

---

# ÉVALUATION DE LA VARIÉTÉ DES CHEMINS ENTRE DEUX SOMMETS D'UN GRAPHE

## LE « NOMBRE D'OPTIONS EQUIVALENTES AU PLUS COURT CHEMIN »

J.F. GLEYZE

Institut Géographique National, Laboratoire COGIT  
Saint-Mandé, France

**Résumé** – Les indicateurs d'accessibilité sur un réseau de transport sont construits à partir des longueurs de plus court chemin observées entre les différentes paires de sommets du réseau. En ce sens, ces indicateurs n'entrevoient le réseau qu'au travers de critères d'optimalité, et ne tiennent donc pas compte des potentialités offertes par l'existence éventuelle de chemins alternatifs.

Dans ce contexte, pour une relation origine-destination donnée, nous montrons que la connaissance d'un flux de chemins intégrant les plus courts chemins et une classe de chemins alternatifs permet d'élaborer formellement un indicateur de « variété des chemins », mesurant le nombre  $N$  d'options équivalentes aux plus courts chemins offertes par cette collection de chemins.

Nous construisons cet indicateur de sorte qu'il intègre simultanément les contraintes liées aux détours occasionnés par les chemins considérés (un chemin contribue d'autant moins à  $N$  qu'il est long) et les contraintes liées aux recouvrements entre ceux-ci (un chemin contribue d'autant moins à  $N$  qu'il partage des arêtes communes avec d'autres chemins). Grâce à des résultats issus des réseaux électriques, nous montrons que cet indicateur peut s'exprimer sous une forme reposant sur la seule connaissance du flux résultant de la collection de chemins considérée dans le calcul.

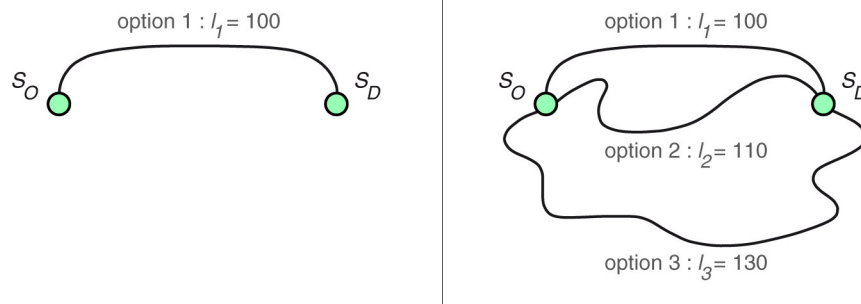
**Mots-clés** – plus courts chemins, chemins alternatifs, modèles de cheminement, nombre d'options équivalentes au plus court chemin, réseaux électriques, accessibilité

### INTRODUCTION

Dans les études d'aménagement et de géographie quantitative, l'information élémentaire utilisée dans les calculs d'accessibilité sur un réseau est la longueur  $d^*(i, j)$  du (des) plus court(s) chemin(s) pour toute relation origine-destination entre deux sommets  $S_i$  et  $S_j$  de ce réseau (voir par exemple (Morris, 1979), (Pooler, 1995), (Bruinsma & Rietveld, 1998), (Joly, 1999) et (Allen *et al.*, 1993)).

Cette information est cependant limitée, car elle se fonde exclusivement sur les caractéristiques du (des) plus court(s) chemin(s) entre les paires de sommets et fait donc abstraction des potentialités que le réseau offre par le biais d'éventuels chemins alternatifs.

Ainsi, sur les deux graphes de la Figure 1, les indicateurs classiques d'accessibilité envisagent identiquement la relation  $S_O - S_D$ , car le plus court chemin associé à celle-ci est de même longueur sur l'un et sur l'autre graphe (longueur  $l_1 = 100$ ), indépendamment de la présence ou non d'autres options plus coûteuses.



**Figure 1 : comparaison de la mise en relation entre deux sommets origine et destination ( $S_O$  et  $S_D$ ), selon que le graphe offre ou non des alternatives au plus court chemin**

Pour autant, la prise en compte des chemins alternatifs viendrait enrichir la notion d'accessibilité en apportant une information complémentaire sur le nombre de chemins « acceptables » entre  $S_O$  et  $S_D$ .

