lorsque l'on emploie le schéma temporel du trapèze ($\delta = 1/2$, Tableau 8).

3 Conclusion

Les diverses validations effectuées en régimes harmonique et temporel ont permis de certifier du bon fonctionnement du couplage lorsque la conductivité est linéaire.

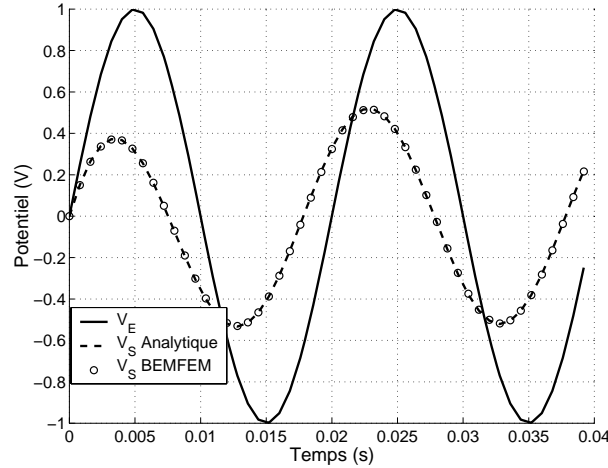


Figure 6 : Réponse à une tension sinusoïdale pour $V_0 = 1 V$ et $\sigma = 7.10^{-9} S/m$.

σ (S/m)	Δt (s)	Paramètre optimal (δ_0)	Err. Rel. sur V_s (%)	Ecart type (%)
$\sigma_1 = 0$	4.10^{-4}	indifférent	5.10^{-4}	4.10^{-4}
$\sigma_2 = 5.10^{-6}$	4.10^{-4}	1/2	1.10^{-1}	8.10^{-1}
$\sigma_3 = 1.10^{-5}$	4.10^{-4}	1/2	5.10^{-1}	15.10^{-2}

Tableau 8 : Récapitulatif du paramètre optimal (δ_0) et précision sur V_s pour différentes conductivités en réponse à une excitation sinusoïdale pour le condensateur cylindrique.

En régime harmonique, nous avons pu en plus constater qu'il n'était pas possible d'utiliser le code de manière pertinente pour toute la gamme des conductivités existantes. Ceci ne constitue pas en pratique un handicap trop important puisque la plage des conductivités pouvant être simulées correctement est suffisamment large pour décrire les cas extrêmes du comportement électrique d'un isolant SC: lorsqu'il se comporte comme un conducteur ou un isolant.

En régime temporel, lorsque la conductivité est différente de zéro, c'est le schéma d'intégration de la méthode du trapèze ($\delta = 1/2$) qui offre les meilleurs résultats en terme de précision. Une solution pour améliorer cette précision pourrait être un schéma temporel à pas variable.

Section 2 - Influence de l'estimation du champ normal en frontière du SC

Les conductivités non-linéaires les plus performantes en isolation HT sont celles dépendantes du champ électrique. Il est donc essentiel d'estimer correctement ces champs. Dans un modèle basé sur la méthode des éléments finis, le champ électrique peut être approché à partir des potentiels des nœuds des éléments du maillage de la région SC. Seulement cette méthode est peu précise à proximité des frontières, ce qui se répercute sur l'estimation de la conductivité en ces frontières.

Grâce au couplage avec la BEM, ce problème est évité puisque la formulation associée à cette méthode permet d'obtenir directement la valeur du champ normal aux interfaces.

Pour justifier cette affirmation, il nous a semblé intéressant d'analyser les résultats de la modélisation d'une région SC en estimant le champ normal de frontière par approximation par éléments finis puis en utilisant la valeur du champ déduite de la BEM. C'est ce qui est présenté en premier lieu dans cette partie.

Afin d'effectuer le couplage FEMBEM il a été nécessaire de développer une formulation particulière des éléments finis permettant de considérer le champ normal en chaque nœud des frontières du SC comme une inconnue supplémentaire. Ce travail nous a donné l'idée de développer un code traitant toutes les régions par cette méthode aux éléments finis modifiée.

Nous présentons dans ce qui suit la formulation de cette méthode que nous appelons FEMNOR. Les résultats du calcul du champ normal sont comparés avec ceux obtenus par une méthode aux éléments finis classique (FEMCLA) que l'on trouve dans le logiciel de modélisation Flux2d [25].

Enfin les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec le couplage FEMBEM.

1 Champ normal et conduction non-linéaire

Pour estimer le champ électrique normal à la frontière de la région SC, on peut soit utiliser le résultat donné directement par BEM, soit calculer la projection du gradient du potentiel par une approximation aux éléments finis à partir des valeurs du potentiel sur les nœuds du maillage de la région SC.

Nous avons vu que pour modéliser une région possédant une conductivité non-linéaire il était nécessaire de résoudre à chaque pas de temps plusieurs fois un problème électrostatique (méthode du point fixe, *ChapII-Sect2-2.2*). Au final, l'erreur générée lors de l'estimation du champ par l'approximation aux éléments finis peut alors s'ajouter, rendant la simulation du phénomène trop inexacte pour être pertinente. C'est ce que nous allons montrer dans ce qui suit en comparant les résultats d'une simulation qui utilise le champ normal aux frontières obtenu via la BEM avec les résultats d'une simulation effectuée en utilisant une approximation du champ normal par éléments finis.

1.1 Cas du condensateur cylindrique

Pour la comparaison, nous utilisons le condensateur cylindrique infini utilisé pour la validation du code (*ChapIII-Sect1*). Il est constitué de trois couches isolantes définies par leurs permittivités respectives ε_1 , ε_2 et ε_3 . La deuxième région qui n'est pas parfaitement isolante, est aussi caractérisée par une conductivité σ (Figure 1).

Les permittivités sont les mêmes que lors la validation en régime harmonique (17). Afin d'obtenir un effet non-linéaire notable, nous choisissons un SC qui commence à devenir conducteur lorsque le module du champ électrique avoisine les $100 V/m$ (17).

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = 5 ; \varepsilon_2 = 1 ; \varepsilon_3 = 5 \\ \sigma(\vec{E}) = \sigma_0 \exp(-\alpha|\vec{E}|) \\ \text{avec } \sigma_0 = 1.10^{-10} S/m \quad \text{et} \quad \alpha = 1.10^{-2} m/V \end{aligned} \quad (17)$$

1.2 Comparaison des deux calculs de la conductivité en frontière du SC

1.2.1 Conductivité en frontière via le champ normal issu de BEM

Ici on a estimé la conductivité en frontière à partir de la valeur du champ normal en frontière de la région SC qui est donnée par BEM. La conductivité à l'intérieur de la région est estimée classiquement en approchant le module du champ en chaque nœud par les éléments finis. La Figure 7 présente le champ normal et le courant normal à l'interface 12.

⇒ L'évolution de la densité de courant évoque bien un effet non-linéaire à la frontière du SC.

1.2.2 Conductivité en frontière via l'approximation du champ normal par éléments finis

Le champ normal à la frontière du SC est ici obtenu en approximant par les éléments finis à partir du potentiel sur les nœuds. La Figure 8 représente l'évolution temporelle de la densité de courant J_{12} normal à l'interface 12.

⇒ On ne remarque ici aucun effet non-linéaire: l'approximation par les éléments finis du champ normal aux frontières d'une région conduit à une sous-estimation de sa valeur.

Il semble donc préférable d'utiliser pour le calcul non linéaire, la valeur du champ normal donnée par la BEM.

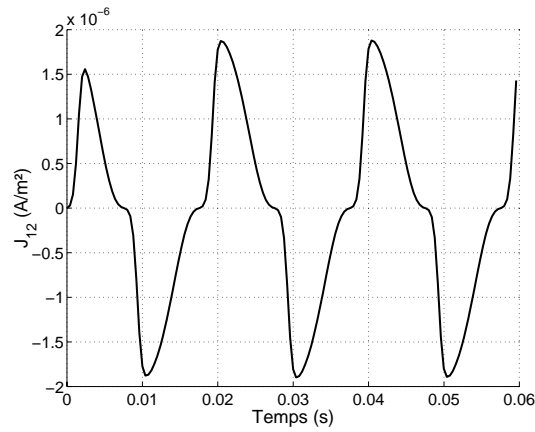


Figure 7 : Densité de courant à l'interface 12 en fonction du temps. Calcul de la conductivité à l'interface σ via la valeur du champ normal donnée par BEM - Condensateur cylindrique.

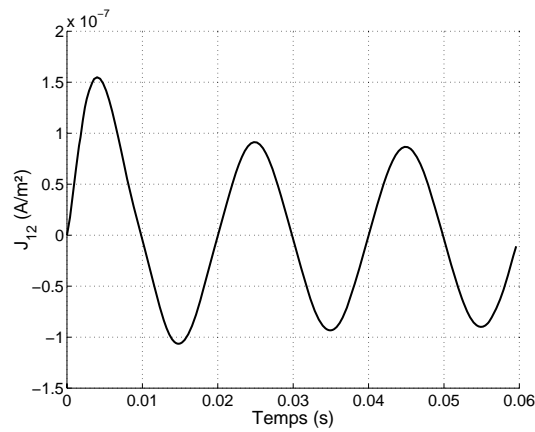


Figure 8 : Evolution temporelle de la densité de courant sur l'interface 12. Calcul de σ à l'interface à partir du calcul du champ normal par éléments finis.

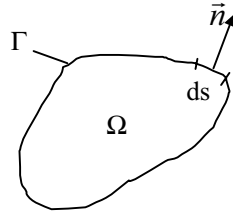


Figure 9 : Orientation du vecteur normal n à la frontière Γ délimitant la région Ω .

2 Formulation éléments finis en champ normal (FEMNOR)

Les simulations du paragraphe précédent ont mis en valeur les effets de l'erreur d'un calcul par approximation en éléments finis du champ normal à la frontière de la région SC. L'emploi d'une méthode de couplage avec la BEM est ainsi légitimé puisque cette dernière méthode donne directement une bonne estimation du champ.

Toutefois, ces observations nous ont amené à développer une méthode basée uniquement sur la FEM, mais qui permet d'obtenir directement le champ normal aux interfaces. Il suffit pour cela de traiter chaque région avec la formulation employée pour traiter la région SC dans le couplage FEMBEM. C'est à dire que le champ normal en chaque nœud des interfaces devient une inconnue. Nous appelons cette méthode la FEMNOR.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les modifications à effectuer sur la FEM classique (FEMCLA) pour aboutir à la FEMNOR.

Cette méthode a été implémentée sous Matlab [57] dans le cas du régime harmonique avec des régions ayant des conductivités linéaires. Nous avons pu ainsi modéliser le condensateur cylindrique (Figure 1) et nous avons comparé la précision sur le calcul du champ normal avec la précision obtenue lors de l'approximation du champ normal à partir d'une méthode classique, en l'occurrence Flux2d [25].

2.1 Modification de la FEM

Avant de présenter la formulation FEMNOR qui permet de prendre en compte le champ normal comme une inconnue, nous faisons dans une première partie un bref rappel sur la formulation aux éléments finis classique (FEMCLA).

2.1.1 FEM classique: FEMCLA

En prenant les notations de la Figure 9, la formulation faible des éléments finis pour un

opérateur de Laplace appliqué au potentiel électrique V s'écrit:

$$-\iint_{\Omega} \varepsilon \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \varepsilon W \frac{\partial V}{\partial n} \, d\Gamma = 0 \quad (18)$$

(W sont les fonction de projection).

Généralement cette équation est assemblée une seule fois en chaque nœud, quel que soit le nombre de régions d'appartenance des nœuds. Cela permet de ne pas avoir à assembler le deuxième terme de gauche de (18) correspondant à l'intégrale sur la frontière car ce terme s'annule:

- Pour un nœud d'interface, il est positif dans une région et négatif dans la seconde région
- Lorsqu'un nœud de frontière est doté de la condition de Dirichlet, il n'est pas nécessaire d'estimer ce terme intégral non plus puisque l'influence du potentiel en ce nœud est directement intégrée dans le second membre du système (terme source)
- Quand c'est une condition de Neumann homogène, le terme est nul

Comme il n'est jamais nécessaire d'estimer cette intégrale de frontière, la FEMCLA conserve une bonne précision.

L'inconvénient est lorsque l'on désire estimer la valeur du champ normal sur une interface: il faut passer par une approximation aux éléments finis.

Nous avons vu au *ChapIII-Sect2-1* les conséquences de l'imprécision de cette approximation dans un schéma temporel non-linéaire, où il faut calculer un grand nombre de fois le champ normal.

Si l'on veut conserver un code utilisant uniquement la méthode des éléments finis, il est alors judicieux de modifier la formulation afin de considérer le champ normal comme une inconnue.

2.1.2 FEM utilisant le champ normal comme inconnue: FEMNOR

En s'inspirant de la formulation en éléments finis utilisée dans FEMBEM, il est possible de développer une méthode utilisant uniquement les éléments finis et qui considère le champ normal en frontière de chaque région comme une inconnue supplémentaire.

D'un point de vue analytique, cela revient à remplacer dans la formulation faible (18), la

dérivée normale du champ par une inconnue en champ Ψ :

$$\iint_{\Omega} \varepsilon \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V \, d\Omega + \oint_{\Gamma} \varepsilon W \Psi \, d\Gamma = 0 \tag{19}$$

avec $\Psi = -\frac{\partial V}{\partial n}$ (grandeur nodale)

On se retrouve alors avec des inconnues supplémentaires aux frontières de chaque domaine.

Afin d'obtenir les équations supplémentaires, il faut projeter (19) région par région.

Ce qui revient finalement à effectuer un couplage entre la FEM et elle-même.

Pour comparer de FEMCLA et FEMNOR, nous avons utilisé deux maillages différents (Tableau 9):

- Maillage 1, maillé très finement.
- Maillage 2, maillé plus grossièrement.

Cela permettra d'estimer de manière plus objective la précision de chacune des méthodes de calcul.

	Nœuds	Éléments surfaciques
Maillage 1	870	405
Maillage 2	280	121

Tableau 9 : Caractéristiques des deux maillages employés pour comparer les précisions des différentes méthodes.

2.2 Précision de FEMNOR

Pour connaître la précision de la FEMNOR, nous avons modélisé le condensateur cylindrique (Figure 1) en régime harmonique. Les résultats sont tout d'abord comparés avec ceux de la FEMCLA puis avec ceux de la FEMBEM.

