Mémoire présenté par

Khalid KOUFANY

en vue d'obtenir le diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques

Sujet : Analyse et géométrie des domaines bornés symétriques

soutenu le 30 novembre 2006

à l'Institut de Mathématiques Élie Cartan

devant le jury composé de :

Nicole Bopp	Université Louis Pasteur	Examinatrice
Jean-Louis Clerc	Université Henri Poincaré	Examinateur
Jacques Faraut	Université Pierre et Marie Curie	Rapporteur, Président du jury
Adam Korányi	The City University of New York	Rapporteur
Hubert Rubenthaler	Université Louis Pasteur	Examinateur
Harald Upmeier	University of Marburg	Rapporteur

DFD Mathématiques – École Doctorale IAEM Lorraine – UFR STMIA

ANALYSE ET GÉOMÉTRIE DES DOMAINES BORNÉS SYMÉTRIQUES

Khalid Koufany

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à Jean-Louis Clerc pour m'avoir introduit à la théorie des algèbres de Jordan. Ses qualités scientifiques et humaines m'ont été très bénéfiques.

Je suis particulièrement reconnaissant à Jacques Faraut, Adam Korányi et Harald Upmeier de m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de cette thèse d'Habilitation.

Je remercie chaleureusement Nicole Bopp, Jean-Louis Clerc et Hubert Rubenthaler, qui me font le grand plaisir de juger ce travail en participant au jury.

Je remercie également mes collaborateurs, Abdelhamid Boussejra, Jean-Louis Clerc, Genaki Zhang et Bent Ørsted pour leurs compétences et tout ce qu'ils m'ont appris.

Mes remerciements vont également à tous les membres de l'Institut Élie Cartan, et plus particulièrement les collègues de l'équipe *Groupes de Lie et Analyse Harmonique*, pour l'ambiance chaleureuse qui y règne.

Je ne peux pas finir mes remerciements, sans rendre hommage à mon épouse pour son encouragement et sa patience pour mes soirées et week-ends passés à l'iecn et mes séjours à l'étranger.

À Meriem, mon épouse, à Inès, Manel et Yanis

Table des matières

Liste des publications

[1] Semi–groupe de Lie associé à une algèbre de Jordan euclidienne. Thèse de Doctorat de l'Université Nancy 1 (1993).

[2] Réalisation des espaces symétriques de type Cayley. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **318** (1994), 425–428.

[3] Semi-groupe de Lie associé à un cône symétrique. *Ann. Inst. Fourier,* **45** (1995), 1–29.

[4] (avec Bent Ørsted) Function spaces on the Ol'shanskiĭ semigroup and the Gelfand and Gindikin program. *Ann. Ins. Fourier,* **46** (1996), 1–34.

[5] (avec Bent Ørsted) Espace de Hardy sur le semi-groupe métaplectique. *C.R. Acad. Sci. Paris,* **322** (1996), 113–116.

[6] (avec Bent Ørsted) Hardy spaces on two-sheeted covering semigroups. *J. of Lie Theory,* **7** (1997), 245–267.

[7] Contractions of angles in symmetric cones. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **38** (2002), 227–243.

[8] Jordan algebras, geometry of Hermitian symmetric spaces and non-commutative Hardy spaces. (70 pages) *Seminar on Mathematical Sciences,* **33**, Keio University, Yokohama, 2005.

[9] Application of Hilbert's projective metric on symmetric cones. *Acta Math. Sin.* **22** (2006), 1467–1472.

[10] (avec Genkai Zhang) Hua operators and Poisson transform for bounded symmetric domains. *J. Funct. Anal.* **236** (2006), 546–580.

[11] (avec Jean-Louis Clerc) Primitive du cocycle de Maslov généralisé. *Math. Ann.* **337** (2007), 91–138

[12] (avec Abdelhamid Boussejra) Characterization of the Poisson integrals for non-tube bounded symmetric domains. *J. Math. Pures Appl.* (2007) (10.1016/j.matpur.2007.01.004)

Introduction

Un espace hermitien symétrique X de type non compact est un espace symétrique $X = G/K$ de type non compact muni d'une structure complexe $G-$invariante. Tout espace hermitien symétrique de type non compact est biholomorphiquement équivalent à un domaine borné symétrique $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$, généralisant ainsi le modèle disque de Poincaré du plan hyperbolique. La frontière de Shilov $\mathcal{S}$ (ou frontière minimale) est une partie(1) du bord topologique $\partial\mathcal{D}$ de $\mathcal{D}$. La généralisation du modèle demi-plan n'est pas vraie pour n'importe quel espace hermitien symétrique, mais seulement pour une classe de ces espaces. À savoir, un espace hermitien symétrique X est de type tube s'il est biholomorphiquement équivalent à un domaine tube $V + i\Omega$, où V est un espace vectoriel réel et $\Omega \subset V$ est un cône ouvert. La différence entre être de type tube ou non se traduit notamment au niveau du système de racines et au niveau des propriétés que vérifie la frontière de Shilov $\mathcal{S}$ (2).

Il existe deux manières de traiter les domaines bornés symétriques. La première utilise la théorie des groupes de Lie semi-simples ; et c'est en utilisant cette approche que les faits basiques de la théorie ont été établis par Élie Cartan dans les années 30 et par Harish-Chandra dans les années 50. Des propriétés géométriques plus fines ont été démontrées dans les années 60 par Korányi et Wolf [**Kor-W**], [**W-Kor**].

La deuxième approche met en oeuvre la théorie des algèbres de Jordan et systèmes triples de Jordan. Elle est due essentiellement à Koecher et son école. Le cas de type tube a été traité dans [$\mathbf{Koe}_1$] et [**Br-Koe**], le cas général dans [$\mathbf{Koe}_2$]. Une étude complète des systèmes triples et paires de Jordan à été réalisée par Loos [$\mathbf{Lo}_2$], [$\mathbf{Lo}_3$] dans les années 70. Au milieu des années 90, Faraut et Korányi [**F-K**] ont fournit à la littérature une élégante présentation des algèbres de Jordan, cônes symétriques et domaines de type tube. Notons aussi les contributions (cas de dimension infinie inclut) de Kaup, McCrimmon et Upmeier [$\mathbf{Up}_1$] [$\mathbf{Up}_2$].

(1)c'est le plus petit fermé de $\overline{\mathcal{D}}$ dans lequel le principe du maximum est vrai

(2)Si $\mathcal{D}$ est de type tube, la frontière de Shilov est définie par des équations algébriques de degré 2 ($z\bar{z} = e$). Si $\mathcal{D}$ n'est pas de type tube, la frontière de Shilov n'est pas en général définie par des équations de degré 2 ; cependant les éléments de $\mathcal{S}$ satisfont toujours un système de degré 3 ($\{z\bar{z}z\} = z$).

L'approche "théorie de Jordan" et l'approche "théorie de Lie" sont équivalentes par la construction de Kantor-Koecher-Tits (voir une présentation très consistante utilisant les deux approches dans le livre de Satake [**Sa**]).

Dans cette introduction nous décrivons brièvement, dans un premier temps et en utilisant les deux approches, quelques aspects géométriques et analytiques des domaines bornés symétriques, des domaines de positivités et espaces symétriques causaux correspondants.

Nos premiers travaux sont pour l'essentiel consacrés à l'étude du semi-groupe de compressions d'un cône symétrique, et à l'étude de la structure causale que ce semi-groupe engendre sur un certain espace symétrique non-riemannien dit de type Cayley ([**1**], [**2**] et [**3**]). Ces espaces symétriques sont apparus antérieurement dans un contexte différent dans les travaux de Ólafsson et Ørsted ([**Óla**], [**Ó-Ø$_2$**]). Cependant, le contexte algèbres de Jordan sur lequel nous nous sommes basé est nouveau et apporte plusieurs interprétations originales, qui permettent de mettre en évidence de nouvelles propriétés intéressantes.

Plus précisément, soit $\mathcal{D} = G/K$ un espace hermitien symétrique isomorphe (via la transformation de Cayley c) au domaine tube $V + i\Omega$, où V est une algèbre de Jordan euclidienne et Ω le cône symétrique associé. Soit $G(\Omega)$ la composante neutre du groupe linéaire des automorphismes de Ω et $H = c^{-1} \circ G(\Omega) \circ c$.
Le premier résultat important que nous avons obtenu (cf. [**1**] et [**2**]) réside dans le fait que $\mathcal{M} = G/H$ est un espace symétrique ordonné de type Cayley et que tout espace de type Cayley est ainsi obtenu. Le groupe G opère sur la frontière de Shilov $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$, et par conséquent G a une action diagonale sur $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Nous avons montré que $\mathcal{M}$ est une orbite ouverte dense dans $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Plus précisément, $\mathcal{M}$ se réalise comme l'ensemble $\mathcal{M} \simeq \{(z, w) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S} \ : \ \mathbf{det}(z - w) \neq 0\}$ des points transverses de $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$. Cette réalisation des espaces de type Cayley a donné lieu à de nombreuses applications analytiques et géométriques, voir par exemple, [**Bet-Ól**], [**Ch**], [**F**], [**Kan**], [**Ó-Ø$_1$**].

Nous avons ensuite caractérisé le semi-groupe causal $S_{\succcurlyeq} = \{g \in G \ : \ g \cdot \mathbf{o} \succcurlyeq \mathbf{o}\}$, associé à l'ordre de $\mathcal{M}$, $\mathbf{o}$ étant un point base de $\mathcal{M}$. Pour cela, nous avons associé au cône symétrique Ω un semi-groupe naturel, composé de transformations conformes qui le compressent,

$S_\Omega = \{g \in G \ : \ g \cdot \Omega \subset \Omega\}$. Une étude détaillée de ce semi-groupe a été réalisée dans [**1**] et [**3**]. En particulier, nous avons montré une décomposition à la Olshanskiĭ, $S_\Omega = G(\Omega)\exp(C)$ où C est un cône régulier de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$. Nous avons aussi montré une décomposition triple à la Harish-Chandra $S_\Omega = S_\Omega^+ G(\Omega) S_\Omega^-$ où S_Ω^+ et S_Ω^- sont deux semi-groupes abéliens isomorphes à $\overline{\Omega}$. En utilisant la première décomposition, nous montrons d'une part, que S_Ω coïncide avec le semi-groupe causal $S_{\succcurlyeq}$ et d'autre part, que S_Ω est une forme réelle du semi-groupe holomorphe d'Olshanskiĭ $S_{\mathcal{D}} = \{g \in G_{\mathbb{C}} \ : \ g \cdot \mathcal{D} \subset \mathcal{D}\}$. D'autres part, la deuxième décomposition nous permet de démontrer que les éléments de S_Ω sont des contractions pour la métrique riemannienne $G(\Omega)-$invariante de Ω. Ces résultats généralisent une étude (probabiliste) faite par Bougerol [**Bou**] dans le cas où $V = Sym(r, \mathbb{R})$.
La décomposition triple de S_Ω a été utilisée pour montrer des propriétés de contractions des angles [**7**], et également dans d'autres contextes, voir [**L-L**], [$\mathbf{L}_1$] et [$\mathbf{L}_2$].

L'article [**7**] traite un problème de contractions fines. D'abord, nous avons donné une formule explicite de la distance riemannienne de Ω, $\delta(x, y) = (\sum_{k=1}^r \log^2 \lambda_k(x, y))^{1/2}$, où les $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_r(x, y)$ sont certaines valeurs spectrales qui dépendent de x et y, r étant le rang du domaine $\mathcal{D}$. Dans le cas du cône des matrices $r \times r$ symétriques définies positives, cette formule a été montré par C.L. Siegel [**S**], voir aussi Maaß [**Ma**]. Nous avons ensuite montré que les angles $\mu_k(x, y) := \log^2 \lambda_k(x, y)$ forment un système complet d'invariants et que les éléments du semi-groupe S_Ω sont des contractions pour ces angles, et par conséquent des contractions pour la distance δ. Ceci généralise certains résultats de Bougerol [**Bou**] dans le cas $V = Sym(r, \mathbb{R})$ et Neretin [$\mathbf{Ner}_1$], [$\mathbf{Ner}_2$] dans le cas $V = Herm(r, \mathbb{C})$.

Dans l'article [**9**] nous avons étudié la métrique projective de Hilbert d'un cône symétrique Ω. Il s'agit d'une métrique qui a été introduite par Hilbert [**Hil**] et qui joue un rôle très important dans différentes branches concernant l'existence et l'unicité de solutions (points fixes), voir G. Birkhoff [**Bir**]. Nous avons montré que cette métrique s'écrit d'une façon très simple dans le cas d'un cône symétrique Ω, en utilisant la méthode de Jordan : $d(x, y) = \log \frac{\lambda_M(x,y)}{\lambda_m(x,y)}$, où $\lambda_M(x, y)$ (resp. $\lambda_m(x, y)$) est la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de $P(y^{-1/2})x$, P étant la représentation quadratique de l'algèbre de Jordan V. En exemple d'application, nous avons montré que pour tout élément $g \in G(\Omega)$, et pour tout réel p tel que $|p| \geq 1$, il existe un unique élément $x \in \Omega$ tel que $g(x) = x^p$. Il s'agit d'une généralisation du théorème de Bushell [**Bu**] : *pour tout entier $k \geq 1$, et pour toute matrice $r \times r$ inversible T, il existe une unique matrice $r \times r$ symétrique définie positive A, telle que $T'AT = A^2$.* Remarquons que si T n'est pas symétrique ou orthogonale, l'existence et l'unicité de A n'est pas un problème élémentaire !

Un autre volet de notre travail est consacré à l'étude du prolongement de la série discrète holomorphe des groupes de Lie hermitiens semi-simples. En 1977, Gelfand et Gindikin ont proposé, dans un article célèbre [**G-G**], une nouvelle approche de la formule de Plancherel pour un groupe de Lie semi-simple. L'idée est de considérer les fonctions sur un groupe de Lie semi-simple G comme des valeurs au bord de fonctions holomorphes sur un domaine (de Stein) de $G_{\mathbb{C}}$. C'est ce qu'on appelle depuis programme de Gelfand-Gindikin. Ces derniers ont introduit et étudié dans cet article un espace de Hardy de fonctions holomorphes sur ces domaines, ce qui a constitué une première étape dans leur programme. Dans le cas d'un groupe de Lie simple hermitien, ce programme a été mené par Stanton [**Stan**] et Olshanskiĭ [**Ols**$_3$] dans les années 80. Ces derniers ont montré que toute représentation de G (sous certaines conditions) se prolonge holomorphiquement à un semi-groupe de Lie, $G\exp(iC) \subset G_{\mathbb{C}}$, associé à un cône régulier C de l'algèbre de Lie de G. Plus tard, Hilgert, Ólafsson et Ørsted [**H-Ó-Ø**] ont donné une généralisation aux espaces symétriques causaux.
Dans l'article [**4**], en collaboration avec B. Ørsted, nous avons étudié le prolongement holomorphe de la série discrète holomorphe du groupe $SU(2,2)$. Nous avons en particulier déterminé la décomposition de la restriction au sous-groupe non-compact $S(U(1,1) \times U(1,1))$ d'une représentation de cette série discrète holomorphe. Ceci nous a permit de montrer que la représentation de $S(U(1,1) \times U(1,1))$ dans l'espace de Hardy de $U(1,1)$, introduit par Gelfand et Gindikin, n'est pas obtenue par restriction d'une représentation de la série discrète holomorphe de $SU(2,2)$. Cette réponse à une question ouverte depuis plusieurs années est une contribution importante au programme de Gelfand-Gindikin, et infirme un résultat de Gindikin [**G**]. Notre méthode repose sur la construction d'une transformation de Cayley qui envoie le semi-groupe

de Lie de $G_{\mathbb{C}}$, dont $U(1,1)$ est la frontière de Shilov, dans un domaine tube associé à une algèbre de Jordan.

Nous avons par la suite généralisé l'étude précédente à d'autres semi-groupes de Lie ([**5**], [**6**]). Plus précisément, soit G un groupe de Lie simple hermitien, C un cône régulier dans $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ et $\Gamma(C) = G\exp(iC)$ le semi-groupe associé.
Nous avons étudié l'espace de Hardy $H^2(C)$ du semi-groupe $\Gamma(C)$ via un espace de Hardy classique $H^2(T_\Omega)$ où $T_\Omega = V + i\Omega$ est un tube au dessus d'un cône symétrique Ω d'une algèbre de Jordan euclidienne V.
La méthode que nous avons utilisé consiste là aussi à construire une transformation de Cayley qui envoie un ouvert dense de T_Ω dans $\Gamma(C)^\circ$ et qui permet d'établir un opérateur "de Cayley" de $H^2(T_\Omega)$ dans $H^2(\Gamma(C))$.
Soit $G^\flat$ le groupe conforme de V. Alors $G \times G$ s'injecte dans $G^\flat$ et $T_\Omega \simeq G^\flat/K^\flat$ où $K^\flat$ est un sous-groupe compact maximal de $G^\flat$. Nous avons traité en détail les cas suivants de $(G, G^\flat)$:

$$(U(p,q), SU(p,q)),\ (Sp(r,\mathbb{R}),\ Sp(2r,\mathbb{R})),\ (SO^*(2l), SO^*(4l)).$$

Nous avons montré que l'espace de Hardy classique s'injecte strictement dans l'espace de Hardy du revêtement à deux feuillets de $\Gamma(C)$.
Dans le cas $(Sp(r,\mathbb{R}), Sp(2r,\mathbb{R}))$ nous avons caractérisé complètement l'image et nous avons calculé son noyau reproduisant.
Dans les trois cas nous avons montré que l'opérateur "de Cayley" entrelace l'action de $G\times G$ sur l'espace de Hardy classique et la représentation régulière sur l'espace de Hardy du semi-groupe de Lie. Une construction explicite du revêtement à deux feuillets du semi-groupe $\Gamma(C)$ à été donnée dans [**6**]. Nos résultats ont été ensuite généralisés aux espaces symétrique de type Cayley par Ólafsson et Ørsted [**Ó-Ø$_1$**], puis aux espaces de Makarevič par Ben Saïd [**Ben**] et par Bertram et Hilgert [**Ber-H**].

La théorie de Jordan s'est avérée très utile pour introduire de nouveaux invariants géométriques des espaces hermitiens symétriques, longtemps connus dans des cas très particuliers. C'est le cas par exemple de l'indice de Maslov, de l'indice de Souriau, de l'indice d'Arnold-Leray et du nombre de rotations de Poincaré, cf. [**A$_1$**], [**B-G**], [**C-L-M**], [**deG**], [**G–S**], [**Le**], [**L-V**], [**Sou**].
Soit $\mathcal{D} = G/K$ un espace hermitien symétrique de type tube et $\mathcal{S}$ sa frontière de Shilov. Dans [**C$_2$**], J.-L. Clerc associe à tout triplet

$(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ un entier $\imath(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$. Il est invariant sous l'action de G, antisymétrique et satisfait une relation de cocycle. Lorsque les éléments $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ sont deux à deux transverses, l'entier $\iota(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ coïncide avec l'indice de Maslov construit par Clerc et Ørsted auparavant dans [**C-Ø**$_1$]. Dans ce cas, cet entier paramétrise les orbites de l'action de G sur l'ensemble des triplets deux à deux transverses de $\mathcal{S}$, généralisant ainsi l'indice de Maslov, introduit par Kashiwara dans le cas classique, c'est-à-dire, lorsque $\mathcal{S}$ est la variété lagrangienne et G le groupe symplectique.
Dans [**11**], en collaboration avec J.-L. Clerc, nous avons fait le lien avec des constructions dues à Arnold, Leray, Maslov et Souriau dans le cas classique. Plus précisément, nous avons trouvé une primitive du cocycle de Maslov $\imath$, c'est-à-dire une fonction $m:\widetilde{\mathcal{S}}\times\widetilde{\mathcal{S}}\to\mathbb{Z}$, antisymétrique, invariante par un revêtement Γ du groupe G et telle que $\imath(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)=m(\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2)+m(\widetilde{\sigma}_2,\widetilde{\sigma}_3)+m(\widetilde{\sigma}_3,\widetilde{\sigma}_1)$, pour tout $\widetilde{\sigma}_1,\widetilde{\sigma}_2,\widetilde{\sigma}_3$ dans le revêtement universel $\widetilde{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ de projections respectives $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$. Cette primitive généralise celle introduite par Souriau dans le cas classique (de la variété lagrangienne). Comme variante, nous avons introduit l'indice d'inertie d'un triplet de points de $\mathcal{S}$. Cet indice est encore invariant par G et possède une propriété de cocycle (mais pas antisymétrique). Nous avons également trouvé une primitive de ce cocycle. Celle-ci généralise l'indice d'Arnold-Leray sur le revêtement universel de la variété lagrangienne. Nous avons utilisé cette primitive pour construire un invariant par conjugaisons qui généralise dans le cas classique, le nombre de rotations de Poincaré.
Des constructions explicites du revêtement universel $\widetilde{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$, du revêtement Γ de G et d'une action de groupe Γ sur $\widetilde{\mathcal{S}}$ sont aussi données dans [**11**].

Soit G/K un espace symétrique riemannien de type non-compact. Dans un article célèbre [**K et** *al.*], M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima et M. Tanaka ont montré l'un des plus beau résultat en analyse harmonique connu sous le nom de la conjecture de Helgason : une fonction sur G/K est une fonction propre de tous les opérateurs différentiels $G-$invariants de G/K, si et seulement si, elle est transformation de Poisson $\mathcal{P}_\lambda f$ d'une hyperfonction sur la frontière maximale de G/K. Se posait alors le problème de caractériser les intégrales de Poisson associées aux autres frontières de G/K. Lorsque

$G/K = \mathcal{D}$ est un espace hermitien symétrique (classique) de type tube, Hua [**Hu**$_2$] a définit la transformation de Poisson sur la frontière minimale (de Shilov) de G/K. Il a montré dans le cas des domaines de type $\mathbf{I}_{n,n}$ qu'une intégrale de Poisson sur le bord de Shilov est annulée par un opérateur du second ordre $\mathcal{H}$, qu'on appelle depuis opérateur de Hua. La définition de la transformation de Poisson sur la frontière de Shilov a été généralisé à tout domaine symétrique borné par Korányi [**Kor**$_2$]. Lorsque $\mathcal{D}$ est un domaine de type tube, Johnson et Korányi [**J-K**] –généralisant les résultats de Korányi et Malliavin [**Kor-M**] et Johnson [**Joh**$_1$], [**Joh**$_2$]– ont caractérisé les intégrales de Poisson $\mathcal{P}_1 f$ du bord de Shilov par un opérateur (système) de Hua du second ordre généralisé $\mathcal{H}$. Lassalle [**Las**] a montré qu'il était possible de remplacer le système de Hua $\mathcal{H}$ par un système de Hua optimal (comportant autant d'équations que la dimension réelle de la frontière de Shilov). Shimeno [**Sh**$_1$] a montré une généralisation de la caractérisation de Johnson et Korányi au cas non trivial $\mathcal{P}_s$ sous certaines conditions sur un paramètre $s \in \mathbb{C}$. Dans le cas d'un domaine borné symétrique quelconque, Berline et Vergne [**B-V**] ont montré qu'une fonction harmonique sur $\mathcal{D}$ est une transformation de Poisson $\mathcal{P}_1 f$ d'une hyperfonction sur la frontière de Shilov si et seulement si elle est annulée par un opérateur de Hua du troisième ordre.
Dans [**10**], en collaboration avec Genkai Zhang, nous avons généralisé les résultats de Berline et Vergne au cas non trivial. Nous avons caractérisé l'image de la transformation de Poisson généralisée $\mathcal{P}_s$ à l'aide d'opérateurs de Hua du troisième ordre $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ (différents de celui de Berline et Vergne). Dans le cas des domaines non tube de type **I**, la caractérisation se fait à l'aide d'une variante de l'opérateur de Hua de second ordre $\mathcal{H}$. Nous avons donné, en particulier, une définition géométrique des opérateurs $\mathcal{H}$, $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$. Notre méthode utilise essentiellement la théorie des systèmes triples de Jordan.

Après cette étude fonctionnelle de la transformation de Poisson $\mathcal{P}_s$, nous avons caractérisé, en collaboration avec A. Boussejra [**12**], l'image par $\mathcal{P}_s$ de l'espace $L^p(\mathcal{S})$ pour $1 < p < \infty$. Nous avons montré que cette image est l'espace des fonctions propres de tous les opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{D}$, satisfaisant le système de Hua et la condition de type

Hardy suivante

$$\|f\|_{s,p} := \sup_{t>0} e^{-t(\Re(s)r-n)}(\int_K |f(ka_t)|^p dk)^{1/p} < \infty.$$

Un théorème de type Fatou et une formule d'inversion de la transformation de Poisson sont nécessaires pour démontrer ce résultat. Notons que plusieurs travaux ont été consacrés à la caractérisation des intégrales de Poisson L^p sur la frontière maximale, voir par exemple [**B et** *al.*], [**He**$_4$], [**Kor**$_1$], [**Mi**], [**Sj**], [**Sto**], etc. ...

