

# Stabilité des équations différentielles ordinaires

Emmanuel Moulay

Cours de Master



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Théorèmes d'existence et d'unicité</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>La théorie de Lyapunov</b>	<b>11</b>
3.1	Préliminaires . . . . .	11
3.1.1	Premières définitions . . . . .	11
3.1.2	Fonctions de classe $\mathcal{K}$ . . . . .	11
3.1.3	Fonctions (semi) définies positives . . . . .	13
3.1.4	Fonctions radialement non bornées . . . . .	13
3.1.5	Fonctions décroissantes . . . . .	14
3.1.6	Stabilité et instabilité . . . . .	14
3.1.7	Stabilité asymptotique . . . . .	16
3.1.8	Stabilité uniforme . . . . .	17
3.1.9	Stabilité asymptotique uniforme . . . . .	19
3.1.10	Stabilité en temps fini . . . . .	22
3.2	Théorèmes de Lyapunov . . . . .	23
3.2.1	Théorèmes de Lyapunov autonomes . . . . .	23
3.2.2	Théorèmes de Lyapunov non autonomes . . . . .	27
3.3	Théorèmes inverses de Lyapunov . . . . .	31
3.3.1	Théorème inverse de stabilité uniforme . . . . .	31
3.3.2	Théorème inverse de stabilité uniforme asymptotique . . . . .	34
3.4	Théorèmes de Hahn . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Stabilité en temps fini</b>	<b>37</b>
4.1	Systèmes scalaires . . . . .	37
4.2	Systèmes multi-variables . . . . .	39



# Chapitre 1

## Introduction

Certaines méthodes visant à stabiliser les systèmes non linéaires sont basées sur l'utilisation de la linéarisation statique ou dynamique. Elles peuvent conduire à des résultats plus ou moins satisfaisants du point de vue pratique. Cependant, ceux-ci ne s'adressent qu'à une classe relativement restreinte de systèmes physiques : ceux régis par des équations différentielles ordinaires non linéaires possédant certaines propriétés.

L'objectif de ce cours est dans un premier temps de présenter sommairement la théorie de la stabilité des équations différentielles. Le problème qui nous intéresse ici est celui des systèmes non linéaires. Les premiers résultats sont apparus avec Lyapunov à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle et au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Il donne alors une condition suffisante pour la stabilité des systèmes non linéaires. Chetaev, quant à lui, montrera un théorème d'instabilité en 1934. Puis, Massera démontre une condition nécessaire et suffisante de stabilité. Hahn et Lefschetz achèveront alors dans les années 1960 cette théorie.

Dans un second temps, nous nous intéresserons à la stabilité en temps fini. Cette stabilité, qui n'est qu'une extension de la stabilité asymptotique, est cependant très importante du point de vue pratique et industriel, car elle permet de dire au bout de combien de temps le système est stable.

Il est important de noter que cette problématique est cruciale pour le développement de nouveaux types de commande non linéaire par modes glissants d'ordre supérieur.

Rappelons certaines caractéristiques de telles commandes :

- Les modes glissants permettent une bonne spécification de performances.
  - Leur synthèse et leur mise en oeuvre matérielle sont relativement simples.
- Parmi les enjeux applicatifs qui leur sont liés, nous pouvons citer :

1. la robustesse des commandes à structure variable pour les robots manipulateurs,
2. la commande par modes glissants d'ordre supérieur qui est une alternative aux commandes actuelles pour les robots mobiles non holonomes,

3. pour certains aspects liés aux transmissions analogiques ou numériques sécurisées (cryptographie), l'utilisation de systèmes dynamiques chaotiques (clé) qui crypteraient une information en temps fini et de même pour l'opération inverse : le décryptage serait basé sur un reconstituteur en temps fini.

Les premiers travaux sur la stabilité ne retenaient des équations différentielles ordinaires (EDO) que leur approximation linéaire du premier ordre. Il fallu attendre quelques années pour que H. Poincaré et A.M. Lyapunov justifient et étendent les propriétés locales déduites du modèle linéarisé. L'un des résultats principaux est la première méthode de Lyapunov : si l'origine est asymptotiquement stable pour le linéarisé alors il est localement asymptotiquement stable pour le système non linéaire. Cependant elle ne donne aucun renseignement quantitatif sur le domaine de stabilité asymptotique. Cette lacune fut contournée par l'introduction des célèbres fonctions de Lyapunov : c'est la seconde méthode de Lyapunov. D'une part, les fonctions de Lyapunov sont analogues à des distances entre l'état du système le long de sa trajectoire et l'ensemble ou trajectoire étudié. D'autre part, ces fonctions ont une relation directe avec la physique des systèmes puisque très souvent elles ne sont rien de plus que l'expression de l'énergie totale du système qui, s'il est dissipatif, décroît au cours du temps afin que le système rejoigne une configuration à énergie minimale (s'il n'y a pas d'apport d'énergie).

Mais l'étude de la stabilité, et plus particulièrement de la stabilité en temps fini, a pour but de développer le problème plus général de la stabilisation et plus particulièrement de la stabilisation en temps fini. Ce problème est beaucoup plus complexe. C'est un thème de recherche actuel en mathématiques et automatique que nous n'aborderons pas ici.

## Chapitre 2

# Théorèmes d'existence et d'unicité

$U$  désigne toujours un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) contenant 0 et  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ , non borné à droite.

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, on lui associe le système :

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.1)$$

Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue, on lui associe le système :

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (2.2)$$

$x(t, t_0, x_0)$  désigne une solution  $x(t)$  du système (2.1), ou du système (2.2) telle que  $x(t_0) = x_0$ .

Soient  $A \subset U$ ,  $\epsilon > 0$ , on définit la boule

$$B(x, \epsilon) = \{y \in U; \|y - x\| < \epsilon\}$$

et

$$B_\epsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B(x, \epsilon)$$

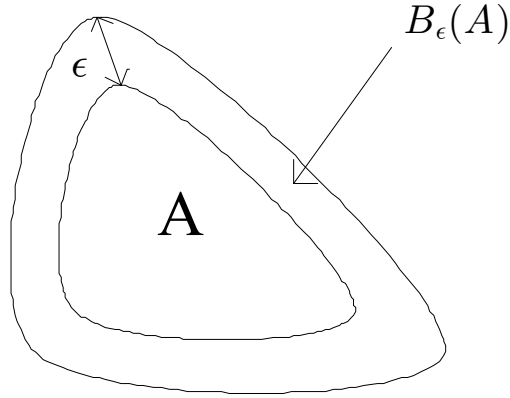
l'enveloppe de  $A$  (voir figure 2.1).

Si  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{U}$  désigne l'adhérence de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\overset{\circ}{U}$  son intérieur.

Soient  $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$ ,  $h = (h_1, \dots, h_n)$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^k$  sur  $U$ . On note :

$$Df(a).h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(a)h_i \quad \text{et} \quad Df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(a)dy_i$$

Soient  $t_0 \in I$  et  $r \in \mathbb{R}_*^+$ . On note :

FIG. 2.1 – Enveloppe de  $A$ 

1.  $\mathcal{V}(U)$  un voisinage de 0 dans  $U$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas l'espace  $U$ .
2. On définit les voisinages cylindriques suivants

$$\mathcal{C}_{t_0, r}(U) = \{(t, y) \in I \times U; t \geq t_0 \text{ et } y \in B(0, r)\}$$

$$\mathcal{V}_{t_0}(U) = \{(t, y) \in I \times U; t \geq t_0 \text{ et } y \in \mathcal{V}(U)\}$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on ne précise pas l'espace  $U$ .

**Remarque 1** On introduit des voisinages cylindriques à base sphérique que l'on utilise pour les démonstrations, afin de simplifier l'écriture. On peut le faire car les voisinages cylindriques à base sphérique définissent une base de voisinage.

Voici le théorème d'Arzela Péano que l'on peut trouver dans [6].

**Théorème 2 (d'Arzela Péano)** On considère le système (2.2). Alors, par tout point  $(t_0, x_0) \in I \times U$  passe au moins une solution maximale  $x(t, t_0, x_0)$  définie sur  $J \subset I$ .

Rappelons le théorème de Carathéodory et sa preuve qui se trouvent par exemple dans [1].

**Théorème 3 (de Carathéodory)** Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- (i) pour tout  $x \in U$ ,  $\varphi_y : t \in I \mapsto f(t, x)$  est mesurable
- (ii) pour presque tout  $t$ ,  $\psi_t : x \in U \mapsto f(t, x)$  est continue
- (iii) pour tout compact  $K$  de  $U$ , il existe

$$m_K : I \mapsto \mathbb{R}^+$$

intégrable sur  $I$  telle que :

$$\forall (t, x) \in I \times K, \quad |f(t, x)| \leq m_K(t).$$

On considère le système :

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in I$$

dit système de Carathéodory. Alors, pour tout  $(t_0, x_0) \in \overset{\circ}{I} \times U$  passe au moins une solution  $x(t, t_0, x_0)$  définie pour presque tout  $t$ .

**Preuve.** Par hypothèse, on sait que l'on peut trouver  $r > 0$  et  $h > 0$  tels que :

$$\|x - x_0\| \leq r \implies \int_{t_0-h}^{t_0+h} m_{\overline{B(x_0, r)}}(s) ds \leq r.$$

On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des applications continues de  $[t_0 - h, t_0 + h]$  dans  $\overline{B(x_0, r)}$ .  $\mathcal{C}$  est un convexe fermé de l'espace de Banach  $C^0([t_0 - h, t_0 + h], \mathbb{R}^n)$ .

Si  $u \in \mathcal{C}$ ,  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ , on définit :

$$T(u)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Grâce à la définition de  $h$  et à (iii), on voit que  $T(u)$  est à valeurs dans  $\overline{B(x_0, r)}$ . De plus

$$|T(u)(t_1) - T(u)(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, u(s)) ds \right| \leq \int_{[t_1, t_2]} m_{\overline{B(x_0, r)}}(s) ds \xrightarrow{t_2 \rightarrow t_1} 0$$

ce qui montre que  $T(u)$  est continue, donc  $T(u) \in \mathcal{C}$ .

$m_{\overline{B(x_0, r)}}$  étant intégrable, on en déduit que

$$t \mapsto \int_{t_0}^t m_{\overline{B(x_0, r)}}(s) ds$$

est uniformément continue. Par conséquent,  $T(\mathcal{C})$  est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli, comme  $T(\mathcal{C})$  est borné, on a que  $T(\mathcal{C})$  est relativement compact dans  $\mathcal{C}$ .