2.2.1 Comparaison de FEMNOR avec FEMCLA

Le calcul avec FEMCLA est réalisé à l'aide du logiciel FLUX2D [25]. Pour le maillage 1 (Tableau 9), nous calculons la moyenne de l'erreur relative du potentiel et du champ normal pour les interfaces 12 et 23 avec les deux méthodes (Tableau 10). La valeur de la

conductivité utilisée $\sigma = 7.10^{-9} S/m$ correspond à $50 Hz$, à un courant de déplacement du même ordre de grandeur que le courant de conduction.

Le post-processing de FLUX2D estime la projection du champ sur la normale à une interface en faisant une interpolation triangulaire du type (20).

$$E_n = \sum_{k=1}^6 V_k \frac{\partial N_k}{\partial n} \quad (20)$$

La valeur du champ retenue, est la valeur moyenne sur chaque nœud de chaque interface. Le Tableau 10 donne la précision sur l'estimation du champ normal obtenue via les deux méthodes à l'instant $t = 5 ms$, c'est à dire lorsque la source de tension est à sa valeur maximale de $1 V$.

On remarque une plus grande précision du champ normal aux interfaces pour FEMNOR

	% d'Err. Rel. - FEMCLA	% d'Err. Rel. - FEMNOR
E_{12}	2.10^{-1}	2.10^{-2}
E_{23}	1.10^{-1}	3.10^{-3}

Tableau 10 : Erreur du champ aux interfaces 12 et 23 pour FEMCLA et FEMNOR à $t = 5 ms$.

que pour FEMCLA.

2.2.2 Comparaison de FEMNOR avec FEMBEM

Il est intéressant à présent de savoir si la FEMNOR est plus précise que la FEMBEM lors de l'estimation de la projection du champ sur la normale à une interface.

Nous avons alors relevé les valeurs de E_{12} et E_{23} par les deux méthodes pour la même simulation que précédemment, à savoir le condensateur cylindrique de conductivité volumique $7.10^{-9} S/m$. Les résultats de la précision pour chaque méthode sont présentés dans le Tableau 11.

On remarque que la FEMBEM a une meilleure précision que la FEMNOR.

Dans cette comparaison, on retrouve bien l'un des avantages d'utiliser la BEM qui est de fournir une meilleure estimation sur la projection du champ sur la normale à une interface.

3 Conclusion

Lorsque la région SC est dotée d'une conductivité non-linéaire, il semble essentiel d'estimer correctement le champ normal en frontière du SC, car dans le cas contraire l'accumulation

Condensateur cylindrique		% Err. Rel. parties réelle et imaginaire de E			
		FEMBEM		FEMNOR	
		Réelle	Imaginaire	Réelle	Imaginaire
Maillage 1	E_{12}	1.10^{-2}	1.10^{-1}	1.10^{-1}	1.10^{-1}
	E_{23}	1.10^{-2}	7.10^{-2}	9.10^{-2}	8.10^{-2}
Maillage 2	E_{12}	6.10^{-2}	4.10^{-1}	7.10^{-1}	4.10^{-1}
	E_{23}	5.10^{-2}	3.10^{-1}	3.10^{-1}	4.10^{-1}

Tableau 11 : Erreur relative sur les calculs de Ψ par FEMBEM et par FEMNOR des parties réelle et imaginaire du champ d'interface - Maillages 1 et 2.

des erreurs dans le schéma temporel risque de donner des résultats peu pertinents.

Nous avons présenté une méthode basée uniquement sur les éléments finis (FEMNOR) qui permet comme avec la FEMBEM d'estimer avec une bonne précision les champs normaux. En comparant les précisions de FEMBEM et FEMNOR, nous avons pu constater que la FEMBEM était tout de même plus précise pour le calcul des champs de frontière: c'est certainement dû à l'emploi des équations intégrales.

Section 3 - Etude de géométries complexes

La présence de points singuliers lors de la modélisation d'un système isolant est inéluctable lorsque la géométrie devient complexe. Bien que ces points n'existent pas dans le système réel, il est nécessaire de connaître le comportement du champ électrique au voisinage de ces points afin d'éviter qu'ils n'affectent trop les résultats des calculs.

Pour des systèmes composés uniquement de diélectriques parfaits, la prise en compte de ces singularités est bien connue. Mais lorsqu'une des régions en contact avec le point singulier est faiblement conductrice on ne trouve pas de relation décrivant le comportement du champ au voisinage. Nous avons donc procédé par expérimentation numérique pour arriver à traiter correctement les différentes singularités.

Afin de mieux cerner ce problème, nous commençons cette partie en étudiant le cas d'une couche mince en contact avec une électrode. La modélisation de cette géométrie entraîne l'apparition des deux principaux types de singularités:

- une électrode en contact avec deux diélectriques,
- un point de rencontre entre trois diélectriques.

Connaissant la répartition du potentiel le long de la couche via un modèle de différences finies 1D en régime harmonique (FD 1D) et en régime temporel (FDTD 1D), nous allons juger de la pertinence des équations supplémentaires que nous avons écrites pour le traitement de ces singularités.

Ce modèle 1D nous permettra également de valider une application originale de la FEM-NOR qui simule le modèle de couche mince de manière simple en appliquant une condition aux limites particulière.

Enfin nous étudions le cas pratique d'une extrémité de câble contenant une inclusion de matériau SC destinée à réduire les contraintes en champ.

1 Singularités en présence d'un diélectrique conducteur

Nous avons vu que la prise en compte d'une singularité géométrique dans un système composé de diélectriques parfaits se fait en écrivant une équation supplémentaire. Elle est généralement obtenue à partir d'une estimation du comportement du champ électrique. Il se peut donc que l'équation ne soit plus valable lorsqu'un des diélectriques devient

faiblement conducteur.

Afin de prendre en compte les modifications du comportement du champ à proximité de telles singularités, nous avons essayé différentes équations, et validé les résultats avec le modèle 1D de couche mince. Puis nous présentons la modélisation de la couche mince par la FEMNOR en utilisant des condition aux limites mixtes.

1.1 Modèle de couche mince linéaire

La Figure 10 représente schématiquement le cas d'une couche mince SC déposée sur une isolation parfaite (ε_i). L'extrémité gauche de la couche est en contact avec une électrode à laquelle on applique une tension $V(t)$. Le côté inférieur de l'isolant est quant à lui mis à la masse. Ce type de configuration se rencontre sur les barres des machines lorsqu'elles ressortent du stator (*ChapI-Sect2-3.1*), c'est l'électrode du haut qui est alors mise à la masse.

Dans ce qui suit nous proposons deux modèles pouvant décrire la répartition du potentiel

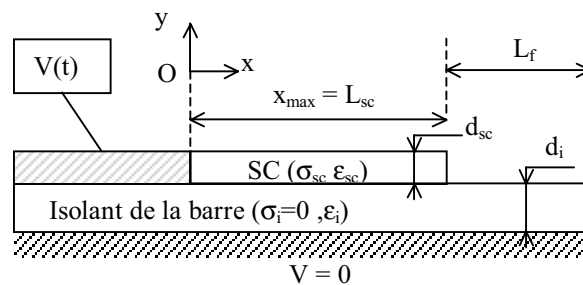


Figure 10 : Schématisation 2D d'une couche mince de SC appliquée sur un isolant parfait.

le long de la couche.

- **Modèle 1:** à base des différences finies - C'est ce modèle qui est employé pour effectuer la validation de la prise en compte des singularités géométriques.
- **Modèle 2:** basé sur la FEMNOR (*ChapIII-Sect2-2*) - Le modèle 1 étant suffisant pour nos validations, nous ne présenterons que la formulation du modèle 2, en insistant sur le fait qu'il constitue une application originale car il permet de prendre en compte très simplement une couche mince avec tout type de propriété électrique.

1.1.1 Modèle 1: méthode des différences finies (FD)

Rappelons les hypothèses permettant de traiter la couche SC comme une couche mince (*ChapI-Sect2-3.1*):

- (H1): Couche SC placée en milieu à champ nul à l'infini \Rightarrow Champ normal à la frontière supérieure de la couche est négligeable
- (H2): Epaisseur de la couche négligeable devant la longueur \Rightarrow Courant traversant la section de la couche est constant (Induction électrique homogène)

En écrivant des bilans de courant sur la couche SC, on peut écrire un système d'équations ayant pour inconnues les potentiels en chaque nœud du maillage 1D (Figure 11).

Supposons que la couche SC possède n nœuds ($k = 1$ à n), pour k variant de 2 à $(n - 1)$,

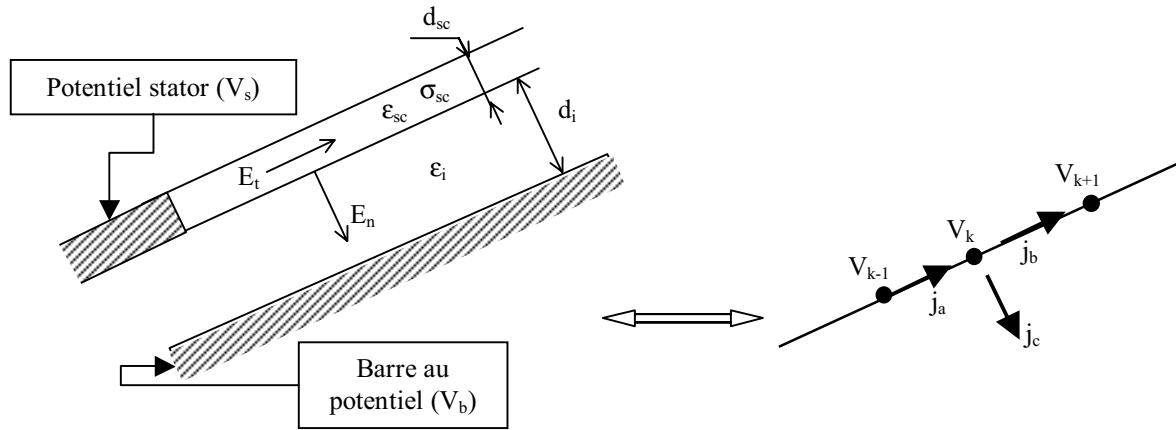


Figure 11 : Bilan de densités de courant dans la couche SC.

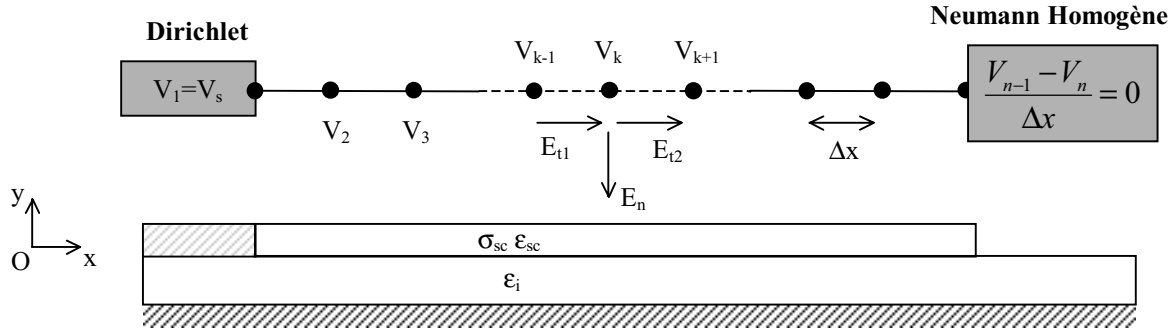
la loi des nœuds en un point de la couche s'écrit:

$$i_a = i_b + i_c \quad (21)$$

La structure du système d'équations obtenue dépendra de la façon d'estimer ces différents courants. On peut distinguer le cas où la source de tension $V(t)$ est de forme sinusoïdale. Les caractéristiques électriques des matériaux étant linéaires, on peut employer le formalisme complexe (FD 1D). Dans le cas où la source de tension est une onde impulsionnelle, on utilisera un schéma temporel (FDTD 1D).

Les courants i_a et i_b sont le résultat de la somme d'un courant de conduction et d'un courant de déplacement. Le courant i_c est exclusivement un courant de déplacement car on suppose que l'isolant de la barre est un diélectrique parfait ($\sigma_i = 0 S/m$).

Les champs électriques sont obtenus en approchant la dérivée du potentiel par les différences finies. Si l'on maille la couche par n nœuds réguliers espacés chacun de Δx

Figure 12 : Couche SC maillée par n nœud.

(Figure 12), le champ tangentiel et le champ normal par rapport à la couche SC s'écrivent au nœud k :

$$\begin{aligned} E_{t1} &= \frac{V_{k-1} - V_k}{\Delta x} \\ E_{t2} &= \frac{V_k - V_{k+1}}{\Delta x} \\ E_n &= \frac{V_k - V_b}{d_i} \end{aligned} \quad (22)$$

a) Régime harmonique

A partir des champs E_{t1} , E_{t2} et E_n , les différents courants s'écrivent:

$$\begin{aligned} i_a &= \frac{d_{sc}}{\Delta x} (j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc} + \sigma_{sc})(V_{k-1} - V_k) \\ i_b &= \frac{d_{sc}}{\Delta x} (j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc} + \sigma_{sc})(V_k - V_{k+1}) \\ i_c &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_i \frac{\Delta x}{d_i} (V_k - V_b) \end{aligned} \quad (23)$$

En écrivant (23) en chaque nœud du maillage on obtient un système de n équations à n inconnues. Ce système est reporté en Annexe 4.

b) Régime temporel

On approche la dérivée temporelle par un schéma d'Euler explicite à l'instant $i\Delta t$:

$$\left| \frac{\partial V_k}{\partial t} \right|_i = \frac{V_k^i - V_k^{i-1}}{\Delta t} \quad (24)$$

Les courants s'écrivent alors:

$$\begin{aligned} i_a &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc} \frac{d_{sc}}{\Delta x \Delta t} \{ (V_{k-1}^i - V_k^i) - (V_{k-1}^{i-1} - V_k^{i-1}) \} + \sigma_{sc} \frac{d_{sc}}{\Delta x} (V_{k-1}^i - V_k^i) \\ i_b &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc} \frac{d_{sc}}{\Delta x \Delta t} \{ (V_k^i - V_{k+1}^i) - (V_k^{i-1} - V_{k+1}^{i-1}) \} + \sigma_{sc} \frac{d_{sc}}{\Delta x} (V_k^i - V_{k+1}^i) \\ i_c &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc} \frac{\Delta x}{d_i \Delta t} \{ (V_k^i - V_b^i) - (V_k^{i-1} - V_b^{i-1}) \} \end{aligned} \quad (25)$$

Le système obtenu est également reporté en Annexe 4.

1.1.2 Modèle 1 modifié: modification du modèle des différences finies (FD)

Lorsque l'on compare les résultats du modèle précédent avec un calcul en deux dimensions (Figure 20-b), on remarque qu'il y a une différence de résultat en bout de couche. C'est dû au fait que pour une conductivité non nulle de la couche, la condition de Neumann imposée en bout de couche n'est pas représentative du cas réel.