Dans ce contexte, nous proposons d'enrichir l'information sur la longueur des plus courts chemins entre deux sommets  $S_i$  et  $S_j$  d'un réseau en envisageant la variété des chemins entre ceux-ci. En pratique, il est possible d'exhiber une collection de chemins intégrant plus courts chemins et chemins alternatifs grâce aux modèles de cheminement utilisés dans le domaine des transports<sup>1</sup>. En partant du principe que nous disposons d'une telle collection de chemins, nous allons construire un indicateur  $N(i, j)$  résumant le « nombre d'options équivalentes au plus court chemin » que de tels chemins offrent entre une origine  $S_i$  et une destination  $S_j$  données.

Étant entendu que la variété des chemins offerts est d'autant moins intéressante que ceux-ci sont longs et qu'ils empruntent des arêtes communes, ce nombre doit être tel que :

- plus un chemin est long, plus sa contribution au nombre d'options équivalentes au plus court chemin est faible [critère de pénalité sur les détours] ;
- plus un chemin partage des arêtes avec d'autres chemins, plus sa contribution au nombre d'options équivalentes au plus court chemin est faible [critère de pénalité sur les redondances].

## CONSTRUCTION EMPIRIQUE DU NOMBRE $N$ D'OPTIONS EQUIVALENTES AU PLUS COURT CHEMIN

Nous allons élaborer cet indicateur de manière qualitative à partir d'un exemple simple. Pour cela – et bien que l'information issue des modèles de cheminement n'énumère pas forcément tous les chemins entre une origine et une destination – nous allons supposer dans un premier temps que nous avons connaissance de ces chemins pour construire cet indicateur. Grâce à un parallèle avec la théorie des

<sup>1</sup> Les modèles de cheminement peuvent être rangés en fonction du niveau d'information supposé détenu par des usagers fictifs se déplaçant sur le réseau. Les modèles les plus « permissifs » sont ceux qui ne posent aucune contrainte dans le calcul des chemins et conduisent donc les usagers à se déplacer « en aveugle » au sein du réseau (voir par exemple les « random walks » traités par Noh & Rieger (2003)). À l'opposé, le modèle le plus « strict » concentre les relations sur les plus courts chemins. Entre l'absence d'information propre aux modèles aléatoires et l'information exhaustive caractéristique des plus courts chemins, il existe des modèles intermédiaires proposant d'exhiber des chemins proches des plus courts chemins et de leur associer des poids d'autant plus importants que les détours qu'ils occasionnent sont faibles (information imparfaite) (cf (Sheffi, 1985)).

réseaux électriques, nous verrons dans un second temps que celui-ci peut en fait s'exprimer simplement à partir de la seule connaissance de la répartition résultante de ces chemins.

Les données du problème sont donc les suivantes :

- la relation origine-destination  $S_i - S_j$  est réalisée par un ou plusieurs plus courts chemins de longueur  $d^*(i, j)$  ;
- selon la logique de déplacement retenue, cette même relation est décrite par une collection de  $g(i, j)$  chemins (intégrant plus court(s) chemin(s) et chemins alternatifs) ;
- chaque chemin  $\nu$  ( $\nu \in \{1..g(i, j)\}$ ) représente un poids relatif  $\pi_\nu(i, j)$  au sein de la collection des  $g(i, j)$  chemins – par définition :

$$\sum_{\nu=1}^{g(i,j)} \pi_\nu(i, j) = 1 \quad (1)$$

- chaque arête  $A_k$  (de valuation  $l_k$ ) est transitée par une proportion  $\rho_k(i, j)$  des chemins entre les sommets origine et destination – par construction, cette proportion est la somme des poids relatifs  $\pi_\nu(i, j)$  de chacun des chemins  $\nu$  transitant par  $k$  :

$$\forall \text{ arête } A_k : \rho_k(i, j) = \sum_{\nu=1}^{g(i,j)} \pi_\nu(i, j) \times 1_{\{\text{l'arête } A_k \text{ est située sur le chemin } \nu\}} \quad (2)$$