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}$ , tendant vers  $u$  et  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ; on a :

$$\begin{aligned} |T(u_n)(t) - T(u)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) - f(s, u(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds. \end{aligned}$$

Notons alors  $J$  l'ensemble des  $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$  tels que  $\psi_t$  soit continue.  $I \setminus J$  étant négligeable, on a :

$$\|T(u_n) - T(u)\|_{\infty} \leq \int_J |f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| ds.$$

$u_n$  tend vers  $u$  uniformément, donc simplement. La continuité de  $\psi_s$  pour tout  $s \in J$ , permet d'affirmer que :

$$|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme on a la domination suivante :

$$|f(s, u_n(s)) - f(s, u(s))| \leq 2m_{\overline{B(x_0, r)}}(s)$$

on peut appliquer le théorème de la convergence dominée et affirmer que

$$\|T(u_n) - T(u)\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc  $T$  est continue.

D'après le théorème du point fixe de Schauder,  $T$  admet un point fixe  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{C}$ . Cette application vérifie :

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s, t_0, x_0)) ds.$$

La fonction  $t \mapsto f(t, x(t))$  est intégrable sur  $[t_0 - h, t_0 + h]$ , donc le théorème de dérivation des intégrales de Lebesgue permet d'affirmer que  $x(t, t_0, x_0)$  est presque partout dérivable, et que pour presque tout  $t$ , on a :

$$\dot{x}(t, t_0, x_0) = f(t, x(t, t_0, x_0)).$$

■

**Définition 4** Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on dit que

1.  $f$  est localement lipschitzienne en la première variable, si pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$ , il existe un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $I \times U$  et une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall ((t, y), (t', y)) \in V^2, \quad \|f(t, y) - f(t', y)\| \leq c \|t - t'\|.$$

On note  $Lip_t(I \times U)$  l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la première variable.

2.  $f$  est localement lipschitzienne en la deuxième variable, si pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times U$ , il existe un voisinage  $V$  de  $(t_0, x_0)$  dans  $I \times U$  et une constante  $c > 0$  telle que :

$$\forall ((t, y), (t, y')) \in V^2, \quad \|f(t, y) - f(t, y')\| \leq c \|y - y'\|.$$

On note  $Lip_y(I \times U)$  l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la deuxième variable.

On note  $Lip_{(t,y)}(I \times U)$  l'ensemble des fonctions localement lipschitziennes en la première et la deuxième variable.

Donnons enfin le théorème de Cauchy-Lipschitz dont la preuve se trouve dans [6].

**Théorème 5 (de Cauchy-Lipschitz)** Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue,  $f \in Lip_y(I \times U)$ , on considère le système (2.2), alors par tout point  $(t_0, x_0) \in I \times U$  passe une seule solution maximale  $x(t, t_0, x_0)$  définie sur  $J \subset I$ .

# Chapitre 3

## La théorie de Lyapunov

### 3.1 Préliminaires

#### 3.1.1 Premières définitions

**Définition 6** Un point  $\bar{x} \in U$  est un **point d'équilibre**, ou un point **singulier** du système (2.1) (respectivement de (2.2)) si  $f(\bar{x}) = 0$  (respectivement  $\forall t \in I, f(t, \bar{x}) = 0$ ).

On considérera toujours l'équilibre en 0. Pour le cas général, il suffit de faire une translation.

**Définition 7** On considère le système (2.1), et  $V : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant des dérivées partielles sur  $U$ . On définit **la dérivée totale**  $\dot{V}$  pour le système (2.1) par :

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(y) f_i(y)$$

**Définition 8** On considère le système (2.2), et  $V : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ayant des dérivées partielles sur  $I \times U$ . On définit **la dérivée totale**  $\dot{V}$  pour le système (2.2) par :

$$\dot{V}(t, y) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, y) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t, y) f_i(t, y)$$

#### 3.1.2 Fonctions de classe $\mathcal{K}$

**Définition 9** Soit  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$  et  $\varphi : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$  une application continue, on dit que  $\varphi$  appartient à **la classe  $\mathcal{K}$**  si :

1.  $\varphi$  est strictement croissante,
2.  $\varphi(0) = 0$ .

**Définition 10** Soit  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  une application continue, on dit que  $\varphi$  appartient à **la classe  $\mathcal{K}^\infty$**  si :

1.  $\varphi$  est strictement croissante,
2.  $\varphi(0) = 0$ ,
3.  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = +\infty$ .

**Exemple 11** Donnons deux exemples de fonctions de classe  $\mathcal{K}$  et de classe  $\mathcal{K}^\infty$  :

1.  $\varphi$  définie par  $\varphi(r) = \arctan(r)$  est strictement croissante car

$$\varphi'(r) = \frac{1}{1+r^2} > 0.$$

Ainsi,  $\varphi$  appartient à la classe  $\mathcal{K}$ , mais  $\varphi$  n'appartient pas à la classe  $\mathcal{K}^\infty$  car  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = \frac{\pi}{2}$ .

2. Soit  $c > 0$ ,  $\varphi$  définie par  $\varphi(r) = r^c$  est strictement croissante car

$$\varphi'(r) = cr^{c-1} > 0.$$

De plus,  $\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r) = +\infty$ , donc  $\varphi$  appartient à la classe  $\mathcal{K}$ .

**Définition 12** Soit  $a \in \mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \beta : [0, a] \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (r, s) &\mapsto \beta(r, s) \end{aligned}$$

une application continue, on dit que  $\beta$  appartient à **la classe  $\mathcal{KL}$**  si :

1. pour tout  $s \in \mathbb{R}^+$ ,  $r \mapsto \beta(r, s)$  appartient à **la classe  $\mathcal{K}$**
2. pour tout  $r \in [0, a]$ ,  $s \mapsto \beta(r, s)$  est décroissante
3. pour tout  $r \in [0, a]$ ,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$ .

**Exemple 13** Soit  $k > 0$ ,  $\beta$  définie par  $\beta(r, s) = \frac{r}{ksr + 1}$  est strictement croissante en  $r$  car

$$\frac{\partial \beta}{\partial r}(r, s) = \frac{1}{(ksr + 1)^2} > 0$$

et strictement décroissante en  $s$  car

$$\frac{\partial \beta}{\partial s}(r, s) = \frac{-kr^2}{(ksr + 1)^2} < 0.$$

De plus,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$  ; donc  $\beta$  appartient à la classe  $\mathcal{KL}$ .

### 3.1.3 Fonctions (semi) définies positives

**Définition 14** Une fonction  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **semi-définie positive** (respectivement **semi-définie négative**) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $v(0) = 0$
2. pour tout  $y \in \mathcal{V}$ ,  $v(y) \geq 0$  (respectivement  $v(y) \leq 0$ ).

Elle est dite **définie positive** (respectivement **définie négative**) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $v(0) = 0$ ,
2. pour tout  $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ,  $v(y) > 0$  (respectivement  $v(y) < 0$ ).

**Définition 15** Une fonction  $v : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **semi-définie positive** (respectivement **négative**) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1.  $\forall t \in I, v(t, 0) = 0$
2.  $\forall t \in I, \forall y \in \mathcal{V}, v(t, y) \geq 0$  (respectivement  $v(t, y) \leq 0$ ).

Elle est dite **définie positive** (respectivement **négative**) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 tel que :

1. pour tout  $t \in I, v(t, 0) = 0$ ,
2. il existe  $v_0 : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  définie positive telle que :

$$\forall t \in I, \forall y \in \mathcal{V}, \quad v(t, y) \geq v_0(y)$$

(respectivement  $v(t, y) \leq v_0(y)$ ).

Dans le cas où  $v$  est continue, on peut construire la fonction

$$\varphi(r) = \inf_{r \leq \|y\| \leq d(0, \mathcal{V})} v_0(y).$$

$v_0$  étant continue,  $\varphi$  est continue.  $\varphi(0) = 0$  et  $\varphi$  est croissante au sens large. De plus,  $\varphi$  ne peut pas être nulle dans un intervalle  $[0, a]$ , car sinon  $v_0$  le serait aussi, ce qui est exclu car  $v_0$  est définie positive.  $\varphi$  est donc de classe  $\mathcal{K}$ . On peut ainsi reformuler la définition sous une forme plus pratique :

**Définition 16** Soit  $t_0 \in I$ ,  $v : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue telle que pour tout  $t \in I, v(t, 0) = 0$ .  $v$  est **définie positive** (respectivement **définie négative**) s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :

$$v(t, y) \geq \varphi(\|y\|) \quad (\text{respectivement } v(t, y) \leq -\varphi(\|y\|)) \quad \forall (t, y) \in \mathcal{V}_{t_0}.$$

### 3.1.4 Fonctions radialement non bornées

**Définition 17** Une fonction  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est **radialement non bornée** si :

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} v(y) = +\infty$$

Une fonction  $v : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est **radialement non bornée** si

$$\lim_{\|y\| \rightarrow +\infty} v(t, y) = +\infty$$

uniformément en  $t$ , c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall y \in \mathbb{R}^n, (\|y\| > \delta) \implies (\forall t \in I, v(t, y) > \epsilon).$$

Dans le cas où  $v$  est continue, on peut reformuler la définition sous une forme plus pratique :

**Définition 18** Une fonction  $v : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continue est **radialement non bornée** s'il existe une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{K}^\infty$  telle que :

$$v(t, y) \geq \varphi(\|y\|) \quad \forall t \in I, \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

### 3.1.5 Fonctions décroissantes

**Définition 19** Une fonction  $v : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  est **décroissante** si

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} v(t, y) = 0$$

uniformément en  $t$ , c'est à dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; \forall y \in U, (\|y\| < \delta) \implies (\forall t \in I, v(t, y) < \epsilon).$$

Dans le cas où  $v$  est continue, on peut reformuler la définition sous une forme plus pratique :

**Définition 20** (voir [2]) Une fonction  $v : I \times U \rightarrow \mathbb{R}$  est **décroissante** si et seulement s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction  $\psi$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :

$$|v(t, y)| \leq \psi(\|y\|) \quad \forall (t, y) \in \mathcal{V}_{t_0}$$

**Exemple 21** La fonction  $v$  définie par  $v(t, y) = (1 + \sin^2(t)) (y_1^2 + y_2^2)$  est dominée par la fonction

$$\alpha(y) = 2 (y_1^2 + y_2^2)$$

qui est de classe  $\mathcal{K}$ . Donc  $v$  est décroissante.

### 3.1.6 Stabilité et instabilité

**Définition 22** Soit  $D_0 \subset D \subset U$  non vides,  $(T_s, T_f) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$  tels que  $T_s < T_f$ ,  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est  $(I, T_s, T_f, D_0, D)$ -**pratiquement stable** pour le système (2.2), si pour tout  $x_0 \in D_0$  et  $t_0 \in I$ , on a :

1.  $x(t, t_0, x_0)$  est définie sur  $[t_0, t_0 + T_f]$ ,
2.  $\forall t \in [t_0, t_0 + T_f], x(t, t_0, x_0) \in D$ ,
3.  $\forall t \in [t_0 + T_s, t_0 + T_f], x(t, t_0, x_0) \in K$ .