Pour que le modèle 1D soit un peu plus cohérent, on peut continuer l'écriture de la loi des nœuds en dehors de la couche SC jusqu'au bout de l'isolation, en supposant une couche d'air fictive. La condition de Neumann homogène est ainsi reportée en extrémité de l'isolant (Figure 13).

L'équation (21) s'en trouve modifiée, et on obtient de nouveaux systèmes d'équations en régimes harmonique et temporel (Annexe 4).

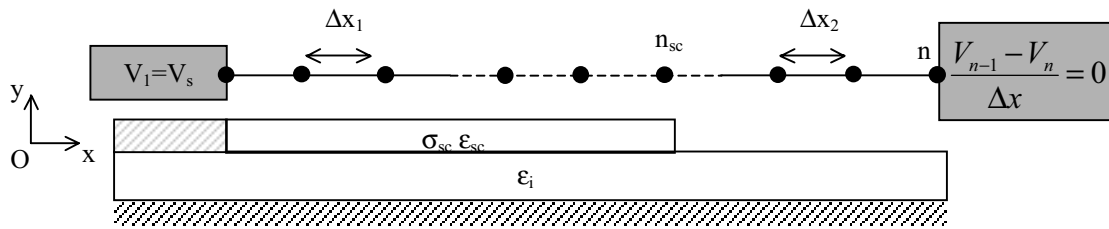


Figure 13 : Prolongement du maillage au-delà de la couche SC.

1.1.3 Modèle 2: Modélisation de la couche par FEMNOR

Grâce à la prise en compte des champs normaux en frontière, la FEMNOR (*ChapIII-Sect2-2*) est très bien adaptée à la modélisation de la couche mince. Nous proposons dans ce paragraphe les équations et les conditions aux limites permettant d'appliquer la FEMNOR au cas de la couche mince (Figure 10).

Les hypothèses nécessaires à la construction du modèle sont moins restrictives que pour le modèle précédent puisque l'on va pouvoir prendre en compte l'évolution du potentiel à l'intérieur de la couche dans le sens des y .

- (H1) Couche SC placée dans un milieu à champ nul à l'infini \Rightarrow Champ normal à la frontière supérieure de la couche est négligeable (Neumann).

Grâce à la prise en compte des champs normaux aux frontières par FEMNOR, on peut facilement insérer dans les conditions aux limites (CL) de la couche l'effet du courant de

déplacement.

La Figure 14 présente l'ensemble des CL appliquées à la région SC.

La «condition mixte» imposée sur la couche SC est obtenue en supposant que le champ

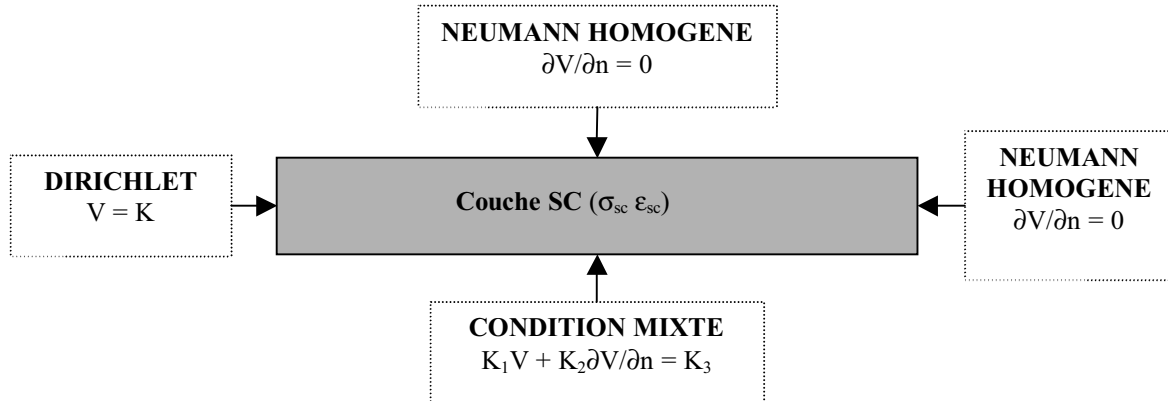


Figure 14 : Modèle de la couche SC.

créé dans l'épaisseur d_i est constant. Le champ normal à la couche s'écrit simplement :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{V - V_b}{d_i} \quad (26)$$

Où V est le potentiel sur la frontière, et V_b est le potentiel imposé sur la barre. Le problème se résume donc à la résolution par les éléments finis de l'équation de Laplace dans une seule région (27), en prenant les conditions aux limites particulières (28).

$$\iint_{\Omega} \vec{\nabla} W \cdot \vec{\nabla} V \, d\Omega + \oint_{\Gamma} W \Psi \, d\Gamma = 0 \quad (27)$$

avec $\Psi = -\frac{\partial V}{\partial n}$

N représentant les fonctions de projection.

$$\text{Dirichlet : } V = K$$

$$\text{Neumann : } \Psi = 0 \quad (28)$$

$$\text{Condition mixte : } V + K_1 \Psi = K_2 \quad \text{avec } K_1 = d_i \text{ et } K_2 = V_b$$

Notons que la prise en compte de la condition mixte est facilitée par la formulation FEM-NOR.

Cette méthode permet donc de traiter la couche mince en 2D sans avoir des points singuliers à traiter. De plus, comme la méthode est basée sur la FEM, il sera très simple de prendre en compte un comportement non-linéaire et anisotrope de la conductivité.

1.2 Validation de la prise en compte des singularités géométriques pour la géométrie couche mince par la FEMBEM

La géométrie couche mince (Figure 15), possède les deux types de singularité les plus fréquemment rencontrées dans les systèmes possédant une isolation semi-conductrice:

- un point de rencontre entre deux diélectriques parfaits et un SC (S3),
- une électrode en contact avec un SC et un diélectrique parfait (S1 et S2).

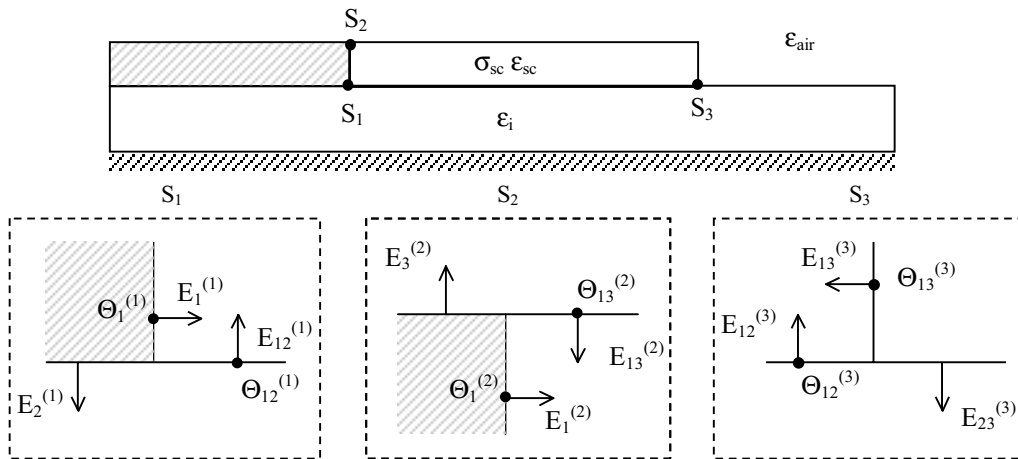


Figure 15 : Points singuliers doubles (S1 et S2) et point singulier triple (S3) sur une couche mince.

Grâce au modèle 1D aux différences finies de la couche mince, nous allons pouvoir vérifier la validité des équations supplémentaires employées pour le traitement de ces points singuliers.

1.2.1 Equations supplémentaires

N'ayant pas trouvé une estimation rigoureuse du comportement du champ électrique dans le voisinage d'un point singulier en contact avec un diélectrique faiblement conducteur, nous nous sommes résigné à adapter les équations déjà connues en électrostatique (*ChapII-Sect2-3.2*, (110) et (111)).

Suite à nos expérimentations numériques, il s'est avéré que l'équation supplémentaire habituellement employée pour traiter un point double en contact avec une électrode (*ChapII-Sect2-3.2*, (110)) est encore acceptable lorsqu'une des régions possède une conductivité non négligeable. Il faut toutefois bien prendre en compte le saut du champ électrique qui fait intervenir la densité de charge présente en surface, sinon on obtient un résultat aberrant comme on le voit à la Figure 16.

Par contre, l'équation supplémentaire courante qui traite le point triple (*ChapII-Sect2-3.2*, (111)) ne fonctionne plus lorsqu'une des régions est SC (Figure 17).

Afin de traiter correctement la singularité au point triple nous avons été contraints d'écrire une équation liant les différents champs du point triple qui se déduit directement de la forme de la géométrie (29) en se basant sur les notations de la Figure 15.

$$E_{12}^{(3)} = -\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{air}} E_{23}^{(3)} \quad (29)$$

La Figure 18 représente la répartition du potentiel autour de la couche lorsque les trois points singuliers sont pris en compte avec les bonnes équations pour une conduction relativement importante.

La validation a été effectuée avec les permittivités suivantes:

$$\varepsilon_{sc} = 20 \quad ; \quad \varepsilon_i = 4 \quad et \quad \varepsilon_{air} = 1 \quad (30)$$

Ce qui donne les équations supplémentaires utilisées pour chaque singularité (*ChapII-Sect2-3.2* (110) pour S1 et S2) et (29) pour S3:

$$\begin{aligned} (S_1) \quad & -3,325E_1^{(1)} + 3,473E_{12}^{(1)} + 0,743E_2^{(1)} - 0,037\frac{\Theta_{12}^{(1)}}{\varepsilon_0} = 0 \\ (S_2) \quad & -6,379E_1^{(2)} + 6,55E_{13}^{(2)} + 0,855E_3^{(2)} - 0,043\frac{\Theta_{13}^{(2)}}{\varepsilon_0} = 0 \\ (S_3) \quad & E_{12}^{(3)} + 4E_{23}^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (31)$$

Elles sont employées quelle que soit la valeur de la conductivité σ en régime harmonique et en régime temporel.

Le calcul de λ^* permettant de trouver les coefficients des équations (34) pour S1 et S2 est réalisé en considérant la région SC comme un diélectrique parfait.

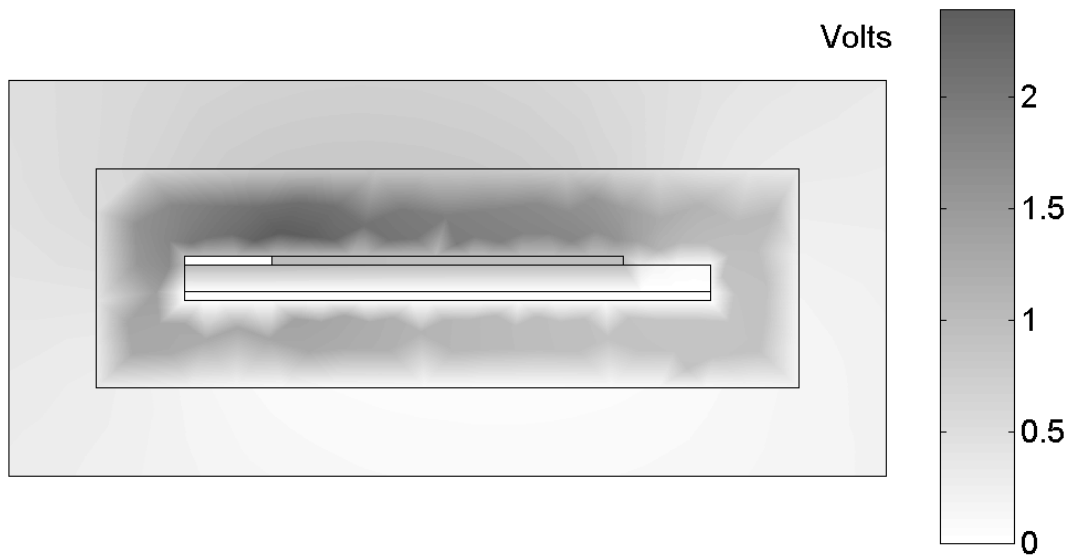


Figure 16 : Dégradé de potentiel avec mauvaise prise en compte des points singuliers $S1$ et $S2$ - $\sigma = 1.10^{-5} S/m$.

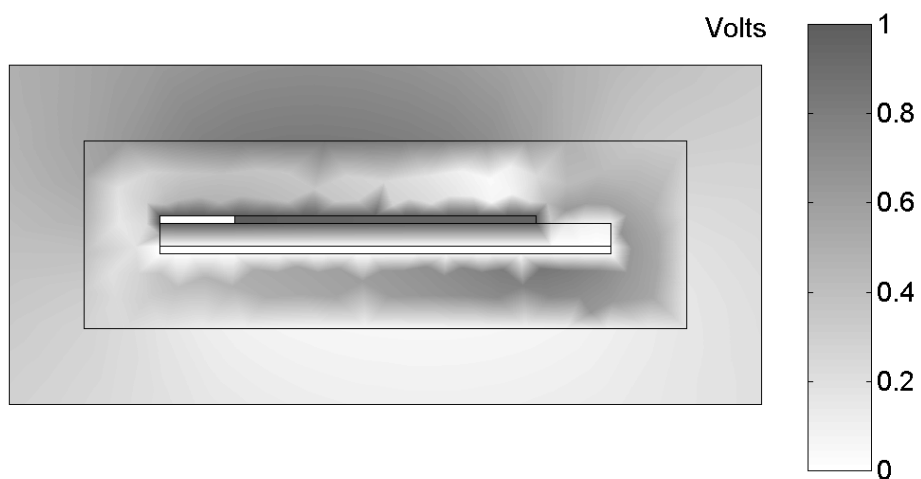


Figure 17 : Dégradé de potentiel avec mauvaise prise en compte du point singulier $S3$ - $\sigma = 1.10^{-5} S/m$.