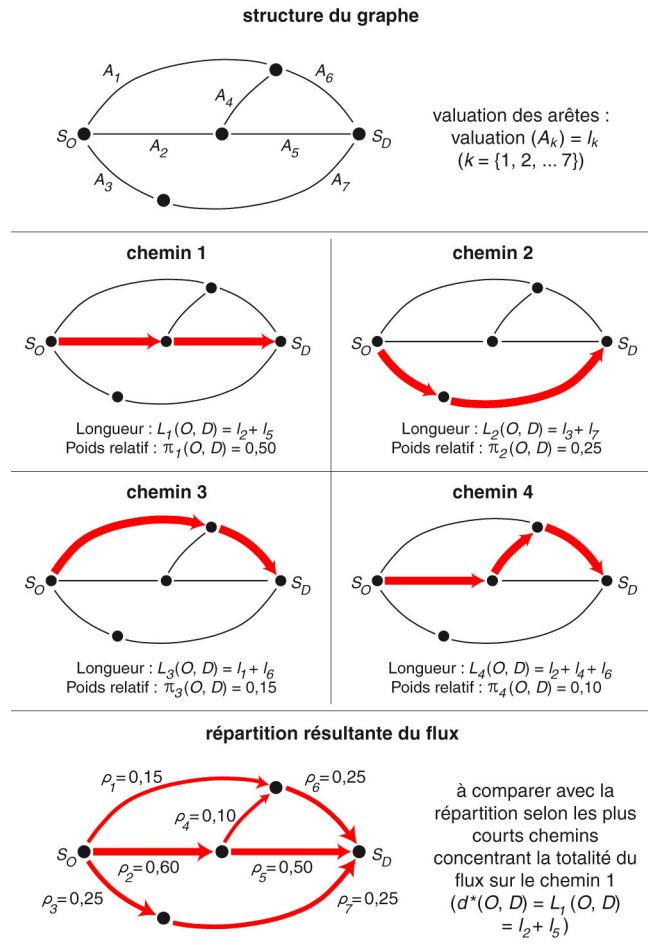
La Figure 2 reprend ces données pour une relation origine-destination  $S_O - S_D$  sur un exemple simple de graphe. Comme évoqué plus haut, cet exemple va nous servir de point de départ pour élaborer un indicateur du « nombre d'options équivalentes au plus court chemin ».

De prime abord, on ne peut pas considérer qu'il existe sur ce graphe quatre chemins équivalents au plus court chemin (chemin 1) pour aller de l'origine vers la destination, car trois d'entre eux (chemins 2, 3 et 4) occasionnent des détours par rapport au plus court chemin et empruntent partiellement des arêtes communes :  $N(i, j)$  est donc inférieur à 4. Afin d'évaluer ce nombre en tenant compte des pénalités induites par les détours et par les redondances, nous allons le construire qualitativement en évaluant séparément la contribution de chaque chemin à ce nombre.

Le chemin 2 constitue l'exemple-type du chemin indépendant, c'est-à-dire du chemin ne partageant aucune arête commune avec les autres chemins. Sa contribution au nombre d'options n'est donc pas pénalisée par effet de redondance. Elle est en revanche pénalisée par le détour qu'elle occasionne par rapport au plus court chemin. Étant donné que les longueurs de ces chemins valent respectivement  $L_2(O, D)$  et  $L_1(O, D) = d^*(O, D)$  ( $L_2(O, D) > L_1(O, D)$ ), nous considérons que le chemin 2 offre une alternative équivalente au plus court chemin selon un rapport :

$$\frac{L_1(O, D)}{L_2(O, D)} = \frac{d^*(O, D)}{l_3 + l_7} \quad (3)$$

Ainsi, si le chemin 2 est deux fois plus long que le plus court chemin, il offre une alternative équivalente à «  $\frac{1}{2}$  plus court chemin ».



**Figure 2 : exemple simple de graphe sur lequel la relation origine-destination  $S_O - S_D$  considérée est réalisée par 4 chemins (dont le plus court chemin, au titre du chemin 1) – l’encadré du bas présente la répartition résultante de ces chemins compte-tenu de leurs poids relatifs**

De la même manière, on est tenté d’évaluer la contribution du chemin 3 par le ratio  $\frac{d^*(O, D)}{L_3(O, D)} = \frac{d^*(O, D)}{l_1 + l_6}$ , néanmoins, ce chemin partage l’arête  $A_6$  avec le chemin 4, aussi l’intérêt de l’alternative offerte par le chemin 3 est-il atténué partiellement. Le moyen le plus immédiat de rendre compte de cette redondance est de l’intégrer à la contribution de  $l_6$  dans le ratio.  $\rho_6(O, D) = \pi_3(O, D) + \pi_4(O, D)$  étant la proportion des chemins transitant par l’arête  $A_6$  compte-tenu des poids relatifs des chemins 3 et 4, nous intégrons cette redondance en pénalisant la valuation  $l_6$  d’un facteur  $\frac{\rho_6(O, D)}{\pi_3(O, D)}$  (supérieur à 1, par construction). Par souci d’homogénéité, nous procédons de même pour  $l_1$  en le multipliant par le facteur  $\frac{\rho_1(O, D)}{\pi_3(O, D)} = 1$ . Ainsi, la contribution du chemin 3 au nombre d’options équivalentes au plus court chemin vaut :

$$\frac{d^*(O, D)}{\frac{\rho_1(O, D)}{\pi_3(O, D)} \times l_1 + \frac{\rho_6(O, D)}{\pi_3(O, D)} \times l_6} \tag{4}$$

