La suite de Thue-Morse et la catégorie Rec

Roland Bacher

Résumé:

Cette note introduit la catégorie Rec($\mathbf{K}$) des matrices à récurrence sur un corps $\mathbf{K}$. Ceci permet de calculer certains déterminants reliés à la suite de Thue-Morse.

Abstract: **The Thue-Morse sequence and the category Rec.** We define the category Rec($\mathbf{K}$) of recurrence matrices over a field $\mathbf{K}$ and use it for calculating determinants of Hankel matrices related to the Thue-Morse sequence.

1 Introduction

La fonction de (Prouhet-)Thue-Morse $\tau : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ compte la somme des chiffres $\tau(\sum_{j=0}^{l} \epsilon_j 2^j) = \sum_{j=0}^{l} \epsilon_j$ d'un entier binaire $\sum_{j=0}^{l} \epsilon_j 2^j \in \mathbb{N}$ (avec $\epsilon_0, \dots, \epsilon_l \in \{0,1\}$). Pour $n \geq 1$, soit $H(n)$ la matrice de Hankel d'ordre n avec coefficients complexes $h_{s,t} = i^{\tau(s+t)} \in \{\pm 1, \pm i\}, 0 \leq s,t < n$, associés à la série génératrice $\prod_{k=0}^{\infty}(1 + ix^{2^k}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{\tau(n)} x^n$. Soit encore $f : \{1, 2, \dots\} \longrightarrow \{\pm 1\}$ la fonction du pliage régulier définie récursivement par $f(2^n) = 1, n \in \mathbb{N}$ et $f(2^n+a) = -f(2^n-a)$ pour tout a tel que $1 \leq a < 2^n$ (voir [1] pour plus d'informations sur Thue-Morse et le pliage régulier, voir [2] pour des résultats apparentés).

Théorème 1.1. *On a l'égalité* $\det(H(n+1)) = \prod_{k=1}^{n}(1 + i\ f(k)) \in \mathbb{Z}[i]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *.*

La preuve, qui consiste à calculer la décomposition LU de $H(2^n)$, fait intervenir une curieuse algèbre liée aux suites automatiques, aux automates finis et aux groupes correspondants.

On pourrait en fait montrer le développement en fraction continue de type Jacobi

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + ix^{2^k}) = \cfrac{1}{1 - u_0 x - v_1 x^2 \cfrac{1}{1 - u_1 x - v_2 x^2 \cfrac{1}{1 - \dots}}}$$

avec $u_n = (-1)^n\ i,\ n \geq 0$ et où la suite $v_1, v_2, \dots$ est définie par $v_1 = 1+i, v_2 = 1, v_3 = -i, v_4 = i, v_5 = 1, v_6 = -i, v_7 = 1$ et pour $v_n,\ n = 2^l + a \geq$

$8, 0 \leq a < 2^l,\ l \geq 3$ récursivement par $v_n = i$ si $a \in \{0, 2^{l-1}+1 = \frac{n+2}{3}\}$, $v_n = 1$ si $a \in \{1, 2^{l-1} = \frac{n}{3}\}$ et $v_n = v_a$ autrement.

Des résultats similaires existent également pour les suites $\beta_1, \beta_2, \beta_2, \dots$ et $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \dots$ à valeurs dans $\{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}$ définies par $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n = \frac{(1-x)}{i-1} \prod_{k=0}^{\infty} (1+ix^{2^k})$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n = \frac{(1-x^2)}{i-1} \prod_{k=0}^{\infty} (1+ix^{2^k})$. Les déterminants des matrices de Hankel associées ne prennent que les valeurs $\pm 1, \pm i$.

2 Les catégories $\mathbf{K}^{\mathcal{M}}$ et $\mathbf{Rec}(\mathbf{K})$

Pour deux entiers naturels $p, q \in \mathbb{N}$ donnés, $\mathcal{M}_{p\times q}$ désigne l'ensemble des paires de mots (U, W) de même longueur $l = l(U) = l(W)$ avec $U \in \{0, \dots p-1\}^l,\ W \in \{0, \dots, q-1\}^l$. L'ensemble $\mathcal{M}_{p\times q}$ est donc simplement le monoïde libre engendré par les pq paires de mots $(s,t),\ 0 \leq s < p, 0 \leq t < q$ de longueur 1 pour la loi de composition $(U,W)(U',W') = (UU', WW')$. Dorénavant, $\mathcal{M}^l_{p\times q}$ désigne les paires de mots de longueur l dans $\mathcal{M}_{p\times q}$. Pour $\mathbf{K}$ un corps commutatif, fixé dans la suite, une fonction $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ de $\mathcal{M}_{p\times q}$ dans $\mathbf{K}$ définit une suite de matrices de tailles $p^l \times q^l,\ l \in \mathbb{N}$, car on peut interpréter les valeurs prises par A sur l'ensemble fini $\mathcal{M}^l_{p\times q}$ comme coefficients d'une matrice de taille $p^l \times q^l$ dont les indices parcourent $\mathcal{M}^l_{p\times q}$.