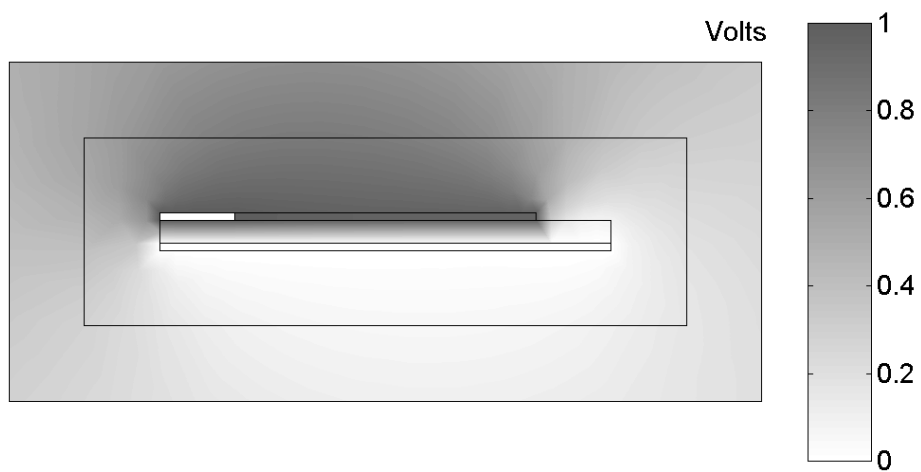


Figure 18 : Dégradé de potentiel avec bonne prise en compte de tout les points singuliers - $\sigma = 1.10^{-5} S/m$.

1.2.2 Régime harmonique

Pour plusieurs conductivités linéaires, nous présentons la répartition du potentiel le long de la couche SC obtenue par le couplage FEMBEM et par le modèle couche mince FD 1D. On emploie les grandeurs électriques présentées au-dessus. La valeur maximum de la source est de $1 V$.

Dimensions géométriques (Figure 10):

$$L_{sc} = 40 \text{ mm} \quad ; \quad L_f = 10 \text{ mm} \quad ; \quad d_i = 3 \text{ mm} \quad \text{et} \quad d_{sc} = 1 \text{ mm} \quad (32)$$

- *Faible conductivité* - $\sigma = 1.10^{-7} S/m$: Pour une couche à caractère isolant dominant (Figure 19), les modèles FD 1D non modifiés et modifiés sont confondus. Ceci se comprend bien puisque le potentiel en bout de couche tend vers zéro, la condition limite n'a pas d'influence sur la répartition du potentiel. D'autre part, on remarque une bonne correspondance entre les calculs par FEMBEM et le modèle 1D.
- *Forte conductivité* - $\sigma = 1.10^{-6} S/m$: Pour un comportement conducteur de la couche (Figure 20), les équations supplémentaires sont toujours valables. De plus on remarque qu'en modifiant la condition limite du modèle 1D on se rapproche du cas 2D simulé par FEMBEM. Le modèle FD 1D modifié semble alors plus pertinent lorsque la couche mince est conductrice.

1.2.3 Régime temporel

Pour valider la prise en compte des singularités en régime temporel linéaire, nous allons appliquer à l'électrode haute tension (Figure 10) une onde impulsionnelle de type foudre. Les caractéristiques de cette onde sont en Annexe 1.

Nous présenterons l'évolution de la tension au cours du temps pour le point milieu de la couche ($x = 20 \text{ mm}$). La validation s'effectue avec le modèle 1D aux différences finies discrétisé temporellement (FDTD 1D).

Que ce soit un comportement isolant (Figure 21) ou un comportement conducteur (Figure 22) de la couche SC, la correspondance des modèles FEMBEM et FDTD 1D nous permet de supposer que la prise en compte des points singuliers par (31), reste valable dans le domaine temporel.

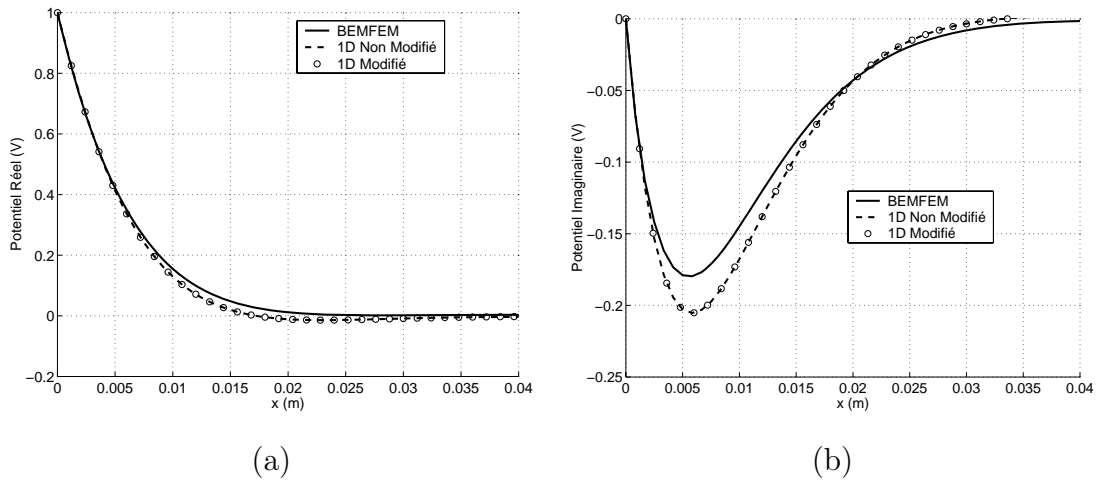


Figure 19 : (a) est le potentiel réel et (b) est le potentiel imaginaire le long de la couche SC - $\sigma = 1.10^{-7} S/m$.

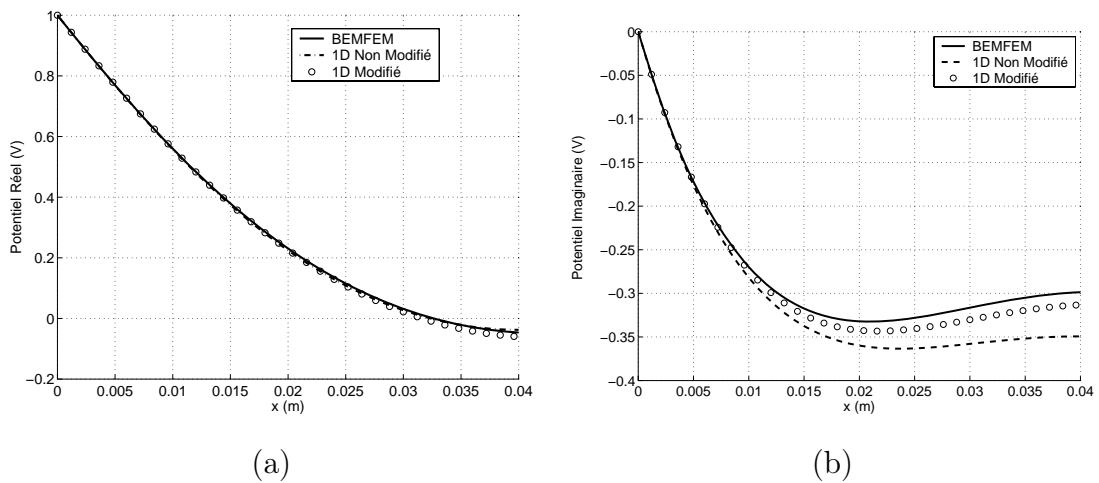


Figure 20 : (a) est le potentiel réel et (b) est le potentiel imaginaire le long de la couche SC - $\sigma = 1.10^{-6} S/m$.

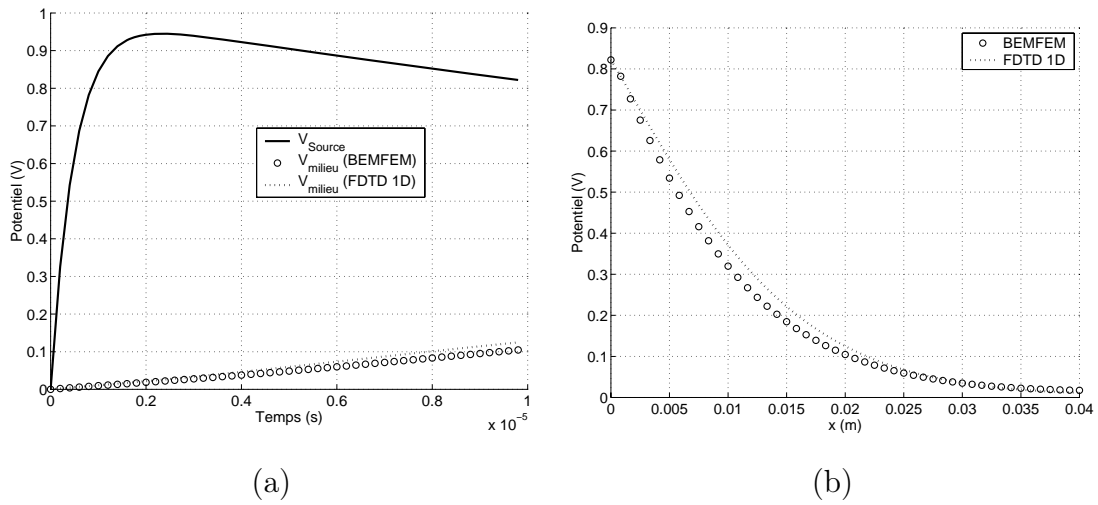


Figure 21 : (a) est le potentiel en fonction du temps au milieu de la couche SC et (b) est la répartition du potentiel le long de la couche à $t = 10 \text{ ms} - \sigma = 1.10^{-4} \text{ S/m}$.

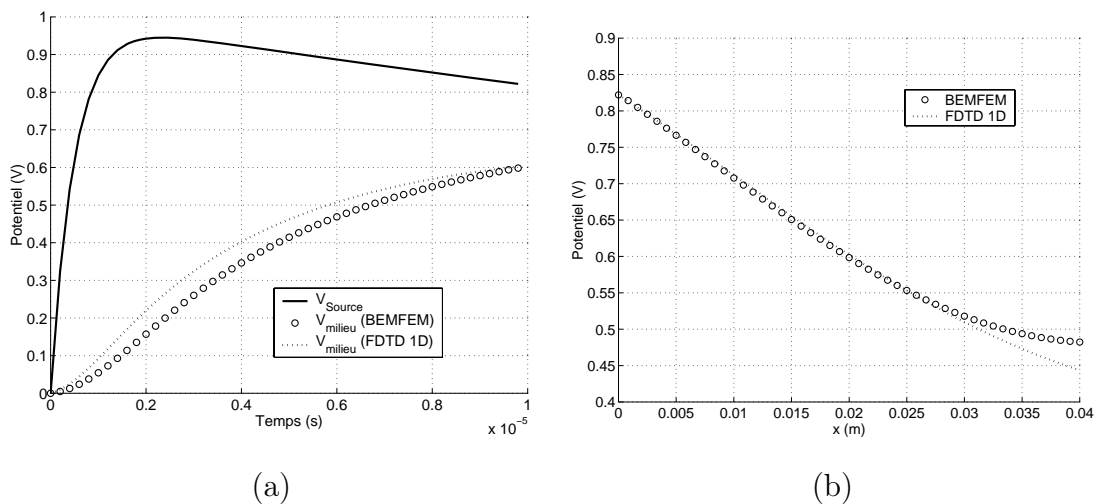


Figure 22 : (a) est le potentiel en fonction du temps au milieu de la couche SC et (b) est la répartition du potentiel le long de la couche à $t = 10 \text{ ms} - \sigma = 1.10^{-4} \text{ S/m}$.

2 Modélisation d'une extrémité de câble

Pour observer les effets d'un SC à conductivité non-linéaire sur les caractéristiques isolantes d'un système électrotechnique, nous avons choisi de modéliser une extrémité de câble HT à laquelle on applique une tension de choc de type foudre.

2.1 Extrémité de câble choisie

Pour construire le modèle nous nous sommes inspirés d'une extrémité de câble présentée à la Figure 23. Il y a deux zones où peuvent apparaître des renforcements de champ élec-

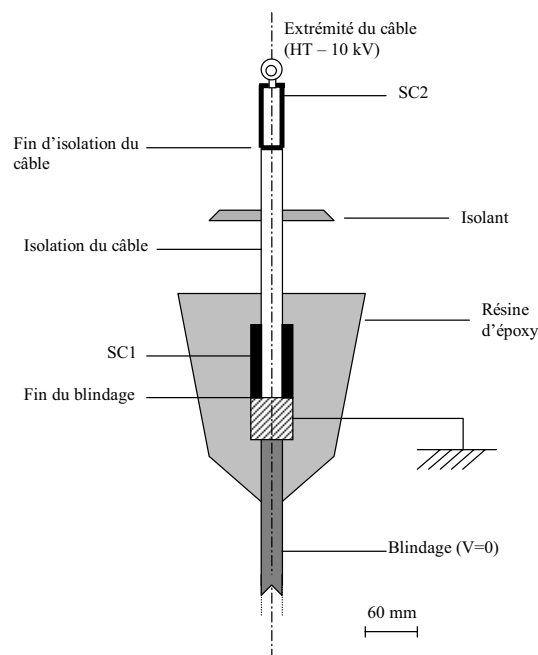


Figure 23 : Extrémité de câble HT - Isolation semi-conductrice.

trique: en fin de blindage et en fin d'insolation du câble. On a alors recourt à l'application de matériaux SC pour réduire ces contraintes (SC1 et SC2, Figure 23).

Nous allons modéliser dans ce qui suit la zone de renforcement en contact avec la fin du blindage (SC1). Cette partie est moulée dans une résine époxyde. La Figure 24 représente la géométrie et le maillage utilisés pour la simulation. Les caractéristiques électriques sont:

$$\varepsilon_{air} = 1 ; \varepsilon_i = 4 \text{ et } \varepsilon_{sc} = 20 \quad (33)$$

2.2 Simulations numériques

FEMBEM va nous permettre de comparer les effets de différents types de conductivité sur la répartition du potentiel le long du matériel semi-conducteur.