L'analyse qualitative de ces deux chemins nous conduit à conjecturer que la contribution d'un chemin quelconque  $\nu$  au nombre d'options équivalentes au plus court chemin  $S_O - S_D$  vaut :

$$\frac{d^*(O,D)}{\pi_\nu(O,D) \times \left( \sum_{\{\text{arête } A_k \subset \text{chemin } \nu\}} \rho_k(O,D) \times l_k \right)} \quad (5)$$

Ainsi, en intégrant les contributions de chacun des  $g(i,j)$  chemins qui participent à une relation quelconque  $S_i - S_j$ , nous postulons finalement que le nombre  $N(i,j)$  d'options équivalentes au plus court chemin  $S_i - S_j$  vaut :

$$N(i,j) = \sum_{\nu=1}^{g(i,j)} \frac{d^*(i,j)}{\pi_\nu(i,j) \times \left( \sum_{\{\text{arête } A_k \subset \text{chemin } \nu\}} \rho_k(i,j) \times l_k \right)} \quad (6)$$

Par construction, cette expression répond bien aux critères de pénalité sur les détours et sur les redondances. Par ailleurs, nous vérifions qu'elle est vraisemblable d'un point de vue physique :

- d'une part, elle correspond bien à un nombre sans unité de grandeur ;
- d'autre part, elle est plausible pour des configurations triviales – en l'occurrence,  $N(i,j)$  vaut 1 pour une relation réalisée par un unique plus court chemin (quelle que soit sa subdivision en arêtes), et  $N(i,j)$  vaut  $n$  pour une relation répartie de manière quelconque sur  $n$  plus courts chemins indépendants.

### **SIMPLIFICATION DU NOMBRE $N$ – EXPRESSION A PARTIR DE LA SEULE CONNAISSANCE DES VALUATIONS DU RESEAU ET DU FLUX RESULTANT DE LA COLLECTION DE CHEMINS CONSIDEREE**

Tel qu'il est défini, le calcul de ce nombre nécessite de pouvoir énumérer et évaluer le poids  $\pi_\nu(i,j)$  des  $\nu = \{1 \dots g(i,j)\}$  chemins intervenant dans le calcul. Cependant, certains modèles de cheminement ne fournissent pas ces informations – seule est connue la répartition résultante  $\rho_k(i,j)$  des chemins sur les arêtes  $A_k$ . Pour cette raison, nous allons à présent transformer l'expression de ce nombre de sorte à ne faire apparaître que les proportions  $\rho_k(i,j)$ .

La démonstration mathématique que nous avons menée à cet effet s'appuie sur des résultats issus de la théorie des réseaux électriques et de leur modélisation par des graphes (pour toutes les notions d'électricité abordées dans la suite, voir par exemple (Bollobás, 1998)). Le principe consiste à considérer un équivalent « électrique » du graphe sur lequel nous étudions les cheminements :

- la topologie du graphe électrique est identique à celle du graphe d'étude ;
- les résistances des arêtes  $A_k$  du graphe électrique correspondent aux longueurs  $l_k$  de celles-ci sur le graphe d'étude.

Sur ce réseau électrique, la répartition des  $\nu = \{1 \dots g(i, j)\}$  chemins de poids relatifs  $\pi_\nu(i, j)$  sur le graphe d'étude  $\left( \sum_{\nu=1}^{g(i, j)} \pi_\nu(i, j) = 1 \text{ d'après l'équation 1} \right)$  correspond à la répartition sur le graphe

électrique d'un courant d'intensité  $\sum_{\nu=1}^{g(i, j)} \pi_\nu(i, j)$  entre l'origine  $S_i$  et la destination  $S_j$  – chaque arête  $A_k$  étant traversée par un courant d'intensité  $\rho_k(i, j)$ . Cette analogie est acceptable car le courant résultant respecte par construction la loi des nœuds<sup>2</sup> en tout sommet du réseau.

Nous complétons cette modélisation en notant par  $U(i, j)$  la différence de potentiel entre les sommets origine et destination et par  $U_k(i, j)$  la différence de potentiel mesurée aux extrémités de l'arête  $A_k$ .