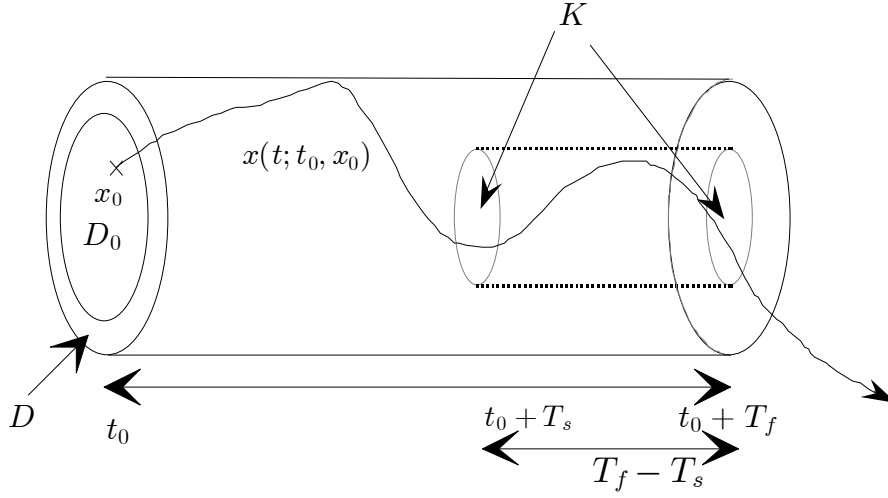


FIG. 3.1 – Stabilité pratique

De plus,  $K$  est  $(I, T_s, T_f, D_0, D)$ -**pratiquement stable en temps fini** si  $K$  est  $(I, T_s, +\infty, D_0, D)$ -**pratiquement stable**.

**Définition 23** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est **stable** pour le système (2.2) si pour tout  $\epsilon > 0$ , et  $t_0 \in I$ , il existe  $\delta(\epsilon, t_0) > 0$  tel que :

$$(x_0 \in B_{\delta(\epsilon, t_0)}(K)) \implies \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0, \\ x(t, t_0, x_0) \in B_\epsilon(K) \quad \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

**Exemple 24** On considère le système :

$$\dot{x} = (6t \sin(t) - 2t)x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il admet des solutions de la forme :

$$\begin{aligned} x(t, t_0, x_0) &= x_0 \exp \left[ \int_{t_0}^t (6s \sin(s) - 2s) ds \right] \\ &= x_0 \exp [6s \sin(t) - 6t \cos(t) - t^2 - 6 \sin(t_0) + 6t_0 \cos(t_0) + t_0^2]. \end{aligned}$$

On voit que le terme en exponentielle est borné pour tout  $t \geq t_0$  par une constante  $c(t_0)$  qui dépend seulement de  $t_0$ . Ainsi, on a :

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq |x_0| c(t_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , si l'on choisit  $\delta = \frac{\epsilon}{c(t_0)}$ , on voit que 0 est stable.

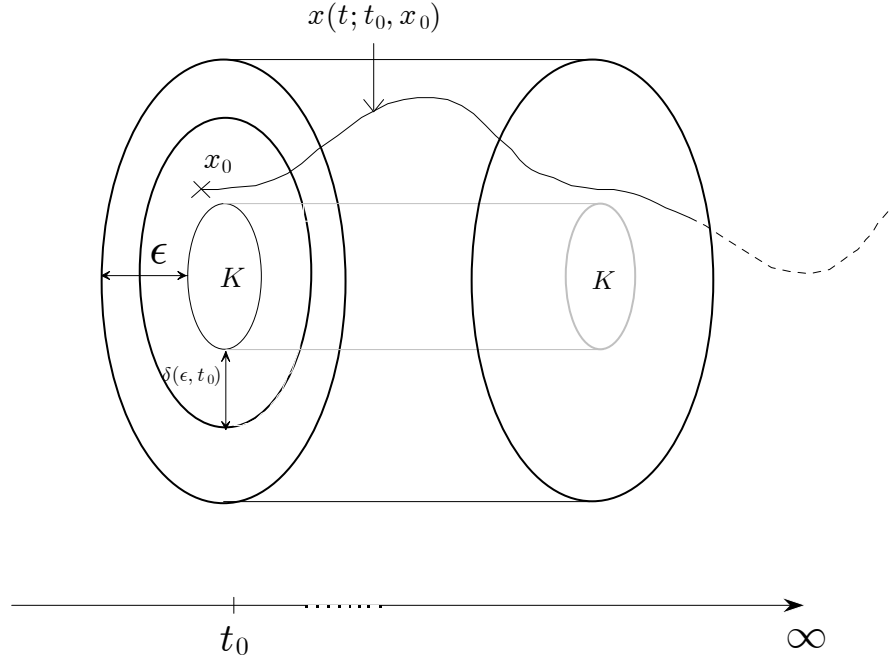


FIG. 3.2 – Stabilité

**Définition 25** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , stable pour le système (2.2). Pour tout  $\epsilon > 0$ , et  $t_0 \in I$ , il existe un  $\delta_{\max}(\epsilon, t_0) > 0$  maximum parmi les  $\delta(\epsilon, t_0)$ . On définit alors le domaine de stabilité de  $K$  par rapport à  $t_0$  :

$$\mathcal{D}_s(t_0, K) = \bigcup_{\epsilon > 0} D(0, \delta_{\max}(\epsilon, t_0))$$

puis le domaine de stabilité de  $K$  :

$$\mathcal{D}_s(K) = \bigcup_{t_0 \in I} \mathcal{D}_s(t_0, K).$$

**Définition 26** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on considère le système (2.2), si  $K$  n'est pas stable pour le système (2.2), on dit que  $K$  est **instable** pour le système (2.2).

### 3.1.7 Stabilité asymptotique

**Définition 27** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est **attractif** pour le système (2.2) si pour tout  $t_0 \in I$ , il existe  $\delta(t_0) > 0$  tel que :

$$(x_0 \in B_{\delta(t_0)}(K)) \implies \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t, t_0, x_0), K) = 0. \end{cases}$$

**Définition 28** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on considère le système (2.2). On dit que  $K$  est **asymptotiquement stable** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est **stable** pour le système (2.2),
2.  $K$  est **attractif** pour le système (2.2) .

**Définition 29** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on considère le système (2.2). On dit que  $K$  est **globalement asymptotiquement stable** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est **stable** pour le système (2.2),
2. pour tout  $t_0 \in I$ , et  $x_0 \in U$ ,  $x(t, t_0, x_0)$  est définie pour tout  $t \geq t_0$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} d(x(t, t_0, x_0), K) = 0$ .

**Exemple 30** On considère le système :

$$\dot{x} = \frac{x}{1+t}, \quad t \geq 0.$$

Il admet des solutions de la forme :

$$x(t, t_0, x_0) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^t \frac{-1}{1+s} ds\right) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}.$$

On voit ainsi que 0 est globalement asymptotiquement stable.

### 3.1.8 Stabilité uniforme

**Définition 31** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on considère le système (2.2). On dit que  $K$  est **uniformément stable** pour le système (2.2) si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que pour tout  $t_0 \in I$ ,

$$(x_0 \in B_{\delta(\epsilon)}(K)) \implies \begin{cases} x(t, t_0, x_0) \text{ est définie pour } t \geq t_0, \\ x(t, t_0, x_0) \in B_{\epsilon}(K) \quad \forall t \geq t_0. \end{cases}$$

**Remarque 32** La stabilité uniforme entraîne la stabilité, mais la réciproque est fautive. Reprenons l'exemple 24 :

$$\dot{x} = (6t \sin(t) - 2t) x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Supposons que  $t_0$  prenne les valeurs successives

$$t_0 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{N}$$

et que  $x(t, t_0, x_0)$  soit évalué en  $t_0 + \pi$ , alors

$$x(t_0 + \pi, t_0, x_0) = x_0 \exp[(4n + 1)(6 - \pi)\pi]$$

Donc si  $x_0 \neq 0$  on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(t_0 + \pi, t_0, x_0)}{x_0} = +\infty.$$

Ainsi, pour  $\epsilon$  donné, il n'existe pas de  $\delta$  indépendant de  $t_0$  qui permette de dire que 0 est uniformément stable.

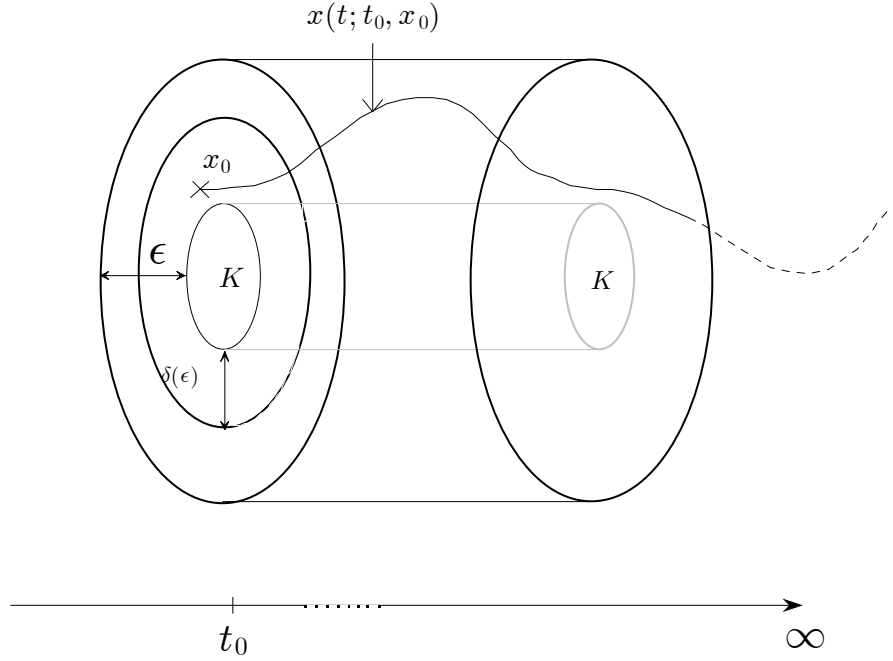


FIG. 3.3 – Stabilité uniforme

Caractérisons la stabilité uniforme à l'aide des fonctions de classe  $\mathcal{K}$ .

**Théorème 33** (voir [3]) *Si 0 est un équilibre du système (2.2), alors 0 est uniformément stable si et seulement s'il existe une constante  $c > 0$ , et une fonction  $\rho$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :*

$$\forall t_0 \in I, \forall x_0 \in B(0, c), \forall t \geq t_0, \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|).$$

**Preuve.** ( $\Leftarrow$ ) Soit  $t_0 \in I$ , supposons qu'il existe une fonction  $\rho$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :

$$\forall x_0 \in B(0, c), \forall t \geq t_0, \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|).$$

Soit  $\epsilon > 0$ , et  $\delta = \min \{c, \rho^{-1}(\epsilon)\}$ , alors pour  $x_0 \in B(0, \delta)$ , on a

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|) < \rho(\delta) \leq \rho(\rho^{-1}(\epsilon)) = \epsilon \quad \forall t \geq t_0$$

ce qui montre la stabilité uniforme.