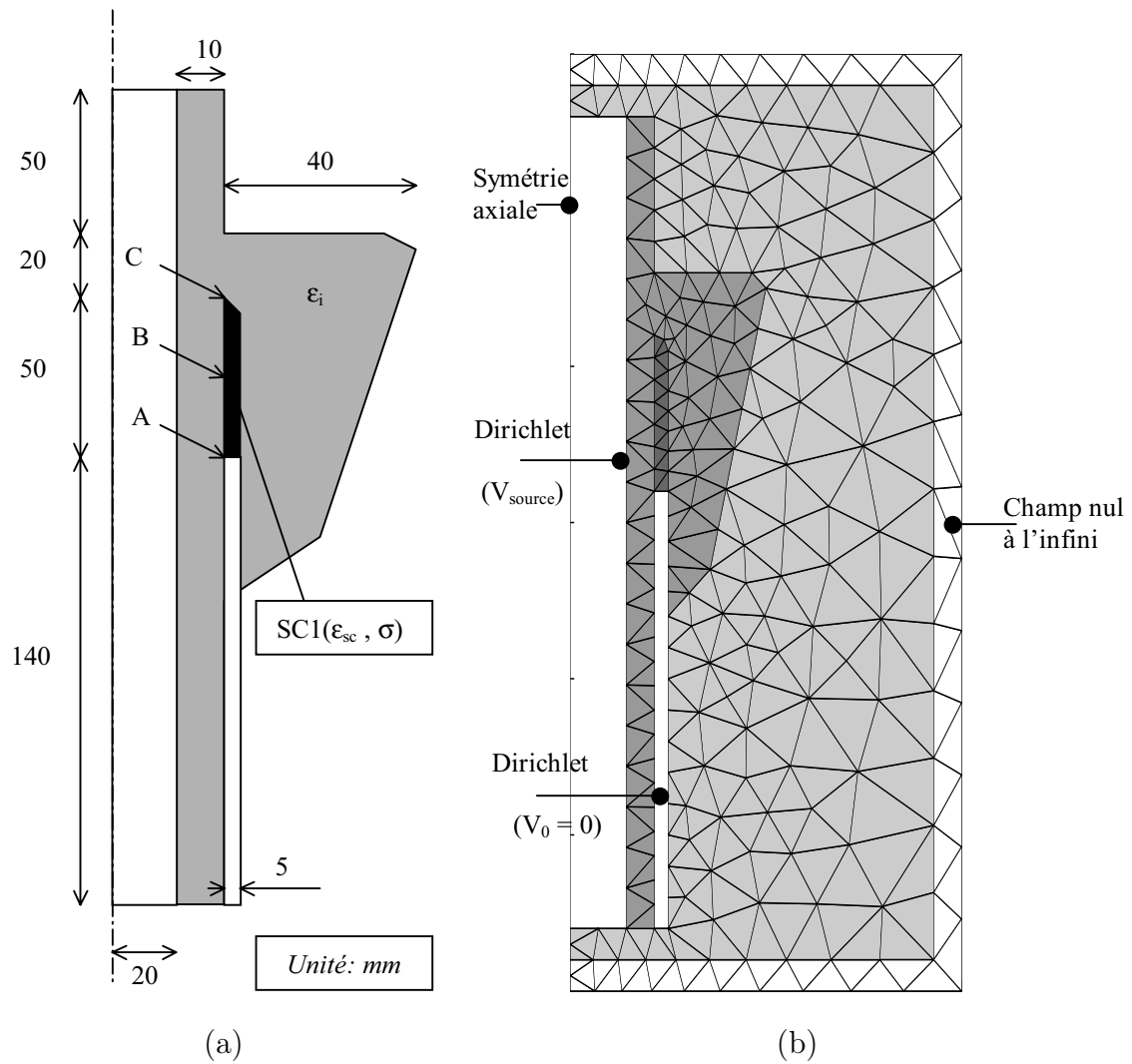


Figure 24 : En (a) les dimensions et en (b) le maillage du modèle de la zone SC1 de l'extrémité de câble.

L'une des principales fonctions de ces matériaux est de limiter les champs électriques lorsque le dispositif est soumis à une perturbation intempestive comme une onde de choc de type foudre (Annexe 1).

2.2.1 Simulation avec une conductivité linéaire

Nous avons appliqué l'onde de tension de type foudre ((34) et Figure 25) sur l'âme du câble. La simulation a été réalisée pour une conductivité $\sigma = 1.10^{-4} S/m$ de la couche. Cela correspond à un état bon conducteur de la couche à fréquence industrielle (50Hz).

$$V(t) = 10^5 [\exp(-2.10^4 t) - \exp(-2.10^6 t)] \quad (34)$$

Nous avons relevé le module du champ électrique tangentiel aux points *A* et *C* (Figure 26)

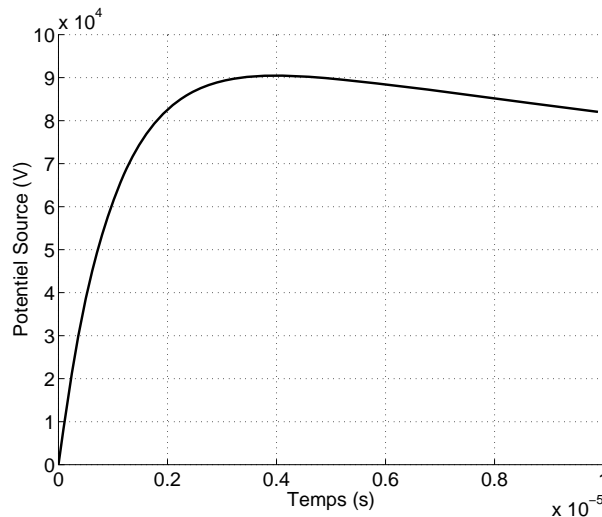


Figure 25 : Onde de choc type foudre.

en fonction du temps ainsi que le potentiel au point *B* (Figure 27-a). De plus, nous présentons la répartition du potentiel le long du SC à l'instant $t_i = 5 ms$, qui correspond au moment où l'onde impulsionnelle commence à décroître (Figure 27-b). La conductivité permet de réduire le module du champ électrique dans la zone où les contraintes sont les plus grandes (point *A*). De plus il y a une augmentation du champ en bout de couche (point *C*), ce qui laisse à penser que les contraintes ont été réparties plus uniformément. La Figure 27-b confirme bien l'homogénéisation sur la répartition du potentiel le long du SC. Pour cette configuration, cette valeur de conductivité semble adéquat pour protéger le système contre ce type de perturbation électrique. Seulement à 50 Hz, un SC avec une telle conductivité est un très bon conducteur. Or on veut qu'en fonctionnement normal,

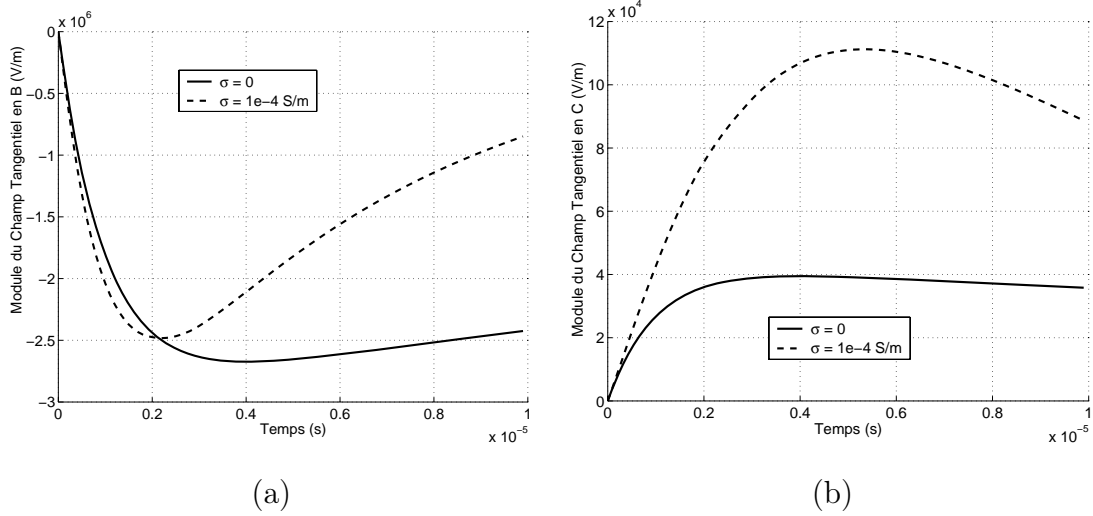


Figure 26 : Module du champ électrique tangential en fonction du temps aux points A (a) et C (b).

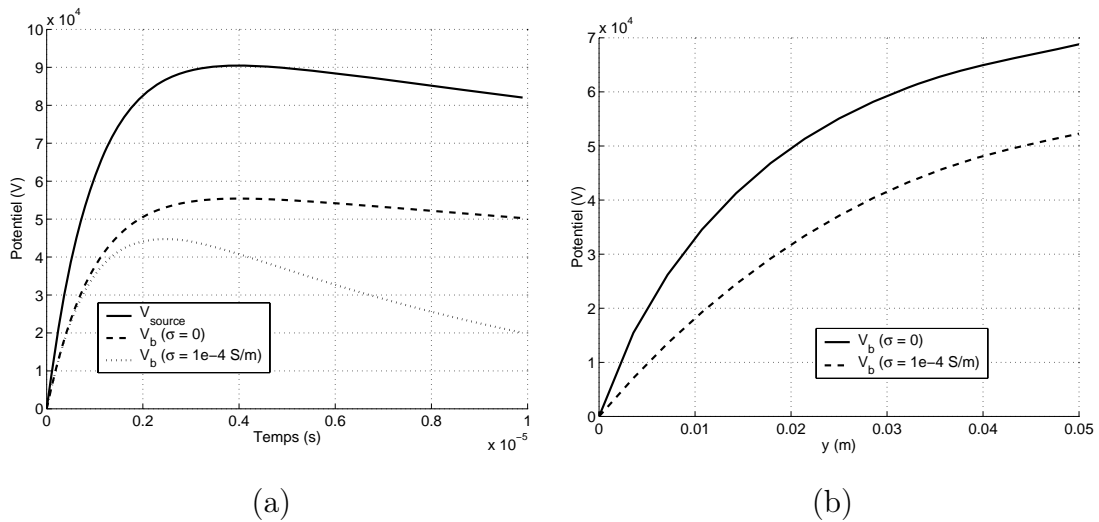


Figure 27 : Potentiel au point B en fonction du temps (a), et répartition du potentiel le long du SC à l'instant $t_i = 5$ ms (b).

le SC n'intervienne pas dans l'isolation. Il est alors judicieux d'employer un SC possédant une conductivité non-linéaire.

2.2.2 Simulation avec une conductivité non-linéaire de type exponentiel

Des essais numériques avec différents types de comportement non-linéaire de la conductivité nous ont amenés à choisir un matériel ayant la propriété conductrice (35). C'est une semi-conductivité assez forte que l'on rencontre dans les matériaux à base de SiC.

$$\sigma_{nl} = \sigma_0 \exp\left(\alpha |\vec{E}|\right) \quad (35)$$

avec $\sigma_0 = 1.10^{-9} S/m$ et $\alpha = 1.10^{-5} m/V$

Pour des champs inférieurs à $10^5 V/m$, le SC a une conductivité proche de $10^{-9} S/m$, ce qui correspond à un comportement isolant aux fréquences industrielles. La couche se comporte donc comme un diélectrique quasi parfait.

Par contre pour les champs d'intensité supérieure que l'on rencontre en choc de foudre (34), le SC va atteindre des conductivités approchant $10^{-4} S/m$, niveau où il est bon conducteur.

La Figure 28 et la Figure 29 montrent les mêmes résultats que précédemment dans le cas d'une conductivité non-linéaire.

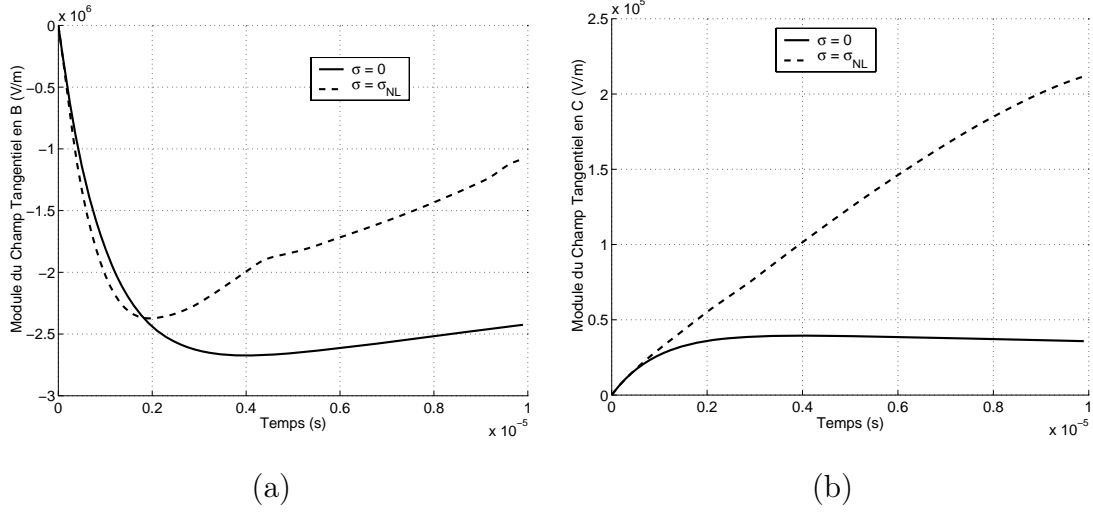


Figure 28 : Module du champ électrique tangentiel en fonction du temps aux points A (a) et C (b).

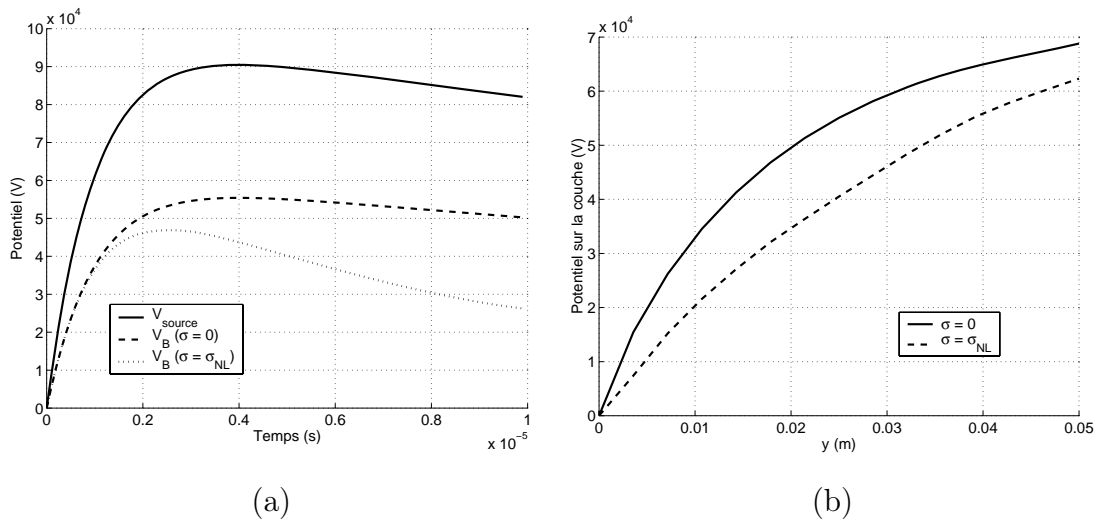


Figure 29 : (a) est le potentiel en B en fonction du temps, et (b) est la répartition du potentiel le long du SC à $t_i = 5$ ms.

