

Pierre Portet

Les techniques du calcul élémentaire dans l'Occident médiéval : un choix de lectures

Les pages qui suivent abordent l'histoire du calcul élémentaire pratiqué en Occident entre la fin de l'Antiquité et la fin du Moyen Âge, entre 500 et 1500 si l'on veut donner des bornes chronologiques larges. Il me semble que l'évolution de ces techniques de calcul, pour être familière aux spécialistes de l'histoire des sciences, n'est pas suffisamment connue des autres historiens particulièrement dans ses derniers développements, c'est pourquoi je voudrais proposer un choix de lectures utiles à l'intelligence de ces matières pour permettre une rapide orientation dans des travaux qui méritent d'avoir une autre audience, plus étendue, que celle des historiens des mathématiques.

J'aborderai donc l'arithmétique qui se définit alors comme arithmétique opérative – qui fait des opérations, principalement les quatre opérations – et qui se situe à côté de l'arithmétique spéculative qui, elle, fournit une théorie des nombres et dont le principal représentant est Boèce¹. Je me place délibérément dans une optique d'étude d'une science utilitaire qui se pratique dans divers milieux. On calcule dans les écoles monastiques puis dans les universités, les computistes et les astronomes en sont les premiers utilisateurs ; on calcule aussi chez les commerçants et chez les gens mécaniques.

Le premier point évoqué sera celui de la continuité de l'utilisation de la numération romaine et de l'instrument qui va avec, l'abaque à jetons. Ce système de numération et cette technique ont gardé tout au long du Moyen Âge et au-delà une grande importance dans un grand nombre de domaines d'activités. Le deuxième axe est celui de l'histoire du changement avec l'apparition et la lente diffusion de la numération de position arabo-indienne. D'une première technique teintée d'influence arabe, celle des abaques à *apices* de type gerbertien, on passe ensuite à la véritable introduction du « calcul indien » dans l'Europe médiévale à partir des années 1140-1150 qui annonce la période de floraison des algorismes universitaires. Le dernier relai des travaux des savants arabes se trouve enfin, par le biais d'une tradition différente, dans le monde des marchands italiens et de ceux de la France

¹ Sur Boèce et l'arithmétique spéculative : Boèce, *Institution arithmétique*. Texte établi et traduit par Jean-Yves Guillaumin, Paris, Les Belles Lettres, 1995. Martianus Capella, *De nuptiis Philologiae et Mercurii libri duo ; de septem artibus liberalibus libri novem*, éd. Dick (A.) et Préaux (J.), Stuttgart, Teubner, 1969. Ed. et trad. italienne : *De nuptiis Philologiae et Mercurii liber VII (Arithmetica). Introduzione, traduzione e commento di Luigi Scarpa*, Padoue, CLEUP, 1988. Diophante, *Les arithmétiques*. Tome III, livre IV. Tome IV, livres V, VI, VII. Texte établi et traduit par Roshdi Rashed, Paris, Les Belles Lettres, 1984. Nicomaque de Gêse, *Introduction arithmétique*. Introduction, traduction, notes et index par Janine Bertier, Paris, Vrin, 1978 (Histoire des doctrines de l'antiquité classique, 2). *The commentaries on Boethius of Gilbert of Poitiers*, ed. Haring (N. M.), Toronto, 1966, et *The commentaries on Boethius of Thierry of Chartres and his school*, ed. Haring (N. M.), Toronto, 1971.

méridionale. Ce sont leurs traités qui commencent à conduire les opérations à la façon dont nous les pratiquons aujourd'hui.

I - L'utilisation de la numération romaine et de l'abaque à jetons

L'étude du calcul par jetons a peu intéressé les savants français, elle a surtout attiré les numismates qui ont dressé des catalogues, précédés par une étude rapide sur la manière de compter². C'est une discipline dont l'histoire est lentement tombée dans l'oubli et il faut se tourner vers la production anglo-saxonne du début du 20^e siècle pour trouver une étude de synthèse qui passe en revue les manuels et les procédés de calcul du début de l'époque moderne³.

Les traités sur ce genre sont rares pour le Moyen Âge. A la fin du 15^e siècle, un manuscrit d'arithmétique montre de belles miniatures de calculs figurés sur un abaque. Il s'agit de l'*Arithmétique* de Jehan Adam⁴ écrit en français vers 1475. Son étude sommaire a été faite en 1929 par Lynn Thorndike, qui donne une table des matières de son contenu. De même veine, un groupe de manuscrits produits dans la France du nord (Wallonie, Normandie et Bassin parisien) a été signalé par Guy Beaujouan en 1988. Ces manuels enseignent le calcul avec jetons parallèlement à celui de la plume et de l'encre.