( $\Rightarrow$ ) Soit  $t_0 \in I$ , on suppose que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$  tel que :

$$(x_0 \in B(0, \delta(\epsilon))) \implies (x(t, t_0, x_0) \in B(0, \epsilon)) \quad \forall t \geq t_0.$$

On considère la borne supérieure  $\tilde{\delta}(\epsilon)$  de tous les  $\delta(\epsilon)$  donnés ci-dessus. Alors pour tout  $t \geq t_0$ ,

$$\left(x_0 \in B(0, \tilde{\delta}(\epsilon))\right) \implies (x(t, t_0, x_0) \in B(0, \epsilon)).$$

Donc, si  $\delta_1 > \tilde{\delta}(\epsilon)$ , il existe au moins un point initial  $\tilde{x}_0$  vérifiant

$$\tilde{x}_0 \in B(0, \delta_1),$$

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t, t_0, \tilde{x}_0)\| \geq \epsilon.$$

La fonction  $\tilde{\delta}(\epsilon)$  est définie positive. Elle n'est pas décroissante par définition, et elle tend vers 0 quand  $\epsilon \rightarrow 0$ . Mais  $\tilde{\delta}(\epsilon)$  n'est pas nécessairement continue. On choisit alors une fonction  $\zeta(r)$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que :

$$\zeta(r) \leq k\tilde{\delta}(r)$$

avec  $0 < k < 1$ . Cette fonction admet un inverse  $\rho$  qui est de classe  $\mathcal{K}$ . Posons  $c = \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta(r)$ .

Soit  $x_0 \in B(0, c)$ , posons

$$\epsilon = \rho(\|x_0\|).$$

Alors  $x_0$  appartient à  $B(0, \tilde{\delta}(\epsilon))$  et :

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \epsilon = \rho(\|x_0\|) \quad \forall t \geq t_0.$$

■

**Définition 34** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , uniformément stable pour le système (2.2). Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\delta_{\max}(\epsilon) > 0$  maximum parmi les  $\delta(\epsilon)$ . On définit alors le domaine de stabilité uniforme de  $K$  :

$$\mathcal{D}_{su}(K) = \bigcup_{\epsilon > 0} D(0, \delta_{\max}(\epsilon))$$

### 3.1.9 Stabilité asymptotique uniforme

**Définition 35** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est **uniformément asymptotiquement stable** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est uniformément stable pour le système (2.2)
2.  $\exists \delta > 0; \forall \epsilon > 0, \exists T(\epsilon) > 0;$

$$(x_0 \in B_\delta(K)) \implies (x(t, t_0, x_0) \in B_\epsilon(K)) \quad \forall t \geq t_0 + T(\epsilon). \quad (3.1)$$

**Remarque 36** On peut reformuler la condition (3.1) par :

$$\exists R_1 > 0; \forall 0 < R_2 < R_1, \exists T(R_1, R_2); \forall t \geq t_0 + T(R_1, R_2)$$

$$(x_0 \in B_{R_1}(K)) \implies (x(t, t_0, x_0) \in B_{R_2}(K)).$$

C'est-à-dire que la trajectoire  $x(t, t_0, x_0)$  partant de  $B_{R_1}(K)$  va converger dans une boule plus petite  $B_{R_2}(K)$ . On voit ainsi que la stabilité asymptotique uniforme implique la stabilité asymptotique mais pas l'inverse comme le montre l'exemple 30.

**Théorème 37** (voir [2]) Si  $K = \{0\}$ , alors la condition (ii) de la définition 35 d'un équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système (2.2) est équivalente à l'existence d'une fonction  $\sigma$  vérifiant :

1.  $\sigma$  est définie, continue et décroissante sur  $\mathbb{R}_*^+$
2.  $\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma(r) = 0$
3. il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in B(0, \eta)$  :

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \sigma(t - t_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du théorème 33. ■

Caractérisons la stabilité asymptotique uniforme à l'aide des fonctions de classe  $\mathcal{KL}$ .

**Théorème 38** (voir [3]) Si 0 est un équilibre du système (2.2), alors 0 est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une constante  $c > 0$ , et une fonction  $\beta : [0, a] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que :

$$\forall x_0 \in B(0, c), \forall t_0 \in I, \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

**Preuve.** ( $\Leftarrow$ ) Soit  $t_0 \in I$ , supposons qu'il existe une fonction  $\beta$  de classe  $\mathcal{KL}$  telle que :

$$\forall x_0 \in B(0, c), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0.$$

Alors,

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(\|x_0\|, 0)$$

et ceci implique que 0 est uniformément stable, d'après le théorème 33. De plus, pour  $x_0 \in B(0, c)$ , on a

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \beta(c, t - t_0) \quad \forall t \geq t_0$$

ce qui montre que  $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  uniformément en  $t$ .

( $\Rightarrow$ ) Supposons que 0 soit uniformément asymptotiquement stable. En raison de la stabilité uniforme et d'après le théorème 33, il existe une constante  $c > 0$ , et une fonction  $\rho$  de classe  $\mathcal{K}$ , telle que si  $t_0 \in I$ ,

$$\forall r \in [0, c], \forall x_0 \in B(0, r), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \rho(\|x_0\|) < \rho(r) \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.2)$$

De plus, si  $\eta > 0$  est donné, alors il existe  $T = T(\eta, r)$  tel que

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta \quad \forall t \geq t_0 + T(\eta, r).$$

On considère la borne supérieure  $\tilde{T}(\eta, r)$  de tous les  $T(\eta, r)$  donnés ci-dessus alors :

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \eta \quad \forall t \geq t_0 + \tilde{T}(\eta, r).$$

Ainsi, on a :

$$\sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tilde{T}(\eta, r)} \|x(t, t_0, x_0)\| \geq \eta.$$

La fonction  $\tilde{T}(\eta, r)$  est non négative, non croissante en  $\eta$ , non décroissante en  $r$ , et :

$$\tilde{T}(\eta, r) = 0, \quad \forall \eta \geq \rho(r).$$

Posons :

$$W_r(\eta) = \frac{2}{\eta} \int_{\frac{\eta}{2}}^{\eta} \tilde{T}(s, r) ds + \frac{r}{\eta} \geq \tilde{T}(\eta, r) + \frac{r}{\eta}.$$

La fonction  $W_r(\eta)$  est positive, et a les propriétés suivantes :

- pour tout  $r$  fixé,  $\eta \mapsto W_r(\eta)$  est continue, strictement décroissante et  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} W_r(\eta) = 0$ ,
- pour tout  $\eta$  fixé,  $r \mapsto W_r(\eta)$  est strictement croissante.

Notons  $U_r = W_r^{-1}$ . Alors  $U_r$  hérite des deux propriétés précédentes de  $W_r$ , et :

$$\tilde{T}(U_r(s), r) < W_r(U_r(s)) = s.$$

Par conséquent,

$$\forall x_0 \in B(0, r), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq U_r(t - t_0) \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.3)$$

En regroupant (3.2) et (3.3), on en déduit que :

$$\forall x_0 \in B(0, c), \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \sqrt{\rho(\|x_0\|) U_c(t - t_0)} \quad \forall t \geq t_0.$$

On pose  $\beta(r, s) = \sqrt{\rho(r) U_c(s)}$  et on a le résultat. ■

**Définition 39** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est **globalement uniformément asymptotiquement stable** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est uniformément stable pour le système (2.2)
2.  $\forall \delta > 0; \forall \epsilon > 0, \exists T(\delta, \epsilon) > 0; \forall t_0 \in I,$

$$(x_0 \in B_\delta(K)) \implies (x(t, t_0, x_0) \in B_\epsilon(K)) \quad \forall t \geq t_0 + T(\delta, \epsilon).$$

### 3.1.10 Stabilité en temps fini

**Définition 40** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est **stable en temps fini** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est stable pour le système (2.2)
2. pour tout  $t_0 \in I$ , il existe  $\delta(t_0) > 0$  tel que :

$$(x_0 \in B_{\delta(t_0)}(K)) \implies \exists 0 < T(t_0, x_0) < +\infty; \forall t \geq T(t_0, x_0), \quad x(t, t_0, x_0) \in K.$$

$$T_0(t_0, x_0) = \inf \{T(t_0, x_0) \geq 0; d(x(t, t_0, x_0), K) = 0 \quad \forall t \geq t_0 + T(t_0, x_0)\}$$

s'appelle le **temps d'établissement** et on dit que  $x(t, t_0, x_0)$  converge vers  $K$  en temps fini  $T_0(t_0, x_0)$ .

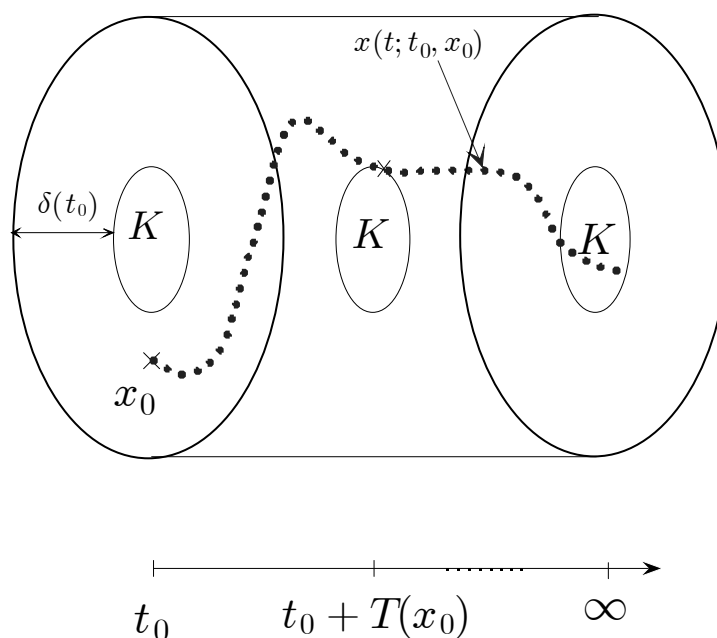


FIG. 3.4 – Stabilité en temps fini

**Remarque 41** On voit que  $K$  est stable en temps fini si  $K$  est asymptotiquement stable, et si toute solution qui converge vers  $K$ , le fait en temps fini.

**Définition 42** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on considère le système (2.2). On dit que  $K$  est **globalement stable en temps fini** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est stable pour le système (2.2),

2. pour tout  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in U$  :

$$\exists 0 < T(t_0, x_0) < +\infty; \forall t \geq T(t_0, x_0), \quad x(t, t_0, x_0) \in K.$$

**Définition 43** Soit  $K$  un compact non vide de  $U$ , on dit que  $K$  est **uniformément stable en temps fini** pour le système (2.2) si :

1.  $K$  est uniformément asymptotiquement stable pour le système (2.2)
2. il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $t_0 \in I$  :

$$x_0 \in B_\delta(K) \implies \exists 0 < T(x_0) < +\infty; \forall t \geq T(x_0), \quad x(t, t_0, x_0) \in K.$$

On dit que  $x(t, t_0, x_0)$  converge uniformément vers  $K$  en temps fini  $T(x_0)$ .