2.3 Influence de la forme de l'inclusion SC

La prise en compte par FEMBEM d'un volume SC permet d'étudier l'influence de la forme du revêtement SC sur la répartition du potentiel. Pour le cas de l'extrémité de câble étudiée précédemment (Figure 23 et Figure 24), nous avons simulé trois formes d'inclusion SC (Figure 30). La perturbation appliquée sur l'âme du câble est toujours une onde de

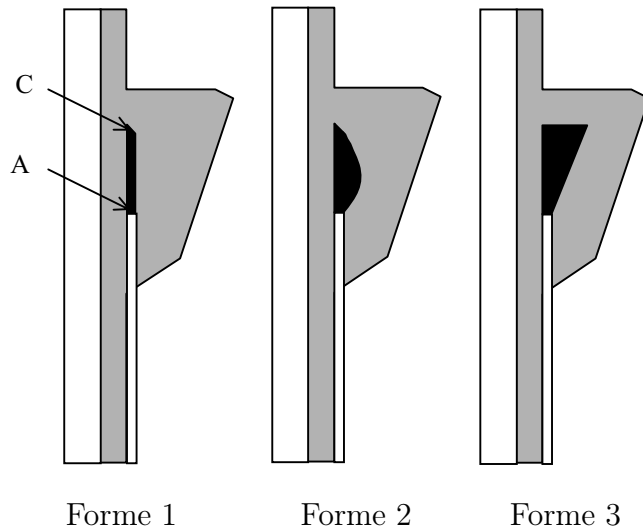


Figure 30 : Différentes formes d'inclusion SC.

choc de type foudre d'amplitude maximale 100 kV (37).

Pour chaque forme, nous relevons le champ normal aux points A et C (Figure 31) ainsi que la répartition du potentiel entre ces deux points (Figure 32).

On remarque que la forme 2 permet une meilleure linéarisation du potentiel le long de la couche SC et réduit un peu plus le champ au point A, i.e. à proximité de la fin de l'écran de masse du câble).

3 Conclusion

Cette partie nous a permis de valider l'utilisation de la FEMBEM pour des géométries plus complexes composées de points singuliers géométriques. On a pu constater que la prise en compte des points doubles reste valable lorsqu'une des régions est SC. Par contre le cas du point triple qui est en contact avec un SC ne peut plus être traité par le formalisme employé en électrostatique. Il reste donc dans ce domaine une étude à réaliser pour lever la singularité.

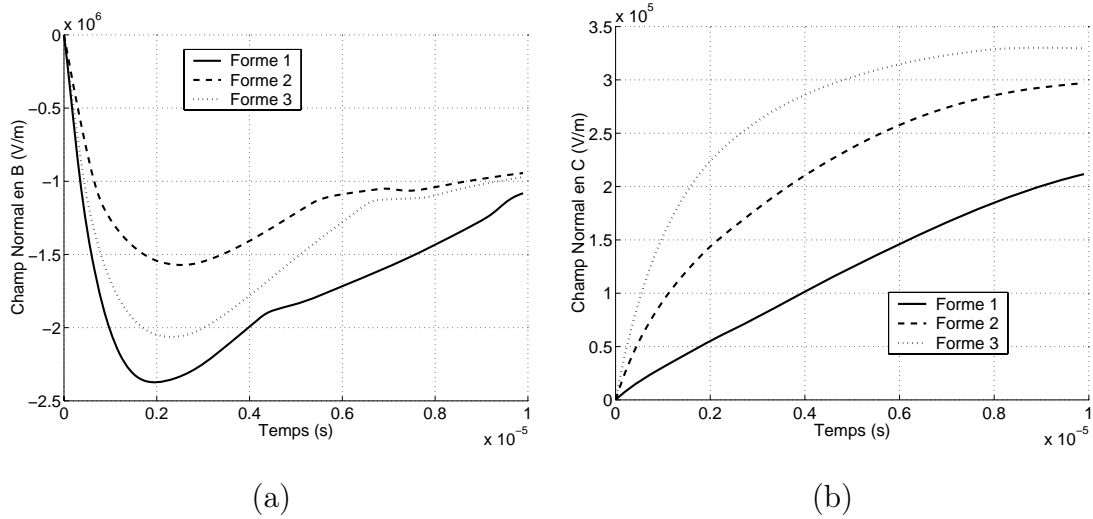


Figure 31 : Champ normal dans le SC au point A (a) et au point C (b) en fonction du temps.

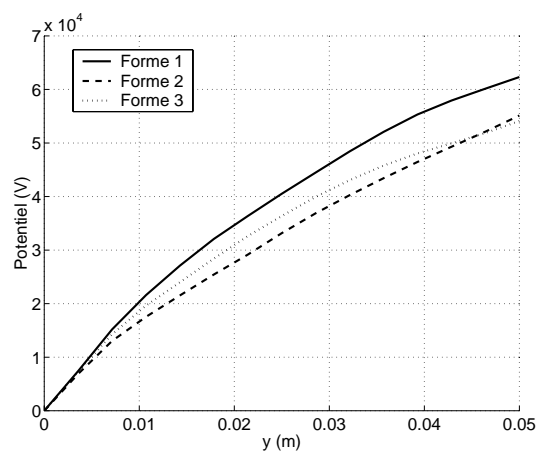


Figure 32 : Répartition du potentiel sur la frontière du SC comprise entre A et C à l'instant $t_i = 5 \mu s$.

Conclusion

Ce travail de thèse a permis d'intégrer un couplage FEM/BEM dans un schéma temporel pour la modélisation de matériaux SC ayant une conductivité qui dépend du module du champ électrique.

Le schéma temporel développé, qui est basé sur la méthode des trapèzes pour l'intégration temporelle et sur la méthode du point fixe pour la résolution matricielle, a rendu possible la prise en compte de fortes non-linéarités de type exponentiel.

Une bonne estimation du champ normal aux frontières du SC s'est avérée indispensable lorsque la conductivité était dépendante du module du champ électrique. C'est pourquoi la BEM qui permet d'obtenir avec précision un champ normal, est une méthode bien adaptée à ce genre de modélisation.

Nous avons constaté que les singularités géométriques du type (électrode/diélectrique/SC) pouvaient être traitées suivant la même procédure que les singularités du type électrode en contact avec deux diélectriques parfaits, en rajoutant juste le saut de champ électrique sur les surfaces chargées.

Par contre, le comportement du champ au point de rencontre de trois régions diélectriques semble changer considérablement lorsque l'une des régions devient faiblement conductrice. Pour traiter ces dernières singularités, nous nous sommes contentés d'écrire une relation géométrique liant les champs normaux en contact avec la singularité. Bien que cela donne de bons résultats dans les simulations que nous avons effectuées, il n'est pas garanti que cela fonctionne pour tout les cas.

Dans le cas des fortes non-linéarités, les variations de conductivité peuvent atteindre la dizaine de décade. Les parties de la matrice du système contenant les éléments de

l'assemblage de la région SC varient d'autant.

On peut alors rencontrer des problèmes de divergence numérique vraisemblablement dus à l'équation définissant la projection de la densité de courant sur la normale à la frontière du SC. Une solution envisagée serait de résoudre séparément la région SC grâce à une méthode de décomposition de domaine.

Actuellement, on rencontre des SC à base de ZnO dont la résistivité peut chuter de manière brutale à partir d'une certaine valeur de champ. A tel point qu'il n'est plus possible de modéliser la conductivité de ce matériau par une fonction continue. La formulation de notre modèle qui est basé sur la détermination de la conductivité à partir du module du champ nécessiterait alors d'être modifiée afin d'intégrer la non-linéarité au travers de la densité de courant plutôt que de la conductivité.

Annexes

Annexe 1 - Choc foudre et choc manœuvre

1 Définition

Extraits de la norme CEI 60-1, p. 6:

'Un choc est une tension ou un courant transitoire apériodique appliqué intentionnellement qui habituellement croît rapidement jusqu'à une valeur de crête, puis décroît plus lentement jusqu'à zéro. Un tel choc est généralement bien représenté par la somme de deux exponentielles.'

'Une distinction est faite entre les choc foudre et les chocs de manœuvres d'après la durée du front. Les chocs, dont les durées du front sont comprises entre moins de une à quelques dizaines de microsecondes, sont en général considérées comme étant des chocs de foudre et ceux qui ont une durée du front de quelques dizaines à quelques milliers de microsecondes comme étant des chocs de manœuvres. Généralement les choc de manœuvres sont également caractérisés par des durées totales considérablement plus longues que celles des chocs de foudre.'

2 Choc de foudre normalisé

Extrait de la norme CEI 60-2, p. 24:

'Le choc de foudre normal est un choc de foudre plein ayant une durée conventionnelle du front de $1.2\mu\text{s}$ (t_1 ; Figure 1) et une durée conventionnelle jusqu'à la mi-hauteur de $50\mu\text{s}$ (t_2 ; Figure 1).'

Il est appelé choc 1.2/50.

Lors de la modélisation d'une onde de choc type foudre, nous avons utilisé la fonction suivante:

$$V_{foudre}(t) = V_0 (\exp(-\alpha t) + \exp(-\beta t)) \quad (1)$$

avec $\alpha = 2.10^4 \text{ s}^{-1}$ et $\beta = 1.10^6 \text{ s}^{-1}$ et V_0 : Tension seuil

3 Choc de manœuvre normalisé

Extrait de la norme CEI 60-2, p. 32:

'Le choc de manœuvre normal est un choc ayant une durée jusqu'à la crête (t_1 ; Figure 2) de $250\mu\text{s}$ et un temps jusqu'à mi-valeur (t_2 ; Figure 2) de $25000\mu\text{s}$.' Il est appelé choc

250/2500.

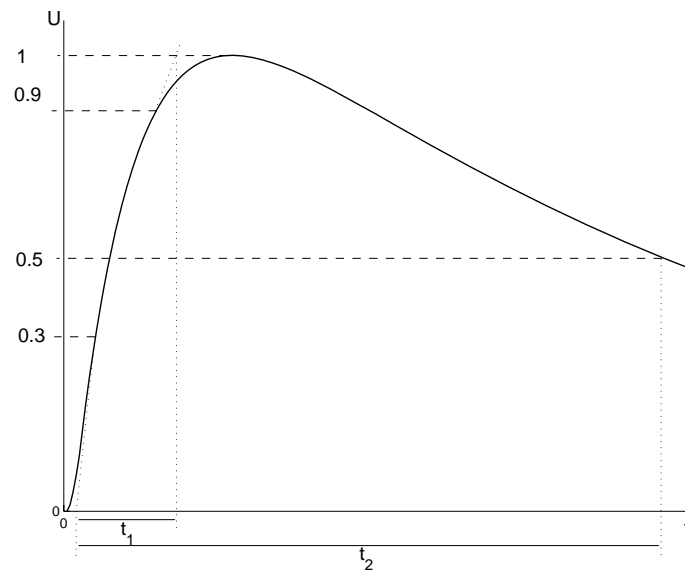


Figure 1 : Relevé des temps caractéristiques sur une onde de choc type foudre.

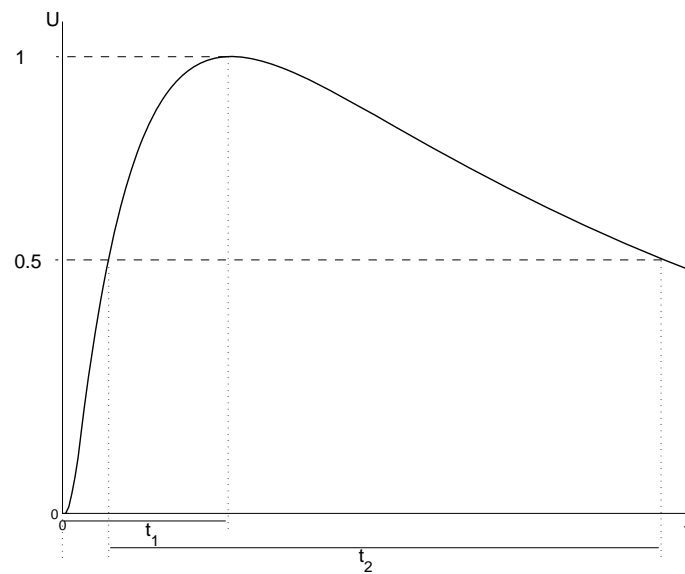


Figure 2 : Relevé des temps caractéristiques sur une onde de choc type manœuvre.

Annexe 2 - Equations intégrales de frontière

1 Fonction de Green en 3D

D'après les notations de la Figure 3, la fonction de Green dans le domaine de l'électrostatique s'écrit:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2)$$

En trois dimensions, (2) représente le potentiel électrique perçu au point P d'une charge électrique ponctuelle placée au point Q . G est donc solution de l'équation suivante:

$$\nabla^2 G = \delta(\vec{r}, \vec{r}') \quad (3)$$

δ étant la fonction de Dirac définissant au sens des distributions la densité de charge d'une charge électrique ponctuelle:

$$\delta(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{cases} \infty & \text{pour } \vec{r} = \vec{r}' \\ 0 & \text{pour } \vec{r} \neq \vec{r}' \end{cases} \quad (4)$$

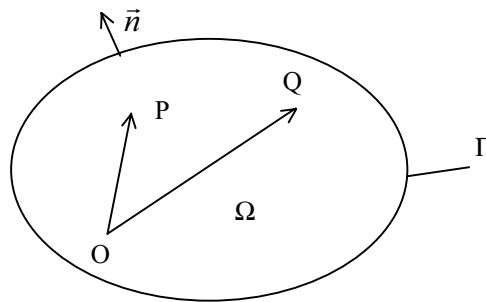


Figure 3 : Coordonnées du point d'observation P et du point d'intégration Q dans un domaine Ω de frontière Γ ayant pour vecteur directeur \vec{n} .

2 Fonction de Green en 2D

Lorsqu'une des grandeurs électriques est invariante le long d'une des composantes du repère, on peut intégrer la fonction de Green le long de cette composante afin d'obtenir une nouvelle fonction de Green en 2D.

2.1 Cas 2D plan

Lorsque les caractéristiques électriques sont invariantes suivant la composante z du repère cartésien:

$$G_{2d} = \int_0^{+\infty} G dz$$

$$G'_{2d} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial n} dz$$
(5)

En prenant la notation de la Figure 3, mais dans le cas bidimensionnel, on obtient la fonction de Green en 2D plan:

$$G_{2d} = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{r_\infty}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

$$G'_{2d} = \frac{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$
(6)

2.2 Cas axisymétrique

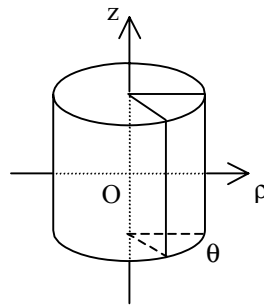


Figure 4 : Notation dans un repère cylindrique.