1. Espaces symétriques de type Cayley

1.1. Structures causales. — Soit $\mathcal{M}$ une variété différentielle. On note $T_x\mathcal{M}$ l'espace tangent à $\mathcal{M}$ au point $x \in \mathcal{M}$. Une structure causale sur $\mathcal{M}$ est la donnée d'un champ de cônes réguliers $x \in \mathcal{M} \mapsto C_x \subset T_x\mathcal{M}$. Le cône C_x est supposé convexe, fermé, pointu ($C_x \cap -C_x = \{0\}$), et d'intérieur non-vide (i.e., générateur $C_x - C_x = T_x\mathcal{M}$). De plus C_x dépend différentiablement de x. Une courbe $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{M}$ de classe C^1 est causale (resp. anti-causale), si, pour tout t, $\dot\gamma(t) \in C_{\gamma(t)}$ (resp. $\dot\gamma(t) \in -C_{\gamma(t)}$). S'il n'existe pas de courbe causale fermée non triviale la structure causale est dite globale. Elle définit alors un ordre partiel sur $\mathcal{M}$ de la manière suivante : $x \preccurlyeq y$ s'il existe une courbe causale allant de x à y. Pour x, y dans $\mathcal{M}$, on définit l'intervalle $[x, y] = \{z \in \mathcal{M} \ : \ x \preccurlyeq z \preccurlyeq y\}$. En général ces intervalles ne sont pas fermés. La variété causale est globalement hyperbolique si tous les intervalles sont compacts.
Supposons que $\mathcal{M}$ soit un espace homogène, $\mathcal{M} = G/H$, où G est un groupe de Lie connexe et H un sous-groupe fermé de G. La structure causale est G-invariante si $C_{g(x)} = Dg(x)(C_x)$, pour tout $g \in G$ et tout $x \in \mathcal{M}$. Soit $x_\circ = 1H$ un point base de $\mathcal{M}$. Une structure causale G-invariante sur $\mathcal{M}$ est complètement déterminée par la donnée du cône $C_{x_\circ}$, dans $T_{x_\circ}(\mathcal{M})$, invariant par l'action de H. On associe à une structure causale globale sur $\mathcal{M}$, le semi-groupe causal $S_\preccurlyeq = \{g \in G \ : \ x_\circ \preccurlyeq g \cdot x_\circ\}$. On montre que $S_\preccurlyeq$ est un semi-groupe fermé et que $S_\preccurlyeq \cap S_\preccurlyeq^{-1} = H$. Si x est un autre point base de $\mathcal{M}$, alors il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x_\circ = x$. Le semi-groupe causal correspondant $S'_\preccurlyeq = \{g \in G \ : \ x \preccurlyeq g \cdot x\}$ vérifie donc $S'_\preccurlyeq = gS_\preccurlyeq g^{-1}$. Ces semi-groupes ont été étudiés d'une fçon générale par Lawson [**Law**] dans le cadre d'un espace homogène, voir aussi [**H-H-L**], [**H-N**] et [**H-Ó**].

1.2. Espaces symétriques causaux. — Les espaces symétriques causaux sont dues à Ólafsson, [**Óla**] voir aussi [**Ó-Ø**$_2$] et [**H-Ó**]. Un cas particulier de ces espaces (cas groupe : espaces symétriques de type Ol'shanskiĭ) à été étudié auparavant par Ol'shanskiĭ [**Ols**$_1$].

Supposons que $\mathcal{M}$ soit un espace symétrique : il existe un automorphisme involutif σ de G tel que $(G^\sigma)_\circ \subset H \subset G^\sigma$, où $G^\sigma = \{g \in G \ : \ \sigma(g) = g\}$ et $(G^\sigma)_\circ$ est la composante connexe de l'élément neutre dans G^σ. Soient $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H. Alors $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \sigma(X) = X\}$ (nous notons également σ la différentielle de l'involution σ). Posons $\mathfrak{q} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \sigma(X) = -X\}$. L'espace tangent au point $x_\circ$ à $\mathcal{M}$ s'identifie alors à $\mathfrak{q}$. Ainsi une structure causale invariante sur $\mathcal{M}$ est déterminée par un cône causal C dans $\mathfrak{q}$.

Supposons G non compact, semi-simple et de centre fini. D'après [**Mat**], il existe une involution de Cartan θ qui commute avec σ, $\sigma \circ \theta = \theta \circ \sigma$. Soit K le sous-groupe compact maximal correspondant. Son algèbre de Lie est donnée par $\mathfrak{k} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \theta(X) = X\}$. Posons $\mathfrak{p} = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ \theta(X) = -X\}$.

Dans la suite, nous supposons que $\mathcal{M}$ est irréductible, i.e., il n'existe pas d'idéal non-trivial dans $\mathfrak{g}$ invariant par σ. Soit $\mathrm{Cone}_H(\mathfrak{q})$ l'ensemble des cônes réguliers $\mathrm{Ad}(H)-$invariants dans $\mathfrak{q}$. On dit que l'espace symétrique $\mathcal{M} = G/H$ est :

compactement causal (CC), s'il existe $C \in \mathrm{Cone}_H(\mathfrak{q})$ tel que $C^\circ \cap \mathfrak{k} \neq \emptyset$.

non compactement causal (NCC), s'il existe $C \in \mathrm{Cone}_H(\mathfrak{q})$ tel que $C^\circ \cap \mathfrak{p} \neq \emptyset$.

On appelle espace symétrique causale tout espace (CC) ou (NCC). Si $\mathcal{M}$ est (NCC) sa structure causale est globale, et définit un ordre sur $\mathcal{M}$ pour lequel $\mathcal{M}$ est globalement hyperbolique. On dit que $\mathcal{M}$ est un espace symétrique ordonné. Les espaces causaux ont été classifiés par Ólafsson, voir [**H-Ó**] pour la liste complète.

1.3. Espaces symétriques de type Cayley. — L'espace $\mathcal{M} = G/H$ est appelé espace symétrique de type Cayley s'il est à la fois (CC) et (NCC). On montre que dans ce cas (cf. [**H-Ó**, Theorem 1.3.8, Theorem 1.3.11]) l'espace symétrique $\mathcal{D} = G/K$ est un domaine borné symétrique de type tube. Toutefois, aucune caractérisation des espaces symétriques de type Cayley en terme d'algèbres de Jordan n'était connue avant notre travail de thèse. Nous allons montrer que la théorie de Jordan s'applique d'une façon naturelle pour décrire ces espaces symétriques et pour donner plusieurs interprétations au semi-groupe causal associé. Par soucis de clarté de l'exposé, nous allons fixer certaines notations et rappeler les notions de bases concernant cette théorie. Nous renvoyons le lecteur à l'excellent livre sur le sujet [**F-K**] de Faraut et Koranyi.

Soit V une algèbre de Jordan euclidienne simple d'élément unité e, de dimension n et de rang r. Soit **det** le déterminant de V. Il s'agit d'une fonction polynomiale homogène de degré r. La trace de V, notée **tr**, est une forme linéaire sur V. Par complexification, on obtient une algèbre de Jordan complexe $V_{\mathbb{C}}$. Les extensions holomorphes de **det** et **tr** à $V_{\mathbb{C}}$ seront encore notées **det** et **tr** respectivement.
Soit

$$\mathcal{S} = \{\sigma \in V_{\mathbb{C}} \mid \overline{\sigma} = \sigma^{-1}\}.$$

Ceci est une sous-variété compacte connexe de $V_{\mathbb{C}}$. Elle vérifie $\mathcal{S} = \exp(iV)$. Si σ est un élément de $\mathcal{S}$, il existe un repère de Jordan[(3)] $(c_j)_{1\leq j\leq r}$ de V et des nombres complexes $\zeta_1, \ldots, \zeta_r$ de module 1, tels que $\sigma = \sum_{j=1}^{r} \zeta_j c_j$ (voir [**F-K**, Proposition X.2.3]).

On note $Str(V_{\mathbb{C}})$ le groupe de structure de l'algèbre de Jordan complexe $V_{\mathbb{C}}$. Considérons $G(\mathcal{S}) = \{g \in GL(V_{\mathbb{C}}) \mid g(\mathcal{S}) = \mathcal{S}\}$. Alors $G(\mathcal{S}) = Str(V_{\mathbb{C}}) \cap U(V_{\mathbb{C}})$, où $U(V_{\mathbb{C}})$ désigne le groupe unitaire de $V_{\mathbb{C}}$ muni de la forme hermitienne de $V_{\mathbb{C}}$. Ce groupe opère transitivement sur $\mathcal{S}$. Le stabilisateur de e dans $G(\mathcal{S})$ coïncide avec le groupe $Aut(V)$ des automorphismes de l'algèbre de Jordan V (on étend l'action des éléments de $Aut(V)$ de manière $\mathbb{C}-$linéaire à $V_{\mathbb{C}}$). L'involution $\eta(z) = \bar{z}$ conserve $\mathcal{S}$, et admet e comme point fixe isolé. L'involution correspondante de $G(\mathcal{S})$ donnée par $g \mapsto \eta \circ g \circ \eta$ a pour points fixes exactement $G(\mathcal{S})_e = Aut(V)$. En d'autres termes, muni de la métrique induite par le produit hermitien de $V_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{S}$ est un espace riemannien symétrique compact, isomorphe à $G(\mathcal{S})/Aut(V)$.
Comme $G(\mathcal{S})$ n'est pas nécessairement connexe, nous préférons introduire sa composante connexe neutre U, qui est encore transitive sur $\mathcal{S}$, et on désigne par U_e le stabilisateur dans U de l'élément e. On a $Aut(V)^{\circ} \subset U_e \subset Aut(V)$ et $\mathcal{S} \simeq U/U_e$.

Soit $(c_j)_{1\leq j\leq r}$ un repère de Jordan. Pour tout élément $z \in V_{\mathbb{C}}$, il existe $u \in U$ et il existe des scalaires $0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_r$ uniques tels que $z = u\Big(\sum_{j=1}^{r} \lambda_j c_j\Big)$. La norme spectrale de z est définie par $|z| = \sup \lambda_j$ et la fonction $z \mapsto |z|$ est une norme sur $V_{\mathbb{C}}$ invariante par U. Soit $\mathcal{D}$ la boule unité ouverte de $V_{\mathbb{C}}$ pour la norme spectrale

$$\mathcal{D} = \{z \in V_{\mathbb{C}} \ , \ |z| < 1\}.$$

(3) Un repère de Jordan est système complet d'idempotents primitifs deux à deux orthogonaux

Il est connu (voir [**F-K**, Theorem X.4.6]) que $\mathcal{D}$ est un domaine borné symétrique de type tube dont la frontière de Shilov est $\mathcal{S}$.

Le domaine $\mathcal{D}$ peut être réalisé comme un domaine tube au dessus d'un cône ouvert de V. Plus précisément, l'ensemble des carrés de V est un cône convexe fermé et son intérieur Ω est un cône ouvert, convexe, propre, et auto-dual. C'est le cône symétrique associé à V.
Le groupe $G(\Omega)$ des transformations linéaires de V qui préservent Ω est un groupe de Lie réductif qui agit transitivement sur Ω. Soit G_0 sa composante connexe neutre. Le stabilisateur K_0 de l'identité e dans G_0 est un sous-groupe compact maximal de G_0. C'est la composante connexe neutre du groupe $Aut(V)$ et on a $K_0 = G_0 \cap O(V)$, où $O(V)$ est le groupe orthogonal de V.

Soit T_Ω le domaine tube dans $V_\mathbb{C}$ de base Ω

$$T_\Omega = V + i\Omega = \{z = x + iy \mid x \in V,\ y \in \Omega\}.$$

La transformation de Cayley c et son inverse p sont données par $p(z) = (z - ie)(z + ie)^{-1}$ et $c(w) = i(e + w)(e - w)^{-1}$ et on peut montrer (voir [**F-K**, Proposition X.2.3, Theorem X.4.3]), que l'application p induit un isomorphisme biholomorphe de T_Ω sur $\mathcal{D}$.

Les deux domaines $\mathcal{D}$ et T_Ω sont donc holomorphiquement équivalents. T_Ω est la réalisation non bornée de $\mathcal{D}$ et on peut voir V comme sa frontière de Shilov ; son image par p est un ouvert dense dans $\mathcal{S}$.

Soit G la composante connexe neutre du groupe $G(\mathcal{D})$ des automorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$. C'est un groupe de Lie semi-simple et le stabilisateur de 0 dans G est un sous-groupe compact maximal de G et coïncide avec le groupe U.

Soit G^c la composante connexe neutre du groupe $G(T_\Omega)$ des automorphismes holomorphes de T_Ω. Les éléments du groupe G_0 opèrent sur T_Ω par extension $\mathbb{C}-$linéaire et on peut considérer G_0 comme un sous-groupe de G^c. En fait G^c est engendré par G_0, le sous-groupe abélien N^+ des translations et par l'inversion $j : z \mapsto -z^{-1}$. On a $G^c = c \circ G \circ c^{-1}$. Soit N^- le sous-groupe abélien $j \circ N^+ \circ j$. Le produit semi-direct $P = G_0 \ltimes N^-$ est un sous-groupe parabolique maximal de G^c. L'espace homogène $\mathcal{X} = G^c/P$ est donc une variété (réelle) compacte contenant V comme un sous-ensemble ouvert dense, le plongement de V dans $\mathcal{X}$ étant donné par $V \to \mathcal{X} : u \mapsto t_u P$. La variété $\mathcal{X}$ est la compactification conforme de V (voir [**Ber**]), elle est isomorphe de la frontière de Shilov $\mathcal{S}$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et $\mathfrak{g}^c$ l'algèbre de Lie de G^c. L'algèbre de Lie de G_0 est notée $\mathfrak{g}_0$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_0$ de K_0 est l'ensemble des dérivations $Der(V)$ de V. Soit $\mathfrak{p}_0 = \{L(v) \ : \ v \in V\}$, où $L(v) : x \mapsto vx$. Alors la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_0$ est donnée par $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$. L'algèbre de Lie de U est $\mathfrak{u} = \mathfrak{k}_0 \oplus i\mathfrak{p}_0$. Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie engendré par $Str(V_{\mathbb{C}})$, les translations complexes de $V_{\mathbb{C}}$ et j. Alors G et G^c sont deux formes réelles de $G_{\mathbb{C}}$. Le groupe U est lui, une forme réelle compacte de $G_{\mathbb{C}}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de $G_{\mathbb{C}}$ est l'ensemble des champs de vecteurs X sur $V_{\mathbb{C}}$ de la forme $X(z) = u + Tz - P(z)v$, où $u, v \in V_{\mathbb{C}}$ et T est un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{str}(V_{\mathbb{C}})$ de $Str(V_{\mathbb{C}})$. Notons que l'algèbre de Lie $\mathfrak{str}(V_{\mathbb{C}})$ coïncide avec $(\mathfrak{g}_0)_{\mathbb{C}}$, la complexifiée de l'algèbre de Lie de G_0. La formule du crochet de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ a été établie par Koecher. Nous n'avons pas besoin de son expression explicite et nous renvoyons le lecteur intéressé à **[F-K]** ou **[Sa]** pour plus de détails. On peut identifier un champs de vecteur $X(z) = u + Tz - P(z)v$ de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ au triplet $(u, T, v) \in V_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{str}(V_{\mathbb{C}}) \times V_{\mathbb{C}}$. Par conséquent $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \simeq V_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{str}(V_{\mathbb{C}}) \times V_{\mathbb{C}}$. En utilisant cette identification on a $\mathfrak{g}_0 = \{(u, T, u) \ , \ u \in V, T \in \mathfrak{k}_0\} \simeq V \times \mathfrak{k}_0 \times V$, $\mathfrak{g}^c = \{(u, T, v) \ , \ u, v \in V, T \in \mathfrak{g}_0\} \simeq V \times \mathfrak{g}_0 \times V$, $\mathfrak{g} = \{(w, T, \bar{w}) \ , \ w \in V_{\mathbb{C}}, T \in \mathfrak{u}\}$ et $\mathfrak{u} = \{(u, T, -u) \ , \ u \in V, T \in \mathfrak{k}_0\}$. Soit $X_0 = (0, I, 0)$, alors $\mathrm{ad}(X_0)$ admet $1, 0, -1$ comme valeurs propres. Les sous-espaces propres correspondants sont $\mathfrak{g}^c_1 = \{(u, 0, 0) \ , \ u \in V\} \simeq V$, $\mathfrak{g}^c_0 = \{(0, T, 0) \ , \ T \in \mathfrak{g}_0\} \simeq \mathfrak{g}_0$ et $\mathfrak{g}^c_{-1} = \{(0, 0, v) \ , \ v \in V\} \simeq V$. La décomposition suivante $\mathfrak{g}^c = \mathfrak{g}^c_1 + \mathfrak{g}^c_0 + \mathfrak{g}^c_{-1}$ est connue sous le nom de décomposition de Kantor-Koecher-Tits de $\mathfrak{g}^c$.

Considérons maintenant les involutions de G^c suivantes $\sigma^c(g) = (-j) \circ g \circ (-j)$ et $\theta^c(g) = j \circ g \circ j$ et gardons les mêmes notations pour les involutions correspondantes de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^c$. Si $X = (u, T, v) \in \mathfrak{g}^c$, alors $\theta^c(X) = (v, -T^*, u)$ et $\sigma^c(X) = (-u, -T^*, -v)$. Il est démontré dans **[1]**, **[2]**, **[3]** que θ^c est une involution de Cartan de G^c, qui commute à σ^c. De manière analogue on peut considérer les involutions de G, $\sigma(g) = \nu \circ g \circ v$ et $\theta(g) = (-\nu) \circ g \circ (-\nu)$ où $\nu(z) = \bar{z}$ et garder là aussi les mêmes notations pour les involutions dérivées. Si $X = (w, T, \bar{w}) \in \mathfrak{g}$, alors $\sigma(X) = (\bar{w}, \bar{T}, w)$ et $\theta(X) = (-w, -T, -\bar{w})$. On montre également que θ et une involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ qui commute à σ.
Soit τ la transformation de Cayley (élément de G^c) donnée par $\tau(z) = (e+z)(e-z)^{-1}$. Remarquons que $c(z) = i\tau(z)$ et que pour tout élément $g \in G_0$, $c^{-1} \circ g \circ c = \tau \circ (g^*)^{-1} \circ \tau^{-1}$. Puisque le groupe G_0 est réductif,

on a $c^{-1}\circ G_0\circ c=\tau\circ G_0\circ\tau^{-1}$. Notons $H=G^\sigma$ et $H^c=(G^c)^{\sigma^c}$. Le théorème suivant résume plusieurs résultats.

Théorème 1.1 **([1], [2], [3])**. — 1. *$H=c^{-1}\circ G_0\circ c$ et $H^c=\tau\circ G_0\circ\tau^{-1}$.*

2. *Les deux sous-groupes coïncident et on a $H=H^c=G\cap G^c$.*
3. *L'espace symétrique $\mathcal{M}=G/H\simeq G^c/H^c$ est un espace symétrique causal de type Cayley et tout espace de type Cayley est obtenu ainsi.*

Plus précisément, on peut montrer que $\mathfrak{h}^c=\{(u,T,u)\ ;\ u\in V,T\in\mathfrak{k}_0\}$, $\mathfrak{q}^c=\{(u,L(v),-u)\ ;\ u,v\in V\}$, $\mathfrak{k}^c=\{(u,T,-u)\ ;\ u\in V,T\in\mathfrak{k}_0\}$ et $\mathfrak{p}^c=\{(u,L(v),u)\ ;\ u,v\in V\}$. Si on considère les cônes convexes de $\mathfrak{q}^c$, $C_1=\{(u,2L(v),-u)\ ;\ (u+v)\in-\overline{\Omega},(u-v)\in\overline{\Omega}\}$ et $C_2=\{(u,2L(v),-u)\ ;\ (u+v)\in\overline{\Omega},(u-v)\in\overline{\Omega}\}$. Alors ils sont tous les deux $\mathrm{Ad}(H^c)-$invariants, réguliers et isomorphes à $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$. De plus $C_1\cap\mathfrak{p}^c\neq\emptyset$, $C_1\cap\mathfrak{k}^c=\{0\}$ et $C_2\cap\mathfrak{k}^c\neq\emptyset$, $C_1\cap\mathfrak{p}^c=\{0\}$, de sorte que C_1 (respectivement C_2) définisse une structure non-compactement causale (respectivement compactement causale) sur G^c/H^c.

On dira que deux points $z,w\in V_{\mathbb{C}}$ sont transverses et on écrit $z\top w$ si et seulement si $\mathbf{det}(z-w)\neq0$. On introduit l'ensemble des paires transverses de $\mathcal{S}^2$,

$$\mathcal{S}^2_\top=\{(z,w)\in\mathcal{S}^2\ :\ \mathbf{det}(z-w)\neq0\}.$$

Rappelons que le groupe G opère diagonalement sur $\mathcal{S}^2$.

Théorème 1.2 **([1], [2])**. — *Le groupe G opère transitivement sur l'ensemble des paires transverses $\mathcal{S}^2_\top$. Le stabilisateur de $(e,-e)\in\mathcal{S}^2_\top$ dans G est le groupe $H=c^{-1}\circ G_0\circ c$.*

Il est alors possible d'en déduire que l'espace symétrique G/H est $G-$équivariant à $\mathcal{S}^2_\top$,

$$G/H\simeq\mathcal{S}^2_\top.$$

La frontière de Shilov possède une structure causale invariante modelée par le cône symétrique Ω, nous renvoyons le lecteurs au paragraphe 5.2 pour plus de détails. Puisque $\mathcal{S}^2_\top$ est un ouvert dense de $\mathcal{S}^2$ et que $\mathcal{S}^2$ est une variété compacte causale, on conclu que $\mathcal{S}^2$ est une compactification causale (voir **[H-Ó]** pour la définition) de l'espace de type Cayley G/H. Le réalisation "non bornée" $\mathcal{M}=G^c/H^c$ est telle que

$$\mathcal{M}\cap(V\times V)=V^2_\top=\{(x,y)\in V^2\ :\ \mathbf{det}(x-y)\neq0\}.$$

Problème 1.3. — *Considérons l'hyperboloide à une nappe* $\mathcal{H}$. *Il s'agit d'un espace de type Cayley de rang 1. Dans ce cas* $\mathcal{H} \simeq S^1 \times S^1 \backslash \Delta$ *où* $\Delta = \{(z_1, z_2) \; : \; z_1 = z_2\}$ *est la diagonale de* $S^1 \times S^1$. *La métrique de Lorentz* g *qui est invariante par* $SL(2, \mathbb{R})$ *peut s'écrire dans ces coordonnées* $g = \frac{d\theta_1 d\theta_2}{|e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|}$. *Le groupe Conf*$(\mathcal{H})$ *des difféomorphismes conformes de* $\mathcal{H}$ *est donc Diff*(S^1), *le groupe des difféomorphisme du cercle unité. Dans* [**KS**], *Kostant et Sternberg ont étudié le comportement asymptotique du facteur conforme* τ_f *pour* $f \in$ *Conf*$(\mathcal{H})$ *(i.e.* $f^* g = \tau_f g$*). En particulier, ils ont montré que*

1. *la fonction* $\tau_f \to 1$ *lorsque* $(z_1, z_2) \to \Delta$,
2. *la fonction* τ_f *est (2 fois) différentiable sur* $S^1 \times S^1$ *et admet* Δ *comme ensemble critique,*
3. *la seconde dérivée normale de* τ_f *est donnée par Hess*$(\tau_f) = S(f)$ *où* $S(f)$ *est la dérivée Schwarzienne de* f *et que la fonction* τ_f *est déterminée sur tout* $\mathcal{H}$ *par la valeur de* $S(f)$ *sur* Δ.

Nous conjecturons que dans le cas général, où le rang $r \geq 2$, *le groupe Conf*$(\mathcal{M})$ *est le groupe conforme* G *et nous proposons d'étudier l'analogue des questions (1), (2) et (3).*
Des études préalables du groupe $Conf(G/H)$ *et de la dérivée Schwarzienne généralisés sont nécessaires.*

2. Semi-groupe causal, compressions et contractions d'un cône symétrique

Le cône maximal $C^c_{\max}$ de $\mathfrak{g}^c$ est donné par $C^c_{\max} = \{X \in \mathfrak{g}^c\ ;\ X(v) \in \overline{\Omega}, \forall v \in V\}$. Le cône $C_{\max} = \mathrm{Ad}(c)(C^c_{\max})$ est le cône maximal de $\mathfrak{g}$. Soit $\Gamma(C_{\max}) = G\exp(iC_{\max})$ le semi-groupe associé. Alors ([**Ols**$_2$], [**Stan**]) $\Gamma(C_{\max})$ coïncide avec le semi-groupe holomorphe des compressions du domaine hermitien $\mathcal{D}$, $\Gamma(C_{\max}) = \{g \in G_{\mathbb{C}}\ ;\ g(D) \subset D\}$ et $\Gamma(C_{\max})^\circ = \{g \in G_{\mathbb{C}}\ ;\ g(\overline{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}\}$.

Notons que le cône C_1 coïncide avec le cône maximal $c^c_{\max} = C^c_{\max} \cap \mathfrak{q}^c$ de $\mathfrak{q}^c$. Il définit une structure non-compactement causal de l'espace symétrique de type Cayley $\mathcal{M}$. L'espace $\mathcal{M}$ est par conséquent ordonné. Nous montrons ([**1**], [**2**]) en utilisant la théorie de Jordan que le semi-groupe causal correspondant $S_{\succeq} = \{g \in G^c\ ;\ g(e,-e) \succeq (e,-e)\}$ vérifie $S_{\succeq} = \exp(c^c_{\max})H$ et $\Gamma(C_{\max}) \cap G^c = S^{-1}_{\succeq}$.

2.1. Semi-groupe des compressions. — Rappelons que $\mathcal{X} = G^c/P$ est une compactification conforme de l'algèbre de Jordan V et le que plongement de V dans $\mathcal{X}$ est un ouvert dense. Nous avons étudié ([**1**], [**3**]) un semi-groupe naturellement associé à l'action de G^c sur $\mathcal{X}$ (ou plus précisément sur V),

$$S_\Omega = \{\gamma \in G^c\ ;\ \gamma\Omega \subset \Omega\}.$$

Puisque l'adhérence $\widetilde{\Omega}$ de Ω dans $\mathcal{X}$ est compacte d'intérieur Ω, le semi-groupe des compressions S_Ω est un semi-groupe fermé de G^c. Remarquons que S_Ω contient G_0 et que son intérieur est $S^\circ_\Omega = \{\gamma \in G^c\ ;\ \gamma\widetilde{\Omega} \subset \Omega\}$. Posons $S^+_\Omega = \{\gamma^+_v : z \mapsto z + v\ ;\ v \in \overline{\Omega}\}$ et $S^-_\Omega = \{\gamma^-_v : z \mapsto (z^{-1} + v)^{-1}\ ;\ v \in \overline{\Omega}\}$. Il est facile de s'apercevoir que $S^\pm_\Omega$ et G_0 sont des sous-semi-groupes fermés de S_Ω. Donc $S^+_\Omega G_0 S^-_\Omega \subset S_\Omega$.