**Exemple 44** Soit  $a \in ]0, 1[$ , on considère le système :

$$\dot{x} = -|x|^a \operatorname{sgn}(x).$$

Les solutions du système sont données par :

$$x(t, t_0, x_0) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x_0) \left[ |x_0|^{1-a} - t(1-a) \right]^{\frac{1}{1-a}} & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{|x_0|^{1-a}}{1-a} \\ 0 & \text{si } t > \frac{|x_0|^{1-a}}{1-a} \end{cases}$$

On voit que les solutions rejoignent 0 en temps fini.

## 3.2 Théorèmes de Lyapunov

### 3.2.1 Théorèmes de Lyapunov autonomes

#### Théorème de stabilité

**Théorème 45** Soit 0 un point d'équilibre de (2.1), s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de 0 et une fonction

$$V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

- (i)  $V$  soit définie positive
- (ii) la dérivée totale  $\dot{V}$  pour (2.1) soit négative alors 0 est stable.  $V$  s'appelle une **fonction de Lyapunov**.

De plus si la dérivée totale  $\dot{V}$  pour (2.1) est définie négative, alors 0 est asymptotiquement stable.  $V$  s'appelle une **fonction stricte de Lyapunov**.

**Preuve.** 1<sup>ère</sup> partie : Soit  $\epsilon > 0$  tel que  $\overline{B(0, \epsilon)} \subset U$ ,  $V$  est continue sur

$$C_\epsilon = \{y \in U'; \|y\| = \epsilon\}$$

qui est compact, ainsi  $V$  y atteint ses bornes. Donc d'après (i), il existe  $\hat{y} \in C_\epsilon$  tel que :

$$V(\hat{y}) = \inf_{y \in C_\epsilon} V(y) = c > 0.$$

$V$  étant continue sur  $\mathcal{V}$  et comme  $V(0) = 0$ , on a :

$$\exists \delta > 0; \quad (y \in \mathcal{V} \text{ et } \|y\| < \delta) \implies V(y) < c.$$

De plus,  $\delta < \epsilon$  d'après ce qui précède.

Soit  $x_0 \in U$  tel que  $\|x_0\| < \delta$ , alors  $V(x_0) < c$ . On s'intéresse à la solution  $x(t, t_0, x_0)$ .

Supposons qu'il existe  $t_1 > 0$  tel que  $\|x(t_1, t_0, x_0)\| > \epsilon$ . On a

$$\|x(t_0, t_0, x_0)\| = \|x_0\| < \delta < \epsilon.$$

Or  $t \mapsto \|x(t, t_0, x_0)\|$  est continue. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t_\epsilon > 0$  tel que  $\|x(t_\epsilon, t_0, x_0)\| = \epsilon$  et ainsi  $V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \geq c$ .

D'après (ii), on sait que pour tout  $t$  dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$ , on a :

$$\dot{V}(x(t, t_0, x_0)) = (DV(x(t, t_0, x_0)))(\dot{x}(t, t_0, x_0)) = (DV(x(t, t_0, x_0)))(f(x(t, t_0, x_0))) \leq 0.$$

On en déduit que  $t \mapsto V(x(t, t_0, x_0))$  est décroissante dans un voisinage de  $t_0$  contenant  $t_\epsilon$ . Ainsi, on a

$$V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \leq V(x(t_0, t_0, x_0))$$

d'où

$$V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \leq V(x_0).$$

Or, on a  $V(x_0) < c$  et  $V(x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \geq c$ , ce qui est une contradiction.

Ainsi :

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \epsilon.$$

Donc 0 est un point d'équilibre stable.

2<sup>ème</sup> partie : Soit  $x_0 \in B(0, \delta)$ , on a

$$V(x(t, t_0, x_0)) - V(x(t_0, t_0, x_0)) = \int_{t_0}^t \dot{V}(s, t_0, x_0) ds$$

d'où

$$V(x(t, t_0, x_0)) - V(x_0) = \int_{t_0}^t DV(x(s, t_0, x_0))f(x(s, t_0, x_0)) ds.$$

Or  $t \mapsto V(x(t, t_0, x_0))$  est décroissante et minorée par 0 pour  $t$  dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$ . D'après ce qui précède,  $x(t, t_0, x_0)$  reste dans  $\overline{B(0, \epsilon)} \subset \mathcal{V}$  pour tout  $t \geq t_0$ , donc  $t \mapsto V(x(t, t_0, x_0))$  est décroissante et minorée par 0 pour tout  $t \geq t_0$ , ainsi :

$$\int_{t_0}^{\infty} DV(x(s))f(x(s)) ds < +\infty.$$

Or d'après (iii),  $DV(y)f(y) < 0$  pour tout  $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ . On en déduit que  $\sum_{n \geq 0} DV(x(n))f(x(n)) < +\infty$ . Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} DV(x(t, t_0, x_0))f(x(t, t_0, x_0)) = 0.$$

On sait d'après ce qui précède que  $x(t, t_0, x_0)$  reste dans le compact  $\overline{B(0, \epsilon)}$ . Ainsi il existe une suite  $(t_k)_{k \geq 0}$  strictement croissante telle que  $(x(t_k, t_0, x_0))_{k \geq 0}$  converge dans  $\overline{B(0, \epsilon)}$  vers  $a$ . Or on a :

$$DV(x(t_k, t_0, x_0))f(x(t_k, t_0, x_0)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Par passage à la limite, il vient que  $DV(a)f(a) = 0$ . De (i) et (iii), on déduit que  $a = 0$ . 0 est ainsi la seule valeur d'adhérence de  $x(t, t_0, x_0)$ , ce qui montre que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0.$$

Donc 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable. ■

**Exemple 46** On considère l'équation du pendule :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\left(\frac{g}{l}\right) \sin(x_1) \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$V(y_1, y_2) = \left(\frac{g}{l}\right) (1 - \cos(y_1^2)) + \frac{1}{2}y_2^2.$$

On a clairement,  $V(0) = 0$  et que  $V$  est définie positive sur un domaine  $-\pi < y_1 < \pi$ . De plus, la dérivée de  $V$  pour le système vaut

$$\dot{V}(y_1, y_2) = \left(\frac{g}{l}\right) (y_2 \sin(y_1)) - \left(\frac{g}{l}\right) (y_2 \sin(y_1)) = 0.$$

D'après le théorème 45, on en déduit que 0 est stable.

**Exemple 47** On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_2^2 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2.$$

On a  $V(0) = 0$  et  $V$  est définie positive. La dérivée de  $V$  pour le système vaut

$$\dot{V}(y_1, y_2) = y_1(-y_1^3 - y_2^2) + y_2(y_1 y_2 - y_2^2) = -(y_1^4 + y_2^4).$$

$\dot{V}$  est clairement définie négative. D'après le théorème 45, on en déduit que 0 est asymptotiquement stable.

**Théorème d'instabilité**

**Théorème 48** Soit  $0$  un point d'équilibre de (2.1), s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}$  de  $0$  et une fonction

$$W : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :

(i) pour tout  $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ,  $W(y) > W(0)$

(ii) la dérivée totale  $\dot{W}$  pour (2.1) soit définie positive  
alors  $0$  est instable.

**Preuve.** Soit  $\delta > 0$  tel que  $B(0, \delta) \subset \mathcal{V}$ ,  $x_0 \in B(0, \delta)$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On considère la solution  $x(t, t_0, x_0)$ . Pour tout  $t \neq t_0$  dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$ , on a :

$$\dot{W}(t) = (DW(x(t, t_0, x_0)))(f(x(t, t_0, x_0))) > 0.$$

Ainsi,  $t \mapsto W(x(t, t_0, x_0))$  est croissante dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$ . D'où  $W(x(t, t_0, x_0)) \geq W(x_0)$  pour  $t$  dans ce voisinage.

Supposons que l'on ait un  $\epsilon > 0$  tel que  $\overline{B(0, \epsilon)} \subset \mathcal{V}$  et que pour tout  $t \geq t_0$ ,  $\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \epsilon$ , alors

$$W(x(t, t_0, x_0)) \leq \sup_{t \geq t_0} W(x(t, t_0, x_0)) = M < +\infty$$

car  $W$  est continue sur  $\overline{B(0, \epsilon)}$ , qui est compacte. On a :

$$W(x(t, t_0, x_0)) - W(x(t_0, t_0, x_0)) = \int_{t_0}^t \dot{W}(s, t_0, x_0) ds$$

Il vient :

$$W(x_0) + \int_{t_0}^t DW(x(s, t_0, x_0))f(x(s, t_0, x_0)) ds \leq M \quad \forall t \geq t_0.$$

Par passage à la limite, on a que :

$$\int_{t_0}^{\infty} DW(x(s, t_0, x_0))f(x(s, t_0, x_0)) ds < +\infty.$$

D'après (ii), on a  $DW(y)f(y) > 0$  pour tout  $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ . On en déduit que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} DW(x(t, t_0, x_0))f(x(t, t_0, x_0)) = 0.$$

Comme on a supposé que  $x(t, t_0, x_0)$  restait dans le compact  $\overline{B(0, \epsilon)}$ , il existe  $(t_k)_{k \geq 0}$  une suite strictement croissante telle que  $x(t_k, t_0, x_0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a$  avec  $a \in \overline{B(0, \epsilon)}$ . Par continuité, il vient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} DW(x(t_k, t_0, x_0))f(x(t_k, t_0, x_0)) = DW(a)f(a).$$

On en déduit de l'unicité de la limite que  $DW(a)f(a) = 0$ . La fonction  $t \mapsto W(x(t, t_0, x_0))$  est croissante dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}$ , et pour tout  $t \geq t_0$  on a supposé que  $x(t, t_0, x_0)$  restait dans le compact  $\overline{B(0, \epsilon)} \subset \mathcal{V}$ . Ainsi, la fonction  $t \mapsto W(x(t, t_0, x_0))$  est croissante pour tout  $t \geq t_0$ . Par passage à la limite, on a  $W(a) \geq W(x_0)$ . D'après (i),  $W(x_0) > W(0)$ ; on en déduit que  $a \neq 0$ . Donc, on ne peut avoir  $DW(a)f(a) \neq 0$ .