Sur ce réseau, nous considérons la « résistance équivalente »  $L(i, j)$  entre les sommets  $S_i$  et  $S_j$ . Par définition, cette résistance « résume » le réseau électrique entre les sommets  $S_i$  et  $S_j$ , en ce sens que les valeurs observées de la différence de potentiel  $U(i, j)$  et la puissance<sup>3</sup> totale produite par le courant au sein du réseau entre  $S_i$  et  $S_j$  sont identiques sur le réseau originel et sur sa version équivalente, réduite à la résistance  $L(i, j)$ .

Conformément à la loi d'Ohm<sup>4</sup>,  $L(i, j)$  est donc telle que :

$$L(i, j) = \frac{U(i, j)}{\sum_{\nu=1}^{g(i, j)} \pi_\nu(i, j)} \quad (7)$$

Cette modélisation étant posée, la loi d'Ohm sur l'arête  $A_k$  donne :

$$\forall \text{ arête } A_k : U_k(i, j) = \text{courant (arête } A_k) \times \text{résistance (arête } A_k) = \rho_k(i, j) \times l_k \quad (8)$$

D'après la loi des mailles<sup>5</sup> sur la succession des arêtes composant le chemin  $\nu$  ( $\nu = \{1 \dots g(i, j)\}$ ) entre l'origine  $S_i$  et la destination  $S_j$ , on sait par ailleurs que :

$$\forall \text{ chemin } \nu : U(i, j) = \sum_{\{ \text{arête } A_k \subset \text{chemin } \nu \}} U_k(i, j) = \sum_{\{ \text{arête } A_k \subset \text{chemin } \nu \}} \rho_k(i, j) \times l_k \quad (9)$$

En faisant une moyenne harmonique de ces valeurs de  $U(i, j)$ , pondérée par les intensités  $\pi_\nu(i, j)$  des chemins associés, on obtient :

<sup>2</sup> Le courant total entrant et le courant total sortant doivent être égaux en tout nœud du réseau électrique.

<sup>3</sup> La puissance produite sur un tronçon donné du réseau est égale au produit du courant et de la différence de potentiel observés entre les extrémités de ce tronçon.

<sup>4</sup> La différence de potentiel observée aux bornes d'une résistance est égale au produit du courant traversant cette résistance et de la valeur de celle-ci.

<sup>5</sup> La différence de potentiel entre deux nœuds du réseau électrique est égale à la somme algébrique des différences de potentiel observées sur toute famille de tronçons dont la succession décrit un chemin entre ces deux nœuds.

$$U(i, j) = \frac{\sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i, j)}{\sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i, j) \times \frac{1}{U(i, j)}} = \frac{\sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i, j)}{\sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i, j) \times \frac{1}{\sum_{\{arête A_k \subset \text{chemin } v\}} \rho_k(i, j) \times l_k}} \quad (10)$$

En combinant cette équation avec l'expression obtenue pour la résistance équivalente  $L(i, j)$  (équation 7), on a donc :

$$L(i, j) = \frac{1}{\sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i, j) \times \frac{1}{\sum_{\{arête A_k \subset \text{chemin } v\}} \rho_k(i, j) \times l_k}} = \frac{1}{\sum_{v=1}^{g(i,j)} \frac{1}{\frac{1}{\pi_v(i, j)} \times \left( \sum_{\{arête A_k \subset \text{chemin } v\}} \rho_k(i, j) \times l_k \right)}} \quad (11)$$

Le nombre  $N(i, j)$  d'options équivalentes au plus court chemin  $S_i - S_j$  (établi en équation 6) apparaît au dénominateur de cette expression, aussi pouvons-nous exprimer  $N(i, j)$  en fonction de  $L(i, j)$  :

$$\begin{aligned} N(i, j) &= \sum_{v=1}^{g(i,j)} \frac{d^*(i, j)}{\frac{1}{\pi_v(i, j)} \times \left( \sum_{\{arête A_k \subset \text{chemin } v\}} \rho_k(i, j) \times l_k \right)} \\ &= d^*(i, j) \times \sum_{v=1}^{g(i,j)} \frac{1}{\frac{1}{\pi_v(i, j)} \times \left( \sum_{\{arête A_k \subset \text{chemin } v\}} \rho_k(i, j) \times l_k \right)} = \frac{d^*(i, j)}{L(i, j)} \end{aligned} \quad (12)$$

$d^*(i, j)$  étant connue,  $N(i, j)$  est entièrement déterminée par la connaissance de la résistance équivalente  $L(i, j)$  entre les sommets origine et destination  $S_i$  et  $S_j$  sur le graphe électrique.