Théorème 2.1 **([1], [3])**. — 1. *Le semi-groupe des compressions S_Ω coïncide avec le semi-groupe causal $S_{\succeq}$.*

2. *Les sous-semi-groupes S^+_Ω et S^-_Ω, engendrent avec G_0 le semi-groupe S_Ω. Plus précisément on a la décomposition triple suivante*

$$S_\Omega = S^+_\Omega G_0 S^-_\Omega = N^+ G_0 N^- \cap S_\Omega.$$

Pour $\gamma = \gamma_u^+ g \gamma_v^- \in S_\Omega$, notons $n^+(\gamma) := u$, $A(\gamma) := g$ et $n^-(\gamma) := v$. Posons

$$S_1 = \{\gamma \in S_\Omega \mid n^+(\gamma) \in \Omega\}, \;\; S_2 = \{\gamma \in S_\Omega \mid n^-(\gamma) \in \Omega\}.$$

Il est clair que S_1, S_2 et $S_1 \cup S_2$ sont des sous semi-groupes de S_Ω.

2.2. Semi-groupe de contractions. — On munit Ω d'une métrique Riemannienne invariante par $G(\Omega)$ en posant

$$\mathrm{g}_x(u, v) = (P(x)^{-1}u|v), \tag{1}$$

où $x \in \Omega$ et u, v sont des éléments de l'algèbre V considérée comme l'espace tangent à Ω en x. Le premier résultat de contraction que nous avons obtenu est le suivant

Théorème 2.2 **([3])**. — *Les éléments du semi-groupe S_Ω sont des contractions pour la métrique (1).*

Ce résultat est infinitésimal : nous montrons que pour tout $\gamma \in S_\Omega$,

$$\mathrm{g}_{\gamma(x)}(D(\gamma)u, D(\gamma)v) \leq g_x(u, v).$$

Du théorème précédent, nous pouvons déduire que les éléments de $S_1 \cup S_2$ sont des contractions strictes pour la métrique (1). Ce résultat a été généralisée plus tard par Lim [**L**$_1$], à tout le semi-groupe S_Ω°.

Pour démontrer des propriétés de contractions plus fines (contractions des angles), nous avons d'abord généralisé un résultat de Siegel concernant la distance Riemannienne du cône des matrices symétriques définies positives, voir aussi Maaß[**Ma**] :

Théorème 2.3 **([7])**. — *Soient $x, y \in \Omega$. Il existe une unique géodésique joignant x à y. Sa longueur est donnée par*

$$\delta(x, y) = \Big(\sum_{k=1}^{r} \log^2 \lambda_k(x, y)\Big)^{1/2}, \tag{2}$$

où $\lambda_1(x, y), \ldots, \lambda_r(x, y)$ sont les valeurs propres de $P(y)^{-1/2}x$, où P est la représentation quadratique de l'algèbre de Jordan V.

$\delta(x, y)$ est la distance Riemannienne entre x et y. Les valeurs

$$\mu_k(x, y) := \log^2(\lambda_k(x, y)$$

sont appelées angles. Nous montrons que ces angles sont contractés par le semi-groupe S_Ω, généralisant ainsi les résultats de Bougerol [**Bou**] et Neretin [$\mathbf{Ner}_1$], [$\mathbf{Ner}_2$] :

Théorème 2.4 ([**7**]). — *Soit* $1 \leq k \leq r$, *alors*

1. *Pour tout* $\gamma \in S$ *et tout* $x, y \in \Omega$: $\mu_k(\gamma x, \gamma y) \leq \mu_k(x, y)$.
2. *Pour tout* $\gamma \in S_1 \cup S_2$ *et tout* $x, y \in \Omega$: $\mu_k(\gamma x, \gamma y) < \mu_k(x, y)$.
3. *Pour tout* $\gamma \in S_1 \cap S_2$, *il existe* $\kappa(\gamma)$, $0 < \kappa(\gamma) < 1$, *tel que pour tout* $x, y \in \Omega$: $\mu_k(\gamma x, \gamma y) \leq \kappa(\gamma)\mu_k(x, y)$.

La démonstration de ce théorème repose essentiellement sur la décomposition triple du semi-groupe S_Ω (Théorème 2.1) et sur une caractérisation min-max des valeurs λ_k qui généralise le théorème min-max des valeurs propres d'une matrice symétrique. Plus précisément, (voir [$\mathbf{K}_4$, Theorem 4.1]) si $y \in \Omega$ et $x \in V$, alors les valeurs caractéristiques $\lambda_1(x, y) \geq \cdots \geq \lambda_r(x, y)$ vérifient :

$$\lambda_1(x, y) = \max_{\substack{c \in V \\ \mathrm{rang}(c)=1}} \frac{(x|c)}{(y|c)} \quad ; \quad \lambda_r(x, y) = \min_{\substack{c \in V \\ \mathrm{rang}(c)=1}} \frac{(x|c)}{(y|c)},$$

et pour $2 \leq k \leq r - 1$

$$\lambda_k(x, y) = \min_{\substack{d_1, \ldots, d_{k-1} \in V \\ \mathrm{rang}(d_j)=1}} \max_{\substack{c \in V, \mathrm{rang}(c)=1 \\ cd_1 = \ldots = cd_{k-1} = 0}} \frac{(x|c)}{y|c)}.$$

Le cas particulier $y = e$ de cette caractérisation a été montré par Hirzebruch [**Hir**].

Comme conséquences du Théorème 2.4, nous montrons que les éléments du semi-groupe S_Ω sont des contractions pour la distance δ. Plus précisément :

Corollaire 2.5 ([**7**]). — *On a*

1. *Pour tout* $\gamma \in S_\Omega$, *et* $x, y \in \Omega$: $\delta(\gamma x, \gamma y) \leq \delta(x, y)$.
2. *Pour tout* $\gamma \in S_1 \cup S_2$ *et* $x, y \in \Omega$: $\delta(\gamma x, \gamma y) < \delta(x, y)$.
3. *Pour tout* $\gamma \in S_1 \cap S_2$, *il existe* $\kappa(\gamma)$, $0 < \kappa(\gamma) < 1$, *tel que pour tout* $x, y \in \Omega$: $\delta(\gamma x, \gamma y) \leq \kappa(\gamma)\, \delta(x, y)$.

Problème 2.6. — *En réalité, nous avons montré que les valeurs caractéristiques $\lambda_j(x,y)$ qui interviennent dans la formule (2) de la distance Riemannienne de Ω sont aussi les valeurs propres du birapport*[(4)]

$$D(x,y,-x,-y) = P(x-y)P(x+y)^{-1}P(x-y)P(x+y)^{-1}. \tag{3}$$

Nous pouvons montrer que la distance Riemannienne du domaine tube $T_\Omega = V + i\Omega$ est donnée par

$$\delta(z,w) = \left(\sum_{j=1}^{r} \log^2 \frac{1+\sqrt{\eta_j(z,w)}}{1-\sqrt{\eta_j(z,w)}}\right)^2,$$

où $\eta_1(z,w),\ldots,\eta_r(z,w)$ sont les valeurs spectrales du birapport

$$D(z,w,\bar{z},\bar{w}) = P(z-w)P(w-\bar{z})^{-1}P(\bar{z}-\bar{w})P(\bar{w}-z)^{-1}.$$

On peut déduire de [$\mathbf{C}_1$], *que les éléments du semi-groupe holomorphe de $\Gamma(C^c_{max})$ (resp. $\Gamma(C^c_{max})^\circ$) sont des contractions (resp. contractions strictes) pour la métrique δ. Il serait intéressant de savoir si les éléments de ce semi-groupe sont des contractions pour les angles (composantes de la distance δ). L'une des difficultés ici, est le fait que l'on ne connaît pas de décomposition triple du semi-groupe.*

Problème 2.7. — *Comme pour le cas classique, on peut considérer la dérivée Schwarzienne (voir Problème 1.3) comme une version infinitésimale du birapport (3). En effet, dans une tentative avec Jean-Louis Clerc, nous avons défini la dérivée Schwarzienne de la façon suivante : Soit $f : \mathcal{D} \to V_{\mathbb{C}}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$, $p \geq 3$. Soient $z \in \mathcal{D}$, $u \in V$, $t > 0$ et $a,b,c,d \in \mathbb{C}$. En chaque point $z + t\alpha u$ on a $f(z+t\alpha u) = f(z) + t\alpha f'(z)y + \frac{1}{2}t^2\alpha^2 f^{(2)}(z)(u,u) + \frac{1}{6}t^3\alpha^3 f^{(3)}(z)(y,y,y) + o(t^3)$, où $f'(z) : V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$ avec $f'(z)u = D_u(f)(z)$, etc. ...*
On peut montrer que

$$D(f(z+tau), f(z+tbu), f(z+tcu), f(z+tdu) = \left(\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}\right)^2 \left[I + (a-c)(b-d)t^2 S_u f(z) + o(t^2)\right]$$

où

$$S_u f(z) = P(f')^{-1}\left\{\frac{1}{3}P(f',f^{(3)}) + \frac{1}{2}P(f^{(2)}) - P(f',f^{(2)})P(f')^{-1}P(f',f^{(2)})\right\}$$

(4) Ce birapport a été introduit et étudié par Braun [**Br**]

avec $f' = f'(z)u$, $f^{(2)} = f^{(2)}(z)(u,u)$, $f^{(2)} = f^{(3)}(z)(u,u,y)$. *Dans le cas où* $V = \mathbb{R}$, *la fonction* $S_u f$ *est la dérivée Schwarzienne classique* $Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$. *Cette notion est généralisée aux domaines de type I par Gong* [**Go**]. *Il serait intéressant d'étudier les propriétés classiques de la dérivée Schwarzienne dans le cas d'un domaine borné symétrique (de type tube). A-t-on par exemple :* $S_u f(z) = 0 \iff f \in G$ *?*

Problème 2.8. — *Peut-on étendre les propriétés de contractions de ce paragraphe à la dimension infinie (aux* $JB-$*algèbres) ?*

Problème 2.9. — *Peut-on étendre les propriétés de contractions de ce paragraphe au cas des domaines bornés symétriques réels ?*

3. Métrique de Hilbert d'un cône symétrique

Soit C un cône convexe fermé pointu d'un espace de Banach E. Alors on peut définir un ordre partiel $\preccurlyeq$ sur E en disant que $x \preccurlyeq y$ si et seulement si $y - x \in C$.
Pour $x \in E$ et $y \in C^\circ = \mathrm{int}(C)$, on pose

$$M(x, y) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ x \preccurlyeq \lambda y\} \quad \text{et} \quad m(x, y) = \sup\{\mu \ : \ \mu y \preccurlyeq x\}.$$

D'après Hilbert [**Hil**] et Birkoff [**Bir**], la métrique projective de Hilbert est définie sur C° par

$$d(x, y) = \log \frac{M(x, y)}{m(x, y)}.$$

Notre intérêt pour cette métrique a pour origine le problème suivant : soit T une matrice réelle inversible $n \times n$. Existe-il une matrice symétrique définie positive A telle que $T'AT = A^2$? Remarquons que si T n'est pas symétrique ou orthogonale, l'existence de la matrice A n'est pas élémentaire même lorsque $n = 3$. Bushell [**Bu**] a montré en utilisant la métrique de Hilbert définie sur le cône des matrices symétriques définies positives, que cette équation admet une solution unique.

Remarquons que la métrique de Hilbert sur le cône des matrices symétriques définies positives $\mathrm{Sym}^{++}(n, \mathbb{R})$ peut être définie comme suit : si A, B sont deux matrices dans $\mathrm{Sym}^{++}(n, \mathbb{R})$, alors $M(A, B) := \inf\{\lambda \mid \lambda B - A \gg 0\} = \max_{\|x\|=1} \frac{(Ax|x)}{(Bx|x)}$ est la plus grande valeur propre de $B^{-1}A$ et $m(A, B) := \sup\{\lambda \mid \lambda B - A \gg 0\} = \min_{\|x\|=1} \frac{(Ax|x)}{(Bx|x)}$ est la plus petite valeur propre de la matrice $B^{-1}A$. Remarquons aussi qu'en considérant la structure de l'algèbre de Jordan de $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$, les valeurs $M(A, B)$ et $m(A, B)$ sont respectivement la plus grande et la plus petite valeur propre de la matrice $B^{-1/2}AB^{-1/2} = P(B^{-1/2})A$. On peut donc formuler la métrique de Hilbert sur le cône symétrique $\mathrm{Sym}^{++}(n, \mathbb{R})$ d'une façon très simple.

Plus généralement, soit Ω un cône symétrique dans une algèbre de Jordan euclidienne V. Soient $x, y \in \Omega$ et désignons par λ_M (resp. λ_m) la plus grande (resp. plus petite) valeur propre de $P(y^{-\frac{1}{2}})x$. Nous savons (cf. [**7**] ou [**9**]) que

$$\lambda_M(x, y) = \max_{c \in \mathcal{J}(V)} \frac{(x|c)}{(y|c)}, \quad \text{et} \quad \lambda_m(x, y) = \min_{c \in \mathcal{J}(V)} \frac{(x|c)}{(y|c)}\,,$$

où $\mathcal{J}(V)$ est l'ensemble des idempotents de V. Nous en déduisons que

Proposition 3.1 **([9])**. — *La métrique projective de Hilbert de Ω peut s'écrire sous la forme*

$$d(x,y) = \log \frac{\lambda_M(x,y)}{\lambda_m(x,y)} = \log \lambda_M(x,y)\lambda_M(y,x).$$

Notons qu'il est facile de montrer que (Ω, d) est un espace pseudo-métrique, autrement dit,

1. $d(x,y) = d(y,x)$,
2. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$,
3. $d(x,y) \geq 0$,
4. $d(x,y) = 0 \iff \exists \lambda > 0 \ : \ x = \lambda y$.

De plus, si l'on considère la sphère unité $S(V) = \{x \in V \mid |x| = 1\}$ de V pour la norme spectrale, alors nous pouvons montrer que

Proposition 3.2 **([9])**. — *L'espace métrique $(\Omega \cap S(V), d)$ est complet.*

Comme application de ce résultat, nous montrons la généralisation suivante du théorème de Bushell [**Bu**].

Théorème 3.3 **([9])**. — *Soit $g \in G(\Omega)$ et $\nu \in \mathbb{R}$ tel que $|\nu| \geq 1$. Alors il existe un unique élément $a \in \Omega$ tel que $g(a) = a^\nu$.*

L'argument principal pour montrer ce théorème est d'établir que pour tout $g \in G(\Omega)$, l'application $x \mapsto (1/|g(x)^{1/\nu}|)g(x)^{1/\nu}$ est une contraction pour la métrique de Hilbert. Cela utilise l'inégalité de Löwner-Heinz. Le théorème du point fixe de Banach est ensuite nécessaire pour conclure.

Problème 3.4. — *Il serait intéressant (et naturel) de généraliser l'inégalité de Löwner-Heinz*

$$0 < x \leq y \Rightarrow x^p \leq y^p, \ \ 0 \leq p \leq 1$$

aux cônes symétriques des $JB-$algèbres. Ce point est crucial pour généraliser les résultats de ce paragraphe au cas de dimension infinie.

4. Espaces de Hardy non-commutatifs et programme de Gelfand-Gindikin

L'espace de Hardy (classique) du demi-plan de Poincaré [**Ho**] est l'espace de Hilbert des fonctions $f(z)$ holomorphes dans $z = x + iy$, $y > 0$, telles que $\|f\|^2 = \sup_{y>0} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 dx < \infty$.
La généralisation dans laquelle le demi-plan de Poincaré est remplacé par un domaine tube de $\mathbb{C}^n$ de la forme $\mathbb{R}^n + iC$, où $C \subset \mathbb{R}^n$ est un cône convexe, est bien connue [**S-W**]. On parle alors de l'espace de Hardy $H^2(C)$ des fonctions holomorphes sur le tube $\mathbb{R}^n + iC^\circ$ (C° étant l'intérieur de C) telles que $\|f\|^2 = \sup_{y \in C^\circ} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+iy)|^2 dx < \infty$. L'espace de Hardy $H^2(C)$ est relié au groupe $\mathbb{R}^n$, plus précisément on a les résultats basiques suivants :

1. $H^2(C)$ est un espace de Hilbert, et l'opérateur valeur au bord $bf(x) = \lim_{y \to 0,\, y \in C^\circ} f(x+iy)$ est une injection isométrique de $H^2(C)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
2. La transformation de Fourier est un isomorphisme de $b(H^2(C))$ sur $L^2(C^*)$, où $L^2(C^*)$ est l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à supports dans le dual C^* de C.

Dans [**G-G**] Gelfand et Gindikin ont proposé un programme remarquable pour l'analyse harmonique sur les groupes de Lie semi-simples et espaces symétriques pseudo-riemanniens. Ils ont proposé une nouvelle approche pour étudier la formule de Plancherel, c-à-d. la décomposition de $L^2(G)$ en somme de sous-espaces irréductibles sous l'action de G. L'idée est de considérer les fonctions de $L^2(G)$ comme somme de valeurs au bord de fonctions holomorphes définies sur des domaines complexes (de Stein) de $G_{\mathbb{C}}$. L'étude des espaces de Hardy sur ces domaines complexes est une première étape dans leur programme. Les autres étapes nécessitent la théorie de cohomologie. Olshanskiĭ a montré dans [**Ols**$_1$] et [**Ols**$_3$] une extension de (1) et (2) aux cas des groupes de Lie hermitiens, donnant ainsi un nouveau souffle au programme de Gelfand-Gindikin. Olshanskiĭ observa le premier que le domaine complexe étudié dans [**G-G**] est un semi-groupe $\Gamma(C_{\min})$ au dessus d'un cône minimal et utilisa la théorie des représentions holomorphes des ces semi-groupes qu'il avait déjà développé auparavant [**Ols**$_1$] pour construire des espaces de Hardy sur des smi-groupes de Lie [**Ols**$_2$]. Nous exposons ici sa construction.

4.1. Espace de Hardy d'un semi-groupe de Lie et le théorème A de Olshanskiĭ. — Soit G le groupe des isométries d'un domaine borné symétrique $\mathcal{D} = G/K$ où K est un sous-groupe compact maximal de G. D'après le théorème de Kostant-Paneitz-Vinverg [**V**], l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G admet une propriété importante : elle contient des cônes réguliers $\mathrm{Ad}(G)-$invariants. On note $\mathrm{Cone}_G(\mathfrak{g})$ l'ensemble de ces cônes. On peut trouver une description complète de $\mathrm{Cone}_G(\mathfrak{g})$ dans [**Ols**$_1$], [**Pa**] ou [**H-Ó**]. L'ensemble $\mathrm{Cone}_G(\mathfrak{g})$ contient un cône maximal $C_{\max}$ et un cône minimal $C_{\min}$, uniques par la multiplication par -1 près, voir [**Se**], [**V**] et [**H-Ó**]. Lorsque $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$, on a $C_{\min} = C_{\max}$.

A un cône régulier $C \in \mathrm{Cone}_G(\mathfrak{g})$ Olshankiĭ associe un semi-groupe de Lie dans le complexfié $G_{\mathbb{C}}$ de G. Plus précisément, Il a montré (cf. [**Ols**$_1$]) que $\Gamma(C) = G \exp(iC)$ est un semi-groupe fermé dans $G_{\mathbb{C}}$, et que l'application $(g, X) \mapsto g \exp(X)$ est un homéomorphisme de $G \times iC$ dans $\Gamma(C)$. Ensuite il a construit sur $\Gamma(C)$ l'espace de Hardy $H^2(C)$, comme étant l'espace des fonctions holomorphes sur l'intérieur $\Gamma(C)^\circ$ de $\Gamma(C)$ telles que

$$\|f\|^2 = \sup_{\gamma \in \Gamma(C)^\circ} \int_G |f(g\gamma)| dg < \infty.$$

Une représentation unitaire π de G dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est $C-$admissible si, $(\pi(X)\xi|\xi) \leq 0$, pour tout $X \in C$, et tout $\xi \in \mathcal{H}^\infty$, l'espace des vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}$. Un sous espace fermé $\mathcal{Y} \subset \mathcal{H}$ est dit $C-$admissible si la restriction de π à $\mathcal{Y}$ est $C-$admissible.

D'après Olshanskiĭ [**Ols**$_1$] et Stanton [**Stan**] (voir aussi un cas plus général dans [**Ne**$_1$], [**Ne**$_2$], et [**H-Ó**]) : une représentation unitaire est $C-$admissible si et seulement si elle se prolonge en une représentation holomorphe de $\Gamma(C)$, autrement dit en une représentation π fortement continue de $\Gamma(C)$ telle que

1. $\pi(\gamma^*) = \pi(\gamma^\sharp) \quad (\gamma^\sharp = \bar{\gamma}^{-1})$,
2. $\|\pi(\gamma)\| \leq 1$,
3. $\gamma \mapsto \pi(\gamma)$ faiblement holomorphe sur $\Gamma(C)^\circ$.

Le semi-groupe $\Gamma(C)$ opère sur l'espace de Hardy $H^2(C)$ par $T(\gamma)f(x) = f(x\gamma)$. Nous pouvons donc énoncer le théorème d'Olshanskiĭ, voir [**Ols**$_2$, Theorem A] : *L'espace de Hardy $H^2(C)$ est un espace de Hilbert. L'opérateur valeur au bord $bf(x) = \lim_{\gamma \mapsto e,\, \gamma \in \Gamma(C)^\circ} f(x\gamma)$, est une isométrie $G-$équivariante injective de $H^2(C)$ dans $L^2(G)$. La représentation T est le prolongement à $\Gamma(C)$ d'une représentation unitaire $C-$admissible de G dans $H^2(C)$, et l'image $b(H^2(C))$ est le plus grand sous-espace*

$C-$admissible de $L^2(G)$ (relativement à la représentation régulière gauche).

Pour montrer que l'espace de Hardy $H^2(C)$ est non trivial, Olshanskiĭ utilise le théorème de Harish-Chandra sur l'existence de représentations de plus haut poids et de carrés intégrables.

4.2. Représentations unitaires holomorphes et le théorème B de Olshanskiĭ. — Il existe dans le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{k}$ un élément Z_0 tels que $\mathrm{ad}(Z_0)$ a pour valeurs propres i, 0, $-i$. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^-$ la décomposition correspondante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ comme somme de sous-espaces propres. On note P^+, $K_{\mathbb{C}}$ et P^- les sous-groupes analytiques de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbres de Lie respectifs $\mathfrak{p}^+$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{p}^-$. Le sous-groupe $K_{\mathbb{C}}$ normalise P^-, donc $K_{\mathbb{C}}P^-$ est un sous-groupe de $G_{\mathbb{C}}$. Le quotient $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ est une variété complexe compacte. Soit $m_0 = eK_{\mathbb{C}}P^-$, où e est l'élément neutre de G. L'orbite $G \cdot m_0$ est un ouvert de $G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ et $G \cdot m_0 \simeq G/K$. Il s'agit de la réalisation de Borel de l'espace hermitien symétrique G/K.

Le semi-groupe de compression de $G \cdot m_0$ est lié au semi-groupe de Lie introduit par Olshanskiĭ. Plus précisément, si $C_{\max}$ est le cône maximal de $\mathrm{Cone}(\mathfrak{g})$ qui contient Z_0, alors ([**Ols**$_1$], [**Stan**]) $\Gamma(C_{\max}) = G\exp(iC_{\max}) = \{g \in G_{\mathbb{C}} \ : \ g(G \cdot m_0) \subset G \cdot m_0\}$. Comme $P^+ \cap K_{\mathbb{C}}P^- = \{e\}$, l'orbite $P^+ \cdot m_0 \subset G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-$ est ouverte et l'application $\varphi : \mathfrak{p}^+ \to G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}P^-, \quad X \mapsto \exp X \cdot m_0$ est un difféomorphisme sur son image $P^+ \cdot m_0$. On montre que $G \subset P^+K_{\mathbb{C}}P^-$, ce qui signifie que l'image $P^+ \cdot m_0$ contient $G \cdot m_0$. Soit $\mathcal{D} = \varphi^{-1}(G \cdot m_0) \subset \mathfrak{p}^+$, alors $\mathcal{D} \simeq G/K$. C'est la réalisation de Harish-Chandra de G/K comme domaine borné.

Si $g = \exp u\, k \,\exp v \in P^+K_{\mathbb{C}}P^-$, on note $k = k(g)$. Pour $g \in G_{\mathbb{C}}$, $z \in \mathfrak{p}^+$, tels que $g\exp z \in P^+K_{\mathbb{C}}P^-$, on définit $g \cdot z \in \mathfrak{p}^+$ par $g\exp z = \exp(g \cdot z)k(g\exp z)\exp v, \quad v \in \mathfrak{p}^-$. Ceci définit une action de G sur $\mathcal{D}$.

Soit τ une représentation unitaire irréductible de K dans un espace complexe V_τ. On note aussi τ son prolongement holomorphe à $K_{\mathbb{C}}$. Pour $g \in G_{\mathbb{C}}$, $z \in \mathfrak{p}^+$ on définit $\mu(g,z) = \tau(k(g\exp z))$. Alors μ vérifie la propriété de cocycle $\mu(g_1g_2,z) = \mu(g_1, g_2 \cdot z)\mu(g_2,z)$. Soit $\mathcal{E}_\tau$ l'espace

de fonctions $F : G \to V_\tau$ telles que $F(gk) = \tau(k^{-1})F(g)$, $k \in K$. Le groupe G opère dans $\mathcal{E}_\tau$ par la représentation régulière gauche T_1, $(T_1(g)F)(x) = F(g^{-1}x)$. A toute fonction $F \in \mathcal{E}_\tau$, on associe la fonction f définie sur $\mathcal{D}$ par $f(g\cdot 0) = \mu(g,0)F(g)$. La correspondance $F \mapsto f$ est bijective de $\mathcal{E}_\tau$ sur $\mathcal{F}(\mathcal{D}, V_\tau)$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans V_τ. On obtient ainsi une représentation T_2 dans $\mathcal{F}(D, V_\tau)$, $(T_2(g)f)(z) = \mu(g^{-1}, z)^{-1} f(g^{-1}\cdot z)$. L'espace $\mathcal{O}(\mathcal{D}, V_\tau)$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans V_τ est invariant par T_2. On note π la restriction de T_2 à $\mathcal{O}(D, V_\tau)$.
On écrit $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}$ s'il existe un sous-espace de Hilbert non trivial $\mathcal{H}_\tau \subset \mathcal{O}(\mathcal{D}, V_\tau)$ invariant par π, avec une inclusion continue. Pour $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}$, on note π_τ la restriction de la représentation π à $\mathcal{H}_\tau$. C'est une représentation unitaire irréductible de G (appelée représentation unitaire holomorphe, ou représentation unitaire de plus haut poids).