Donc 0 est un point d'équilibre instable. ■

**Remarque 49** *Il existe un théorème d'instabilité plus général (le théorème de Chetaev) que l'on peut trouver dans [3].*

### 3.2.2 Théorèmes de Lyapunov non autonomes

#### Théorème de stabilité

**Théorème 50** (voir [4]) *Soit 0 un point d'équilibre de (2.2), s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction*

$$V : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

*continue, ayant des dérivées partielles continues, telle que :*

(i) *V soit définie positive*

(ii) *la dérivée totale  $\dot{V}$  pour (2.2) soit négative (respectivement définie négative)*

*alors 0 est stable. V s'appelle une **fonction de Lyapunov**.*

*De plus, si on a :*

(iii) *V est décroissante*

*alors 0 est uniformément stable (respectivement uniformément asymptotiquement stable).*

*De plus si on a :*

(iv)  *$U = \mathbb{R}^n$  et si V est radialement non borné*

*alors 0 est globalement uniformément stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable).*

**Preuve.** 1<sup>ère</sup> partie : Supposons les points (i) et (ii) vérifiés. On sait qu'il existe un voisinage  $\overline{\mathcal{V}'_{t_0}} \subset \mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction  $\varphi$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :

$$V(t, y) \geq \varphi(\|y\|) > 0, \quad \forall (t, y) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Soit  $x_0 \in U$  et  $x(t, t_0, x_0)$  une solution de (2.2), pour tout  $t$  dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}'$ , on a d'après (i) et (ii) :

$$\varphi(\|x(t, t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0).$$

Soit  $\epsilon > 0$ , tel que  $\overline{B(0, \epsilon)} \subset \mathcal{V}'$ ,  $V$  étant continue en  $y$ , et  $V(t_0, 0) = 0$ , on peut trouver  $\delta(\epsilon, t_0) < \epsilon$  tel que

$$\|x_0\| \leq \delta(\epsilon, t_0, x_0) \Rightarrow V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon).$$

Soit  $x_0 \in U$  tel que  $\|x_0\| < \delta(\epsilon, t_0)$ , supposons qu'il existe  $t_1 > 0$  tel que  $\|x(t_1, t_0, x_0)\| > \epsilon$ .

On sait que  $t \mapsto \|x(t, t_0, x_0)\|$  est continue, ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t_\epsilon > 0$  tel que  $\|x(t_\epsilon, t_0, x_0)\| = \epsilon$ . Pour tout  $t$  dans un voisinage de  $t_0$  tel que  $x(t, t_0, x_0) \in \mathcal{V}'$ , on a :

$$\varphi(\|x(t, t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)).$$

Or  $\overline{B(0, \epsilon)}$  est inclus dans  $\mathcal{V}'$ . On en déduit que

$$\varphi(\epsilon) = \varphi(\|x(t_\epsilon, t_0, x_0)\|) \leq V(t_\epsilon, x(t_\epsilon, t_0, x_0)).$$

Ceci contredit le fait que

$$V(t_\epsilon, x(t_\epsilon, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) < \varphi(\epsilon),$$

ce qui montre que 0 est stable.

2<sup>ème</sup> partie : Supposons que le point (iii) soit vérifié. On sait qu'il existe un voisinage  $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction  $\psi$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que :

$$\varphi(\|y\|) \leq V(t, y) \leq \psi(\|y\|) \quad \forall (t, y) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta(\epsilon) > 0$ , tel que  $\psi(\delta) < \varphi(\epsilon)$  (voir figure 3.5).

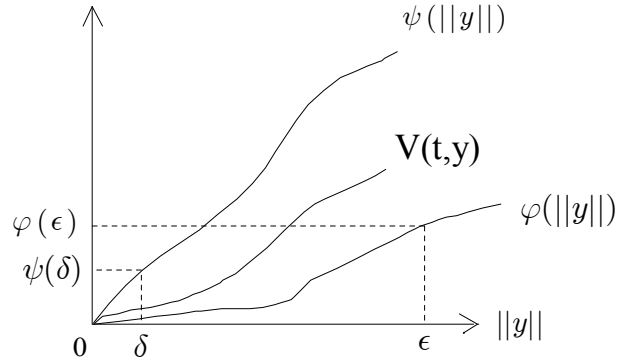


FIG. 3.5 – Fonction définie positive et décroissante

Soit  $x_0 \in U$  et  $x(t, t_0, x_0)$  une solution de 2.2 telle que  $\|x_0\| < \delta(\epsilon)$ , alors d'après la première partie on a pour tout  $t \geq t_0$  :

$$\varphi(\epsilon) > \psi(\delta) \geq V(t_0, x_0) \geq V(t, x(t, t_0, x_0)) \geq \varphi(\|x(t, t_0, x_0)\|).$$

$\varphi$  étant de classe  $\mathcal{K}$ , ceci implique que pour tout  $t \geq t_0$ ,

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leq \epsilon.$$

La stabilité uniforme est assurée par le fait que  $\delta(\epsilon)$  est indépendant de la solution  $x(t, t_0, x_0)$ .

3<sup>ème</sup> partie : On suppose maintenant que  $\dot{V}$  est définie négative, alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction  $\chi$  de classe  $\mathcal{K}$  telle que

$$\dot{V}(t, y) \leq -\chi(\|y\|) < 0 \quad \forall (t, y) \in \mathcal{V}'_{t_0}.$$

Soit  $x_0 \in U$  et  $x(t, t_0, x_0)$  une solution du système (2.2) telle que  $\|x_0\| < \delta$  où  $\delta$  est obtenu comme dans la 2<sup>ème</sup> partie. Soit  $\epsilon$  une constante positive telle que

$$0 < \epsilon < \|x_0\|.$$

On peut encore trouver une constante positive  $\lambda = \lambda(\epsilon)$  telle que

$$\psi(\lambda) < \varphi(\epsilon).$$

On définit alors  $\mu = \chi(\lambda)$ , et posons :

$$T = T(\delta, \epsilon) = \frac{\psi(\delta)}{\mu}.$$

Supposons que  $\|x(t, t_0, x_0)\| > \lambda$ , alors pour tout  $t$  dans  $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 < \varphi(\epsilon) &\leq V(t_1, x(t_1, t_0, x_0)) \leq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} \chi(\|x(s, t_0, x_0)\|) ds \\ &\leq V(t_0, x_0) - \int_{t_0}^{t_1} \chi(\lambda) ds \leq V(t_0, x_0) - (t_1 - t_0)\mu \leq \psi(\delta) - T(\mu) = 0 \end{aligned}$$

On obtient une contradiction, et donc il existe  $t_2 \in [t_0, t_1]$  tel que  $\|x(t_2, t_0, x_0)\| \leq \lambda$ . Ainsi pour tout  $t \geq t_2$

$$\varphi(\|x(t, t_0, x_0)\|) \leq V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq V(t_2, x(t_2, t_0, x_0)) \leq \psi(\lambda) \leq \varphi(\epsilon).$$

On en déduit que

$$\|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 + T \geq t_2$$

ce qui montre la stabilité uniforme asymptotique.

4<sup>ème</sup> partie :  $V$  est radialement non bornée, donc  $\varphi$  est radialement non bornée, c'est-à-dire

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(\|y\|) = +\infty.$$

Ainsi,  $\epsilon$  peut être choisi tel que

$$\forall 0 < \delta < \delta_1, \psi(\delta) < \varphi(\epsilon).$$

Finalement,  $\delta_1$  peut être choisi aussi grand que l'on veut. Donc, 0 est globalement uniformément asymptotiquement stable. ■

**Remarque 51** Pour un système de Carathéodory, c'est-à-dire comme celui défini dans le théorème 3, on peut encore écrire un théorème de stabilité, mais il faut des conditions supplémentaires.

**Exemple 52** On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - e^{-2t} x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \end{cases}$$

Pour déterminer la stabilité de l'équilibre 0, posons

$$V(t, y) = y_1^2 + (1 + e^{-2t}) y_2^2.$$

Cette fonction est définie positive, car elle domine la fonction définie positive

$$V(y) = y_1^2 + y_2^2$$

indépendante de  $t$ . Elle est aussi décroissante car elle est dominée par une fonction définie positive

$$V(y) = y_1^2 + 2y_2^2$$

indépendante de  $t$ . De plus, la dérivée de  $V$  pour le système vaut

$$\dot{V}(t, y) = -2(y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2(1 + 2e^{-2t})),$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, y) &\leq -2(y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2) \\ &\leq -(y_1 - y_2)^2 - y_1^2 - y_2^2. \end{aligned}$$

On en déduit alors que  $\dot{V}$  est définie négative, et que 0 est uniformément asymptotiquement stable.

### Instabilité de Chetaev

**Théorème 53** (voir [2]) Soit le système (2.2), admettant l'origine pour équilibre. S'il existe un voisinage  $\mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction

$$V : \mathcal{V}_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}$$

continue ayant des dérivées partielles, telle que :

1.  $\forall \epsilon > 0, \exists x_0 \in B(0, \epsilon); \forall t \geq t_0, V(t, x_0) \leq 0$ .
2.  $V$  est minorée sur  $\mathcal{U}'$  un sous-domaine de  $\mathcal{U} = \{y \in \mathcal{V}_{t_0}; V(t, y) \leq 0, \forall t \geq t_0\}$ ,
3. la dérivée totale  $\dot{V}$  pour le système (2.2) est définie négative sur  $\mathcal{U}'$

alors l'origine est instable.

**Exemple 54** Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 \\ \dot{y} = xy^2 + y^3 \end{cases}$$

l'origine est un point d'équilibre instable. En effet, posons

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2).$$

Le domaine  $\mathcal{U}$  est défini par

$$\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y \leq x \leq y \quad \text{ou} \quad y \leq x \leq -y\}$$

En définissant  $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \cap B(0, \epsilon)$ ,  $V$  est minorée par  $-\frac{\epsilon^2}{2}$  et  $\dot{V} = (x^4 - y^4) < 0$  sur ce domaine. Le théorème 53 permet alors de conclure quant à l'instabilité de l'origine.

### 3.3 Théorèmes inverses de Lyapunov

#### 3.3.1 Théorème inverse de stabilité uniforme

**Théorème 55** (voir [5]) On considère le système (2.2) avec  $f \in C^0(\mathcal{V}_{t_0})$  et

$f \in Lip_y(\mathcal{V}_{t_0})$  où 0 est un équilibre uniformément stable, alors il existe un voisinage  $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction de Lyapunov associée au système

$$V : \mathcal{V}'_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que :

- (i)  $V$  est décroissante,
- (ii)  $V \in Lip_{(t,y)}(\mathcal{V}'_{t_0})$ .