Pour commencer à comprendre les techniques de ce calcul, il faut donc revenir à l'exposé qu'en fait Barnard pour la période moderne. Ce travail est d'une utilisation commode car il présente une description détaillée des méthodes exposées dans les livres imprimés depuis les incunables jusqu'au 18^e siècle (p. 254-320). Sans rentrer dans le détail des pratiques opératoires je signale simplement que la lecture de ces pages donne une vue rapide de la vitalité et du succès de ce type de calcul dans les sociétés post-médiévales. Voici quelques exemples de la production de manuels pris au hasard des catalogues de bibliothèques⁵.

La ville de Leipzig à la fin du 15^e et au début du 16^e siècle est le lieu de publication d'un ensemble d'arithmétiques de l'abaque à jetons imprimées par Martin Landsberg. Johannes Widmann (mort après 1498) serait l'auteur possible d'un *Algorithmus linealis ad euitandum multiplices mercatorum errores...* imprimé en 1489 et de nouveau à trois reprises après 1495. Ces premières impressions sont suivies d'un traité de Balthasar Licht composé vers 1500-1505 : *Algorithmus linealis, cum pulchris conditionibus regule de tri, septem fractionum, regulis socialibus, et semper exemplis idoneis recte, sicut in scolis Nurnbergensibus arithmetricorum docetur...* Henrich Stromeur quant à lui donne en 1512 un *Algorithmus linealis numerationem additionem subtractionem duplationem, mediationem, multiplicationem, divisionem, et progressionem una cum regula de tri perstringens*. Les traités d'Adam Ries [1492-1559] et leurs différentes éditions sont désormais bien connus depuis les travaux de Gebhardt et Rochhaus (1997) et ceux de Deschauer (1992)

² Rouyer et Hucher 1858.

³ Barnard 1916.

⁴ Paris, Bibliothèque Sainte Geneviève, ms. fr. 3143.

⁵ Une prospection dans le catalogue de la bibliothèque de l'éditeur américain Georges Plimpton réalisé par David E. Smith en 1908 (Smith 1908) permet de retrouver la trace de nombreux traités de calcul par jetons. De même usage est le travail de Jochen Hoock et Pierre Jeannin en cours de parution depuis 1991 et la *Deutsche Bibliographie* de Harald Witthöft rend les mêmes services pour le domaine germanique.

La production française d'arithmétique de l'abaque à jetons, moins importante, s'étale du tout début du 16^e siècle jusqu'en 1675 au moins. Voyons un ouvrage anonyme : *Le livre des getz grandement proffitable pour tous marchans et aultres*, traité destiné aux marchands « qui ne savent ni lire ni escrire », dont la première édition lyonnaise parut entre 1500 et 1520, plusieurs fois réimprimé jusqu'en 1563. Une *Manière pour apprendre à cyfrer et compter par plumes et gectz, selon la vraye science de algorisme, en nombre entier et rompu* est imprimée à Anvers en 1529 et comprend des figures sur bois. Mais l'ouvrage qui a eu le plus de succès est celui de Jean Tranchant : *L'Arithmétique de lan Trenchant departie en trois livres, ensemble un petit discours des changes ; avec l'art de calculer aux getons*, dont la première édition connue paraît à Lyon en 1558. De nombreux tirages de ce manuel paraissent à Lyon et à Rouen au moins jusqu'en 1675. Signalons l'ouvrage de Forcadel, calculateur bitterois dont on connaît une édition de 1558 : *L'Arithmétique par les gect ... divisée en trois livres. De l'invention dudict Forcadel*. Et aussi celui d'Antoine Cathalan, *L'Arithmétique et manière d'apprendre à chiffrer et conter par la plume et par les getz en nombre entier et rompu, facile à apprendre, et très utile à toutes gens, de nouveau reveüe et corrigée par maistre Anthoine Cathalan*, Lyon, T. Payan, 1566, avec des figures. N'oublions pas la production anglaise avec, pour ne citer que les ouvrages les plus connus, les manuels de Robert Recorde, *The ground of artes teaching the worke and practise of arithmetike* (1542), et de J. Awdeley, *An introduction of algorismus to learn to reckon wyth the counters* (1574).

Tous ces traités nous disent donc que cette technique a été employée jusqu'au 17^e siècle mais ils ne nous permettent pas d'affirmer que les calculs qu'ils exposent étaient ceux utilisés par les hommes du Moyen Âge. Tout au long des 16^e et 17^e siècles en effet on peut voir les efforts des maîtres de calcul pour affiner les procédés et pour essayer de simplifier la conduite des opérations. Cela est le signe d'une vitalité certaine de l'usage de l'abaque à jetons ; répandu dans toutes les couches de la société, il est une aide appréciée pour celui qui sait compter sans savoir toujours lire et écrire.