Considérons le sous-espace de $\mathcal{E}_\tau$ formé des fonctions sur G de carré intégrales, $\|F\|_2^2 = \int_G \|F(g)\|^2 dg < \infty$. Puisque la fonction $g \mapsto \|F(g)\|^2$ est $K-$invariante à droite, on peut considérer l'intégrale précédente comme une intégrale sur G/K. De plus on écrit $\mu(g,0)^{*-1}\mu(g,0)^{-1} = A(g\cdot 0)$ où $A(z)$ est un fonction définie sur $\mathcal{D}$, puisque le membre de gauche de cette égalité est $K-$invariant à droite. On obtient alors $\|F\|_2^2 = \int_{\mathcal{D}} \|A(z)f(z)\|^2 d\nu(z) < \infty$, où $d\nu$ est une mesure $G-$invariante sur $\mathcal{D}$. Ainsi on construit une représentation unitaire π_τ de G dans l'espace $\mathcal{H}^2_\tau$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{D}$ à valeurs dans V_τ telles que $\|f\|_\tau^2 = \int_{\mathcal{D}} \|A(z)f(z)\|^2 d\nu(z) < \infty$. Si $\mathcal{H}^2_\tau \neq \{0\}$ on note $\tau \in \widetilde{\mathcal{R}}^2$. La représentation π_τ est donc une représentation unitaire irréductible de carré intégrable de G.

Soit T un tore maximal dans K d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. La complexifiée $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{k}_\mathbb{C}$, et comme $\mathfrak{g}$ est hermitienne, $\mathfrak{t}_\mathbb{C}$ est aussi une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$. Soit $\Delta_0(\mathfrak{k}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$ l'ensemble des racines compactes, Δ_0^+ un ensemble de racines compactes positives dans Δ_0, Δ_1 l'ensemble des racines α de $\Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{t}_\mathbb{C})$, telles que $\alpha(Z_0) = i$, et $\Delta^+ = \Delta_0^+ \cup \Delta_1$ (Δ_1 est l'ensemble des racines non-compactes positives).

Les représentations unitaires irréductibles τ de K sont paramétrisées par l'ensemble $\Lambda \subset i\mathfrak{t}^* \simeq i\mathfrak{t}$ des plus haut poids. (c-à-d. l'ensemble des λ vérifiant $\lambda \in \hat{T}$ et $2\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha \in \Delta_0^+$). On note $\mathcal{R}$ le sous-ensemble des λ correspondants à $\widetilde{\mathcal{R}}$. Pour $\lambda \in \mathcal{R}$, on note $\tau_\lambda = \tau$ la représentation unitaire irréductible de K de plus haut poids λ et $\pi_\lambda = \pi$ la représentation unitaire holomorphe de G (induite holomorphe à partir de τ_λ). On note aussi $\mathcal{R}_2$ le sous-ensemble de Λ correspondant à $\widetilde{\mathcal{R}}_2$. D'après Harish-Chandra, si $\lambda \in \mathcal{R}$, alors $\langle \lambda, \beta \rangle \leq 0, \quad \forall \beta \in \Delta_1$, et $\lambda \in \mathcal{R}^2$ si et seulement si $\langle \lambda + \rho, \beta \rangle < 0, \quad \forall \beta \in \Delta_1$. Soit maintenant C un cône de $\mathrm{Cone}_G(\mathfrak{g})$ tel que $Z_0 \in C^\circ$. Si $\lambda \in \mathcal{R} \cap iC^*$, alors les poids de la représentation π_λ appartiennent à iC^*. Il en résulte que la représentation π_λ est $C-$admissible. On montre (cf. [**Ols**$_1$], [**Stan**]) que

1. pour $\lambda \in \mathcal{R}$, la représentation π_λ est $C-$admissible si et seulement si $\lambda \in iC^*$;
2. inversement, soit π une représentation unitaire et $C-$admissible de G, alors $\pi = \pi_\lambda$ pour $\lambda \in \mathcal{R} \cap iC^*$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème B de Olshanskiĭ comme suit (cf. [**Ols**$_2$, Theorem B]) :

1. *L'espace de Hardy $H^2(C)$ est non trivial pour tout $C \in Cone_G(\mathfrak{g})$.*
2. *La représentation π de G dans $H^2(C)$ se décompose comme somme directe de représentations unitaires irréductibles avec multiplicités finies.*
3. *Les composantes de cette décomposition sont toutes les représentations de la série discrète holomorphe qui sont $C-$admissibles.*

Le groupe $G \times G$ opère sur $H^2(C)$ par translations à droite et à gauche, et il est alors possible d'écrire

$$H^2(C) = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{R}_2 \cap iC^*} \mathcal{H}^2_\lambda \otimes \bar{\mathcal{H}}^2_\lambda.$$

Cette décomposition spectrale de $H^2(C)$ a été généralisée ensuite par Hilgert-Ólafsson-Ørsted [**H-Ó-Ø**] au cas des espaces symétriques non-compactement causaux, voir aussi [**Ne**$_1$], [**Ne**$_2$] et [**Kro**].

Les évaluations $f \mapsto f(\gamma) \quad (\gamma \in \Gamma(C^\circ))$ sont des formes linéaires continues sur l'espace de Hardy $H^2(C)$, et donc, pour $\gamma \in \Gamma(C^\circ)$, il existe une fonction $S_\gamma \in H^2(C)$ telle que $f(\gamma) = (f|S_\gamma)$ pour tout $f \in H^2(C)$. On pose $S(\gamma, \gamma') = S_{\gamma'}(\gamma)$. Le noyau S s'appelle le noyau de Cauchy-Szegö. C'est le noyau reproduisant de $H^2(C)$: si $f \in H^2(C)$, alors $f(\gamma) = \int_G S(\gamma, x) b f(x) dx \quad (\gamma \in \Gamma(C^\circ))$. Enfin, notons que le noyau

S est invariant par le groupe G.

Par la suite, pour des raisons pratiques, nous allons considérer l'ensemble $\mathrm{Cone}_G(i\mathfrak{g})$ au lieu de $\mathrm{Cone}_G(\mathfrak{g})$.

4.3. Restriction de la série discrète holomorphe de $SU(2,2)$ et programme de Gelfand-Gindikin. — Notre premier travail [**4**] dans cette direction a été réalisé en collaboration avec Bent Ørsted. Nous avons étudié la décomposition de la restriction à $S(U(1,1)\times U(1,1))$ d'une représentation de la série discrète holomorphe de $SU(2,2)$. Ceci nous a permit de montrer que la représentation de $S(U(1,1)\times U(1,1))$ dans l'espace de Hardy du semi-groupe de Lie maximal n'est pas obtenu par restriction d'une représentation de la série discrète holomorphe de $SU(2,2)$. Cette réponse à une question ouverte depuis plusieurs années est une contribution importante au programme de Gelfand-Gindikin, et infirme un résultat de Gindikin [**G**]. Nous décrivons brièvement ci-dessous la méthode utilisée, et nous renvoyons le lecteur à [**4**] pour plus de détail.

Soit $G = U(1,1)$, alors $\mathbb{G}_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ et considérons sur $\mathbb{C}^2$, la forme hermitienne $\beta(\xi,\eta) = -\xi_1\bar{\eta}_1 + \xi_2\bar{\eta}_2$. Le cône $C = \{X \in i\mathfrak{u} \ : \ \beta(X\xi,\xi) \leq 0,\ \forall\xi\in\mathbb{C}^2\}$ est un cône régulier $\mathrm{Ad}(G)-$invariant dans $i\mathfrak{g} = i\mathfrak{u}(1,1)$. Le semi-groupe de Lie $\Gamma(C) = G\exp(iC)$ peut être décrit comme le semi-groupe des matrices $\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ telle que $J-\gamma^*J\gamma$ soit une matrice hermitienne définie positive, où $J = \left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.
Le groupe $G^\flat = SU(2,2)$ opère sur le disque unité ouvert $\mathcal{D} = \{Z \in \mathcal{M}(2,\mathbb{C})\ I_2 - Z^*Z \gg 0\}$ via $g\cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$, avec $g = \left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right)$.
Les représentations de la série discrète holomorphe (scalaire) sont

$$(U_\lambda(g)f)(Z) = \mathbf{det}(CZ+D)^{-1}f(g^{-1}\cdot Z), \quad g^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}A & B\\ C & D\end{smallmatrix}\right), \tag{4}$$

pour $\lambda \in \{4,5,6,\ldots\}$. La représentation U_λ est une représentation unitaire irréductible dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda(\mathcal{D})$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{D}$, de carrés intégrables par rapport à la mesure $\mathbf{det}(I-Z^*Z)^{\lambda-4}dZ$ (dZ étant la mesure de Lebesgue). L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda(\mathcal{D})$ admet comme noyau reproduisant (modulo une constante)

$$K_\lambda^D(Z,W) = \mathbf{det}(I-W^*Z)^{-\lambda}. \tag{5}$$

De plus on a la formule du binôme suivante :

$$\mathbf{det}(I-W^*Z)^{-1} = \sum a_{m,j}(\lambda)\overline{(\mathbf{det}\,W)^m D^j_{q,q'}(W)}(\mathbf{det}\,Z)^m D^j_{q,q'}(Z), \tag{6}$$

où $a_{m,j} = (2j+1)\frac{\Gamma(m+\lambda-1)\Gamma(m+2j+\lambda)}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+2j+2)\Gamma(\lambda-1)\Gamma(\lambda)}$, et où la somme est sur $m = 0, 1, 2, \ldots$ et sur tous les coefficients matriciels $D^j_{q,q'}(Z)$ de la représentation spin de $SU(2)$, j=1, $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$.

Le problème traité dans [**4**] consiste à réaliser la représentation U_λ sur un domaine différent, plus précisément sur le semi-groupe de Lie $\Gamma(C^\circ)$, via une transformation de Cayley et d'étudier l'analogue de (4), (5) et (6).
La frontière de Shilov de $\mathcal{D}$ est $U(2)$ tandis que celle de $\Gamma(C^\circ)$ est $U(1,1)$. Nous avons donc remplacé l'analyse harmonique sur $U(2)$ par l'analyse harmonique sur $U(1,1)$.

Soit $T_\Omega = \mathrm{Herm}(2,\mathbb{C}) + i\mathrm{Herm}^{++}(2,\mathbb{C})$ le domaine tube associé à l'algèbre de Jordan $\mathrm{Herm}(2,\mathbb{C})$ (au dessus du cône symétrique des matrices hermitiennes définie positives). Nous montrons alors ([**4**, Lemma 1.1]) que la transformation de Cayley $\mathtt{C}(X) = (X - iJ)(X + iJ)^{-1}$, envoie le sous-ensemble dense $T_\Omega \setminus \Sigma$ sur $\Gamma(C^\circ)$, où $\Sigma = \{Z \in T_\Omega \ : \ \mathbf{det}(Z + iJ) \neq 0\}$.

Rappelons la réalisation non bornée de la représentation (4) de $G^\flat$: pour $\lambda \in \{4, 5, 6, \ldots\}$, l'espace de cette représentation est, $\mathcal{H}_\lambda(T_\Omega)$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur le domaine tube, telle que $\int_{T_\Omega} |f(X+iY)|^2 (\mathbf{det}\, Y)^{\lambda-4} dX dY < \infty$. C'est un espace de Hilbert dont le noyau reproduisant est $K_\lambda(Z, W) = \mathbf{det}(\frac{Z-W^*}{2i})^{-\lambda}$.

Pour faire la correspondance entre les fonctions holomorphes sur $T_\Omega \setminus \Sigma$ et les fonctions holomorphes sur $\Gamma(C^\circ)$ nous montrons le résultat suivant ([**4**, Proposition 1.5]) : Soit f une fonction holomorphe sur $T_\Omega \setminus \Sigma$ telle que $\int_{T_\Omega} |f(X+iY)|^2 (\mathbf{det}\, y)^{\lambda-4} dX dY < \infty$ pour $\lambda \geq 4$. Alors f est holomorphe sur tout T_Ω.

Soit $\lambda \geq 4$ et introduisons l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\lambda(C)$ comme l'espace des fonctions holomorphes F sur $\Gamma(C^\circ)$ telles que

$$\int_{\Gamma(C^\circ)} |F(\gamma)|^2\, \mathbf{det}(J - \gamma^* J \gamma)^{\lambda-4} d\gamma < \infty,$$

où $d\gamma$ est la mesure de Lebesgue sur $G_\mathbb{C}$ restreinte à $\Gamma(C^\circ)$.
La transformation de Cayley $\gamma = \mathtt{C}(Z)$ définie l'opérateur,

$$f = \mathtt{C}_\lambda(F) \quad : \quad f(Z) = \mathbf{det}(Z + iJ)^{-\lambda} F(\gamma).$$

Théorème 4.1 ([**4**, Theorem 1.7]). — *Soit $\lambda \geq 4$. L'oprérateur $\mathtt{C}_\lambda$ est un entrelacement entre $\mathcal{H}_\lambda(T_\Omega)$ et $\mathcal{H}_\lambda(C^\circ)$. De plus le noyau reproduisant de $\mathcal{H}_\lambda(C^\circ)$ est donné par $K_\lambda(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{det}(J - \gamma_2^* J \gamma_1)^{-\lambda}$.*

Nous montrons également

Théorème 4.2 ([**4**, Theorem 2.2]). — *Pour $\lambda = 2, 3, 4, \ldots$,*

$$\mathbf{det}(I - \gamma)^{-\lambda} = (-1)^\lambda \sum_{n+j \text{ pair},\, n+j \geq 0,\, n-j \leq -2\lambda} a_{n,j}(\lambda) \chi_{n,j}(\gamma), \ \gamma \in \Gamma(C^\circ).$$

La fonction $a_{n,j}$ est analytique sur $\Gamma(C^\circ)$, son expression est donnée dans [**4**, (25)]. $\chi_{n,j}$ est le caractère de $U(1,1)$ tel que $e^{i\theta_1} \begin{pmatrix} e^{i\theta_2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix} \mapsto e^{in\theta_1} \frac{e^{-i(j-1)\theta_2}}{e^{i\theta_2} - e^{-i\theta_2}}$, prolongé à $\Gamma(C^\circ)$. En réalité nous considérons les représentations unitaires de $U(1,1)$ comme étant les représentations unitaires de $U(1) \times SU(1,1)$ triviales sur $(-1, -I_2)$. L'expression de $\chi_{n,j}$ est donnée dans [**4**, (6)].
La formule du théorème précédent nous a permis ensuite de montrer l'analogue de (6), voir [**4**, Theorem 2.4].

Le cas spécial $\lambda = 2$ est intéressant : $\mathcal{H}_2(T_\Omega)$ est l'espace de Hardy du domaine tube T_Ω et on peut s'attendre(5) à ce que $\mathcal{H}_2(C)$ soit l'espace de Hardy du semi-groupe $\Gamma(C)$. Nous avons montré que la situation est plus compliquée que cela,

Théorème 4.3 ([**4**, Theorem 4.2]). — *$\mathcal{H}_2(C)$ est un espace de Hilbert G équivariant à l'espace de Hardy $H^2(T_\Omega)$ et c'est un sous-espace invariant propre de l'espace de Hardy $H^2(C)$. Plus précisément*

$$H^2(C) = \mathcal{H}_2(C) \oplus (\text{“deux demi droites''}).$$

Nous avons aussi donné l'expression du noyau de Cauchy-Szegö S de $H^2(C)$

Proposition 4.4 ([**4**, Theorem 4.3]). —

$$S(\gamma_1, \gamma_2) = \mathbf{det}(J - \gamma_2^* J \gamma_1)^{-2} + \sqrt{(\mathbf{tr}(\gamma_1 \gamma_2^*) - 2)^3 (\mathbf{tr}(\gamma_1 \gamma_2^*) + 2)^3}.$$

(5)comme Gindikin !

4.4. Cas d'un groupe de Lie hermitien. — Nous avons généralisé, dans [**5**] et [**6**], l'étude précédente aux cas suivants de $(G, G^\flat)$:

$$(U(p,q), SU(p+q,p+q)),\ (Sp(r,\mathbb{R}), Sp(2r,\mathbb{R})),\ (SO^*(2\ell), SO^*(4\ell)).$$

La méthode suivie est la même que ci-dessus, elle consiste à construire une transformation de Cayley qui envoie le semi-groupe $\Gamma(C^\circ)$ dans un domaine tube associé à une algèbre de Jordan euclidienne. Nous avons montré que l'espace de Hardy classique s'injecte strictement dans l'espace de Hardy de $\Gamma(C)$ dans le cas $(U(p,q), SU(p+q,p+q))$ et du revêtement à deux feuillets de $\Gamma(C)$ dans les cas $(Sp(r,\mathbb{R}), Sp(2r,\mathbb{R}))$ et $(SO^*(2\ell), SO^*(4\ell))$.
Dans le cas $(Sp(r,\mathbb{R}), Sp(2r,\mathbb{R}))$ nous avons caractérisé complètement l'image et nous avons calculé son noyau reproduisant.
Dans les trois cas nous avons montré que l'opérateur de Cayley entrelace l'action de $G \times G$ sur l'espace de Hardy classique et la représentation régulière sur l'espace de Hardy sur le semi-groupe de Lie. Une construction explicite du revêtement à deux feuillets du semi-groupe $\Gamma(C)$ à été donnée dans [**6**].

Problème 4.5. — *Réaliser une étude détaillée similaire pour les deux cas restants $G = SO(2,n)$ et $G = E_{7(-25)}$.*

Problème 4.6. — *Nous savons que l'espace de Hardy classique sur T_Ω (associé à $G^\flat$) est une partie de l'espace de Hardy non-commutatif sur le semi-groupe $\Gamma(C)$ (associé à G) ou du revêtement de $\Gamma(C)$. Ces deux espaces sont en général différents. Nous conjecturons que dans le cas où ces deux espaces de Hardy sont distincts, la différence peut être un (ou somme d') espace(s) de Hardy non-commutatif(s) de rang inférieur. Par exemple, dans* [**4**] *nous avons montré que la différence entre l'espace de Hardy classique associé à $G^\flat = SU(2,2)$ et l'espace de Hardy non-commutatif associé à $G = U(1,1)$ est l'espace de Hardy non-commutatif associé à $SU(1,1)$ étudié par Gelfand et Gindikin dans* [**G-G**]. *La difficulté réside dans le calcul explicite du noyau de Cauchy-Szegö qui est encore un problème ouvert dans beaucoup de cas.*

Problème 4.7. — *Considérons l'espace de Hardy $H^2(C)$ sur le semi-groupe $\Gamma(C^\circ) = G\exp(iC^\circ)$* [6] *(voir paragraphe 4.1) et considérons son*

[6] Le groupe G est considéré comme la frontière de Shilov du domaine complexe $\Gamma(C^\circ)$

noyau de Cauchy-Szegö S (voir paragraphe 4.2). Suivant Hua, il est possible de définir le noyau de Poisson par (voir **[F et al.]***)*

$$P(\gamma, x) = \frac{|S(\gamma, x)|^2}{S(\gamma, \gamma)} \quad \gamma \in \Gamma(C^\circ),\ x \in G. \tag{7}$$

Pour $s \in \mathbb{C}$, on peut définir une transformation de Poisson généralisée par

$$\mathcal{P}_s(f)(\gamma) = \int_G P(\gamma, x)^s f(x) dx \tag{8}$$

pour toute hyperfonction f sur G. Il serait intéressant d'étudier les valeurs au bord de cette transformation de Poisson. Il serait également intéressant de déterminer son image.

5. Géométrie de la frontière de Shilov et indice triple de Maslov

5.1. Action du groupe conforme, indice de transversalité et indice triple de Maslov. — Nous reprenons ici les notations du paragraphe 1.3. Nous allons étudier l'action du groupe conforme G sur la frontière de Shilov $\mathcal{S}$. Rappelons que la notion de transversalité est invariante par l'action de G. Nous savons, cf. Théorème 1.2, que le groupe G opère transitivement sur $\mathcal{S}^2_\top$ (l'ensemble des couples transverses de $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$) et que le stabilisateur de l'élément $(e,-e)$ dans G est le groupe $c^{-1}\circ G_0\circ c$. L'action de G sur $\mathcal{S}^2$ et sur $\mathcal{S}^3$ est plus riche. Examinons d'abord le cas de l'action de G sur $\mathcal{S}^2$.

Fixons un repère de Jordan $(c_j)_{j=1}^r$ de l'algèbre de Jordan euclidienne V. Pour $k=0,1,\ldots,r$ on pose $\epsilon_0=-e$, $\epsilon_k=\sum_{j=1}^k c_j-\sum_{j=k+1}^r c_j$ et $\epsilon_r=e$. Il s'en suit le théorème suivant :

Théorème 5.1 **([11**, §4]). — *Il y a exactement $r+1$ orbites dans $\mathcal{S}^2$ sous l'action de G représentées par la famille (e,ϵ_k), $0\le k\le r$.*

Soit $(\sigma,\tau)\in\mathcal{S}^2$. Nous définissons l'indice de transversalité de la paire (σ,τ) par

$$\mu(\sigma,\tau)=k \tag{9}$$

où k est l'unique entier $0\le k\le r$ tel que (σ,τ) soit conjugué par un élément de G à (e,ϵ_k). Nous avons alors un invariant qui caractérise l'action du groupe G sur $\mathcal{S}^2$. Dans le cas où V est l'algèbre des matrices symétriques, cet invariant a été étudié par Hua [**Hu**$_1$] sous le nom de distance arithmétique.

Dans [**C-Ø**$_1$], Clerc et Ørsted ont mis en évidence un invariant qui caractérise l'action de G sur l'ensemble des triplets transverses, $\mathcal{S}^3_\top=\{(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)\in\mathcal{S}\ :\ \sigma_i\top\sigma_j,\ 1\le i\ne j\le r\}$.

Théorème 5.2 ([**C-Ø**$_1$, Theorem 4.3]). — *Il y a exactement $r+1$ orbites dans $\mathcal{S}^3_\top$ sous l'action de G. La famille $(e,-e,-i\epsilon_k)$, $0\le k\le r$ est une famille exhaustive de représentants de ces orbites.*

La démonstration de ces deux théorèmes se fait d'une manière locale : en utilisant la transformation de Cayley c, on montre qu'il y a exactement $r+1$ orbites dans $V^\times$ (ensembles des éléments inversibles) sous l'action du groupe G_0, et que ces orbites sont représentées par les éléments ϵ_k, $0 \le k \le r$.

Soit $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathcal{S}^3_\top$. Clerc et Ørsted ont définit l'indice triple de Maslov du triplet $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ par

$$\imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2k - r \tag{10}$$

où k est l'unique entier, $0 \le k \le r$ tel que $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ soit conjugué par un élément de G à $(e, -e, -i\epsilon_k)$. L'indice triple de Maslov est un cocycle $G-$invariant, anti-symétrique et qui caractérise l'action de G sur $\mathcal{S}^3_\top$. Pour démontrer ces propriétés, il faut comprendre cet indice géométriquement. Cet indice prend origine dans la mécanique quantique avec les travaux de V.P. Maslov [**M**] et de V. I. Arnold [$\mathbf{A}_1$], [$\mathbf{A}_2$] et dans l'analyse lagrangienne avec les travaux de J. Leray [**Le**]. La définition que Maslov, Arnold et Leray est plutôt géométrique et n'utilise que la géométrie de la frontière de Shilov. Nous allons l'exposer dans le paragraphe 6. Kashiwara (voir [**L-V**]) a fourni une définition algébrique de l'indice de Maslov : soit (E, ω) un espace symplectique réel, de dimension $2r$ et considérons l'espace des sous-espaces lagrangiens $\Lambda(r)$. Il est connu que la variété lagrangienne Λ_r peut être considérée comme la frontière de Shilov du disque de Siegel $\mathcal{D} = \{z \in \mathrm{Sym}(r, \mathbb{C}) \ : \ 1 - z\bar{z} \gg 0\}$ (un cas particulier de domaine borné symétrique de type tube) sur laquelle le groupe symplectique $G = Sp(E)$ opère transitivement.

A un triplet de lagrangiens (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3), on associe la forme quadratique q_{ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3} définie sur $\ell_1 \times \ell_2 \times \ell_3$ par $q_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}(x_1, x_2, x_3) = \omega(x_1, x_2) + \omega(x_2, x_3) + \omega(x_3, x_1)$.

Selon Kashiwara, l'indice triple de Maslov $\iota(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$, est la signature de la forme quadratique q_{ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3}. Les principales propriétés de l'indice de Maslov sont les suivantes :

(i) l'indice de Maslov est invariant par G, c'est-à-dire : $\iota(g\ell_1, g\ell_2, g\ell_3) = \iota(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ pour tout $g \in G$ et $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathcal{S}$.
(ii) l'indice de Maslov est antisymétrique pour les permutations des trois arguments, c'est-à-dire : $\iota(\ell_{\tau(1)}, \ell_{\tau(2)}, \ell_{\tau(3)}) = \epsilon(\tau)\iota(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ où $\epsilon(\tau)$ désigne la signature de la permutation τ.
(iii) l'indice de Maslov satisfait une relation de cocycle : $\iota(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = \iota(\ell_1, \ell_2, \ell_4) + \iota(\ell_2, \ell_3, \ell_4) + \iota(\ell_3, \ell_1, \ell_4)$ pour tous $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4 \in \mathcal{S}$.