**Preuve.** Sans perte de généralité, on considère que  $t_0 = 0$ . Supposons que  $f \in C^0(\mathcal{C}_{0,r}(U))$  et  $f \in Lip_y(B(0, r))$ . D'après la stabilité uniforme :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0; \|x_0\| < \delta \implies \|x(t, t_0, x_0)\| < \epsilon \quad \forall t \geq 0.$$

$\epsilon \mapsto \delta(\epsilon)$  peut être continue, strictement monotone. Soit  $0 < r^* < r$  et

$$\mathcal{D} = \mathcal{C}_{0,\delta(\delta(r^*))}(U) = \{(t, y) ; 0 \leq t < +\infty \text{ et } \|y\| < \delta(\delta(r^*))\}.$$

On considère une solution  $x(t, t_0, x_0)$  où  $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ , alors pour tout  $t \in [0, t_0]$ , on a  $\|x(t, t_0, x_0)\| < r$  sauf en un nombre fini de points  $t_i < t_0$  où l'on a  $\|x(t_i, t_0, x_0)\| = r$ .

On pose alors pour tout  $(t, y) \in \mathcal{D}$ ,

$$\boxed{V(t, y) = \min_{\tau \in [0, t] \cap \mathcal{J}} \|x(\tau, t, y)\|} \quad (3.4)$$

où  $J$  est le plus grand intervalle sur lequel  $x(\tau, t, y)$  soit définie. D'après l'unicité des solutions,  $V(t, y)$  est bien définie et elle admet des dérivées partielles continues.

On voit que

$$V(t, y) \leq \|y\| \quad \forall (t, y) \in \mathcal{D}$$

ce qui montre d'après la proposition 20, que  $V$  est décroissante.

On a  $V(t, 0) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . De plus, on a :

$$\delta(\|y\|) \leq V(t, y) \quad \forall (t, y) \in \mathcal{D}.$$

Si l'on note  $\epsilon(\cdot)$  la fonction réciproque de  $\delta(\cdot)$ , alors  $\epsilon(\cdot) \in \mathcal{K}$  et il vient

$$V(t, y) \geq \epsilon(\|y\|) \quad \forall (t, y) \in \mathcal{D}.$$

On en déduit que  $V$  est définie positive.

Enfin, comme pour tout  $(t_0, x_0) \in \mathcal{D}$ , la fonction  $t \mapsto V(t, x(t, t_0, x_0))$  n'est clairement pas croissante, la dérivée totale  $\dot{V}$  pour le système est négative. Donc  $V$  est une fonction de Lyapunov associée au système.

Montrons maintenant que  $V \in Lip_{(t,y)}(\mathcal{D})$ . Si  $(t_0, y_0) \in \mathcal{D}$ , et si

$$\forall \tau \in [0, t_0], \quad \|x(\tau, t_0, y_0)\| < r$$

alors d'après l'unicité des solutions, il existe un voisinage  $\mathcal{N}$  de  $(t_0, y_0)$  tel que les solutions partant de  $\mathcal{N}$  restent dans un voisinage de  $x(\tau, t_0, y_0)$  pour tout  $\tau$  dans  $[0, t]$ . Ainsi, pour les solutions partant de  $\mathcal{N}$ , le  $J$  de la formule 3.4 est l'intervalle  $[0, t]$ . D'autre part, pour une solution  $x(\tau, t_0, y_0)$  telle que

$$\exists t_1 \in [0, t_0[; \quad \|x(t_1, t_0, y_0)\| = r$$

on pose  $t^* < t_0$ , la valeur de  $t$  telle que :

$$\|x(t^*, t_0, y_0)\| = r^*$$

pour la première fois à gauche de  $t_0$ . Soit  $\epsilon > 0$  tel que :

$$r^* - \epsilon > \delta(r^*)$$

alors les solutions partant d'un voisinage bien choisi  $\mathcal{N}$  de  $(t_0, y_0)$  reste dans un  $\epsilon$ -voisinage de  $x(\tau, t_0, y_0)$  où  $t^* \leq \tau \leq t_0$ . Supposons qu'une solution  $x(\tau, t, y)$  vérifie

$$\|x(t', t, y)\| < \delta(\delta(r^*)) \quad \text{en } 0 \leq t' < t^*.$$

Comme  $\|x(t', t, y)\| < \delta(\delta(r^*))$ , on a que

$$\|x(t^*, t, y)\| < \delta(r^*),$$

ce qui contredit le fait que  $\|x(t^*, t, y)\| = r^* > r^* - \epsilon$ . Donc le  $\min_{\tau} \|x(\tau, t, y)\|$ , où  $(t, y) \in \mathcal{N}$ , est réalisé pour  $t^* \leq \tau \leq t$ .

On sait par hypothèse qu'il existe  $L(t)$  telle que pour tout  $(\tau, y), (\tau, y') \in \mathcal{C}_{0,r}(U)$ ,

$$\|f(\tau, y) - f(\tau, y')\| \leq L(t) \|y - y'\|.$$

On pose  $A(t) = e^{L(t)t}$ .

Prenons  $(t, y), (t', y')$  dans  $\mathcal{D}$ . Si l'on note

$$V(t, y') = \|x(\tau', t, y')\|$$

il vient :

$$\begin{aligned} V(t, y) - V(t, y') &\leq \|x(\tau', t, y)\| - \|x(\tau', t, y')\| \\ &\leq A(t) \|y - y'\|. \end{aligned}$$

Si l'on note

$$V(t, y) = \|x(\tau, t, y)\|,$$

on a :

$$\begin{aligned} V(t, y) - V(t, y') &\geq \|x(\tau, t, y)\| - \|x(\tau, t, y')\| \\ &\geq -A(t) \|y - y'\|. \end{aligned}$$

Donc, on en déduit que :

$$|V(t, y) - V(t, y')| \leq A(t) \|y - y'\|.$$

Maintenant, considérons  $(t, y), (t, y')$  dans  $\mathcal{D}$  où  $t < t'$ .

Si  $\|x(\tau, t', y)\|$  prend sa valeur minimum en  $0 \leq t^* \leq \tau' \leq t$  alors

$$\begin{aligned} V(t, y) - V(t', y) &\leq \|x(\tau', t, y)\| - \|x(\tau', t', y)\| \\ &\leq \|x(\tau', t, y)\| - \|x(\tau', t', Y)\| \\ &\leq A(t) \|Y - y\| \end{aligned}$$

où  $Y = x(t, t', y)$ . Si l'on note

$$K(t) = \max \{\|f(\tau, y)\|; 0 \leq \tau \leq t, \|y\| \leq r\}$$

alors, on a d'après l'inégalité des accroissements finis que

$$V(t, y) - V(t', y) \leq A(t)K(t')(t' - t).$$

De même, on montre que

$$V(t, y) - V(t', y) \geq -A(t)K(t')(t' - t)$$

ce qui prouve que

$$|V(t, y) - V(t, y')| \leq A(t)K(t')(t' - t).$$

Si  $\|x(\tau, t', y)\|$  prend sa valeur minimum en  $t < \tau' \leq t'$  et si

$$V(t, y) = \|x(\tau, t, y)\| \text{ et } V(t', y) = \|x(\tau', t', y)\|$$

alors on a

$$\begin{aligned} V(t, y) - V(t', y) &= \|x(\tau, t, y)\| - \|x(\tau', t', y)\| \\ &\leq \|x(t, t, y)\| - \|x(t, t', y)\| + \|x(t, t', y)\| - \|x(\tau', t', y)\| \\ &\leq \|y - Y\| + \|x(t, t', y) - x(\tau', t', y)\| \\ &\leq 2K(t')(t' - t). \end{aligned}$$

De même,

$$V(t, y) - V(t', y) \geq -A(t)K(t')(t' - t).$$

Donc ceci montre que  $V \in Lip_{(t,y)}(\mathcal{D})$ . ■

**Remarque 56** Si l'on considère le système (2.1),  $V$  peut être construite indépendamment de  $t$ .

### 3.3.2 Théorèmes inverse de stabilité uniforme asymptotique

**Théorème 57** (voir [5]) On considère le système (2.2) avec  $f \in C^0(\mathcal{V}_{t_0})$  et  $f \in Lip_y(\mathcal{V})$  où 0 est un équilibre uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe un voisinage  $\mathcal{V}'_{t_0} \subset \mathcal{V}_{t_0}$  et une fonction de Lyapunov associée au système

$$V : \mathcal{V}'_{t_0} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

telle que :

1.  $V$  est décroissante,
2.  $V \in Lip_{(t,y)}(\mathcal{V}'_{t_0})$ ,
3.  $\dot{V}$  est définie négative.

**Remarque 58** Dans le théorème précédent, on peut remplacer  $\dot{V}$  définie négative par

$$\exists c > 0; \forall (t, y) \in \mathcal{V}'_{t_0}, \quad \dot{V}(t, y) \leq -cV(t, y)$$

**Théorème 59** (voir [5]) On considère le système (2.2) avec  $U = \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^0(I \times \mathbb{R}^n)$  et  $f \in Lip_y(\mathbb{R}^n)$  où 0 est un équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable. Alors, il existe une fonction de Lyapunov

$$V : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$$

associée au système telle que :

1.  $V$  est décroissante,
2.  $V \in Lip_{(t,y)}(\mathbb{R}^n)$ ,
3.  $\dot{V}$  est définie négative,
4.  $V$  est radialement non bornée.

**Remarque 60** Dans le théorème précédent, on peut remplacer  $\dot{V}$  définie négative par

$$\exists c > 0; \forall (t, y) \in \mathbb{R}^n, \quad \dot{V}(t, y) \leq -cV(t, y)$$

La preuve assez technique de ces deux théorèmes se trouve dans [5].

### 3.4 Théorèmes de Hahn

**Théorème 61** (voir [2]) *Si l'équilibre 0 d'un système différentiel autonome ou non autonome et périodique en  $t$  est stable, alors il est uniformément stable.*

**Preuve.** D'après la stabilité, si  $x(t, t_0, x_0)$  est solution de (2.2) alors

$$\mu(t_0, x_0) = \sup_{u \geq 0} \|x(t_0 + u, x_0, t_0)\|$$

est borné pour  $x_0 \in B(0, r)$ , où  $r > 0$ . Puisque le système admet une période  $w$  ( $w$  arbitraire dans le cas autonome), on a la relation

$$x(t + w, x_0, t_0 + w) = x(t, x_0, t_0).$$

Ainsi  $\mu$  est périodique en  $t_0$ , et si  $r$  est suffisamment petit, la fonction

$$\rho(r) = \sup_{0 \leq \|x_0\| \leq r} \mu(t_0, x_0)$$

est bien définie pour  $u \geq 0$ ,  $0 \leq t_1 \leq t_0 \leq t_1 + w$  où  $t_1$  est choisi arbitrairement. On voit alors que la fonction  $\rho$  est de classe  $\mathcal{K}$  et qu'elle vérifie les conditions du théorème 33. ■

**Théorème 62** (voir [2]) *Si l'équilibre 0 d'un système différentiel autonome, ou non autonome et périodique en  $t$  est asymptotiquement stable, alors il est uniformément asymptotiquement stable.*

**Preuve.** On sait déjà d'après le théorème 61 que le système est uniformément stable. Avec les mêmes notations et la même idée que celles du théorème 61, on peut construire

$$\sigma(r) = \sup_{0 \leq \|x_0\| \leq r} \mu(t_0, x_0)$$

pour  $u \geq 0$ ,  $0 \leq t_1 \leq t_0 \leq t_1 + w$  où  $t_1$  est choisi arbitrairement. Ainsi, la fonction  $\sigma$  satisfait les conditions du théorème 37. ■

**Remarque 63** *De même, on montre que si l'équilibre d'un système différentiel autonome, ou non autonome et périodique en  $t$ , est stable en temps fini, alors il est uniformément stable en temps fini.*



# Chapitre 4

## Stabilité en temps fini

### 4.1 Systèmes scalaires

On s'intéresse ici, aux systèmes de la forme :

$$\dot{x} = f(x)$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f$  est continue sur  $U$ .