L'utilisation médiévale la mieux connue de ce type de calcul est celle qui en a été faite par les comptables publics des diverses nations occidentales, qu'il s'agisse de l'échiquier anglais, de la chambre des comptes de France ou bien de celle du roi d'Aragon. Mais il faut bien noter que ce genre de « machine à calculer » était employé partout où l'on manipulait des deniers et des nombres, chez les marchands, les changeurs, les arpenteurs, etc. La pénurie documentaire médiévale paraît bien signaler que la manière d'enseigner ce calcul est alors celle de l'exemple et de l'apprentissage dans la relation de maître à élève. Cela dit, eu égard à son importance sociale, l'étude du calcul par jetons mériterait d'être reprise à nouveaux frais et étendue au domaine européen tout entier.

Textes

Anon., *Arithmétique facile à apprendre à chiffrer et compter par la plume et par les gects. Ensemble plusieurs excellentes sentences morales faictes par quatrains.... Avec la manière de tailler la plume*, Edition nouvellement rev. et corr., 1607, Lyon, Rigaud, In 16.

Anon., *La manière pour apprendre à cyfrer et compter par plumes et gectz, selon la vraye science de algorisme, en nombre entier et rompu*, Imprimé en Anvers par moy,

Martin l'Empereur, pour Guillaume Vosterman, lan 1529, petit in 8 goth., 52 ff. n. ch., fig. sur bois.

Anon., *Le livre des getz grandement proffitable pour tous marchans et aultres*, imprimé à Lyon vers 1520 selon Brunet (6 ff.), Barnard cite une éd. de 1563.

Anon., *Livre de chiffres et de getz...*, [16e s.], [Lyon], [s. n. ?].

Awdeley (J.), *An introduction of algorismus to learn to reckon wyth the counters*, 1574.

Cathalan (Antoine), *L'Arithmétique et manière d'apprendre à chiffrer et conter par la plume et par les getz en nombre entier et rompu, facile à apprendre, et très utile à toutes gens, de nouveau reveüe et corrigée par maistre Anthoine Cathalan*, Lyon, T. Payan, 1566, in 16, 80 ff., fig.

Forcadel (Pierre), *L'Arithmetique par les gects, de P. Forcadel de Beziers, divisée en trois livres. De l'invention dudict Forcadel*, 1558, A Paris, Pour Guillaume Cauellat à l'enseigne de la Poulle grasse, devant le Collee de Cambray, 4 ff. n. ch., 67 ff. ch., in 8.

Huswirt (Joannes), *Enchiridion artis numerandi, parvo admodum negotio, omnem calculi praxim docens in integris, minutiis vulgaribus et projectilibus, regulis aliquot mercatorum additis nequaquam contemnendis, nunc recognitum et accuratius excusum. Ex secunda editione cum accessionibus plurimis... Veneunt Reginaldo Caldario, sub homine sylvestri, in via ad divum Jacobum. - A la fin : Enchiridii Joannis Huswirt Sanensis de arte calculatoria finis. Mandabat suis typis Joannes Bignon calchographus, impensis honesti viri Reginaldi Chauldière, Lutetiae, anno a salute nostra 1535, idus septembris*, Paris, 1535, in 4.

Licht (Balthasar), *Algorithmus linealis, cum pulchris conditionibus regule de tri, septem fractionum, regulis socialibus, et semper exemplis idoneis recte, sicut in scolis nurnbergensibus arithmetricorum docetur, in florentissimo studio Lipczensi nuper editus...*, Lipczk : per M. Lotter, Melchior Lotter [1500], 32 p., in 4 (Hain, 829.)

Recorde (Robert), *The ground of artes teaching the worke and practise of arithmetike*, London, 1542. Voir Hughes (Barnabas), « Robert Recorde and the first published equation », in M. Folkerts et J.P. Hogendijk (éd.), *Vestigia mathematica: Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, Rodopi, 1993, p.163-171.

Reisch (Gregor) [14.-1525], *Margarita philosophica*, 1503. Voir Andreini (Lucia), *Gregor Reisch e la sua "Margarita philosophica"*, Salzburg, Institut für Anglistik und Amerikanistik, Universität Salzburg, 1997 (Analecta Cartusiana, 138).