La démonstration de la propriété de cocycle en utilisant le définition de Kashiwara est longue est compliquée. Nous invitons les lecteurs intéressés à consulter [**L-V**]. La définition de l'indice triple de Maslov construit par Clerc et Ørsted coïncide, dans le cas de la variété lagrangienne, avec l'indice donné par Kashiwara. Clerc et Ørsted ont aussi montré que l'indice de Maslov peut être obtenu comme la limite d'une fonction analytique réelle sur le domaine $\mathcal{D}$. En effet, pour $z, w \in \mathcal{D}$ on pose $k(z,w) = \mathrm{Det}(K(z,w))^{r/n}$ où $K(z,w)$ est le noyau canonique d'automorphie de $\mathcal{D}$. Considérons l'aire géodésique,

$$c(z_1, z_2, z_3) = \frac{k(z_1,z_2)k(z_2,z_3)k(z_3,z_1)}{k(z_2,z_1)k(z_3,z_2)k(z_1,z_3)}.$$

Puisque $\mathcal{D}$ est simplement connexe, il existe une unique détermination continue de l'argument de $k(z,w)$ qui est nulle sur la diagonale $\{z = w\}$ et donc une unique détermination continue de l'argument de $c(z_1, z_2, z_3)$ qui est nulle sur $\{z_1, z_2, z_3\}$. Soit

$$\gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \lim \frac{1}{2\pi} \arg c(z_1, z_2, z_3)$$

lorsque $\mathcal{D} \ni z_i \to \sigma_i$. Par construction, γ est invariante par G et on a, cf. [**C-Ø**$_1$, Theorem 5.2], pour tout $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathcal{S}_\top^3$,

$$\imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \gamma(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \tag{11}$$

Dans [**C-Ø**$_2$] Clerc et Ørsted ont donné une autre approche à l'indice triple de Maslov. Cette approche utilise la géométrie Kählerienne du domaine $\mathcal{D}$. Soit $\omega = i\partial\bar{\partial} \log k(z,z)$ la forme de Kähler de $\mathcal{D}$. C'est une $2-$forme fermée. Pour tout triangle géodésique orienté Δ dans $\mathcal{D}$ de sommets z_1, z_2, z_3, on peut définir son aire symplectique $\varphi(z_1, z_2, z_3) = \int_\Delta \omega$. D'après [**C-Ø**$_2$, Theorem 2.1], on peut calculer cette aire pour un domaine borné symétrique quelconque,

$$\varphi(z_1, z_2, z_3) = -(\arg k(z_1, z_2) + \arg k(z_2, z_3) + \arg k(z_3, z_1)).$$

Pour un domaine borné de type tube, on a

$$\lim_{z_i \to \sigma_i} \frac{1}{\pi} \varphi(z_1, z_2, z_3) = \imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{12}$$

lorsque le triangle de sommets $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ transverses deux à deux, est un triangle idéal. Ainsi l'indice de Maslov généralisé $\imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est une aire symplectique (dans le cas où $r = 1$ on retrouve le fait que l'aire d'un triangle géodésique orienté est π). La propriété de cocycle est donc immédiate. Notons que l'intégrale $\int_\Delta \omega$ a été calculée auparavant par

Domic et Toledo [**D-T**], pour des domaines bornés symétriques classiques.

Toutes les définitions précédentes de l'indice de Maslov généralisé se limitaient au triplets transverses de $\mathcal{S}$. L'extension à un triplet quelconque, donnée par Clerc [$\mathbf{C}_2$], utilise la notion de la convergence radiale suivant un cône convexe.
Rappelons que la frontière de Shilov possède une structure causale invariante (voir ci-dessous) donnée par le champs de cônes $(C_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$. D'après [$\mathbf{C}_2$], une courbe régulière $\gamma : [0,1] \to V_\mathbb{C}$ telle que $\gamma(t) \in \mathcal{D}$ et $\gamma(0) = \sigma \in \mathcal{S}$ est dite $C-$radiale en σ si et seulement si $\dot\gamma(0) \in iC_\sigma$. Soit $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathcal{S}^3$ et soit γ_1 (respectivement γ_2, γ_3) une courbe $C-$radiale en σ_1 (respectivement σ_2, σ_3). Alors (cf. [$\mathbf{C}_2$, Théorème 3.3])

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\pi}\varphi(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)) = \imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3).$$

Outre l'indice de transversalité, cet invariant entre dans la classification des orbites de l'action G sur $\mathcal{S}\times\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ donnée par Clerc et Neeb [**C-N**].

5.2. Structure Causale. — L'algèbre de Jordan V admet une structure causale naturelle, modelée par le cône symétrique Ω. Il s'agit de la donnée en chaque point de V du cône Ω, considéré comme un cône dans l'espace tangent à V en ce point. Cette structure causale est invariante par $G(T_\Omega)$.

La transformation de Cayley est très importante à ce niveau. Elle permet de transporter à $\mathcal{S}$ la structure causale de V. Pour cela, considérons $-e \in \mathcal{S}$ comme point base de $\mathcal{S}$, alors l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en $-e$ s'identifie à iV. Par ailleurs, $p(0) = -e$, et la transformation de Cayley $p = c^{-1}$ est bien définie dans un voisinage de 0. Sa différentielle en 0 est $Dp(0) = -2i\mathrm{Id}_{V_\mathbb{C}}$. On définit alors un cône (ouvert) régulier en $-e$ en posant

$$C_{-e} = Dp(0)(\Omega) = -i\Omega.$$

Comme ce cône est invariant par le stabilisateur du point $-e$ dans G, on peut définir une structure causale sur $\mathcal{S}$ invariante par G de la manière suivante : si σ est un point quelconque de $\mathcal{S}$, alors il existe $g \in G$ tel que $g(-e) = \sigma$. Le cône

$$C_\sigma = Dg(-e)(C_{-e}), \tag{13}$$

est un cône régulier contenu dans l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en σ, ne dépendant pas du choix de g. Nous obtenons ainsi un champs de cônes réguliers $(C_\sigma)_{\sigma\in\mathcal{S}}$ invariants par G. Enfin, il est clair que le cône régulier C_σ dépend différentiablement de σ.

5.3. Cycles de Maslov. — Soit $\sigma_0 \in \mathcal{S}$. On note $\Sigma(\sigma_0)$ l'ensemble des éléments de S qui ne sont pas transverses à σ_0, c'est-à-dire

$$\Sigma(\sigma_0) = \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_\top(\sigma_0) = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \mathbf{det}(\sigma - \sigma_0) = 0\}.$$

Cet ensemble est appelé cycle de Maslov associé à σ_0.
Nous allons étudier sa structure de variété stratifiée (au sens algébrique), cf. [**11**, Proposition 7.4, Proposition 7.5].

Proposition 5.3 ([**11**]). — *Le cycle de Maslov $\Sigma(\sigma_0)$ est une sous-variété stratifiée de $\mathcal{S}$ (au sens algébrique) de codiemsion 1. Le lieu singulier de $\Sigma(\sigma_0)$ est de codimension ≥ 3 dans $\mathcal{S}$.*

En effet, les strates sont les ensembles $S_k(\sigma_0) = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \mu(\sigma,\sigma_0) = k\}$, $0 \leq k \leq r$. Nous montrons que $S_k(\sigma_0)$ est une sous-variété de $\mathcal{S}$ de codimension $k + \frac{k(k-1)}{2}a$ et que $\Sigma(\sigma_0) = \bigsqcup_{1\leq k\leq r} S_k(\sigma_0) = \overline{S_1(\sigma_0)}$.

Le cycle de Maslov a été étudié pour la première fois par Arnold [$\mathbf{A}_1$] dans le contexte de la variété lagrangienne $\Lambda(r)$. Dans ce cas, l'indice de transversalité de deux lagrangiens λ et λ_0 se traduit par $\mu(\lambda,\lambda_0) = \dim(\lambda \cap \lambda_0)$ de sorte que les deux lagrangiens soient transverses si $\lambda \cap \lambda_0 = 0$. Pour $\lambda_0 \in \Lambda(r)$ fixé, on a $\Sigma(\lambda_0) = \{\lambda \in \Lambda(r) \mid \lambda \cap \lambda_0 \neq 0\}$ (ensemble des λ qui ne sont pas transverses à λ_0). Arnold a montré que le cycle de Maslov admet un champ continu de vecteurs tangents à $\Lambda(r)$ et transverses à $\Lambda_1(r)$. Un tel champs de vecteurs est constitué par les vecteurs $v(\sigma) = \frac{d}{d\theta}(e^{i\theta}\sigma)_{|\theta=0}$ pour $\sigma \in \Lambda_1(r)$ et défini une orientation transverse. Pour un domaine borné de type tube quelconque, nous avons montré que cette notion est généralisée par la notion de structure causale définie sur la frontière de Shilov.

Proposition 5.4 ([**11**, Proposition 7.6]). — *Soit $\sigma_0 \in \mathcal{S}$, et soit $\sigma \in S_1(\sigma_0) \subset \Sigma(\sigma_0)$. Soit $H_{\sigma_0}(\sigma)$ l'espace tangent à $\Sigma(\sigma_0)$ au point σ. Les vecteurs tangents aux courbes causales partant de σ sont tous contenus dans un même demi-espace ouvert de l'espace tangent à $\mathcal{S}$ en σ limité par $H_{\sigma_0}(\sigma)$.*

À tout point $\sigma \in S_1(\sigma_0)$, on associe le demi-espace ouvert $H^+_{\sigma_0}(\sigma)$ contenant les vecteurs tangents aux courbes causales passant par σ. La famille de ces sous-espaces définit une orientation transverse canonique du cycle de Maslov $\Sigma(\sigma_0)$. De plus, ces orientations transverses sont compatibles à l'action de G, en ce sens que si $g \in G$, alors l'orientation transverse canonique du cycle de Maslov $\Sigma(g\sigma_0)$ au point $g\sigma \in S_1(g\sigma_0)$ est donnée par le demi-espace $Dg(\sigma)\big(H^+_{\sigma_0}(\sigma)\big) = H^+_{g\sigma_0}(g\sigma)$, puisque la notion de courbe causale est stable par l'action de G.

6. Indice de Maslov à la Arnold-Leray-Souriau

Les définitions de l'indice triple de Maslov citées dans le paragraphe précédent sont d'ordre algébrique (pour la définition de Kashiwara) ou utilisent la géométrie de $\mathcal{D}$ (pour les définitions de Clerc-Ørsted ou Clerc). Dans ce paragraphe nous allons exposer un travail en commun avec Jean-Louis Clerc [**11**] et qui donne un autre point de vue de l'indice de Maslov n'utilisant que la géométrie de la frontière de Shilov, généralisant ainsi des résultats de Arnold, Leray et Souriau qui n'étaient valables que dans le cas de la variété lagrangienne. Comme l'indice triple de Maslov est un 2-cocycle invariant sur $\mathcal{S}$, il s'agit donc de construire une primitive de ce cocycle sur le revêtement universel de $\mathcal{S}$.

6.1. Revêtement universel de la frontière de Shilov. — La variété $\mathcal{S}$ vue comme espace riemannien symétrique $\simeq U/U_e$ n'est pas semi-simple mais seulement réductif. En effet, $\mathcal{S}$ est stable par la multiplication par un nombre complexe $e^{i\theta}$ de module 1, et ceci montre qu'il y a un sous-groupe isomorphe au groupe des nombres complexes de module 1 dans le centre de U. Rappelons que le polynôme $\mathbf{det}$ est relativement invariant par l'action du groupe de structure $\mathrm{Str}(V_{\mathbb{C}})$ de $V_{\mathbb{C}}$, et il y a donc un caractère χ de $\mathrm{Str}(V_{\mathbb{C}})$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ tel que $\mathbf{det}(gz) = \chi(g)\,\mathbf{det}(z)$, pour tout $g \in \mathrm{Str}(V_{\mathbb{C}})$ et tout $z \in V_{\mathbb{C}}$.
Considérons,

$$\mathcal{S}_1 = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \mathbf{det}(\sigma) = 1\}.$$

On montre alors, cf. [**11**, Proposition 3.1], que $\mathcal{S}_1$ est une sous-variété connexe de $\mathcal{S}$ et que c'est un espace riemannien symétrique semi-simple de type compact qui se réalise comme $\mathcal{S}_1 = U_1^\circ/(U_1^\circ \cap Aut(V))$, où U_1° est la composante neutre du groupe $U_1 = \{u \in U \mid \chi(u) = 1\}$. L'algèbre de Lie de U_1 est $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_1$, où $\mathfrak{p}_1 = \{L(v) \mid v \in V,\ \mathbf{tr}(v) = 0\}$. Fixons un repère de Jordan $(c_j)_{j=1}^r$ de V et soit $\mathfrak{a}_1 = \{L(a) \mid a = \sum_{j=1}^r a_j c_j,\ a_j \in \mathbb{R},\ \mathbf{tr}(a) = 0\}$. Il s'agit d'un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}_1$. Considérons le réseau fondamental Λ_0, de $\mathfrak{a}_1$, engendré par les $2\pi A_{jk}/(A_{jk}|A_{jk})$, $1 \leq j \neq k \leq r$ où A_{jk} est le covecteur de la racine $\frac{1}{2}(a_j - a_k)$. D'autre part le réseau unitaire de $\mathfrak{a}_1$ est donné par $\Lambda = \{H \in \mathfrak{a}_1 \mid \exp(iH)e = e\}$. Nous montrons alors, cf. [**11**, Lemme 3.2, Lemme 3.3], que les deux réseaux coïncident, $\Lambda_0 = \Lambda_1$. Nous en déduisons d'après [**Lo**$_1$] ou [**He**$_3$, Ch. II VII. Theorem 8.4 et Theorem 9.1] le théorème suivant :

Théorème 6.1. — *L'espace symétrique $\mathcal{S}_1$ est simplement connexe.*

Suivant une méthode classique, nous réalisons maintenant le revêtement universel de $\mathcal{S}$. Soit

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \{(\sigma, \theta) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R} \mid \mathbf{det}(\sigma) = e^{ir\theta}\},$$

muni de la topologie induite par la topologie produit sur $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$. La projection sur le premier facteur réalise $\widetilde{\mathcal{S}}$ comme un revêtement de $\mathcal{S}$ avec fibre isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Théorème 6.2 **([11**, Théorème 3.5**]).** — *$\widetilde{\mathcal{S}}$ est le revêtement universel de $\mathcal{S}$.*

En effet, nous montrons que l'application $\mathcal{S}_1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$, $(\sigma, \theta) \longmapsto (e^{i\theta}\sigma, \theta)$ est un homéomorphisme bijectif.

Nous allons à présent construire un revêtement Γ de G, puis une opération de Γ sur $\widetilde{\mathcal{S}}$ relevant l'action de G sur $\mathcal{S}$.

Soit $g \in G$ et $z \in \mathcal{D}$. On note $J(g, z) = Dg(z)$ la différentielle de la transformation $z \longmapsto g(z)$. Nous savons qu'il s'agit d'un élément de $\mathrm{Str}(V_{\mathbb{C}})$, puis l'on pose $j(g, z) = \chi(J(g, z)) \in \mathbb{C}^*$. Pour $g \in G$ fixé, on considère les déterminations de l'argument de $j(g, \cdot)$. Plus précisément une fonction $\varphi(g, \cdot) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une détermination de l'argument $j(g, \cdot)$ si elle est continue et si $e^{i\varphi(g,z)} = \frac{j(g,z)}{|j(g,z)|}$ pour tout $z \in \mathcal{D}$. L'existence de telles déterminations est conséquence du fait que $\mathcal{D}$ est simplement connexe. Deux telles déterminations diffèrent d'un multiple entier de 2π.

Posons alors

$$\Gamma = \{(g, \varphi_g) \mid g \in G\}$$

où $\varphi_g = \varphi(g, \cdot)$ est une détermination de l'argument de $j(g, \cdot)$. La loi de groupe est donnée par $(g, \varphi(g, \cdot))(h, \psi(h, \cdot)) = \big(gh, \varphi(g, h(\cdot)) + \psi(h, \cdot)\big)$.

Pour la topologie, on remarque qu'une détermination $\varphi(g, \cdot)$ de l'argument de $j(g, \cdot)$ est déterminée par sa valeur $\varphi(g, 0)$ à l'origine. Donc Γ s'identifie ensemblistement au sous-ensemble fermé de $G \times \mathbb{R}$ donné par $\{(g, \theta) \in G \times \mathbb{R} \mid e^{i\theta} = j(g, 0)\}$, et on munit Γ de la topologie induite, faisant ainsi de Γ un groupe topologique. La projection $\pi : \Gamma \longrightarrow G$ est continue, et fait de Γ un revêtement[7] de G.

[7] On observe que le groupe Γ n'est pas nécessairement connexe, comme on peut le voir dans le cas où $G = Sp(E)$, voir [**L-V**].

L'application $\iota : \mathbb{Z} \to \Gamma$ donnée par $\iota : n \mapsto (\mathrm{id}, 2n\pi)$ est un homomorphisme de groupes, et la suite exacte $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \to 1$ est une extension centrale de G. Nous montrons alors, cf. [**11**, Proposition 3.7], que pour $(g, \varphi(g,\cdot)) \in \Gamma$ et $(\sigma,\theta) \in \widetilde{\mathcal{S}}$, l'expression

$$\big(g, \varphi(g,\cdot)\big)(\sigma,\theta) = \big(g(\sigma), \theta + \frac{1}{r}\varphi(g,\sigma)\big)$$

définit une action continue de Γ sur $\widetilde{\mathcal{S}}$.
Pour démontrer ce résultat, l'argument principal, est (cf. [**11**, Lemme 3.6]) que pour tout $g \in G$, et tout $\sigma \in \mathcal{S}$,

$$\mathbf{det}(g(\sigma)) = \frac{j(g,\sigma)}{|j(g,\sigma)|}\,\mathbf{det}(\sigma).$$

La preuve de cette formule utilise la structure causale de la frontière de Shilov.

6.2. Indice de Souriau : une première primitive du cocycle de Maslov. — Soit $\mathcal{S}_\top(-e)$ l'ensemble des points de $\mathcal{S}$ qui sont transverses à $-e$. Si $\sigma \in \mathcal{S}_\top(-e)$, alors $(\sigma - se)$ est inversible pour $s = -1$, et donc pour tout $s \in (-\infty, 0]$. L'intégrale (à valeurs dans $V_\mathbb{C}$)

$$\log\sigma = \int_{-\infty}^{0} \big((se-\sigma)^{-1} - (s-1)^{-1}e\big)ds$$

est normalement convergente, et définit une fonction régulière sur l'ouvert $\mathcal{S}_\top(-e)$.

Soit à présent σ et τ deux éléments transverses de $\mathcal{S}$. Il existe un élément $u \in U$ tel que $\tau = u(-e)$. L'élément u n'est pas unique, mais tout autre élément u' satisfaisant $\tau = u'(-e)$ peut s'écrire $u' = uk$ où $k \in U_{-e} = U_e = U \cap Aut(J)$. L'élément $u^{-1}(\sigma)$ est transverse à $-e$, et l'on peut donc définir $\log u^{-1}(\sigma)$. Pour $u' = uk$, on obtient $\log u'^{-1}(\sigma) = k^{-1}\log u^{-1}(\sigma)$ et donc $\mathbf{tr}(\log u^{-1}(\sigma))$ est indépendant du représentant u choisi. En conséquence, $\Psi : (\sigma,\tau) \to \frac{1}{i}\,\mathbf{tr}(\log u^{-1}(\sigma))$ définit sur $\mathcal{S}^2_\top$ une fonction à valeurs réelles régulière, antisymétrique et invariante par l'action du groupe U, cf. [**11**, Proposition 5.2].

On étend la relation de transversalité à $\widetilde{\mathcal{S}}$, en posant, pour deux éléments $\widetilde{\sigma} = (\sigma,\theta), \widetilde{\tau} = (\tau,\phi)$ de $\widetilde{\mathcal{S}}$: $\widetilde{\sigma}\top\widetilde{\tau} \iff \sigma\top\tau$ et on note $\widetilde{\mathcal{S}}^2_\top = \{(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau}) \in \widetilde{\mathcal{S}}^2 \ : \ \widetilde{\sigma}\top\widetilde{\tau}\}$.

Pour un couple d'éléments transverses $\widetilde{\sigma} = (\sigma, \theta), \widetilde{\tau} = (\tau, \phi)$, nous définissons l'indice de Souriau $m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau})$ par la formule

$$m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) = \frac{1}{\pi}\big[\Psi(\sigma, \tau) - r(\theta - \phi)\big]. \tag{14}$$

Nous remarquons immédiatement que la fonction m est antisymétrique et que $e^{2i\pi m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau})} = 1$ de sorte que $m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) \in \mathbb{Z}$.
Enfin, la fonction m est une fonction continue (donc localement constante) sur $\widetilde{\mathcal{S}}^2_{\top}$, d'après la continuité de la fonction Ψ. On montre aussi, cf. [**11**, Proposition 5.4], que la fonction m est invariante sous l'action du groupe Γ. Le théorème suivant montre que l'indice de Souriau est en fait une primitive du cocycle de Maslov.

Théorème 6.3 **(**[**11**, Théorème 5.5]**).** — *Soit* $(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3) \in \widetilde{\mathcal{S}}^3_{\top}$. *La quantité* $m(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) + m(\widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3) + m(\widetilde{\sigma}_3, \widetilde{\sigma}_1)$ *ne dépend que des projections* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ *et est égale à l'indice de Maslov* $\imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. *Autrement dit*

$$m(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) + m(\widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3) + m(\widetilde{\sigma}_3, \widetilde{\sigma}_1) = \imath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \tag{15}$$

Suivant une idée de de Gosson [**deG**], nous avons généralisé la définition de l'indice de Souriau à tout $\widetilde{\mathcal{S}} \times \widetilde{\mathcal{S}}$ (sans la condition de transversalité). Nous avons obtenu ainsi une primitive m définie sur $\widetilde{\mathcal{S}} \times \widetilde{\mathcal{S}}$, antisymétrique, invariante par le groupe Γ et qui vérifie la formule de Leray (15). Localement, nous pouvons donner une expression précise à l'indice de Souriau m. En effet, fixons un repère de Jordan $(c_j)_{1\leq j\leq r}$. Soit $\widetilde{\sigma}_1 = (\sum_{j=1}^{\ell} e^{i\theta_j} c_j + \sum_{j=\ell+1}^{r} e^{i\theta_j} c_j, \theta)$ et $\widetilde{\sigma}_2 = (\sum_{j=1}^{\ell} e^{i\theta_j} c_j + \sum_{j=\ell+1}^{r} e^{i\varphi_j} c_j, \varphi)$ deux éléments tels que $\theta_j - \varphi_j \notin 2\pi\mathbb{Z}$ pour $\ell + 1 \leq j \leq r$. Alors

$$m(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) = \frac{1}{\pi}\Big[\sum_{j=\ell+1}^{r} \{\theta_j - \varphi_j + \pi\} - r(\theta - \varphi)\Big].$$

En particulier si $\widetilde{\sigma}_1 = (-e, -\pi)$ et $\widetilde{\sigma}_2 = (-\sum_{j=1}^{\ell} c_j + \sum_{j=\ell+1}^{r} e^{i\varphi_j} c_j, \varphi)$, où

(i) $-\pi < \varphi_j < \pi$, $\forall j$, $\ell + 1 \leq j \leq r$, et

(ii) $r\varphi = -\ell\pi + \sum_{j=\ell+1}^{r} \varphi_j + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$,

alors

$$m(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) = 2k + r - \ell = 2k + r - \mu(\sigma_1, \sigma_2).$$

6.3. Indice d'Arnold-Leray : une deuxième primitive du cocycle de Maslov. — Les principales propriétés topologiques des cycles de Maslov démontrées dans le paragraphe 5.3 généralisent les propriétés montrées par Arnold dans le cas de la variété lagrangienne $\Lambda(r)$. Dans ce cas particulier, Arnold (voir [$\mathbf{A}_1$] et [$\mathbf{A}_2$]) utilise ces propriétés pour construire un indice pour les couples de points transverses du revêtement universel $\widetilde{\Lambda(r)}$. Les arguments d'Arnold sont encore valables dans notre situation et nous permettent par la suite de proposer une deuxième construction, géométrique cette fois-ci, d'une primitive.

Soit $\sigma_0 \in \mathcal{S}$, et soit γ un chemin dans $\mathcal{S}$, d'origine $\gamma(0) = \sigma$, et d'extrémité $\gamma(1) = \tau$. Un tel chemin est admissible (relativement au cycle de Maslov $\Sigma_0 = \Sigma(\sigma_0)$) s'il est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, si ses extrémités σ et τ n'appartiennent pas à Σ_0, si le chemin n'intersecte le cycle de Maslov que pour un nombre fini de valeurs de $t \in [0, 1]$, (disons $t = t_1, t_2, \ldots, t_k$), si chaque point d'intersection $\gamma(t_j)$ est un point régulier de Σ_0 (c'est-à-dire $\gamma(t_j) \in S_1(\sigma_0)$), et enfin si en un tel point, la courbe γ est différentiable et transverse à Σ_0. Le nombre d'Arnold d'un tel chemin admissible est par définition la somme $\epsilon_1 + \epsilon_2 + \cdots + \epsilon_k$, où ϵ_j vaut $+1$ si $\dot\gamma(t_j) \in H^+_{\sigma_0}(\gamma(t_j))$, et ϵ_j vaut -1 dans le cas contraire.

Soient σ et τ deux points n'appartenant pas au cycle de Maslov Σ_0. Nous montrons, cf. [**11**, Théorème 8.1], que toute classe d'homotopie de chemins d'origine σ et d'extrémité τ contient un chemin admissible. Deux chemins admissibles d'origine σ et d'extrémité τ qui sont homotopes ont le même nombre d'Arnold.