Lorsque le système possède une symétrie axiale, l'intégration de la fonction de Green suivant la composante θ du repère cylindrique (Figure 4), on obtient une nouvelle fonction G_{ax} représentant l'influence d'une densité de charge linéique circulaire de rayon r (Figure 5).

$$G_{ax} = \frac{R}{\pi \rho} K(k^2)$$

avec $k^2 = 4R \frac{\rho}{D^2}$

$$\text{et } K(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} d\theta$$
(7)

K est la fonction intégrale elliptique complète de première espèce. De la même manière, l'intégration sur θ de la dérivée normal de la fonction de Green notée G'_{ax} est:

$$G'_{ax} = \int_C \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dl$$

$$G'_{ax} = \frac{\cos \alpha}{2D} K(k^2) + \frac{D \cos \alpha - 2R \cos(\alpha - \nu)}{2D'^2} E(k^2) \quad (8)$$

$$\text{avec } E(k^2) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \theta) d\theta$$

E est la fonction intégrale elliptique complète de deuxième espèce.

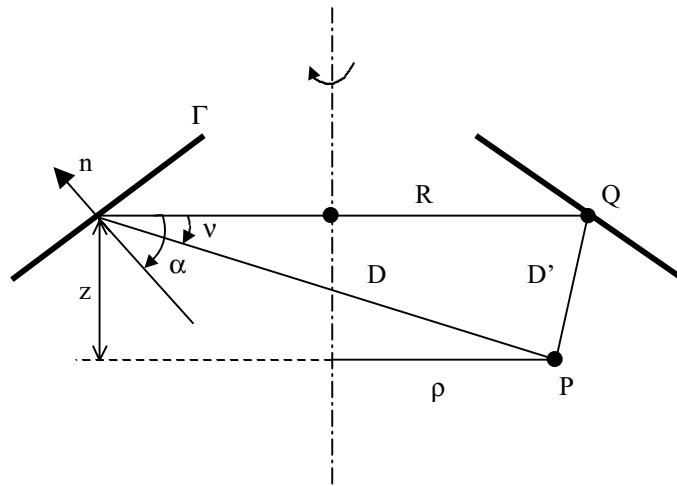


Figure 5 : Notations pour la définition des fonctions de Green en axisymétrique

3 Angle solide

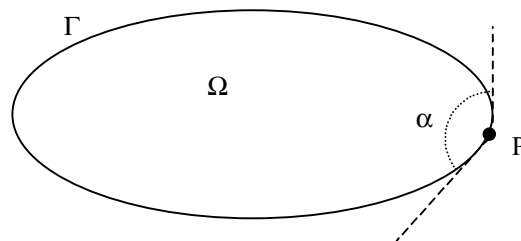


Figure 6 : Angle solide au point P.

En $2D$, l'angle solide au point P est défini comme:

$$c_p = -\frac{\alpha}{2\pi} \quad (9)$$

- Si P est situé dans la région Ω alors $\alpha = 2\pi$
- Si P est sur la frontière Γ , α est égal à l'angle constitué par les deux tangentes en ce point (Figure 6)
- Si P est situé à l'extérieur du domaine (Ω, Γ) , α est nul

4 Singularité d'intégration

Pour $k^2 = 1$ qui correspond au cas où Q est confondu avec P , l'intégrale $K(k^2)$ devient singulière, les noyaux G_{ax} et G'_{ax} tendent alors vers l'infini.

On peut montrer que cela correspond à une singularité du type logarithmique. Numériquement, l'utilisation d'une formule de Gauss adaptée (10) spécifique permet de contourner la difficulté.

$$\int_0^1 f(x) \ln(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) + \varepsilon_n \quad (10)$$

Il suffit donc d'extraire le logarithme dans l'intégrale K , ce qui donne la relation suivante:

$$K(k^2) = \sum_{i=0}^n \left(a_i h^i + b_i h^i \ln \left(\frac{1}{h} \right) \right) + \varepsilon \quad (11)$$

avec $h = 1 - k^2$

Les coefficients a_i et b_i sont des valeurs tabulées.

Annexe 3 - Laplacien en coordonnées cylindriques

1 Fonctions harmoniques

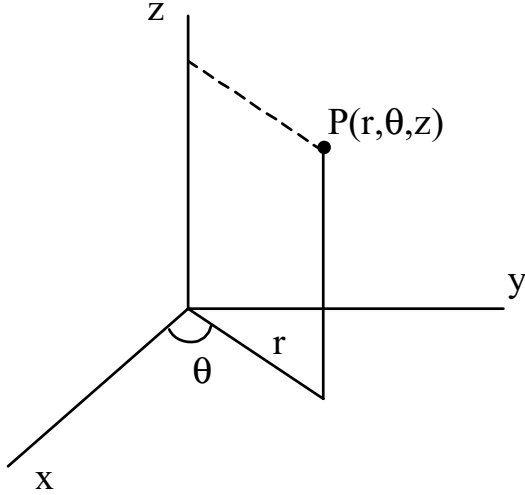
Ensemble des fonctions Φ qui satisfont l'équation de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (12)$$

Φ satisfait au principe de superposition des solutions.

Si à (12) on attribue un ensemble de conditions aux limites, alors sa solution est unique.

2 Repère cylindrique

Repères	Relations de passage
	Cylindrique \Rightarrow Cartésien
	$x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$
	Cartésien \Rightarrow Cylindrique
	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan(y/x)$ $z = z$

3 Solution de Laplace en coordonnées cylindriques

$$\frac{1}{r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

Séparation des variables:

$$\Phi(r, \theta, z) = R(r)Q(\theta)Z(z) \quad (14)$$

$$\frac{r}{R(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \frac{r^2}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{Q(\theta)} \frac{\partial^2 Q(\theta)}{\partial \theta^2} = n^2 \quad (15)$$

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + n^2 Q = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{rR(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} = -\frac{r^2}{Z(z)} \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} = -k^2 \quad (17)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 Z = 0 \quad \Rightarrow \quad Z(z) = K_2 \exp(\pm kz) \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (19)$$

Solution dans le plan (r, θ) :

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) - n^2 R = 0 \quad (20)$$

$$\Phi(r, \theta) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + B_n \frac{1}{r^n} \right) (C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)) \right] \quad (21)$$

Annexe 4 - Modèle de couche mince par différences finies

Ces équations sont issues des modèles développés au *Chap.III-Sect1-1.1*.

1 Modèle de couche mince simple

1.1 Equations en régime harmonique

$k = 1$ (Dirichlet)	$V_1 = V_s$
$1 < k < n - 1$ ($i_a = i_b + i_c$)	$K_1 V_{k-1} + (-2K_1 - K_2) V_k + K_1 V_{k+1} = -K_2 V_b$
$k = n$ (Neumann homogène)	$K_1 V_{n-1} + (-K_1 - \frac{1}{2}K_2) V_n = -\frac{1}{2}K_2 V_b$

$$\text{avec } K_1 = (\sigma_{sc} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc}) \frac{d_{sc}}{\Delta x} \quad \text{et} \quad K_2 = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_i \frac{\Delta x}{d_i} \quad (22)$$

1.2 Equations en régime temporel

$k = 1$ (Dirichlet)	$V_1 = V_s$
$1 < k < n - 1$ ($i_a = i_b + i_c$)	$(K_1 + K_2) V_{k-1}^i + (-2K_1 - 2K_2 - K_3) V_k^i + (K_1 + K_2) V_{k+1}^i = \dots$ $\dots K_1 V_{k-1}^{i-1} + (-2K_1 - K_3) V_k^{i-1} + K_1 V_{k+1}^{i-1} - K_3 (V_b^i - V_b^{i-1})$
$k = n$ (Neumann homogène)	$(K_1 + K_2) V_{n-1}^i + (-K_1 - K_2 - \frac{1}{2}K_3) V_n^i = \dots$ $\dots K_1 V_{n-1}^{i-1} + (-K_1 - \frac{1}{2}K_3) V_n^{i-1} - \frac{1}{2}K_3 (V_b^i - V_b^{i-1})$

$$\text{avec } K_1 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{sc}d_{sc}}{\Delta x\Delta t} \quad ; \quad K_2 = \sigma_{sc} \frac{d_{sc}}{\Delta x} \quad \text{et} \quad K_3 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_i\Delta x}{d_i\Delta t} \quad (23)$$

2 Modèle modifié de couche mince

2.1 Régime harmonique

$k = 1$ (Dirichlet)	$V_1 = V_s$
$1 < k < n_{sc} - 1$ ($i_a = i_b + i_c$)	$K_1 V_{k-1} + (-2K_1 - K_2) V_k + K_1 V_{k+1} = -K_2 V_b$
$k = n_{sc}$ ($i_a = i_b + i_c$)	$K_1 V_{n_{sc}-1} + (-K_1 - K_3 - K_m) V_{n_{sc}} + K_3 V_{n_{sc}+1} = -K_m V_b$
$n_{sc} < k < n - 1$ ($i_a = i_b + i_c$)	$K_3 V_{k-1} + (-2K_3 - K_4) V_k + K_3 V_{k+1} = -K_4 V_b$
$k = n$ (Neumann homogène)	$K_3 V_{n-1} + (-K_3 - \frac{1}{2}K_4) V_n = -\frac{1}{2}K_4 V_b$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } K_1 &= (\sigma_{sc} + j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{sc}) \frac{d_{sc}}{\Delta x_1} ; & K_2 &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_i \frac{\Delta x_1}{d_i} ; \\
 K_3 &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_{air} \frac{\Delta d_{sc}}{x_2} ; & K_4 &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon_i \frac{\Delta x_2}{d_i} \text{ et } K_m = j\omega\varepsilon_0\varepsilon_i \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2d_i}
 \end{aligned} \tag{24}$$

2.2 Régime temporel

$k = 1$ (Dirichlet)	$V_1 = V_s$
$1 < k < n_{sc} - 1$ ($i_a = i_b + i_c$)	$(K_1 + K_2) V_{k-1}^i + (2K_1 - 2K_2 - K_3) V_k^i + (K_1 + K_2) V_{k+1}^i = \dots$ $\dots K_2 V_{k-1}^{i-1} + (-2K_1 - K_3) V_k^{i-1} + K_2 V_{k+1}^{i-1} - K_3 (V_b^i - V_b^{i-1})$
$k = n_{sc}$ ($i_a = i_b + i_c$)	$(K_1 + K_2) V_{n_{sc}-1}^i + (-K_1 - K_2 - K_4 - K_m) V_{n_{sc}}^i + K_4 V_{n_{sc}+1}^i = \dots$ $\dots K_2 V_{n_{sc}-1}^{i-1} + (-K_2 - K_4 - K_m) V_{n_{sc}}^{i-1} + K_4 V_{n_{sc}+1}^{i-1} - K_m (V_b^i - V_b^{i-1})$
$n_{sc} < k < n - 1$ ($i_a = i_b + i_c$)	$K_4 V_{k-1}^i + (-2K_4 - K_5) V_k^i + K_4 V_{k+1}^i = \dots$ $\dots K_4 V_{k-1}^{i-1} + (-2K_4 - K_5) V_k^{i-1} + K_4 V_{k+1}^{i-1} - K_5 (V_b^i - V_b^{i-1})$
$k = n$ (Neumann homogène)	$K_4 V_{n-1}^i + (-K_4 - \frac{1}{2}K_5) V_n^i = \dots$ $\dots K_4 V_{n-1}^{i-1} + (-K_4 + \frac{1}{2}K_5) V_n^{i-1} - \frac{1}{2}K_5 (V_b^i - V_b^{i-1})$

$$\begin{aligned}
 \text{avec } K_1 &= \sigma_{sc} \frac{d_{sc}}{\Delta x_1} ; & K_2 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{sc} d_{sc}}{\Delta x_1 \Delta t} ; & K_3 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i \Delta x_1}{d_i \Delta t} ; \\
 K_4 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{air} d_{sc}}{\Delta x_2 \Delta t} ; & K_5 &= \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_i \Delta x_2}{d_i \Delta t} \text{ et } K_m = \varepsilon_0 \varepsilon_i \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2d_i \Delta t}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Bibliographie

- [1] B. Berstein. Basic properties of power cable insulation. Electric Power Research Institute - ICC Educational Programs Spring, 2000. <http://www.ewh.ieee.org/soc/pes/icc>.
- [2] J. Gärtner, E. Gockenbach, H. Borsi-Schering-Institute of High Voltage Technique, and Germany Engineering University of Hannover. Stress relieving with resistive materials based on silicon carbide (sic). In *Proceeding of International Symposium on Electrical Insulating Materials in conjunction with the 30th Symposium on Electrical Insulating Materials, Toyohashi, Japan*, September 1998.
- [3] Makoto Masuda, Akimasa Ogata, Makoto Nitta, Tsuneo Tani, and LTD Yazaki Electric Wire Co. A study of volume resistivity for high voltage power cable semiconducting layer. In *Proceeding of the 5th International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials, Seoul, Korea*, May.
- [4] S. Matsui, Y. Suzuki, N. Nakashima, F. Kasaki, O. Fujii, and LTD Mizuho Nagoya JAPAN E. Matsuda, NGK Insulators. In *Proceeding of the 5th International Conference on Properties and Applications of Dielectric Materials, Seoul, Korea*, May 1997.
- [5] B. Pinel and F. Duchateau. Fonction isolation dans les matériels électriques. *Techniques de l'ingénieur, traité de génie électrique*, D 2 302.
- [6] M. Aguet and M. Ianoz. *Haute tension - Traité d'électricité, d'électronique et d'électrotechnique*. Editions Dunod, 1987.
- [7] S. Orłowska. *Conception et prédiction des caractéristiques diélectriques des matériaux composites à deux et trois phases par la modélisation et la validation expérimentale*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, France 2003.