Ceci suggère de définir le *produit matriciel* $A \cdot B \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ de $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times r}}$ et $B \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{r\times q}}$ de la manière usuelle en posant

$$(A \cdot B)[U, W] = \sum_{V \in \{0, \dots, r-1\}^l} A[U, V] B[V, W]$$

pour l'évaluation de $A \cdot B$ en $(U, W) \in \mathcal{M}^l_{p\times q}$.

Dans la suite, $\mathbf{K}^{\mathcal{M}}$ désigne la catégorie dont chaque objet est un espace vectoriel $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{q\times 1}}$ et s'identifie à l'ensemble $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_q}$ des fonctions sur le monoïde libre $\mathcal{M}_q = \{0, \dots, q-1\}$ à q générateurs. Les morphismes de $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{q\times 1}}$ vers $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times 1}}$ sont les éléments de l'espace vectoriel $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$.

Un élément $(S, T) \in \mathcal{M}_{p\times q}$ détermine une application linéaire $\rho(S,T) \in \mathrm{End}(\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}})$ en faisant correspondre à $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ la fonction $\rho(S,T)A$ donnée par $(\rho(S,T)A)[U,W] = A[US, WT]$. Le petit calcul

$$\begin{aligned} \rho(S,T)\big(\rho(S',T')A\big)[U,W] &= \rho(S',T')A[US,WT] \\ &= A[USS',TT'] = \rho(SS',TT')A[U,W] \end{aligned}$$

montre qu'on obtient un morphisme de monoïdes $\rho : \mathcal{M}_{p\times q} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}})$ d'image le *monoïde de décalage* $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})$.

Définition 2.1. *Un sous-espace $\mathcal{A} \subset \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ est récursivement clos s'il est invariant par $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})$. La clôture récursive $\overline{A}^{rec}$ d'un élément $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ est le plus petit sous-espace récursivement clos contenant A. De manière équivalente, $\overline{A}^{rec}$ est également le sous-espace engendré par l'orbite*

$\rho(\mathcal{M}_{p\times q})A$ de A. *La complexité de* A *est la cardinalité* $a = dim(\overline{A}^{rec}) \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ *d'une base de* $\overline{A}^{rec}$. *Un élément* $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ *de complexité finie* $dim(\overline{A}^{rec}) < \infty$ *est une matrice à récurrence.*

On vérifie facilement que l'ensemble

$$\mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K}) = \{A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}} \mid \dim(\overline{A}^{rec}) < \infty\}$$

des matrices à récurrence est un espace vectoriel récursivement clos.

Proposition 2.2. *Le produit* $A \cdot B$ *de deux matrices a récurrence* $A \in Rec_{p\times r}(\mathbf{K})$, $B \in Rec_{r\times q}(\mathbf{K})$ *est une matrice à récurrence.*

Preuve: On choisit des générateurs $A_1, \ldots, A_a$ et $B_1, \ldots, B_b$ de $\overline{A}^{rec}$ et $\overline{B}^{rec}$. L'identité

$$(A_i \cdot B_j)[Us, Wt] = \sum_{v=0}^{r-1} \big((\rho(s,v)A_i)\cdot(\rho(v,t)B_j)\big)[U,W],$$

$(U,V) \in \mathcal{M}_{p\times q}$, $(s,t) \in \mathcal{M}^1_{p\times q}$, montre que l'espace vectoriel engendré par les ab produits $A_i \cdot B_j,\ 1 \le i \le a, 1 \le j \le b$, est récursivement clos. $\Box$

Définition 2.3. *La catégorie* $Rec(\mathbf{K})$ *des matrices à récurrence est la sous-catégorie de* $\mathbf{K}^{\mathcal{M}}$ *n'ayant que des flèches dans* $Rec_{p\times q}(\mathbf{K})$. *Les objets de* $Rec(\mathbf{K})$ *sont les espaces* $Rec_{q\times 1}(\mathbf{K})$ *des vecteurs à récurrence.*