Ce résultat permet d'étendre la notion de nombre d'Arnold à un chemin quelconque γ d'origine σ et d'extrémité τ, en le déclarant égal par définition à l'indice d'un chemin admissible de mêmes origine et extrémité et homotope à γ.

Nous allons à présent tirer profit de l'invariance par homotopie du nombre d'Arnold pour définir l'indice d'Arnold d'un couple de points du revêtement universel $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Soient $\widetilde{\sigma}_0$ et $\widetilde{\tau}_0$ deux points de $\widetilde{\mathcal{S}}$, de projections respectives σ_0 et τ_0 sur $\mathcal{S}$. Soit $\sigma(t)$, $0 \leq t \leq 1$ une courbe causale d'origine σ_0, et $\tau(t)$, $0 \leq t \leq 1$ une courbe anti-causale d'origine τ_0. On note $\widetilde{\sigma(t)}$ (resp. $\widetilde{\tau(t)}$) la courbe dans $\widetilde{S}$ d'origine $\widetilde{\sigma}_0$ (resp. $\widetilde{\tau}_0$) relevant $\sigma(t)$ (resp. $\tau(t)$). Nous montrons (voir [**C-K**, Proposition 4.20]) qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout $t, 0 < t < \epsilon$, les points $\sigma(t)$ et $\tau(t)$ n'appartiennent pas au cycle de

Maslov $\Sigma_0 = \Sigma(\sigma_0)$. Fixons un tel t, et soit $\gamma_t(s)$, $0 \leq s \leq 1$ un chemin admissible (relativement à Σ_0) d'origine $\sigma(t)$ et d'extrémité $\tau(t)$, dont le relevé dans $\widetilde{\mathcal{S}}$ a pour origine $\widetilde{\sigma}(t)$ et pour extrémité $\widetilde{\tau}(t)$.

Par définition l'indice d'Arnold $\nu(\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\tau}_0)$ est le nombre d'Arnold du chemin γ_t. Clairement, à t fixé, cet indice ne dépend pas du choix du chemin γ_t, puisque tout autre chemin ayant les mêmes propriétés lui est homotope et donc a le même nombre d'Arnold.

De plus, nous montrons que cet indice est indépendant du paramètre t, des courbes causales $\sigma(t)$ et anti-causale $\tau(t)$.

La construction de l'indice d'Arnold ne fait appel qu'à des notions invariantes par transformations causales (courbes causales, cycle de Maslov, transversalité), et donc l'indice d'Arnold est invariant par l'action de Γ.

On va maintenant calculer l'indice d'Arnold "en coordonnées", comme nous l'avons fait pour l'indice de Souriau. On fixe pour cela un repère de Jordan $(c_j)_{1\leq j\leq r}$ de V. Grâce aux résultats sur les orbites de l'action de G dans $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$, le résultat suivant couvre le cas général : soient les deux points de $\widetilde{S}$, $\widetilde{\sigma}_0 = \widetilde{-e} = (-e, -\pi)$ et $\widetilde{\tau}_0 = \big(-\sum_{j=1}^{\ell} c_j + \sum_{j=\ell+1}^{r} e^{i\varphi_j} c_j,\ \varphi\big)$. On note $\sigma_0 = -e$ et τ_0 leurs projections correspondantes dans $\mathcal{S}$. On suppose que $-\pi < \varphi_j < \pi$, $\forall j$, $\ell+1 \leq j \leq r$ et que $r\varphi = -\ell\pi + \sum_{j=\ell+1}^{r} \varphi_j + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\nu(\widetilde{\sigma}_0, \widetilde{\tau}_0) = -\ell + k = k - \mu(\sigma_0, \tau_0).$$

Nous déduisons de ce qui précède une formule liant l'indice de Souriau au nombre d'Arnold et à l'indice de transversalité : soient $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}$ deux éléments de $\widetilde{S}$ de projections respectives σ et τ. Alors

$$\nu(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) = \frac{1}{2}\big[m(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) - \mu(\sigma, \tau) - r\big]. \tag{16}$$

Un sous-produit de cette formule est que le membre de droite de (16) est un entier (et non un demi-entier). Nous tirons profit de ce résultat en introduisant la notion d'indice d'inertie et d'indice d'Arnold-Leray :

(i) On appelle indice d'inertie du triplet $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \in \mathcal{S}^3$ la quantité

$$\jmath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{1}{2}\big(\iota(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) + \mu(\sigma_1, \sigma_2) - \mu(\sigma_1, \sigma_3) + \mu(\sigma_2, \sigma_3) + r\big).$$

(ii) Soient $\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2 \in \widetilde{\mathcal{S}}$, de projections respectives σ_1, σ_2. On appelle indice d'Arnold-Leray la quantité

$$n(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) = \nu(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) + \mu(\sigma_1, \sigma_2) + r.$$

D'où le théorème

Théorème 6.4 **([11**, Théorème 8.7]). — *L'indice d'inertie satisfait les propriétés suivantes :*

(*i*) $\jmath$ *est à valeurs entières.*

(*ii*) $\jmath$ *vérifie la relation de 2-cocycle*(8)

$$\jmath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \jmath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4) + \jmath(\sigma_1, \sigma_3, \sigma_4) - \jmath(\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = 0$$

pour tous $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathcal{S}$.

(*iii*) *l'indice d'Arnold-Leray est une primitive de l'indice d'inertie, c'est-à-dire*

$$\jmath(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = n(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2) - n(\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_3) + n(\widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3)$$

pour tous $\widetilde{\sigma}_1, \widetilde{\sigma}_2, \widetilde{\sigma}_3 \in \widetilde{\mathcal{S}}$, *de projections respectives* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Problème 6.5. — *Le revêtement* Γ *que nous avons construit n'est pas connexe. Dans le cas où* G *est le groupe symplectique,* Γ *admet quatre composantes connexes, et la composante connexe neutre coïncide avec le revêtement universel du groupe symplectique. Qu'en est-il dans le cas général ? Il serait intéressant de déterminer le lien entre le revêtement universel de* G, Γ *et l'indice de Maslov.*

Problème 6.6. — *A partir de l'indice de Maslov nous construisons un 2-cocycle borné sur* G, $c(g_1, g_2) = \imath(\sigma_0, g_1\sigma_0, g_1g_2\sigma_0)$ *où* σ_0 *est un point arbitraire de* $\mathcal{S}$. *La classe de ce 2-cocycle dans* $H^2(G, \mathbb{Z})$ *est indépendante de* σ_0. *Dans le cas classique (où* G *est le groupe symplectique) ce cocycle joue un rôle très important dans l'étude de la représentation métaplectique, voir Lion et Vergne* [**L-V**] *ou Souriau* [**Sou**]. *Qu'en est-il dans le cas général ?*

Problème 6.7. — *Fixons* $-e \in S$, *et soit* $\gamma : [a, b] \to S$ *un chemin dans* S. *Nous avons défini le nombre d'Arnold* $\nu_A(\gamma, -e)$ *du chemin* γ *relativement à* $-e$ *comme étant le nombre d'intersection de* γ *avec le cycle de Maslov* $\Sigma(-e) = \overline{S_1(-e)} = \cup_{k=1}^{r} S_k(-e)$.
Soit $\gamma : [a, b] \to G$ *un chemin dans le groupe conforme. Il est possible de lui associer un nombre d'Arnold de la façon suivante :* $\nu_A(\gamma) = \nu_A(\gamma \otimes -e, -e)$, *où* $\gamma \otimes -e$ *est le chemin dans* $\mathcal{S}$ *défini par* $(\gamma \otimes -e)(t) = \gamma(t)(-e)$.

(8)On observe que l'indice d'inertie $\jmath$ n'a pas la propriété d'antisymétrie que possède l'indice de Maslov $\imath$.

Nous pourrions considérer $\nu_A(\gamma)$ *comme le nombre d'intersection du cycle de Maslov suivant*

$$G(-e) = \{g \in G \ : \ \mathbf{det}(g(-e) + e) \neq 0\}.$$

Une étude détaillée de cet indice et des strates

$$G_k(-e) = \{g \in G \ : \ \mu(g(-e), -e) = k\}$$

du cycle de Maslov pourrait être également réalisée.

7. Nombre de rotations de Poincaré généralisé

Dans [**B-G**], Barge et Ghys montrent qu'il est possible d'utiliser une primitive (quelconque) du cocycle classique de Maslov pour construire un invariant (pour la conjugaison) sur le groupe symplectique, baptisé nombre de rotation symplectique. Cette notion est propre aux groupes de Lie uniformément parfaits. Nous montrons qu'une construction analogue est possible dans le cas d'un groupe conforme.

Rappelons qu'un groupe de Lie G est uniformément parfait, s'il existe un entier k tel que, tout élément $g \in G$ est produit d'au plus k commutateurs. Un tel groupe possède la propriété suivante : soit $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} G \to 1$ une extension centrale de G. Soit $T = \imath(1)$. Alors il existe au plus une application $\Phi : \Gamma \to \mathbb{R}$ telle que

(1) $\Phi(\gamma T) = \Phi(\gamma) + 1$, $\forall \gamma \in \Gamma$
(2) $\Phi(\gamma_1\gamma_2) - \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)$ est bornée sur $\Gamma \times \Gamma$
(3) $\Phi(\gamma^n) = n\Phi(\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Une application Φ satisfaisant (2) est un quasi-morphisme. Une application Φ satisfaisant (2) et (3) est un quasi-morphgisme homogène.

Si Φ existe, alors la fonction

$$c : G \times G \to \mathbb{R},\ c(g_1, g_2) = \Phi(\gamma_1\gamma_2) - \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)$$

(où γ_i est le relèvement de g_i) est bien définie et se présente comme un 2−cocycle, c'est-à-dire, $c(g_1, g_2) + c(g_1g_2, g_3) = c(g_1, g_2g_3) + c(g_2, g_3)$.

Donnons un exemple. Soit $G = Homeo^+(S^1)$ le groupe des difféomorphismes du cercle unité qui préservent l'orientation. Ce groupe est uniformément parfait (cf. [**B-G**]). Considérons le revêtement universel $\widetilde{Homeo^+}(S^1)$ comme une extension centrale de $Homeo^+(S^1)$. Nous allons exhiber une fonction qui vérifie (1), (2) et (3).

Soit p, q, r trois points du cercle S^1. L'ordre cyclique de p, q, r est défini par

$$\mathrm{ord}(p, q, r) = \begin{cases} 0 & \text{si 2 points coïncident} \\ 1 & \text{si } q \in)p, r(\\ -1 & \text{si } q \in)r, p(. \end{cases}$$

Considérons $\Phi_{\mathrm{ord}} : \widetilde{Homeo^+}(S^1) \to \mathbb{Z},\ \Phi_{\mathrm{ord}}(\widetilde{f}) = 2E(\widetilde{f}(0))$ où E est la fonction définie par $E(x) = x$ si $x \in \mathbb{Z}$ et $E(x) = [x] + \frac{1}{2}$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $[x]$ étant la valeur entière de x. Il est clair que Φ_{ord} est un quasi-morphisme (non homogène). En effet, $\Phi_{\mathrm{ord}}(\widetilde{f}\circ\widetilde{g})-\Phi_{\mathrm{ord}}(\widetilde{f})-\Phi_{\mathrm{ord}}(\widetilde{g}) = \mathrm{ord}(1, f(1), f\circ g(1))$ et donc borné. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Phi_{\mathrm{ord}}(\widetilde{f}^n) = 2\lim_{n\to+\infty}\frac{E(\widetilde{f}^n(0))}{n} =: 2\tau(\widetilde{f}).$$

La fonction $\tau : \widetilde{Homeo^+}(S^1) \to \mathbb{R}$ est appelée nombre de translations de Poincaré. Elle vérifie (1), (2) et (3). En passant au quotient, nous obtenons une fonction $\rho : Homeo^+(S^1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq S^1$, qu'on appelle nombre de rotations de Poincaré.

Retournons au cas général d'un domaine hermitien symétrique de type tube $\mathcal{D} = G/K$. Nous allons utiliser la primitive m pour généraliser la notion de nombre de rotation de Poincaré classique.

A notre connaissance, il n'y a pas de résultat prouvant que le groupe G est uniformément parfait. Toutefois nous pouvons montrer le lemme suivant :

Lemme 7.1 **(**[**11**, lemme 10.1]**).** — *Soit $G = KAN$ une décomposition d'Iwasawa de G, et soit $r = \dim A$ le rang déployé de G. Alors*

(i) tout élément de N est un commutateur,

(ii) tout élément de A peut s'écrire comme produit d'au plus r commutateurs.

Nous montrons ensuite

Lemme 7.2 **(**[**11**, Lemme 10.2]**).** — *Il existe au plus une application $\Phi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

(0) Φ *est continue*

(1) $\Phi(\gamma T) = \Phi(\gamma) + 1$, $\forall \gamma \in \Gamma$

(2) $\Phi(\gamma_1\gamma_2) - \Phi(\gamma_1) - \Phi(\gamma_2)$ *est bornée sur* $\Gamma\times\Gamma$

(3) $\Phi(\gamma^n) = n\Phi(\gamma)$, $\forall \gamma \in \Gamma$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Notons que la condition (0) est imposée par le fait que nous n'avons pas pu montrer que tout élément du sous-groupe K s'écrit comme produit de commutateurs.

Soit $\widetilde{o}$ un point base dans $\widetilde{\mathcal{S}}$, et posons pour $\gamma \in \Gamma$

$$c(\gamma) = m(\gamma\cdot\widetilde{o}, \widetilde{o}) \ .$$

La primitive de Souriau généralisée $m(\widetilde{\sigma},\widetilde{\tau})$ est invariante par Γ, et donc pour tous $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ on a $c(\gamma_1\gamma_2)-c(\gamma_1)-c(\gamma_2)=m(\gamma_1\gamma_2\cdot\widetilde{o},\widetilde{o})+m(\widetilde{o},\gamma_1\cdot\widetilde{o})+m(\gamma_1\cdot\widetilde{o},\gamma_1\gamma_2\cdot\widetilde{o})$ qui est l'indice de Maslov des projections sur $\mathcal{S}$ des points $\gamma_1\gamma_2\cdot\widetilde{o}$, $\widetilde{o}$ et $\gamma_1\cdot\widetilde{o}$ de sorte que $|c(\gamma_1\gamma_2)-c(\gamma_1)-c(\gamma_2)|\leq r$. D'après un résultat classique, nous montrons que

$$\tau(\gamma):=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k}\,c(\gamma^k)$$

existe pour tout élément $\gamma\in\Gamma$. Nous en déduisons, cf. [**11**, Théorème 10.3], que la fonction $-\frac{1}{2}\tau$ est un quasi-morphisme sur Γ. Elle est indépendante du choix de $\widetilde{o}$.
Par passage au quotient, le quasi-morphisme $-\frac{1}{2}\tau$ définit une fonction de G dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par $\rho(g)=-\frac{1}{2}\tau(\gamma)\mod\mathbb{Z}$ où γ est un relèvement quelconque de g. Pour $g\in G$, la quantité $\rho(g)$ est appelée nombre de rotation généralisé de g. La fonction ρ est invariante par conjugaison (toujours d'après l'unicité). Enfin, nous montrons, cf. [**11**, Proposition 10.4], que la fonction ρ possède les propriétés suivantes :

(i) si $g\in G$ fixe un point de S, alors $\rho(g)=0\mod\mathbb{Z}$.
(ii) si $u\in U$, alors $e^{2i\pi\rho(u)}=\chi(u)$.

Problème 7.3. — *Peut-on montrer que le groupe conforme G est uniformément parfait ?*

8. Opérateurs de Hua et transformation de Poisson d'un domaine borné symétrique

Soit $\mathcal{D} = G/K$ un espace Riemannien symétrique de type non compact. A chaque frontière G/P est associée une transformation de Poisson, $\mathcal{P}_\lambda(f)(gK) = \int_K f(gk)dk$, envoyant les hyperfonctions sur G/P vers les fonctions propres de l'algèbre $\mathbb{D}(\mathcal{D})^G$ des opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{D}$. Pour la frontière maximale $G/P_{\min}$, le résultat le plus important, appelé conjecture de Helgason, a été prouvé par Kashiwara et al. [**K et** *al.*] : une fonction est fonction propre de tous les opérateurs différentiels invariants sur $\mathcal{D}$ si et seulement si elle est une intégrale de Poisson $\mathcal{P}_\lambda(gK) = \int_K f(k)e^{-\langle\lambda+\rho, H(g^{-1}k\rangle}dk$ d'une hyperfonction f sur la frontière maximale, pour un $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ générique.

Lorsque $\mathcal{D}$ est un espace symétrique hermitien, on s'intéresse particulièrement aux fonctions holomorphes, et dans ce cas, la frontière la plus adaptée est la frontière minimale $G/P_{\max}$ dite aussi frontière de Shilov. Dans le cas particulier de la boule matricielle $\mathbf{I}_{n,n} = SU(n,n)/S(U(n) \times U(n))$, Hua [**Hu**$_2$] a introduit la transformation de Poisson pour les hyperfonctions sur la frontière de Shilov, $\mathcal{P}_1 f(z) = \int_{\mathcal{S}} P(z,u)f(u)d\sigma(u)$ et a montré (bien avant) que l'algèbre $\mathbb{D}(\mathcal{D})^G$ n'est pas la plus appropriée pour décrire les intégrales de Poisson sur la frontière de Shilov, introduisant pour cela un opérateur (vectoriel) du second ordre (un système à n^2 équations) appelé depuis opérateur de Hua. Plus précisément, Hua a montré que toute intégrale de Poisson sur la frontière de Shilov de la boule matricielle est annulée par cet opérateur. Il y a plus de 30 ans Stein avait posé le problème de savoir si le système de Hua était suffisant pour qu'une fonction soit transformée de Poisson du bord de Shilov.

Ce problème avait été abordé par Korányi et Malliavin [**Kor-M**] qui étudiaient, par des méthodes probabilistes, le cas du demi-plan généralisé de Siegel de rang deux. Johnson donnait une nouvelle démonstration de leur résultat dans [**Joh**$_2$] et l'étendait au cas du demi-plan généralisé de Siegel de rang quelconque dans [**Joh**$_2$].

Johnson et Korányi [**J-K**] ont résolu le problème dans le cas général d'un domaine de type tube : *toute fonction annulée par un opérateur (système) de Hua $\mathcal{H}$ généralisé du second ordre est une intégrale de*

Poisson d'une hyperfonction sur la frontière de Shilov. Plus tard, Lassalle [**Las**] a trouvé un système de Hua optimal contenant un nombre minimal (égal à $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}$) d'équations.

Berline et Vergne [**B-V**] ont généralisé le résultat de Johnson et Korányi aux domaines bornés symétriques de type non-tube en introduisant un opérateur de Hua généralisé du troisième ordre.

Dans [**10**] en collaboration avec Zhang, nous avons donné une généralisation de la caractérisation de Berline et Vergne au cas non trivial (cas non nécessairement harmonique). Pour exposer nos résultats nous avons besoin d'introduire certaines notations.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique dans un espace vectoriel complexe de dimension n. Soit G la composante connexe du groupe des automorphismes holomorphes de $\mathcal{D}$, et K le sous-groupe d'isotropie de G au point $0 \in \mathcal{D}$. Le sous-groupe K est compact maximal dans G et comme espace symétrique hermitien, $\mathcal{D} \simeq G/K$.

Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ sa décomposition de Cartan. Dans cette situation, le centre $\mathfrak{z}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ de K est de dimension un, et il existe un élément $Z_0 \in \mathfrak{z}$ tel que $\mathrm{Ad}(Z_0)$ soit une structure complexe de $\mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{p}^-$ la décomposition correspondante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ comme somme de sous-espaces propres.

D'après Loos [**Lo**$_3$], il existe une application quadratique $Q : V \mapsto End(\bar{V}, V)$ (ici $\bar{V}$ est la conjugaison complexe de V), telle que $\mathfrak{p} = \{\xi_v : v \in V\}$, où ξ_v est le champs de vecteurs quadratique défini par $\xi_v(z) = v - Q(z)\bar{v}$.

Soit $\{z\bar{v}w\} := Q(z+w)\bar{v} - Q(z)\bar{v} - Q(w)\bar{v}$ la polarisation de $Q(z)\bar{v}$. Elle définit une structure de système triple de Jordan sur V (voir [**Lo**$_3$]).

Pour $z, v \in V$, on définit l'endomorphisme $D(z,\bar{v}) \in \mathrm{End}(V)$ par, $D(z,\bar{v})w = \{z\bar{v}w\}$. On montre que $\langle z, v\rangle = \mathbf{tr}D(z,\bar{v})$ définit un produit scalaire hermitien sur V, de sorte que V soit un système triple de Jordan hermitien positif.

La norme spectrale de V est donnée par $\|z\| = \|\frac{1}{2}D(z,\bar{z})\|_{\mathrm{op}}^{1/2}$ et le domaine borné $\mathcal{D}$ se réalise (cf. [**Lo**$_3$]) comme la boule unité ouverte pour cette norme

$$\mathcal{D} = \{z \in V \ : \ \|z\| < 1\}.$$

Un élément $c \in V$ est un tripotent si $\{c\bar{c}c\} = c$. Un repère de Jordan du système triple V est une famille maximale de tripotents minimaux deux à deux orthogonaux.

Le groupe K opère transitivement sur les repères de Jordan. Par conséquent, tous les repères de Jordan ont le même cardinal, noté r et qu'on appelle rang de V. Il se trouve que r est exactement le rang (déployé) de l'espace symétrique G/K.

Fixons un repère de Jordan $\{c_j\}_{j=1}^r$. Alors $e = c_1 + \ldots + c_r$ est un tripotent maximal. La $G-$orbite, $\mathcal{S} = G \cdot e$ (qui est aussi une $K-$orbite) est la frontière de Shilov de $\mathcal{D}$. Il faut noter que $\mathcal{S}$ n'est pas en général un espace symétrique. On montre (cf. [**Lo**$_3$]), que $\mathcal{S}$ coïncide avec la variété compacte des tripotents maximaux.

L'espace vectoriel $\mathfrak{a} = \oplus_{j=1}^r \mathbb{R}\xi_{c_j}$ est un espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$. Soit $(\beta_j)_{j=1}^r$ une base de $\mathfrak{a}^*$ telle que $\beta_j(\xi_{c_k}) = 2\delta_{j,k}$. Alors l'ensemble des racines restreintes $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ est formé de $\pm\beta_j$ $(1 \leq j \leq r)$ (de multiplicité 1), de $\pm\frac{1}{2}(\beta_j \pm \beta_k)$ $(1 \leq j \neq k \leq r)$ (de multiplicité a) et de $\pm\frac{1}{2}\beta_j$ $(1 \leq j \leq r)$ (de multiplicité b). Le triplet (r, a, b) caractérise complètement le domaine borné symétrique $\mathcal{D}$. On montre que $\mathcal{D}$ est de type tube si et seulement si $b = 0$ et dans ce cas V est la compléxifiée d'une algèbre de Jordan euclidienne.

8.1. Transformations de Poisson. — Soit $\Sigma^+ \subset \Sigma$ un sous-ensemble de racines positives et soit $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\beta\in\Sigma^+} m_\beta \beta$ la demi-somme des racines positives. On a $\rho = \sum_{j=1}^r \rho_j$ où $\rho_j = \frac{1}{2}(b+1+a(j-1))\beta_j$. Soit $\mathfrak{n} = \sum_{\Sigma^+} \mathfrak{g}^\beta$, alors la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{g}$ est donnée par $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}$. Soit $\mathfrak{m} = Z_{\mathfrak{k}}(\mathfrak{a})$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$ et notons M, A et N les sous-groupes analytiques de G correspondant à $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ respectivement.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et soit e_λ (la fonction d'Harish-Chandra) l'unique fonction sur $\mathcal{D}$, invariante par N et telle que $e_\lambda(\exp\sum_{j=1}^r t_j\xi_{c_j}\cdot o) = e^{2\sum_{j=1}^r t_j(\lambda_j+\rho_j)}$. Il est connu que e_λ est une fonction propre de tous les opérateurs $D \in \mathbb{D}(\mathcal{D})^G$, $De_\lambda = \chi_\lambda(D)e_\lambda$. Notons

$$\mathcal{M}(\mathcal{D}, \lambda) = \{f \in \mathcal{C}^\infty,\ Df = \chi_\lambda(D)f,\ \forall D \in \mathbb{D}(\mathcal{D})^G\}.$$

Le sous-groupe $P_{\min} = MAN$ est un sous-groupe parabolique minimal de G. La frontière maximale (dite aussi frontière de Furstenberg) $G/P_{\min}$ sera identifiée à K/M.

Si X est une variété analytique, nous désignons par $\mathcal{B}(X)$ l'espace des hyperfonctions sur X.

La transformation de Poisson généralisée attachée à la frontière maximale est définie par

$$\mathcal{P}_{\lambda,K/M}f(gK) = \int_K e_\lambda(k^{-1}g)f(k)dk$$

pour tout $f \in \mathcal{B}(K/M)$. L'image de $\mathcal{P}_{\lambda,K/M}$ a été caractérisée par M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima et M. Tanaka dans le théorème suivant

Théorème 8.1 **([K et** *al.*]). — *Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $-2\frac{\langle\lambda,\alpha\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle} \notin \{1,2,3,\cdots\}$, pour tout $\alpha \in \Sigma^+$. Alors la transformation de Poisson $\mathcal{P}_{\lambda,K/M}$ est un G isomorphisme de $\mathcal{B}(K/M)$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{D},\lambda)$.*

Un $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant la condition de ce théorème sera dit générique.