**Théorème 64** *On considère le système (4.1). 0 est un équilibre stable en temps fini si et seulement s'il existe  $\mathcal{V} \subset U$  tel que :*

- (i)  $f(0) = 0$
- (ii) pour tout  $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ,  $yf(y) < 0$
- (iii) pour tout  $\alpha \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ ;  $\int_0^\alpha \frac{dy}{f(y)} < +\infty$

**Preuve.** ( $\Leftarrow$ ) D'après (i), 0 est un point d'équilibre du système. Soit

$$V(y) = \frac{y^2}{2}$$

définie pour  $y \in \mathcal{V}$ . D'après (ii),  $V$  est une fonction stricte de Lyapunov associée à 0. Ainsi, le théorème 45 montre que 0 est asymptotiquement stable.

L'existence de solutions provient du théorème 2. On considère alors une solution  $x(t, t_0, x_0)$  du système qui converge vers 0. On sait que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists T_\epsilon < +\infty; \forall t \geq T_\epsilon, |x(t, t_0, x_0)| \leq \epsilon. \quad (4.1)$$

On note

$$T_0(x_0) = \inf \{T(x_0) \in \mathbb{R}; x(t, t_0, x_0) = 0 \quad \forall t \geq T\}$$

et on a  $T_0 \leq +\infty$ .

De plus, on pose  $t_\alpha < +\infty$ , le temps vérifiant  $x(t_\alpha, t_0, x_0) = \alpha$  qui existe pour  $\alpha \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  suffisamment petit d'après (4.1). On a :

$$T_0(x_0) = \int_0^{T_0(x_0)} dt = \int_0^{t_\alpha} dt + \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt = t_\alpha + \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt.$$

D'après 2,  $\frac{1}{f}$  est bien définie sur  $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ . En effectuant le changement de variables  $t \mapsto x(t, t_0, x_0)$  dans  $\int_\alpha^0 \frac{dy}{f(y)}$ , il vient :

$$\int_\alpha^0 \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} \frac{\dot{x}(t, t_0, x_0)}{f(x(t, t_0, x_0))} dt = \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt < +\infty.$$

Comme  $t_\alpha < +\infty$ , on en déduit que  $T_0(x_0) < +\infty$ .

( $\implies$ ) On suppose que 0 est un point d'équilibre stable en temps fini. On considère une solution  $x(t, t_0, x_0)$  qui converge vers 0 en temps fini, et son  $\delta > 0$  donné par la stabilité en temps fini. On a  $f(0) = 0$ . Supposons qu'il existe  $y_0 \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\}$  tel que  $y_0 f(y_0) \geq 0$ .

Soit  $y_0 f(y_0) = 0$ , alors  $f(y_0) = 0$ , et  $x(t) \equiv y_0$  est une solution du système 2.1 qui ne converge pas vers 0.

Soit  $y_0 f(y_0) > 0$ , alors on peut supposer sans perte de généralité que  $y_0 > 0$  et que  $f(y_0) > 0$ . On sait alors que  $f(y) > 0$  pour  $y$  dans un voisinage de  $y_0$ . Ainsi, si l'on considère la solution  $x(t, t_0, y_0)$ , elle est croissante dans un voisinage de  $t_0$ . Du fait de sa continuité, cette solution ne pourra jamais "redescendre" sous la droite  $t = y_0$ . Donc en particulier, elle ne pourra pas tendre vers 0.

Soit  $\alpha \in ]-\delta, \delta[ \setminus \{0\}$ , on considère la solution  $x(t, t_0, \alpha)$ . Par hypothèse, on sait que :

$$\exists T(\alpha) < +\infty; \forall t \geq T(\alpha), \quad x(t, t_0, \alpha) = 0.$$

D'après ce qui précède,  $\frac{1}{f}$  est définie sur  $]-\delta, \delta[ \setminus \{0\}$ . Avec le changement de variables  $t \mapsto x(t, t_0, \alpha)$  il vient :

$$\int_\alpha^0 \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{T(\alpha)} dt = T(\alpha) - t_0 < +\infty.$$

■

**Remarque 65** *Sous les hypothèses du théorème 64, on voit que le temps d'établissement pour une solution  $x(t; t_0, x_0)$  est*

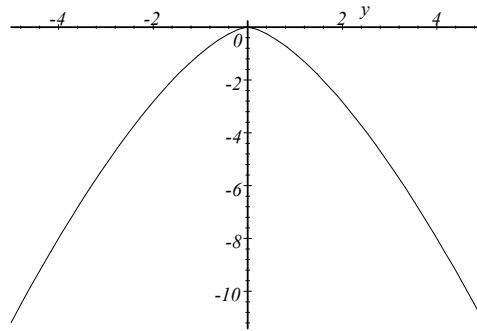
$$T(x_0) = \left| \int_0^{x_0} \frac{dy}{f(y)} \right|$$

**Exemple 66** *Soit  $a \in ]0, 1[$ , on pose*

$$\varphi_a(y) = |y|^a \operatorname{sgn}(y)$$

*et on considère le système :*

$$\dot{x} = -\varphi_a(x)$$

FIG. 4.1 – Graphe de  $-y\varphi_a(y)$ 

On a bien  $-y\varphi_a(y) < 0$  pour  $y \neq 0$ , comme on le voit sur le graphique 4.1.

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on a

$$\left| \int_0^\alpha \frac{dy}{|y|^a \operatorname{sgn}(y)} \right| = \frac{|\alpha|^{1-a}}{1-a} < +\infty.$$

Les hypothèses du théorème 64 sont satisfaites. On a donc la convergence en temps fini

$$T_0(x_0) = \frac{|x_0|^{1-a}}{1-a}$$

vers 0, des solutions  $x(t, t_0, x_0)$ . Ce que l'on savait déjà grâce au calcul des solutions données dans l'exemple 44.

## 4.2 Systèmes multi-variables

**Théorème 67** Soit 0 un équilibre du système (2.1). Supposons que 0 soit un équilibre stable en temps fini du système scalaire

$$\dot{y} = r(y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

S'il existe une fonction  $V : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$  de Lyapunov stricte pour (2.1) telle que pour tout  $y \in \mathcal{V}$

$$\dot{V}(y) \leq r(V(y))$$

alors 0 est un équilibre stable en temps fini du système (2.1).

**Preuve.** On sait, d'après l'existence de  $V$  et le théorème 45 que 0 est asymptotiquement stable.

On a supposé que 0 était un équilibre stable en temps fini, alors d'après le théorème 64, il existe  $\mathcal{V}$  voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$  :

$$\int_0^\alpha \frac{dy}{f(y)} < +\infty.$$

On considère une solution  $x(t, t_0, x_0)$  convergent vers 0. On note

$$T_0(x_0) = \inf \{T(x_0) \in \mathbb{R}; x(t, t_0, x_0) = 0 \quad \forall t \geq t_0 + T(x_0)\}.$$

On a  $T_0(x_0) \leq +\infty$ . On pose  $t_\alpha < +\infty$ , le temps vérifiant  $x(t_\alpha, t_0, x_0) = \alpha$ , où  $\alpha$  est choisi suffisamment petit pour que  $V(\alpha) \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ . D'où :

$$T_0(x_0) = \int_0^{t_\alpha} dt + \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt = t_\alpha + \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt.$$

En utilisant le changement de variable,  $t \mapsto V(x(t, t_0, x_0))$ , on a :

$$\int_{V(\alpha)}^0 \frac{dy}{r(y)} = \int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} \frac{\dot{V}(x(t, t_0, x_0))}{r(V(x(t, t_0, x_0)))} dt.$$

Or par hypothèse,  $\dot{V}(x(t, t_0, x_0)) \leq r(V(x(t, t_0, x_0)))$  et  $r(V(x(t, t_0, x_0))) < 0$  pour tout  $t \geq t_0$ . Ceci montre que :

$$\int_{t_\alpha}^{T_0(x_0)} dt \leq \int_{V(\alpha)}^0 \frac{dy}{r(y)}.$$

Comme  $V(\alpha) \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ , on a

$$\int_{V(\alpha)}^0 \frac{dy}{r(y)} < +\infty$$

ce qui montre que  $T_0(x_0) < +\infty$ . ■

**Exemple 68** *Considérons le système*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x_1) \\ |x_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(x_2) \end{bmatrix}$$

et la fonction  $V$  définie par  $V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$ .  $V$  est clairement définie négative et on a :

$$\dot{V}(y_1, y_2) = -|y_1|^{\frac{3}{2}} - |y_2|^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \left( |y_1|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(y_1) y_2 + |y_2|^{\frac{1}{2}} \operatorname{sgn}(y_2) y_1 \right).$$

On voit sur le graphique 4.2 que  $\dot{V}$  est définie négative.

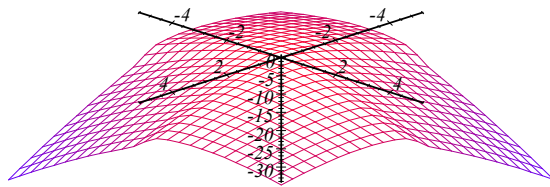
Enfin, si l'on pose  $r(y) = -|y|^{\frac{4}{5}} \operatorname{sgn}(y)$ , on peut montrer que pour tout  $y \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\dot{V}(y) \leq r(V(y)).$$

Comme 0 est globalement stable en temps fini pour le système

$$\dot{x} = r(x)$$

on en déduit d'après le théorème 67 que 0 est un équilibre globalement stable en temps fini du système.

FIG. 4.2 – Graphe de la dérivée de  $V$ .



# Bibliographie

- [1] S. Gonnord and N. Tosel. *Topologie et analyse fonctionnelle : Thèmes d'analyse pour l'agrégation*. Ellipses, 1998.
- [2] W. Hahn. *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*. Prentice-Hall inc., 1963. N.J.
- [3] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. NJ 07458. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.
- [4] J. J. Slotine and L. Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [5] T. Yoshizawa. *Stability Theory by Liapunov's Second Method*. The Mathematical Society of Japon, 1966.
- [6] C. Zuily and H. Queffelec. *Éléments d'analyse pour l'agrégation*. Masson, 1996.