Outre la formule établie plus haut, cette résistance équivalente peut être calculée grâce au bilan de puissance du réseau.

S'agissant d'un réseau de résistances, la puissance totale est égale à la somme des effets Joule dégagés dans toutes les arêtes du réseau :

$$\text{puissance totale} = \sum_{\text{arête } A_k} \text{courant}^2 (\text{arête } A_k) \times \text{résistance} (\text{arête } A_k) = \sum_{\text{arête } A_k} \rho_k(i, j)^2 \times l_k \quad (13)$$

Ce réseau est équivalent à une résistance équivalente  $L(i, j)$  traversée par un courant d'intensité

$$\sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i, j), \text{ donc la puissance totale est aussi telle que :}$$

---


$$\text{puissance totale} = \left( \sum_{v=1}^{g(i,j)} \pi_v(i,j) \right)^2 \times L(i,j) \quad (14)$$

En combinant les deux expressions de cette puissance (équations 13 et 14) et en tenant compte du fait que la somme des courants  $\pi_v$  est unitaire (équation 1), on en déduit une expression simplifiée de la résistance équivalente  $L(i,j)$  :

$$L(i,j) = \sum_{\text{arête } A_k} \rho_k(i,j)^2 \times l_k \quad (15)$$

En intégrant ce résultat à l'expression de  $N(i,j)$  établie précédemment (équation 12), on a donc finalement :

nombre d'options indépendantes équivalentes au plus court chemin entre  $S_i$  et  $S_j$

$$= N(i,j) = \frac{d^*(i,j)}{\sum_{\text{arête } A_k} \rho_k(i,j)^2 \times l_k} \quad (16)$$

## SYNTHESE

Comme souhaité, le nombre  $N(i,j)$  ainsi formulé est simple à calculer, car il exige seulement de connaître :

- les longueurs  $l_k$  des arêtes (données de la structure du graphe),
- la longueur  $d^*(i,j)$  de plus court chemin entre l'origine  $S_i$  et la destination  $S_j$  (déterminée lors des calculs traditionnels d'accessibilité),
- et la répartition résultante  $\rho_k(i,j)$  des chemins sur les arêtes  $A_k$  (fournie par le modèle de cheminement retenu).

Enfin, le nombre  $N(i,j)$  est simple à appréhender car, par construction, son interprétation « se calque » sur le raisonnement qualitatif ayant régi sa construction. En l'occurrence, lorsque l'on considère un chemin réalisant une relation origine-destination donnée parmi un ensemble de chemins possibles (plus court(s) chemin(s) + chemins alternatifs), nous retiendrons que :

- le détour occasionné par ce chemin est pénalisé par le ratio entre la longueur de ce chemin et la longueur du plus court chemin [critère sur les détours] ;
- le recouvrement partiel de ce chemin avec d'autres chemins est pénalisé par le poids relatif du chemin considéré au niveau des composantes impliquées [critère sur les redondances] ;
- ces deux critères pénalisants sont pris en compte simultanément dans le calcul des contributions de chacune des arêtes au nombre d'options équivalentes du chemin en question (équation 5) – et *in fine* dans le calcul de la contribution totale de l'ensemble des chemins (équation 6, simplifiée grâce à l'équation 15).

---

## RÉFÉRENCES

- Allen W.B., Liu D., Singer S. (1993) Accessibility measures of US metropolitan areas, *Transportation Research*, 25B (6), pp. 439-449
- Bollobás B. (1998) *Modern graph theory*, Springer Verlag, New York, 394 p.
- Bruinsma P. and Rietveld P. (1998) The accessibility of European cities: theoretical framework and comparison of approaches, *Environment and Planning, A* 30, pp. 499-521
- Joly O. (1999) Geographical position: « State of french art of spatial accessibility indicators », SPESD – France, annexe 5: 23 pp.
- Morris J.M., Dumble P.L., Wigan M.R. (1979) Accessibility indicators for transport planning, *Transportation Research*, 13A (2), pp. 91-109
- Noh J.D. and Rieger H. (2004) Random walks on complex networks, *Physical Review – Series A*, Vol. 92, Part 11
- Pooler J.A. (1995) The use of spatial separation in the measurement of transportation accessibility, *Transportation Research A*, 29A (6), pp. 421-427
- Sheffi Y. (1985) *Urban Transportation Networks – Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice Hall, 400 pp.