Suivant Hua [**Hu**$_2$] et Korányi [**Kor**$_2$], nous allons définir maintenant la transformation de Poisson généralisée attachée à la frontière de Shilov $\mathcal{S}$. Soit h l'unique polynôme $K-$invariant sur V tel que sa restriction à $\oplus_{j=1}^r \mathbb{R}c_j$ vérifie $h(\sum_{j=1}^r t_jc_j) = \prod_{j=1}^r(1-t_j^2)$. Soit $h(z,w)$ la polarisation de $h(z)$ de sorte que la fonction polynômiale[(9)] $h(z,w)$ soit holomorphe en z, anti-holomorphe en w et vérifie $h(z,z) = h(z)$. Le noyau de Poisson sur $\mathcal{D}\times\mathcal{S}$ est défini par $P(z,u) = (h(z,z)/|h(z,u)|^2)^{n/r}$.

Pour $s \in \mathbb{C}$, la transformation de Poisson généralisée $\mathcal{P}_s$ attachée à la frontière de Shilov est définie par

$$\mathcal{P}_sf(z) = \int_{\mathcal{S}} P(z,u)^s f(u)d\sigma(u)$$

pour toute hyperfonction $f \in \mathcal{B}(\mathcal{S})$. Il est clair que $\mathcal{P}_s$ peut être vue comme une restriction d'une transformation de Poisson $\mathcal{P}_{\lambda,K/M}$. Cependant, pour s fixé, il y a différents choix pour λ. Nous allons déterminer un λ spécifique vérifiant la condition du théorème de Kashiwara et *al.* Pour cela notons $\xi_e = \xi_{c_1} + \ldots + \xi_{c_r}$ et considérons la décomposition $\mathfrak{a} = \mathbb{R}\xi_e \oplus \xi_e^\perp$ (par rapport à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$). Notons ξ_e^* le vecteur dual, $\xi_e^*(\xi_e) = 1$. Nous l'étendons à tout $\mathfrak{a}$ par la projection orthogonale définie ci-dessus. Soit $\lambda_s \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ donnée par $\lambda_s = \rho + 2n(s-1)\xi_e^*$, alors la condition de Kashiwara et *al.* pour $\lambda = \lambda_s$ est équivalente à la

(9)La fonction h est liée au noyau de Szegö et l'idée de construire le nouyau de Poisson à l'aide du noyau de Szegö est due à Hua.

suivante[10]

$$(17)\quad -4[b+1+j\frac{a}{2}+\frac{n}{r}(s-1)] \notin \{1,2,3,\ldots\},\ \text{ pour, } j=0 \text{ et } j=1.$$

Nous avons alors $\mathcal{P}_s f = \mathcal{P}_{\lambda_s,K/M} f$, où f est considérée comme une fonction sur K et donc sur K/M. D'où $\mathcal{P}_s\mathcal{B}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{P}_{\lambda_s,K/M}\mathcal{B}(K/M) = \mathcal{M}(\mathcal{D},\lambda_s)$, la dernière égalité étant vraie lorsque λ_s (ou s) est générique.

8.2. Opérateur de Hua du $2^{\mathbf{nd}}$ ordre. — Johnson et Korányi ont introduit un opérateur généralisant celui que Hua a utilisé pour caractériser intégrales de Poisson (cas harmonique) dans le cas des domaines bornés de type **I**. Pour décrire cet opérateur choisissons une base $\{v_j\}_j$ de $\mathfrak{p}^+$ et considérons $\{v_j^*\}$ sa base duale dans $\mathfrak{p}^-$ (par rapport à la forme de Killing de $\mathfrak{g}$). L'opérateur de Hua du second ordre est donné par

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} v_i v_j^* \otimes [v_j, v_i^*].$$

C'est un élément de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})\otimes\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$, et on vérifie qu'il ne dépend pas de la base $\{v_j\}$ choisie. En identifiant les éléments de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ aux opérateurs différentiels invariants (à gauche) par G, nous pouvons voir $\mathcal{H}$ comme un opérateur différentiel homogène de $C^\infty(G/K)$ vers les sections C^∞ de $G\times_K \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$.

Afin de donner une expression géométrique (explicite) de l'opérateur de Hua, rappelons que si E est une représentation holomoprhe de $K_{\mathbb{C}}$, alors en trivialisant les sections du fibré E sur $\mathcal{D}$ en l'espace $C^\infty(\mathcal{D},E)$, l'opérateur de Cauchy-Riemann sur E est défini par

$$\mathbf{D}_{CR} = b(z,\bar{z})\bar{\partial} : C^\infty(\mathcal{D},E) \to C^\infty(\mathcal{D}, T\mathcal{D}\otimes E) = C^\infty(\mathcal{D}, V\otimes E)$$

où nous avons identifé l'espace tangent à $\mathcal{D}$ avec V et où $b(z,w) = I - D(z,\bar{w}) + Q(z)Q(\bar{w})$ est l'opérateur e Bergman de V.
Considérons l'espace $C^\infty(\mathcal{D})$ comme les sections du fibré en droite trivial. L'opérateur ∂ est bien définit de $C^\infty(\mathcal{D})$ vers l'espace $C^\infty(\mathcal{D},\bar{V})$ considéré comme l'espace des sections du fibré cotangent holomorphe $T'\mathcal{D} = V' = \bar{V}$. On montre alors que l'opérateur

$$\mathrm{Ad}_{V\otimes\bar{V}}(\mathbf{D}_{CR}\otimes\partial) : C^\infty(\mathcal{D}) \to C^\infty(\mathcal{D},\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})$$

coïncide avec l'opérateur de Hua,

$$\mathrm{Ad}_{V\otimes\bar{V}}(\mathbf{D}_{CR}\otimes\partial) = \mathcal{H}.$$

[10] un nombre complexe s vérifiant la condition (17) sera dit générique.

Symboliquement, on peut écrire

$$\mathcal{H} = D(b(z,\bar{z})\bar{\partial}, \partial).$$

L'action de l'opérateur de Hua sur le noyau de Poisson généralisé est donnée ci-dessous

Théorème 8.2 **([10**, Theorem 5.3]). — *Pour $u \in \mathcal{S}$ fixé, la fonction $z \mapsto P(z,u)^s$ vérifie*

$$\mathcal{H}P(z,u)^s = P(z,u)^s\{(\frac{n}{r}s)^2 D(b(z,z)(z^{\bar{z}} - u^{\bar{z}}), \bar{z}^z - \bar{u}^z) - (\frac{n}{r}sp)Z_0\}$$

où, z^w désigne le quasi-inverse de z par rapport à w et où l'entier $p = (r-1)a + b + 2$ est le genre du domaine borné symétrique, cf. [**Lo**$_3$].

Si $\mathcal{D}$ est un domaine de type tube, alors nous déduisons du théorème précédent, un résultat dû à Faraut et Korányi [**F-K**, Theorem XIII.4.4] :

$$\mathcal{H}P(z,u)^s = 2(\frac{n}{r})^2 s(s-1)P(z,u)^s I.$$

Lorsque $s = 1$ (c-à-d. dans le cas harmonique), Johnson et Korányi [**J-K**] ont montré qu'*une fonction F est annulée par l'opérateur de Hua $\mathcal{H}$ si et seulement si, F est une intégrale de Poisson $\mathcal{P}_1 f$ d'une hyperfonction sur la frontière de Shilov.*

Le cas général d'un $s \in \mathbb{C}$ générique est dû à Shimeno [**Sh**$_1$] : *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $-4\left[1 + j\frac{a}{2} + \frac{n}{r}(s-1)\right] \notin \{1,2,3,\ldots\}$ pour $j = 0$ et 1. Alors une fonction régulière F sur $\mathcal{D}$ est transformation de Poisson $\mathcal{P}_s f$ d'une hyperfonction sur $\mathcal{S}$ si et seulement si elle vérifie le système de Hua $\mathcal{H}F = 2(\frac{n}{r})^2 s(s-1)FZ_0$.*

Il est important de remarquer que la valeur propre du théorème 8.2 n'est scalaire lorsque $\mathcal{D}$ est un domaine de type non-tube. Cependant, pour les domaines non-tubes de type $\mathbf{I}_{r,r+b}$ un phénomène particulier se produit. Nous allons l'expliquer ci-dessous.

8.3. Cas des domaines de type $\mathbf{I}_{r,r+b}$. — L'espace $\mathrm{M}_{r,r+b}(\mathbb{C})$ des matrices complexes $r \times (r+b)$, muni du produit triple $\{x\bar{y}z\} = xy^*z + zy^*x = D(x,\bar{y})z$ est un système triple de Jordan. Dans ce cas, la forme quadratique $Q(z)$ est donnée par $Q(z)\bar{v} = zv^*z$ et l'opérateur de Bergman par $b(x,y)z = (I - xy^*)z(I - y^*x)$. Le domaine borné symétrique associé est $\mathbf{I}_{r,r+b} = \{z \in \mathrm{M}_{r,r+b}(\mathbb{C}),\ I_r - z^*z \gg 0\} \simeq SU(r,r+b)/S(U(r)\times U(r+$

$b)$). Sa frontière de Shilov est $\mathcal{S} = \{z \in \mathrm{M}_{r,r+b}(\mathbb{C}),\ I_r = z^*z\}$. Dans cette situation l'opérateur de Hua est donné par

$$\mathcal{H} = D(b(z,z)\bar{\partial}, \partial) = (I - zz^*)\bar{\partial}(I - z^*z)\partial^t + \partial^t(I - zz^*)\bar{\partial}(I - z^*z).$$

Un phénomène particulier se produit pour ces domaines. L'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ se décompose comme somme de deux idéaux irréductibles. En effet, $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{r,r+b}(\mathbb{C}),\ \mathbf{tr}(A) + \mathbf{tr}(D) = 0\} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{(1)} \oplus \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{(2)}$ où $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{(1)}$ est l'idéal formé par les matrices $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{tr}(A)}{r+b} I_{r+b} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{r,r+b}(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{(2)}$ est l'idéal formé par les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{r,r+b}(\mathbb{C})$, avec $\mathbf{tr}(D) = 0$. Il s'en déduit une variante de l'opérateur de Hua, en le projetant sur l'idéal $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}^{(1)}$. Nous obtenons alors

$$\mathcal{H}^{(1)} = D(b(z,z)\bar{\partial}, \partial)^{(1)} = (I - zz^*)\bar{\partial}(I - z^*z)\partial^t.$$

Dans [**B-V**], Berline et Vergne ont montré qu'une fonction est annulée par l'opérateur $\mathcal{H}^{(1)}$ si et seulement si elle est une intégrale de Poisson $\mathcal{P}_1 f$ d'une hyperfonction sur la frontière de Shilov. Nous avons généralisé ce résultat comme suit :

Théorème 8.3 **(**[**10**, Theorem 6.1]**).** — *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $-4[b+1+j+(r+b)(s-1)] \notin \{1,2,3,\ldots\}$ pour $j = 0$ et 1. Une fonction régulière f sur $\mathbf{I}_{r,r+b}$ est une intégrale de Poisson $\mathcal{P}_s\varphi$ d'une hyperfonction φ sur la frontière de Shilov, si et seulement si f vérifie*

$$\mathcal{H}^{(1)} f = (r+b)^2 s(s-1) f I_r. \tag{18}$$

La démonstration de ce théorème se décompose en deux grande étapes. Nous montrons d'abord que le système de Hua (18) est nécessaire, et pour cela il suffit de montrer que la fonction $z \mapsto P(z,u)^s$ vérifie ce système : $\mathcal{H}^{(1)} P(z,u)^s = (r+b)^2 s(s-1) P(z,u)^s I_r$, voir [**10**, Proposition 6.2].
La deuxième étape consiste à montrer que le système de Hua est suffisant. Nous calculons d'abord la partie radiale de $\mathcal{H}^{(1)}$ (ie. sa restriction aux fonctions $K-$invariantes), cf. [**10**, Proposition 6.3]. Nous en déduisons que si f vérifie le système de Hua alors elle vérifie un système hypergéométrique, ce qui entraîne, en utilisant un résultat de Yan [**Y**], que $f \in \mathcal{M}(\mathbf{I}_{r,r+b}, \lambda_s)$, cf. [**10**, Proposition 6.4]. Il s'en suit, d'après le théorème de Kashiwara et al. [**K et** *al.*], que f est une transformation de Poisson $\mathcal{P}_s\varphi$ d'une hyperfonction φ sur la frontière maximale K/M.

Pour montrer que φ est définie sur la frontière de Shilov, nous utilisons une méthode due à Lassalle [**Las**] et à Berline et Vergne [**B-V**] combinée à la méthode des opérateurs différentiels à singularités régulières due à Kashiwara et Oshimia. Cette partie est très technique et nous renvoyons le lecteurs à [**10**] pour plus de détails.

8.4. Opérateurs de Hua du 3$^{\text{e}}$ ordre. — Retournons au théorème 8.2. Nous remarquons que si on veut que l'opérateur de Hua annule le noyau de Poisson généralisé, il est nécessaire de mettre plus de dérivations qu'il y en a dans $\mathcal{H}$. D'où l'idée de Berline et Vergne [**B-V**] d'introduire un opérateur de Hua du 3$^{\text{e}}$ ordre,

$$\mathcal{V} = \sum_{i,j,k} v_i v_j^* v_k \otimes [v_i^*, [v_j, v_k^*]] \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \otimes \mathfrak{p}^-$$

que l'on peut considérer comme un opérateur sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$ à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{D}, \mathfrak{p}^-)$.

Le résultat principal de Berline et Vergne [**B-V**] est le suivant : *soit $\mathcal{D}$ un domaine borné symétrique de type non-tube. Soit f une fonction harmonique sur $\mathcal{D}$. Alors f est l'intégrale de Poisson $\mathcal{P}_1\varphi$ d'une hyperfonction sur le bord de Shilov si et seulement si $\mathcal{V}f = 0$.*

Dans [**10**] nous avons introduit deux opérateurs de Hua du 3$^{\text{e}}$ ordre, $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U}$, différents de celui de Berline et Vergne pour généraliser leur résultat à tout s générique.

Comme pour $\mathcal{H}$, nous allons donner une réalisation géométrique (explicite) de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$.
Soit E est un fibré vectoriel holomorphe au dessus de $\mathcal{D}$ sur lequel on définit une structure hermitienne (à l'aide de l'opérateur de Bergman). Alors il existe une unique connection $\nabla : C^\infty(\mathcal{D}, E) \to C^\infty(\mathcal{D}, T'\mathcal{D} \otimes E)$ compatible avec la structure hermitienne et la différentiation anti-holomorphe. Soit $T = T^{(1,0)} \oplus T^{(0,1)}$ la décomposition du fibré tangent en parties holomorphe et anti-holomorphe et soit $T' = (T^{(1,0)})' \oplus (T^{(0,1)})'$ et $\nabla = \nabla^{(1,0)} + \nabla^{(0,1)}$ les décompositions correspondantes. Alors $\nabla^{(0,1)} = \bar{\partial}$ et $\nabla^{(1,0)} : C^\infty(\mathcal{D}, E) \to C^\infty(\mathcal{D}, (T^{(1,0)})' \otimes E) = C^\infty(\mathcal{D}, \mathfrak{p}^- \otimes E)$. Notons que sur l'espace $C^\infty(\mathcal{D})$ des sections du fibré trivial, on a $\nabla^{(1,0)} = \partial$.

Nous introduisons donc les opérateurs de Hua du 3e ordre $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U}$ sur $C^\infty(\mathcal{D},E)$ par

$$\mathcal{W} = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+\otimes\mathfrak{k}_\mathbb{C}\to\mathfrak{p}^+}\big(\mathbf{D}_{CR}(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^+\otimes\mathfrak{p}^-\to\mathfrak{k}_\mathbb{C}}(\mathbf{D}_{CR}\nabla^{(1,0)}))\big)$$
$$\mathcal{U} = \mathrm{Ad}_{\mathfrak{k}_\mathbb{C}\otimes\mathfrak{p}^+\to\mathfrak{p}^+}\big(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{p}^-\otimes\mathfrak{p}^+\to\mathfrak{k}_\mathbb{C}}(\nabla^{(1,0)}\mathbf{D}_{CR})\mathbf{D}_{CR}\big).$$

Dans la suite, nous choisissons comme fibré E, la représentation triviale. Donc $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U}$ seront considérés comme deux opérateurs covariants de $C^\infty(\mathcal{D})$ vers $C^\infty(\mathcal{D},\mathfrak{p}^+)$.

Ces opérateurs peuvent aussi être définis en utilisant l'algèbre enveloppante. Pour cela, fixons une base $\{v_j\}_j$ de $\mathfrak{p}^+$, alors

$$\mathcal{W} = \sum_{i,j,k} v_i^* v_j^* v_k \otimes [v_i,[v_j,v_k^*]]\ ,\ \ \mathcal{U} = \sum_{i,j,k} v_k v_i^* v_j^* \otimes [[v_k^*,v_i],v_j].$$

Il s'agit de deux éléments de $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_\mathbb{C})\otimes\mathfrak{p}^+$ indépendants du choix de la base $\{v_j\}$.

Pour se rendre compte de l'action des opérateurs $\mathcal{W}$ et $\mathcal{U}$ sur le noyau de Poisson généralisé, posons $\sigma = \frac{n}{r}s$. Alors,

Proposition 8.4 **(**[**10**, Proposition 7.3]**)**. — *Pour tout $u\in\mathcal{S}$ fixé, nous avons*

$$\mathcal{W}P(z,u)^s = P(z,u)^s\sigma^2(2\sigma-p-b)u,$$
$$\mathcal{U}P(z,u)^s = P(z,u)^s\sigma(-2\sigma^2+2p\sigma+c)u.$$

Notre deuxième résultat principal s'énonce comme suit :

Théorème 8.5 **(**[**10**, Theorem 7.2]**)**. — *Soit $\mathcal{D}$ un domaine non-tube et soit $s\in\mathbb{C}$ vérifiant (17). Alors la transformation de Poisson $\mathcal{P}_s$ est un $G-$isomorphisme de l'espace $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ sur l'espace des $f\in\mathcal{M}(\mathcal{D},\lambda_s)$ solutions du système de Hua*

$$\left(\mathcal{U} - \frac{-2\sigma^2+2p\sigma+c}{\sigma(2\sigma-p-b)}\mathcal{W}\right) f = 0. \tag{19}$$

La constante c est liée à la dimension du sous-espace des polynômes holomorphes sur V de plus bas poids, cf [**10**, (24)]. Le principe de la démonstration est le même que pour le Théorème 8.3.

Problème 8.6. — *Peut-on remplacer dans le théorème 8.5 la condition $f\in\mathcal{M}(\mathcal{D},\lambda_s)$ par $\mathcal{Z}f=\mu(\mathcal{Z})f$ où $\mathcal{Z}$ est un opérateur différentiel $K-$invariant ?*

Problème 8.7. — *Généraliser l'étude de la transformation de Poisson réalisée dans* [**10**] *au cas d'un fibré en droite au dessus d'un domaine borné symétrique.*

Problème 8.8. — *Si $\mathcal{D}$ n'est pas de type tube, l'opérateur $\mathcal{H}$ n'annule pas le noyau de Poisson du bord de Shilov. Toutefois, la condition $\mathcal{H}f = 0$ implique encore que f est harmonique et, elle entraîne que $\mathcal{V}f = 0$. Cette condition reste suffisante pour que f soit l'intégrale de Poisson d'une hyperfonction φ sur $\mathcal{S}$. Il serait intéressant de déterminer le sous-espace $\mathcal{B}_b(\mathcal{S})$ de ces fonctions φ. On sait que le bord de Shilov $\mathcal{S}$ est muni de l'opérateur "dérivée tangentielle" ∂_b (trivial dans le cas tube), à partir duquel il est possible de construire un opérateur de Hua tangentiel du second ordre $\mathcal{H}_b$. Berline et Vergne* [**B-V**] *ont conjecturé que le sous-espace $\mathcal{B}_b(\mathcal{S})$ en question est $\{\varphi,\ \mathcal{H}_b\varphi = 0\}$.*

Rappelons que les opérateurs de Cauchy-Riemann tangentiels pour la boule unité dans $\mathbb{C}^n$ sont définis de la façon suivante, voir Stein [**St**] *:*
Supposons f une fonction (régulière) définie sur le bord $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$. Pour définir $\bar\partial_b$, on étend d'abord f à une fonction (régulière) F sur $\overline{\mathcal{D}}$, former $\bar\partial F$ et ensuite restreindre $\bar\partial F$ à $\mathcal{S}$. La restriction $\bar\partial_b f := \bar\partial F_{|\mathcal{S}}$ ne dépend pas du prolongement F choisi.
Pour les domaines bornés symétriques non-tube, la situation est différente. En effet, pour tout tripotent maximal $u \in \mathcal{S}$, l'espace tangent à $\mathcal{S}$ au point u est (identifié à un sous-espace de V) $T_u(\mathcal{S}) = V_1(u) + iJ$ où J est l'algèbre de Jordan euclidienne telle que $J + iJ = V_2(u)$. Notons que la projection sur $V_1(u)$ est $2 - D(u,\bar u)$. L'opérateur $\bar Z = (2 - D(u,\bar u))\bar\partial$ est un opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel. L'opérateur $\mathcal{H}_b = D(b(u,\bar u)\bar Z, Z)$ est un opérateur de Hua tangentiel.
Il existe une version demi-plan (espace) de Siegel de l'opérateur de Cauchy-Riemann tangentiel, donnée par Rossi et Vergne [**R-V**]. *Dans ce modèle, l'expression du noyau de Poisson est compliquée, ce qui rend les calculs difficiles.*

Problème 8.9. — *L'équivalent de la conjecture de Helgason pour les espaces symétriques semi-simple G/H a été annoncé par Oshima* [**Os**] *: pour un homomorphisme homogène $\chi : \mathbb{D}(G/H) \to \mathbb{C}$, toute fonction propre sur G/H est une intégrale de Poisson d'une hyperfonction sur la frontière de G/H. Le cas particulier des espaces hyperboliques a été résolu par Sekiguchi* [**Sek**]. *Il serait intéressant de considérer cette question dans* *le cas des espaces symétriques causaux et en particulier pour les espaces de type Cayley.*

Le même problème pourrait aussi se poser pour les semi-groupes de Lie $\Gamma(C) = G\exp(C)$ *(voir Problème 4.7).*

Problème 8.10. — *Etudier la transformation de Poisson (généralisée) pour un domaine borné symétrique réel (dual non compact d'un* $R-$*espace symétrique).*

9. Transformation de Poisson des fonctions L^p sur la frontière de Shilov

Après la partie fonctionnelle de l'étude de l'image de la transformation de Poisson $\mathcal{P}_s$ exposé dans le paragraphe précédent, nous allons considérer l'image, par $\mathcal{P}_s$, des espaces L^p. Rappelons que la caractérisation de l'image de l'espace $L^p(K/M)$ par la transformation de Poisson $\mathcal{P}_\lambda f(gK) = \int_K f(k)e^{\langle \lambda + rhp, H(g^{-1}k)\rangle} dk$ associée à la frontière maximale est en générale liée aux théorèmes de type Fatou (voir ci-dessous pour les notations). Dans cette direction nous citons les travaux de Helgason [**He**$_2$], de Michelson [**Mi**] pour $p = \infty$ et de Sjörgen [**Sj**] pour $1 \le p \le \infty$. Une autre caractérisation utilisant les espaces de type Hardy est due à Stoll [**Sto**] dans le cas harmonique (pour $\lambda = 1$) et à Ben Saïd et al. [**B et** *al.*] dans le cas général (pour un λ générique).

Lorsque $\mathcal{D}$ est un domaine borné de type tube, la caractérisation de l'image $\mathcal{P}_s(L^p(\mathcal{S}))$ (pour un s générique) est due à Boussejra [**Bous**].

Dans [**12**] nous avons généralisé cette caractérisation aux domaines bornés symétriques non-tubes. Pour exposer ce résultat nous allons procéder à un léger changement dans les notations et dans la paramétrisation de la transformation de Poisson $\mathcal{P}_s$.

Rappelons que les racines restreintes positives sont $\Sigma^+ = \{\beta_j, \frac{1}{2}\beta_j, \frac{1}{2}(\beta_\ell \pm \beta_k);\ \ 1 \le j \le r,\ 1 \le \ell \ne k \le r\}$. L'ensemble des racines simples est donné par $\Lambda = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{r-1},\ \alpha_r\}$ où $\alpha_j = \frac{1}{2}(\beta_{r-j+1} - \beta_{r-j}),\ 1 \le j \le r-1$, $\alpha_r = \beta_1$ dans le cas tube, et $\alpha_r = \frac{1}{2}\beta_1$ dans le cas non-tube. Le sous-groupe parabolique associé au sous-ensemble $\Lambda_1 = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{r-1},\}$ est un sous-groupe parabolique maximal $P_{\max} = P_1 = M_1A_1N_1$. La frontière de Shilov $\mathcal{S}$ s'identifie alors à $G/P_1 = K/K_1$ où $K_1 = M_1 \cap K$. Notons que dans ce cas A_1 est le sous-groupe analytique de G associé à $\mathfrak{a}_1 = \mathbb{R}\xi_e$. Le complémentaire orthogonal (par rapport à la forme de Killing) de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{a}(1) = \xi_c^\perp = \sum_{j=1}^{r-1} \mathbb{R}(\xi_{c_j} - \xi_{c_{j+1}})$.