Remarque 2.4. *L'espace vectoriel* $Rec_{p\times q}(\mathbf{K})$ *est un anneau pour le produit fonctionnel* $AB[U,W] = A[U,W]\ B[U,W]$ *car le plongement "diagonal" de* $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ *dans* $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{pq\times pq}}$ *préserve la complexité.*

L'espace $Rec_{p\times q}(\mathbf{K})$ *est aussi un anneau (non-commutatif si* $pq > 1$*) pour le produit de convolution*

$$(A * B)[U,W] = \sum_{(U,W)=(U_1,W_1)(U_2,W_2)} A[U_1,W_1]B[U_2,W_2]$$

obtenu en identifiant $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}} \sim \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{(pq)}}$ *avec l'anneau des séries formelles en* pq *variables non-commutatives (ceci résulte de l'identité* $\rho(s,t)(A*B) = (\rho(s,t)A)(B[\emptyset,\emptyset]) + A*(\rho(s,t)B)$ *pour* $(s,t) \in \mathcal{M}^1_{p\times q}$*).*

Un sous-espace $\mathcal{A} \subset \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ récursivement clos est complètement caractérisé par l'action de $\rho(\mathcal{M}_{p\times q})$ sur $\mathcal{A}$ et par les évaluations $A \longmapsto A[\emptyset,\emptyset]$ en $(\emptyset,\emptyset) \in \mathcal{M}^0_{p\times q}$ pour $A \in \mathcal{A}$. Une matrice à récurrence A de complexité a peut donc se décrire à l'aide de *a valeurs initiales* $(A_1[\emptyset,\emptyset], \ldots, A_a[\emptyset,\emptyset]) \in \mathbf{K}^a$ (pour $A_1 = A, \ldots, A_a \in \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ une base de $\overline{A}^{rec}$) et de *pq matrices de décalage* (abusivement notées) $\rho(s,t) \in \mathrm{End}(\oplus_{h=1}^a \mathbf{K}A_h)$ définies par $\rho(s,t)A_j = \sum_{k=1}^a \rho(s,t)_{k,j}A_k$ et décrivant l'action du monoïde de décalage par rapport à la base $A_1, \ldots, A_a$ de $\overline{A}^{rec}$. Par dualité, une telle *présentation* *minimale* permet de calculer une évaluation $A[U,W]$ de $A = A_1 \in \mathrm{Rec}_{p\times q}(\mathbf{K})$ en utilisant la formule

$$\begin{pmatrix} A_1[s_1 \dots s_n, t_1 \dots t_n] \\ \vdots \\ A_a[s_1 \dots s_n, t_1 \dots t_n] \end{pmatrix} = \rho(s_n, t_n)^t \cdots \rho(s_1, t_1)^t \begin{pmatrix} A_1[\emptyset, \emptyset] \\ \vdots \\ A_a[\emptyset, \emptyset] \end{pmatrix}.$$

Soit $A[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq n}] \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq n}}$ la restriction de $A \in \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ à l'ensemble fini $\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq n}$ des mots de longueur au plus n dans $\mathcal{M}_{p\times q}$. Pour $\mathcal{A} \subset \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ un espace vectoriel, la notation $\mathcal{A}[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq n}] \subset \mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times q}}$ désigne le sous-espace vectoriel évident obtenu par la projection $A \longmapsto A[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq n}]$.

Définition 2.5. *Le niveau de saturation d'un espace vectoriel $\mathcal{A}$ est le plus petit élément $N \in \mathbb{N} \cup \infty$ tel que la projection naturelle $\mathcal{A}[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq N+1}] \longrightarrow \mathcal{A}[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq N}]$ est un isomorphisme.*

Proposition 2.6. *Soit $\mathcal{A} \subset Rec_{p\times q}(\mathbf{K})$ un espace vectoriel récursivement clos de niveau de saturation fini $N < \infty$. Alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq N}]$ sont isomorphes.*

Idée de la preuve Notant $K_l \subset \mathcal{A}$ le noyau de la projection évidente $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}[\mathcal{M}_{p\times q}^{\leq l}]$, on a l'égalité $K_N = K_{N+1}$ qui implique $K_n = K_N = \{0\}$ pour tout $n \geq N$. $\square$