- [8] P. Sarma Maruvada. *Corona performance of high-voltage transmission lines*. Research studies press ltd, England, 2000.
- [9] M.Beyer, W. Boeck, and W. Zaengl K. Möller. *Hochspannungstechnik*. Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg.
- [10] H. Xie, S.-T. Chen, and S.-Z. Wu. Corona supression by a semiconductor coating in hight voltage insulation systems. In *proceeding of 16th Electrical & Electronics Insulation Conference, New York*, pages 102–106, 1983.
- [11] J. C. Dubois. Propriétés diélectriques des plastiques. *Techniques de l'ingénieur, traité Plastiques et Composites*, AM 3 140.
- [12] J. C. Dubois and P. Michel. Polymères conducteurs. *Techniques de l'ingénieur, traité électronique*, E 1 860.
- [13] J. C. Dubois. Propriétés diélectriques des polymères. *Techniques de l'ingénieur, traité Electronique*, E 1 850.
- [14] M. Schmid, M. Laurent, and F. Gaille. Use of elastomeric material of hv and ehv accessories. In *Proceeding Jicable'95, Paris*, volume A.3.3, June 1995.
- [15] J. Becker. Les câbles modernes pour le réseau haute tension. *Revue E tijdschrift*, no. 4, 2001.
- [16] Rapport du CESI A2/038822.
- [17] H. Kurihara, S. Kobayashi, M. Kitaya, Y. Arashitani, H. Oda, T. Serizawa, and T. Tashiro. Cold shrinkable joint for 66-kv and 110-kv xlpe cables applied to practice transmission lines. *Furukawa review*, no. 20, 2001.
- [18] E. Vasseur and S. Chatterjee. Development of hv and ehv single piece premoulded joint. In *Proceeding on conference Jicable'95, Paris*, volume A.4.4, June 1995.
- [19] C. Laurent. Diélectriques solides et charge d'espace. *Techniques de l'ingénieur, traité de Cénie électrique*, D 2 305.
- [20] B. Thidé. *Electromagnetic field theory*. Swedish Institute of Space Physics and Department of Astronomy and Space Physics, Uppsala University, Sweden, 1997.

- [21] C. Laurent. Diélectriques solides et charges d'espace. *Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique*, D 2 305.
- [22] E. Semail. Physique du génie électrique. Lavoisier Tec & Doc, 1998.
- [23] R. Fournié and R. Coelho. Diélectriques, bases théoriques. *Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique*, D 2 300.
- [24] J. L. Coulomb and J. C. Sabonnadière. Calcul des champs électromagnétiques. *Techniques de l'ingénieur, traité Génie électrique*, D 1 3020, 1988.
- [25] Flux2d. 2D FEM Software développé par INPG et CEDRAT Grenoble.
- [26] Phi3d. 3D BEM Software développé par le CEGELY Ecole Centrale de Lyon et CEDRAT Grenoble.
- [27] Z. Yeo and F. Buret L. Krähenbühl P. Auriol. A non linear model for surface conduction. In *IEEE Trans. On Magnetics*, volume 34, no. 5, September 1998.
- [28] J. Rhyner and M. G. Bou-Diab. One-dimensional model for nonlinear stress control in cable termination. In *IEEE Trans. On Dielectric and Electrical Insulation*, December 1997.
- [29] G. Lupo, V. Tucci, and M. Vitelli. Stress control tubes for hv cable terminations with linear and non linear characteristics: theoretical and experimental approaches. In *9th International Symposium on High Voltage Engineering, Graz, Austria*, August-September 1995.
- [30] J. P. Rivenc and T. Lebey. An overview of electrical properties for stress grading optimization. In *IEEE Trans. On Dielectric and Electrical Insulation*, volume 6 no. 3, June 1999.
- [31] L. Egiziano, V. Tucci, M. Petrarca, and M. Vitelli. A galerkin model to study the field distribution in electrical components employing nonlinear stress grading. In *IEEE Trans. On Dielectric and Electrical Insulation*, volume 6 no. 6, December 1999.
- [32] V. Tucci and M. Vitelli. On the effect of anisotropy in nonlinear composite materials for stress grading applications. In *IEEE Trans. On Dielectric and Electrical Insulation*, volume 7 no. 3, June 2000.

- [33] G. Dhatt and G. Touzot. *Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis*. Editeur Paris et Les Presses de l'Université Laval Québec, 1981.
- [34] L. Krähenbühl. *La méthode des équations intégrales de frontière pour la résolution des problèmes de potentiel en électrotechnique, et sa formulation axisymétrique*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1983.
- [35] Durand. *Electrostatique, Tome I*. Ed. Masson, Paris, 1964.
- [36] J. A. Vasconcelos. *Optimisation de forme des structures électromagnétiques*. PhD thesis, Ecole Centrale de Lyon, 1994.
- [37] Z. Ren, C. Li, and A. Razek. Hybrid fem-bem formulation using electric and magnetic variables. Laboratoire de Génie Electrique de Paris, U.R.A. 127 CNRS, Université Paris 6 & 7, Plateau du Muolon, 91192 Gif sur Yvette cedex, France.
- [38] J. Fetzer, S. Kurz, and G. Lehner. Comparison between different formulation for the solution of 3d nonlinear magnetostatic problems using bem-fem coupling. In *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 32, No. 3, May 1996.
- [39] A. Bossavit and J. C. Vérité. A mixed fem-biem method to solve 3d eddy-current problems. In *IEEE Transactions on Magnetics*, volume 18, No. 2, March 1982.
- [40] L. Bayon, F. Buret, C. Koeblin, and T. Toledo. Field distribution measurement and simulation of stress control materials for cable accessories. In *8th IEEE International Conference on Solid Dielectrics - ICSD 2004, Toulouse, France, July 2004*.
- [41] J. C. Heinrich and D. W. Pepper. *Intermediate finite element method fluid flow and transfer applications*. Taylor & Francis, 1999.
- [42] Y. Saad. *Iterative method for sparse linear system*. Copyright ©2000 by Y. Saad, 2000.
- [43] S. Kurz, J. Fetzer, and G. Lehner. An improved algorithm for the bem-fem-coupling method using domain decomposition. In *IEEE Transaction on Magnetics*, volume 31, No. 3, May 1995.

- [44] Saad, Youcef, and Martin H. Schultz. Gmres: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. In *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, volume 7, No. 3, July 1986.
- [45] Mathcad 2000. MathSoft, Inc. All rights reserved, 1986-1999.
- [46] T. Takuma, T. Kawamoto, and Fujinami. Field behaviour near singular points in composite dielectric arrangements. In *IEEE Trans. on Electrical Insulation*, volume 13 no. 6, December 1978.
- [47] T. Takuma, T. Kawamoto, and Fujinami. Effect of conduction on field behavior near singular points in composite medium arrangements. In *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, volume EI-17 No. 3, June 1982.
- [48] M. Defourny. *Contraintes diélectriques, éléments de frontière, optimisation des isolations*. PhD thesis, Faculté des sciences appliquées de Liège, 1987.
- [49] Durand. *Electrostatique Tome II*. Editions Masson, Paris, 1964.
- [50] Olurinde E. Lafe, J. Sergio Montes, Alexander H. D. Cheng, James A. Liggett, M. ASCE, Philip L-F. Liu, and A. M. ASCE. Singularities in darcy flow through porous media. In *Journal of hydraulics division*, volume no. 15467, June 1980.
- [51] M. Defourny. Original treatment of singularities in a b.e. program applied to electrostatics. In *Proc. Of the 8th International Conference on Boundary elements, Tokyo Japan*, September 1986.
- [52] Weiss. Fictitious peaks and edges in electric fields. In *3th ISH 11.21, Milan, Italy*, August 1979.
- [53] B. Tchaumnat, S. Hamada, and T. Takuma. Effect of conductivity on field behavior near a contact point. In *12th ISH*, volume 1, no. 1, 2001.
- [54] B. Tchaumnat, S. Hamada, and T. Takuma. Electric field behavior near a contact point in the presence of volume conductivity. In *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, volume 8 No. 6, December 2001.
- [55] J. P. Lonchamp. *Comprendre et appliquer l'électrostatique*. 1er cycle, Editions Masson, 1988.

- [56] J. P. Lonchamp. *Comprendre et appliquer l'électrocinétique, le courant continu*. 1er cycle, Editions Masson, 1989.
- [57] Matlab, version 5.3. MathWork, Inc., 1999.

Notations

α_i : Pulsations propres, représentant le taux de décroissance exponentielle des modes (V)

χ : Susceptibilité électrique

δ : Paramètre du schéma temporel

ε_0 : Permittivité absolue du vide ($8,85 \cdot 10^{-12} F/m$)

ε_r : Permittivité relative

Γ : Frontière d'une région bidimensionnelle

κ_i : Modes de répartition spatiale des inconnues (s^{-2})

λ^* : Coefficient du comportement du champ électrique à proximité d'une singularité

μ_0 : Perméabilité magnétique du vide ($1,26 \cdot 10^{-6} H/m$)

μ_r : Perméabilité magnétique relative

ω : Pulsation d'une source de tension sinusoïdale

Ω : Surface d'une région

π : Nombre pi (3.14159...)

ϖ : Coefficient de sur-relaxation pour la méthode du point fixe

Ψ : Projection du champ électrique sur le vecteur normal à la frontière Γ

ρ, ρ_v : Résistivité volumique [Ω/m]

ρ_s : Résistivité surfacique [Ω]

σ, σ_v : Conductivité volumique [S/m]

σ_s : Conductivité surfacique [S]

Θ_s : Densité de charge surfacique (C/m^2)

(ξ, ζ) : Abscisse et ordonnée dans le repère de référence des éléments triangulaire de 2^{nd} ordre

G^δ : Facteur d'amplification

Δt : Pas de temps

$\tan \delta$: Tangente de l'angle des pertes diélectriques

C : Capacité électrique (F)

V : Potentiel électrique

\vec{B} : Induction magnétique (T)

\vec{D} : Induction électrique (C/m^2)

\vec{E} : Champ électrique (V/m)

\vec{H} : Champ magnétique (A/m)

\vec{j} : Densité de courant (A/m^2)

\vec{P} : Vecteur de polarisation électrique

$\delta(t)$: Fonction de Dirac

$E(k^2)$: Fonction elliptique de seconde espèce

G_{ax}, G_{2d} : Noyaux de l'équation intégrale de frontière en $3D$ axisymétrique

G : Fonction de Green en $3D$

$K(k^2)$: Fonction elliptique de première espèce

N : Fonctions d'interpolation pour des éléments du second ordre en $1D$ et $2D$

R : Résistance électrique (W)

W : Fonction de projection pour la FEM

BEM : Méthode des Eléments de Frontière

C : Carbone

EIF : Equation Intégrale de Frontière

EPR : Caoutchouc Ethylène Propylène (Ethylene-Propylene Rubber)

FEM : Méthode des Eléments Finis

FEMBEM : Couplage entre la FEM et la BEM

FEMCLA : Méthode des Eléments Finis - Formulation en Potentiel

FEMNOR : Méthode des Eléments Finis - Formulation en Potentiel et en Champ Normal

HT : Haute Tension

PCB : Huile Polychlorobiphényle

PE : Polyéthylène

PR : Polyéthylène Réticulé

PVC : Polyéthylène de Vinyle

Sb^{5+} : Antimoine

SC : Semi-Conducteur

SF_6 :Hexafluorure de Soufre

SiC : Carbure de Silicium

SnO_2 : Oxyde d'étain

THT : Très Haute Tension

XLPE : Polyéthylène réticulé

ZnO : Oxyde de Zinc

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 avril 2002,

Vu la demande du Directeur de Thèse

Monsieur Ph. AURIOL et F. BURET

et les rapports de

Monsieur J.L. COULOMB
Professeur à l'INPG - ENSIEG/LEG - BP 46 - 38402 SAINT MARTIN D'HERES Cedex

et de

Monsieur J.A. VASCONCELOS
Professeur à l'Université Fédérale de Minas Gerais - CPDEE - Av. Antônio Carlos 6627 BELO
HORIZONTE - MG CEP 31270-910 - Brasil

Monsieur TOLEDO Thierry

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale ELECTRONIQUE ELECTROTECHNIQUE AUTOMATIQUE (EEA)

Fait à Ecully, le 23 septembre 2004



P/Le Directeur de l'E.C.L.
Le Directeur des Etudes

A handwritten signature in black ink, appearing to be "F. Leboeuf".

F. LEBOEUF

Titre : Modélisation des isolations axisymétriques basées sur l'utilisation des matériaux semi-conducteurs par couplage des éléments finis et des éléments de frontière.

Mots clés : Haute tension - Isolation semi-conductrice – Méthode des éléments finis – Méthode des éléments de frontière.

Résumé :

L'isolation haute tension à base de matériaux semi-conducteurs est devenue une technique très répandue pour la réduction des fortes contraintes en champ électrique. Elle fait partie intégrante des nouveaux systèmes d'isolation à base de matériaux polymères comme par exemple les câbles haute tension à isolation synthétique.

Il existe une grande quantité de produits semi-conducteurs conçus pour l'isolation haute tension mais leur utilisation reste assez empirique du fait de leur double comportement conducteur/isolant, du caractère non linéaire de la conductivité et de la permittivité et de leur anisotropie.

Ce travail de thèse répond à l'intérêt grandissant de ces matériaux dans le domaine industriel. Il porte sur la modélisation de leur comportement à l'aide de techniques numériques. La procédure retenue consiste à coupler la méthode des éléments de frontière (BEM) et la méthode des éléments finis (FEM). La première est bien adaptée à la modélisation des grands domaines à propriété isotrope et uniforme alors que la seconde permet de prendre en compte les non linéarités et l'anisotropie présentes dans les matériaux semi-conducteurs.

Afin de modéliser les matériaux semi-conducteurs ayant une conductivité qui dépend du module du champ électrique, un schéma temporel basé sur la méthode des trapèzes pour l'intégration temporelle et sur la méthode du point fixe pour la résolution des non linéarités, ont été développés.

Les validations numériques démontrent que les fortes non linéarités de type exponentiel, apparaissant lors des coups de foudre, peuvent désormais être prises en compte. De plus, la bonne estimation du champ normal aux frontières s'est avérée indispensable lorsque la conductivité est dépendante du module du champ électrique. Cette bonne prise en compte a été permise grâce à l'utilisation des équations intégrales de frontière dans les régions diélectriques.

Enfin, l'emploi de la méthode des équations intégrales de frontière (BEM) a nécessité la prise en compte des singularités géométriques en présence d'une région semi-conductrice. Les équations pouvant traiter ces cas n'étant pas connues, des tests numériques basés sur les équations traitant les singularités dans le cas électrostatique ont été menées, ce qui a permis de prendre en compte certains cas de ces singularités.

Title: Modelling of an axisymmetrical insulation based on the use of semi-conductive materials by coupling finite elements and boundary elements.

Keywords: High voltage – Semi-conductive insulation – Finite elements method – Boundary elements method.

Direction de Recherche

M. Philippe Auriol, Professeur et M. François Buret, Maître de Conférences
Centre de Génie Electrique de Lyon (CEGELY), UMR – CNRS 5005
Ecole Centrale de Lyon, 36, avenue Guy de Collongue, 69134 Ecully cedex