Soit ρ_0 la forme linéaire sur $\mathfrak{a}_1$ telle que $\rho_0(\xi_e) = r$. Nous l'étendons par projection orthogonale à tout $\mathfrak{a}$. Soit ρ_1 la restriction de ρ à $\mathfrak{a}_1$. Il est donc clair que $\rho_1(\xi_e) = rb + r + a\frac{r(r-1)}{2} = n$, de sorte que $\rho_1 = \frac{n}{r}\rho_0$. Pour $g \in G$, soit $H(g) \in \mathfrak{a}$ l'unique élément tel que $g \in K\exp(H(g))N \subset KAN = G$. Notons aussi $\kappa(g) \in K$ et $H_1(g) \in \mathfrak{a}_1$ les éléments uniques tels que $g \in \kappa(g)M_1\exp(H_1(g))N_1 \subset KM_1A_1N_1 = G$. Par la suite, pour simplifier certaines notations, le paramètre générique $s \in \mathbb{C}$ sera différents de celui introduit précédemment. Si s' désigne le paramètre du

paragraphe précédent, alors $s' = \frac{r}{2n}(s + \frac{n}{r})$.
Nous allons considérer les fonctions sur la frontière de Shilov G/P_1 comme des fonctions P_1-invariantes sur G. Pour $s \in \mathbb{C}$, notons $\mathcal{B}(G/P_1, s)$ l'espace des hyperfonctions f sur G telles que $f(gman) = e^{(s\rho_0 - \rho_1)\log a} f(g)$ pour $g \in G$, $m \in M_1$, $a \in A_1$ et $n \in N_1$. La transformation de Poisson d'une fonction $f \in \mathcal{B}(G/P_1; s)$, peut donc être définie par $\mathcal{P}_s f(gK) = \int_K e^{-\langle s\rho_0 + \rho_1, H_1(g^{-1}k)\rangle} f(k)dk$. Comme $G = KP_1$, la restriction de G à K définit un $G-$isomorphisme de $\mathcal{B}(G/P_1; s)$ sur l'espace $\mathcal{B}(K/K_1)$ de toutes les hyperfonctions f sur K qui sont K_1-invariantes (à gauche). Dans la suite, nous allons désigner cet espace par $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

Pour $1 < p < +\infty$, notons $L^p(\mathcal{S})$ l'espace des fonctions sur K, invariantes par K_1 et telles que $\|f\|_p = \left(\int_K |f(k)|^p dk\right)^{1/p} < +\infty$, où dk est la mesure de Haar de K. Soit $d\bar{n}$ la mesure invariante sur $\bar{N}_1 = \theta(N_1)$ normalisée de sorte que $\int_{\bar{N}_1} e^{\langle -2\rho_1, H_1(\bar{n})\rangle} d\bar{n} = 1$.

Soit $s \in \mathbb{C}$ et notons $\mathcal{E}_s(\mathcal{D})$ l'espace des fonctions harmoniques sur $\mathcal{D}$ satisfaisant le système de Hua (19). Il est claire que $\mathcal{P}_s(L^p(\mathcal{S}))$ est un sous-espace propre fermé de $\mathcal{E}_s(\mathcal{D})$. Nous allons consacrer la suite de ce paragraphe à la caractérisation les fonctions $F \in \mathcal{E}_s(\mathcal{D})$ qui sont intégrales de Poisson de fonctions $f \in L^p(\mathcal{S})$.

Pour $1 < p < \infty$, soit $\mathcal{E}_s^p(\mathcal{D})$ l'espace de type Hua-Hardy, des fonctions $f \in \mathcal{E}_s(\mathcal{D})$ telles que

$$\|f\|_{s,p} = \sup_{a \in A_1} e^{-\langle \Re(s)\rho_0 - \rho_1, \log a\rangle} \left(\int_K |f(ka)|^p dk\right)^{1/p} < +\infty.$$

Puisque $\mathfrak{a}_1 = \mathbb{R}\xi_e$, cette intégrale devient

$$\|f\|_{s,p} = \sup_{t>0} e^{-t(\Re(s)r - n)} \left(\int_K |f(ka_t)|^p dk\right)^{1/p},$$

où $a_t = \exp(t\xi_e)$.
Notons d'abord, que l'intégrale $\mathbf{c}_s = \int_{\bar{N}_1} e^{-\langle s\rho_0 + \rho_1, H_1(\bar{n})\rangle} d\bar{n}$ converge absolument (et non-nulle) lorsque $\Re(s) > \frac{a}{2}(r-1)$, cf. [**12**, Proposition 4.1]. Il se trouve qu'en agissant par un élément du groupe de Weyl, nous pouvons se ramener à la fonction c d'Harish-Chandra, qui est absolument convergente dans la même région du paramètre s. Comme préparation à la caractérisation cherchée, nous montrons d'abord le théorème de type Fatou :

Théorème 9.1 ([**12**, Theorem 4.3, Theorem 4.5])
Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \frac{a}{2}(r-1)$. Alors

$$f(k) = \mathbf{c}_s^{-1} \lim_{t\to+\infty} e^{-(rs-n)t}\mathcal{P}_s f(ka_t)$$

(i) uniformément, pour f appartenant à l'espace $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ des fonctions continues sur $\mathcal{S}$,
(ii) dans $L^p(\mathcal{S})$, pour $f \in L^p(\mathcal{S})$ et $1 < p < \infty$.

Nous en déduisons la caractérisation lorsque $p = 2$, cf. [**12**, Theorem 4.8] : une fonction F est une intégrale de Poisson $\mathcal{P}_s(f)$ d'une fonction $f \in L^2(\mathcal{S})$ si et seulement si $F \in \mathcal{E}_s^2(\mathcal{D})$.

Nous montrons ensuite la formule d'inversion suivante

Proposition 9.2 ([**12**, Proposition 4.9]). — *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \frac{a}{2}(r-1)$. Soit $F \in \mathcal{E}_s^2(\mathcal{D})$ et $f \in L^2(\mathcal{S})$ sa valeur au bord. Alors nous avons la formule d'inversion suivante*

$$f(k) = |\mathbf{c}_s|^{-2} \lim_{t\to\infty} e^{2(n-r\Re(s))t} \int_K \overline{e^{-\langle s\rho_0+\rho_1, H_1(a_{-t}k^{-1}h)\rangle}} F(ha_t)dh. \tag{20}$$

Nous pouvons maintenant formuler notre théorème principal.

Théorème 9.3 ([**12**, Theorem 4.10]). — *Soit $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > \frac{a}{2}(r-1)$. Une fonction $F \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{D})$ est une intégrale de Poisson $\mathcal{P}_s f$ d'une fonction $f \in L^p(\mathcal{S})$ si et seulement si $F \in \mathcal{E}_s^p(\mathcal{D})$.*

Expliquons à présent le principe de démonstration de ce théorème. Si $F = \mathcal{P}_s f$ est une intégrale de Poisson d'une fonction $f \in L^p(\mathcal{S})$, alors d'après le Théorème 8.5, $F \in \mathcal{E}_s(\mathcal{D})$. Nous montrons ensuite (en utilisant Théorème 9.1) qu'il existe une constante $\gamma_s > 0$ telle que $|\mathbf{c}_s|\|f\|_p \leq \|F\|_{s,p} \leq \gamma_s\|f\|_p$ et par suite $F \in \mathcal{E}_s^p(\mathcal{D})$. Pour montrer la réciproque nous adaptons une méthode (plus technique) due à Korányi [**Kor**$_2$], voir aussi Stoll [**Sto**] et [**B et** *al.*]. Le point clé de cette méthode est une réduction du problème au cas $p = 2$ pour caractériser les fonctions de l'espace $\mathcal{E}_s^2(\mathcal{D})$, puis l'utilisation du Théorème 9.1 (de Fatou) et de la formule d'inversion de la Proposition 9.2, voir [**12**] pour plus de détails.

Problème 9.4. — *Déterminer l'image d'autres espaces de fonctions par de la transformation de Poisson $\mathcal{P}_s$, par exemple l'espace $L^1(\mathcal{S})$, l'espace $L^\infty(\mathcal{S})$ ou bien l'espace des distributions $S'(\mathcal{S})$.*

Bibliographie

[A_1] Arnol'd, V. I. On a characteristic class entering into conditions of quantization. *Funkcional. Anal. i Prilozen.* **1** (1967) 1–14.

[A_2] Arnol'd, V. I. Sturm theorems and symplectic geometry. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **19** (1985), 1–10.

[B-G] Barge J. ; Ghys E. *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. **294** (1991), 235–265.

[Ben] Ben Saïd, S., Espaces de Bergman pondérés et série discrète holomorphe de $\widetilde{\mathrm{U}(p,q)}$. *J. Funct. Anal.* **173** (2000), 154–181.

[B et *al.*] Ben Saïd, S. ; Oshima, T. ; Shimeno, N. Fatou's theorems and Hardy-type spaces for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces. *Int. Math. Res. Not.* **16** (2003) 915–931.

[B-V] Berline, N. ; Vergne, M., Équations de Hua et noyau de Poisson. *Noncommutative harmonic analysis and Lie groups (Marseille, 1980)*, 1–51, Lecture Notes in Math., **880**, *Springer, Berlin-New York*, 1981.

[Ber] Bertram, W. Un théorème de Liouville pour les algèbres de Jordan. *Bull. Soc. Math. France* **124** (1996), 299–327.

[Ber-H] Bertram, W. ; Hilgert, J. Geometric Hardy and Bergman spaces. *Michigan Math. J.* **47** (2000), 235–263.

[Bet-Ól] Betten, F. ; Ólafsson, G. Causal compactification and Hardy spaces for spaces of Hermitian type. *Pacific J. Math.* **200** (2001), 273–312.

[Bir] Birkoff, G., Extensions of Jentzsch's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* **85** (1957), 219–227.

[Bou] Bougerol Ph., Kalman filtering with random coefficients and contractions. *SIAM J. Control Optim.* **31** (1993), 942–959.

[Bous] Boussejra A. A L^p-Poisson integral representation of solutions of the Hua stystem. À paraître dans J. Funct. Anal.

[B-K] Boussejra A. ; Koufany, K., Characterization of the Poisson integrals for non-tube bounded symmetric domains. *J. Math. Pures Appl.* (2007) (10.1016/j.matpur.2007.01.004)

[Br] Braun, H., Doppelverhältnisse in Jordan-Algebren. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **32**, (1968) 25–51.

[Br-Koe] Braun, H. ; Koecher, M., *Jordan algebren*, Springer, 1975.

[Bu] Bushell, P.J., On solutions of the matrix equation $T'AT = A^2$. *Linear Algebra and Appl.* **8** (1974), 465-469.

[Ch] Chadli, M., Noyau de Cauchy-Szegö d'un espace symétrique de type Cayley. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), 97–132.

[C-L-M] Cappell, S. E. ; Lee, R. ; Miller, E. Y. On the Maslov index. *Comm. Pure Appl. Math.* **47** (1994), 121–186.

[Ca] Cartan, É. Sur les domaines bornés homogènes de l'espace de n variables complexes. *Abh. Math. Semin. Hamb. Univ.* **11** (1935), 116–162.

[C$_1$] Clerc, J.-L., Compressions and contractions of Hermitian symmetric spaces. *Math. Z.* **229** (1998), 1–8.

[C$_2$] ——, L'indice de Maslov généralisé. *J. Math. Pures Appl.* **83**, (2004), 99–114.

[C-Ø$_1$] Clerc, J.-L. ; Ørsted, B., The Maslov index revisited. *Transform. Groups* **6** (2001), 303–320.

[C-Ø$_2$] ——, The Gromov norm of the Kaehler class and the Maslov index. *Asian J. Math.* **7** (2003), 269–295.

[C-K] Clerc, J.-L. ; Koufany, K., Primitive du cocycle de Maslov généralisé. *Math. Ann.* **337** (2007), 91–138

[C-N] Clerc, J.-L. ; Neeb, K.-H., Orbits of triples in the Shilov boundary of a bounded symmetric domain. Préprint IECN 2005.

[D-T] Domic, A. ; Toledo, D., The Gromov norm of the Kaehler class of symmetric domains, *Math. Ann.,* **276** (1987), 425-432.

[deG] de Gosson, M. La définition de l'indice de Maslov sans hypothèse de transversalité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **310** (1990), 279–282.

[E-P] Englis, M and Peetre, J., Covariant Laplacean operators on Kähler manifolds, *J. Reine und Angew. Math.* **478** (1996), 17–56.

[F] Faraut, J., Fonctions sphériques sur un espace symétrique ordonné de type Cayley. *Representation theory and harmonic analysis (Cincinnati, OH, 1994)*, 41–55, Contemp. Math., 191, *Amer. Math. Soc., Providence, RI,* (1995).

[F-K] Faraut, J. ; Korányi, A., Analysis on symmetric cones. Oxford Math. Monog. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

[F et al.] Faraut, J. ; Kaneyuki, S. ; Korányi, A. ; Lu, Q. ; Roos, G., Analysis and geometry on complex homogeneous domains. Progress in Mathematics, 185. *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA*, 2000

[G-G] Gel'fand, I. M. ; Gindikin, S. G., Complex manifolds whose spanning trees are real semisimple Lie groups, and analytic discrete series of representations. *Funkcional. Anal. i Priložen.* **11** (1977), 19–27.

[G] Gindikin, S., Generalized conformal structures on classical real Lie groups and related problems of the theory of representations. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **315** (1992), 675–679.

[G–S] Guillemin, V. ; Sternberg, S. Geometric asymptotics. Mathematical Surveys, **14**. *American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1977.

[Go] Gong, S., The Schwarzian derivative in several complex variables. *Scince in China* **36** (1993), 513–523.

[He$_1$] Helgason, S., Differential geometry and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, Vol. XII. *Academic Press, New York-London*, 1962.

[He$_2$] ——, A duality for symmetric spaces with applications to group representations. *Advances in Math.* **5** (1970), 1–154.

[He$_3$] ——, Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces. Pure and Applied Mathematics, **80**. *Academic Press, Inc. New York - London,* 1978.

[He$_4$] ——, Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and spherical functions. Pure and Applied Mathematics, 113. *Academic Press, Inc., Orlando, FL*, 1984.

[Hil] Hilbert, D., Über die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte. *Math. Ann.*, **46** (1895), 91-96.

[H-H-L] Hilgert, J. ; Hofmann, K. H. ; Lawson, J. D. *Lie groups, convex cones, and semigroups.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. *The Clarendon Press, Oxford University Press, New York*, 1989.

[H-N] Hilgert, J. ; Neeb, K.-H. *Lie semigroups and their applications.* Lecture Notes in Mathematics, **1552**. *Springer-Verlag, Berlin*, 1993.

[H-Ó] Hilgert, J. ; Ólafsson G., *Causal symmetric spaces. Geometry and harmonic analysis.* Perspect. Math, **18**. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1997.

[H-Ó-Ø] Hilgert, J. ; Ólafsson G. ; Ørsted, B., Hardy spaces on affine symmetric spaces. *J. reine und angew. Math.* **415** (1991), 189–218.

[Hir] Hirzebruch, U., Der Min-Max-Satz von E. Fischer für formal-reelle Jordan-Algebren. *Math. Ann.* **186** (1970) 65–69.

[Ho] Hoffman, K. *Banach space of analytic functions.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[Hu$_1$] Hua, L.K., Geometries of matrices I. Generalizations of von Staudt's theorem. *Trans. Amer. Math. Soc.* **57** (1945), 441-481.

[Hu$_2$] Hua, L.K., *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains.* Trans. of Math. Monographs, **6**. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Joh$_1$] Johnson, K.D. Remarks on a theorem of Koranyi and Malliavin on the Siegel upper half plane of rank two. *Proc. Amer. Math. Soc.* **67** (1977), 351–356.

[Joh$_2$] Johnson, K.D. Differential equations and the Bergman-Silov boundary on the Siegel upper half plane. *Ark. Mat.* **16** (1978), 95–108.

[J-K] Johnson, K. ; Korányi, A., The Hua operators on bounded symmetric domains of tube type. *Ann. of Math. (2)* **111** (1980), no. 3, 589–608.

[Kan] Kaneyuki, S., Compactification of parahermitian symmetric spaces and its applications. I. Tube-type realizations. *Lie theory and its applications in physics, III (Clausthal, 1999),* 63–74, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ,* 2000.

[K et *al.*] Kashiwara, M. ; Kowata, A. ; Minemura, K. ; Okamoto, K. ; Oshima, T. ; Tanaka, M., Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space. *Ann. of Math. (2)* **107** (1978), no. 1, 1–39.

[Koe$_1$] Koecher, M., Jordan algebras and their applications. *Lect. Notes Univ. of Minnesota* Minneapolis (1962).

[Koe$_2$] Koecher, M., An elementary approach to bounded symmetric domains. *Rice University, Houston* (1969).

[Kor$_1$] Korányi, A. Boundary behavior of Poisson integrals on symmetric spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **140** (1969), 393–409.

[Kor$_2$] Korányi, A. The Poisson integral for generalized half-planes and bounded symmetric domains. *Ann. of Math.* **82** (1965), 332–350.

[Kor-W] Korányi, A. ; Wolf, J.A. Realization of hermitian symmetric spaces as generalized half-planes. *Ann. of Math.* **81** (1965) 265–288.

[Kor-S] Korányi, A. ; Stein, E. M. Fatou's theorem for generalized halfplanes. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **22** (1968) 107–112.

[Kor-M] Korányi, A. ; Malliavin, P. Poisson formula and compound diffusion associated to an overdetermined elliptic system on the Siegel halfplane of rank two. *Acta Math.* **134** (1975), 185–209.

[KS] Kostant, B. ; Sternberg, S., The Schwartzian derivative and the conformal geometry of the Lorentz hyperboloid. M. Cahen and M. Flato (eds.), *Quantum Theories and Geometry*, 113–125, Kluwer Academic Publishers, 1988.

[K$_1$] Koufany, K., Semi–groupe de Lie associé à une algèbre de Jordan euclidienne. Thèse de Doctorat de l'Université Nancy 1 (1993).

[K$_2$] ——, Réalisation des espaces symétriques de type Cayley. *C. R. Acad. Sci. Paris,* **318** (1994), 425–428.

[K$_3$] ——, Semi-groupe de Lie associé à un cône symétrique. *Ann. Inst. Fourier,* **45** (1995), 1–29.

[K$_4$] ——, Contractions of angles in symmetric cones. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **38** (2002), 227–243.

[K$_5$] ——, Geometry of Hermitian symmetric spaces and noncommutative Hardy spaces. *Seminar on Mathematical Sciences*, **33**, Keio University, Department of Mathematics, Yokohama. 2005

[K$_6$] ——, Application of Hilbert's projective metric on symmetric cones. *Acta Math. Sin.* **22** (2006), 1467–1472.

[K_7] ——, The Schwartzian derivative and the conformal geometry of symmetric spaces of Cayley type. En préparation.

[K-$Ø_1$] Koufany, K. ; Ørsted, B., Function spaces on the Ol'shanskiĭ semigroup and the Gelfand and Gindikin program. *Ann. Ins. Fourier,* **46** (1996), 1–34.

[K-$Ø_2$] ——, Espace de Hardy sur le semi-groupe métaplectique. *C.R. Acad. Sci. Paris,* **322** (1996), 113–116.

[K-$Ø_3$] ——, Hardy spaces on two-sheeted covering semigroups. *J. of Lie Theory,* **7** (1997), 245–267.

[K-Z] Koufany, K. ; Zhang, G., Hua operators and Poisson transform for bounded symmetric domains. *J. Funct. Anal.* **236** (2006), 546–580.

[Kro] Krötz, B., On Hardy and Bergman spaces on complex Ol'shanskiĭ semigroups. *Math. Ann.* 312 (1998), 13–52

[Las] Lassalle, M., Les équations de Hua d'un domaine borné symétrique du type tube. *Invent. Math.* **77** (1984), no. 1, 129–161.

[Law] Lawson, J. D., Ordered manifolds, invariant cone fields, and semigroups, *Forum Math.* **1** (1989), 273–308.

[L-L] Lawson, J. D. ; Lim, Y., Compactification structure and conformal compressions of symmetric cones. *J. Lie Theory* **10** (2000), 375–381.

[Le] Leray, J., Analyse lagrangienne et mécanique quantique. *Séminaire sur les Équations aux Dérivées Partielles (1976-1977)*, I, Exp. No. 1, *Collège de France, Paris,* (1977).

[L_1] Lim, Y., Strict contractions of symmetric cones. *Math. Z.* **234** (2000), 407–411.

[L_2] ——, Finsler metrics on symmetric cones. *Math. Ann.* **316** (2000), 379–389.

[L-V] Lion, G. ; Vergne, M., The weil representation, Maslov index and theta series. Progress in Mathematics, **6**. *Birkhäuser, Boston, Mass.,* (1980).

[Lo_1] Loos, O. Symmetric spaces. II : Compact spaces and classification. *W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam*, 1969.

[Lo_2] Loos, O. Jordan pairs. *Lect. Notes in Math.* **460**, Springer (1975).

[Lo_3] Loos, O. Bounded symmetric domains and Jordan pairs. *University of California, Irvine,* 1977.

[M] Maslov V.P., Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques. *Dunod, Paris*, 1972.

[Ma] Maaß H., *Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series,* Lect. Notes in Math, Springer, **216** (1971).

[Mat] Matsuki, T., The orbits of affine symmetric spaces under the action of a minimal parabolic subgroup, *J. math. Soc. Japan* **3** (1979), 331-357.

[Mi] Michelson, H. L. Fatou theorems for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **177** (1973), 257–274.

[Ner$_1$] Neretin Yu.A., On a semigroup of operators in the boson Fock space, *Functional Anal. Appl.* **24** (1990), 135-144.

[Ner$_2$] ——, *Categories of symmetries and infinite-dimensional groups.* London Mathematical Society Monographs, Oxford Publications, Clarendon Press, **16** (1996).

[Ne$_1$] Neeb, K-H., Holomorphic representation theory. I. *Math. Ann.* **301** (1995), 155–181.

[Ne$_2$] ——, Holomorphic representation theory. II. *Acta Math.* **173** (1994), 103–133.

[Óla] Ólafsson, G., Causal Symmetric Spaces. *Math. Gotting.* **15** (1990).

[Ó-Ø$_1$] Ólafsson, G. ; Ørsted, B., Causal compactification and Hardy spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 3771–3792.

[Ó-Ø$_2$] Ólafsson, G. ; Ørsted, B., The holomorphic discrete series for affine symmetric spaces, I. *J. Funct. Anal.* **81** (1988), 126-159.

[Ols$_1$] Ol'shanskiĭ G.I., Invariant cones in Lie algebras, Lie semigroups, and the holomorphic discrete series. *Funct. Anal. Appl.* **15** (1982), 275–285.

[Ols$_2$] ——, Convex cones in symmetric Lie algebras, Lie semigroups and invariant causal structures (orderings) on pseudo-Riemannian symmetric spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR.* **265** (1982), 537–541.

[Ols$_3$] ——, Complex Lie semigroups, Hardy spaces and the Gel'fand-Gindikin program. *Differential Geom. Appl.* **1** (1991), 235–246.

[Os] Oshima, T., Poisson transformations on affine symmetric spaces. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), 323–327.

[Pa] Paneitz, S. Invariant convex cones and causality in semisimple Lie algebras and groups. *F. Funct. Anal.* **43** (1981), 313–359.

[R-V] Rossi, H. ; Vergne, M., Équations de Cauchy-Riemann tangentielles associées à un domaine de Siegel. *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* **4** (1976), 31–80.

[Sa] Satake, I., *Algebraic structures of symmetric domains.* Kanô Memorial Lectures, **4**. Iwanami Shoten, Tokyo ; Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Schl] Schlichtkrull, H. Hyperfunctions and harmonic analysis on symmetric spaces. Progress in Mathematics, 49. *Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA,* 1984.

[Se] Segal, I. E., *Mathematical cosmology and Extragalactic Astronomy*, Acad. Press New York, 1976.

[Sek] Sekiguchi, J., Eigenspaces of the Laplace-Beltrami operator on a hyperboloid. *Nagoya Math. J.* **79** (1980), 151–185

[Sh_1] Shimeno, N., Boundary value problems for the Shilov boundary of a bounded symmetric domain of tube type. *J. Funct. Anal.* **140** (1996), 124–141.

[Sh_2] ——, Boundary value problems for various boundaries of Hermitian symmetric spaces, *J. Funct. Anal.* **170** (2000), 265–285.

[S] Siegel C.L., Symplectic geometry. *Amer. J. Math.* **65** (1943), 1–86.

[Sj] Sjögren, P. Characterizations of Poisson integrals on symmetric spaces. *Math. Scand.* **49** (1981), 229–249

[Sou] Souriau, J.M., Construction explicite de l'indice de Maslov. Applications. Lecture Notes in Phys. **50**, 117–148, *Springer, Berlin*, (1976).

[Stan] Stanton, R.J., Analytic extension of the holomorphic discrete series. *Amer. J. of Math.* **108** (1986), 1411–1424.

[St] Stein, E. M. Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton Mathematical Series, **43**. Monographs in Harmonic Analysis, III. *Princeton University Press, Princeton, NJ,* 1993

[S-W] Stein, E.M. ; Wiess, G. *Introduction to harmonic analysis on Euclidean spaces.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1967

[Sto] Stoll, M. Hardy-type spaces of harmonic functions on symmetric spaces of noncompact type. *J. Reine Angew. Math.* **271** (1974), 63–76.

[Up_1] Upmeier, H.,Jordan algebras in analysis, operator theory, and quantum mechanics. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **67**. *American Mathematical Society, Providence, RI,* (1987).

[Up_2] Upmeier, H., Symmetric Banach manifolds and Jordan C^*-algebras. North-Holland Mathematics Studies, **104**. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam,* (1985).

[V] Vinberg, E.B., Invariant convex cones and ordering in Lie groups, *Functional Anal. Appl.* **15** (1982), 1–10.

[W-Kor] Wolf, J.A. ; Korányi, A. Generalized Cayley transformations of bounded symmetric domains. *Amer. J. Math.* **87** (1965) 899–939.

[Y] Yan, Z., A class of generalized hypergeometric functions in several variables. *Canad. J. Math.* **44** (1992), 1317–1338.

[Z_1] Zhang, G., Shimura invariant differential operators and their eigenvalues, *Math. Ann.* **319** (2001), 235–265.

[Z_2] ——, Invariant differential operators on hermitian symmetric spaces and their eigenvalues, *Israel J. Math.* **119** (2000), 157–185.

[Z$_3$] ——, Nearly holomorphic functions and relative discrete series of weighted L^2-spaces on bounded symmetric domains. *J. Math. Kyoto Univ.* **42** (2002), 207-221.

---

version 1, 23 mars 2007

Khalid Koufany, Institut Élie Cartan, Mathématiques, UMR 7502, Université Henri Poincaré (Nancy 1), B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex
E-mail : khalid.koufany@iecn.u-nancy.fr