La proposition 2.6 permet de construire des présentations minimales de $A+B$ et $A \cdot B$ pour A, B des matrices à récurrence convenables (données par des présentations minimales) en utilisant un nombre fini d'opérations dans des espaces vectoriels de dimensions finies. Plus précisément, étant données des bases $A_1 = A, \dots, A_a$ et $B_1 = B, \dots, B_b$ de $\overline{A}^{rec}$ et $\overline{B}^{rec}$, le calcul du niveau de saturation de $\mathcal{C} = \sum \mathbf{K}A_i + \sum \mathbf{K}B_j$ permet de déterminer le sous-espace $\overline{A_1 + B_1}^{rec} \subset \mathcal{C}$ et d'en donner une base. Pour le produit, on procède similairement avec $\overline{A_1 \cdot B_1}^{rec} \subset \sum \mathbf{K}A_i \cdot B_j$.

Remarque 2.7. *L'algèbre $Rec_{p\times p}(\mathbf{K})$ contient des éléments inversibles (pour le produit matriciel) dans $\mathbf{K}^{\mathcal{M}_{p\times p}}$ mais sans inverse dans $Rec_{p\times p}(\mathbf{K})$. Un exemple est la matrice à récurrence diagonale définie par $A[U,W] = 1+n$ si $U = W = s_1 \dots s_n,\ n \in \mathbb{N}$, et $A[U,W] = 0$ sinon.*

3 Idée de la preuve du théorème 1.1

On exhibe des éléments $L, U \in \mathrm{Rec}_{2\times 2}$ (où $L[\mathcal{M}_{2\times 2}^l], U[\mathcal{M}_{2\times 2}^l]$ sont respectivement une matrice triangulaire unipotente inférieure et une matrice triangulaire supérieure) tels que le produit $H = L \cdot U \in \mathrm{Rec}_{2\times 2}$ est donné par $H[s_1 \dots s_n, t_1 \dots t_n] = \prod_{j=1}^n i^{s_j + t_j}$ pour $s_1 \dots s_n, t_1 \dots t_n \in \{0,1\}^n$. Une inspection des "coefficients diagonaux" de U termine alors la preuve. (Pour le développement en fraction continue de Jacobi, on procède similairement en calculant la matrice de Stieltjes associée).

Plus précisément, on montre que la matrice H ci-dessus admet la présentation minimale $H_1 = H, H_2$ avec valeurs initiales $H_1[\emptyset,\emptyset] = 1, H_2[\emptyset,\emptyset] = i$ et matrices de décalage

$$\rho(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(0,1) = \rho(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix}, \quad \rho(1,1) = \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Similairement, L peut se décrire par rapport à la base $L_1 = L, L_2, L_3, L_4$ par la présentation minimale avec valeurs initiales $(L_1, \ldots, L_4)[\emptyset,\emptyset] = (1, i, 1, 0)$ et les matrices de décalage

$$\rho(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -i & -1+i & -i \\ 1 & 1+i & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1+i & 1 & i \\ 0 & i & 0 & i \end{pmatrix}.$$

La matrice à récurrence U est le produit matriciel $U = D \cdot L^t$ avec $L^t[V,W] = L[W,V]$ et $D \in \mathrm{Rec}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ diagonal. Une présentation minimale de D est donnée par $D_1 = D, D_2, D_3$, $(D_1, D_2, D_3)[\emptyset,\emptyset] = (1, 1+i, 1+i)$ et les matrices de décalage

$$\rho(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(0,1) = \rho(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une inspection des coefficients de D termine la preuve.

Remarque 3.1. *Le résultat du théorème 1.1 semble également vrai pour les séries génératrices* $\prod_{k=0}^{\infty}(1 + \sigma_k\, ix^{2^k})$ *avec* $\sigma_0, \sigma_1, \dots \in \{\pm 1\}$ *arbitraires en remplaçant la suite du pliage régulier par la suite d'un pliage généralisé définie par* $f(2^k) = \sigma_{k+1}$ *et* $f(2^k + a) = -f(2^k - a), 1 \leq a < 2^k$.

References

[1] J.-P. Allouche, J. Shallit, Automatic sequences. Theory, applications, generalizations, Cambridge University Press (2003).

[2] J.-P. Allouche, J. Peyrière, Z.-X. Wen, Z.-Y. Wen, *Hankel determinants of the Thue-Morse sequence.* Ann. Inst. Fourier **48**, No.1, 1-27 (1998).