Ries (Adam), *Rechnung auff der Linihen und Federn auff allerley Handthirung gemacht durch Adam Risen*. Edition : Deschauer (Stefan), *Das zweite Rechenbuch von Adam Ries: Eine moderne Textfassung mit Kommentar und metrologischem Anhang und einer Einführung in Leben und Werk des Rechenmeisters*, Braunschweig, Vieweg, 1992.

Stromer (Heinrich), *Algorithmus linealis numerationem additionem subtractionem duplationem, mediationem, multiplicationem, divisionem, et progressionem una cum regula de tri perstringens*, Leipzig, Martin Landsberg, 1512. Neuf gravures sur bois de dessins de calcul sur l'abaque. Heinrich Stromer von Auerbach (1482-1542). Ce texte a été plusieurs fois réédité au 16e siècle. Voir S. Günther, « Der Algorithmus

Linealis des Heinrich Stomer. Eine Studie von Dr. S. Günther », *Königlich-Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Abhandlungen... Sechste Folge*, Bd. 10, 1880.

Thorndike (Lynn), « The arithmetic of Jehan Adam [1475] », in *Science and thought in the fifteenth century. Studies in the history of medicine and surgery, natural and mathematical science, philosophy and politics*, New York, Columbia Univ. Press, 1929, p.150-160 et 302-307 [table des matières].

Tranchant (Jean), *L'Aritmétique de lan Trenchant departie en trois livres, ensemble un petit discours des changes. Avec l'art de calculer aux getons*, Lyon 1558. De nombreuses éditions paraissent à Lyon et à Rouen au moins jusqu'en 1675.

II - Changement : l'apparition et la lente diffusion de la numération de position arabo-indienne

Après ces indications de lectures sur la méthode de calcul qui fut longtemps la plus employée au Moyen Âge et au début des Temps Modernes dans toutes les couches de la société, je rentre maintenant dans l'univers intellectuel des savants. Durant cette même longue période d'utilisation continue de l'abaque à jetons les milieux de lettrés de l'Europe occidentale élaborent d'autres façons de calculer, d'abord pour pouvoir résoudre plus aisément des opérations difficiles voire quasi impossibles à exécuter à l'aide du système romain de numération et de l'abaque à jetons. Pour faire des multiplications, des divisions complexes, manipuler des fractions, extraire des racines, toutes opérations nécessaires par exemple au calcul astronomique, un effort important de recherche de solutions et de diffusion des savoirs acquis a été fait d'une façon continue depuis le Xe siècle. La construction de ces savoirs se passe d'abord à l'école monastique, dans l'effort individuel aussi, puis, de façon moins forte, à l'université à partir du début du XIIIe siècle. Elle emprunte également un autre chemin qui passe par Leonardo Fibonacci et par l'activité des marchands italiens du Moyen Âge finissant. Elle prend aussi d'autres voies comme celles de la Catalogne, du Languedoc et de la Provence. Trois grands types d'arithmétique ont été produits dans ces milieux : l'arithmétique de l'abaque gerbertien, l'algorisme (ou calcul sur la poussière) et enfin le calcul sur le papier.

1 – Les abaqués à apices et le calcul sur l'abaque : fin Xe – Xlle siècle. Une discipline à l'usage des écoles et des universités

Quelques explications sur l'aspect de l'outil avant toutes choses. Comment se présentait cet instrument de calcul ? La *Confectio abaci* nous est décrite vers 995-998 par Richer⁶, le moine historien de Saint-Rémi de Reims et disciple de Gerbert d'Aurillac :

« Gerbert fit faire un abaque par un fabricant de boucliers, c'est à dire une table de dimensions appropriées. Sur sa longueur divisée en 27 colonnes il disposa 9 signes [= nota : ce sont les lettres grecques mises en tête des demi-cercles] destinés à exprimer tous les nombres. Il fabriqua en outre avec les mêmes signes 1000 caractères [ici *caracteres* est l'équivalent d'*apices* dans les autres types de traités] en corne qu'on intervertissait dans les 27 colonnes pour obtenir la multiplication ou la

⁶ Ed. et trad. française : Latouche (Robert), *Richer, Histoire de France (888-995)*, Paris, 1937 (Les classiques de l'histoire de France au Moyen Âge). Trad. en partie réinterprétée.

division de tous les nombres possibles. Ce dispositif permettait de diviser et de multiplier une foule de nombres si rapidement que, vu leur extrême abondance, on réussissait à faire mentalement les opérations en moins de temps qu'on n'eût mis pour les formuler. Si l'on désire connaître à fond cette science on peut lire l'ouvrage de Gerbert adressé au grammairien Constantin ; on y trouvera la question traitée avec une abondance suffisante. »

Ce texte n'est cependant pas d'une clarté suffisante et les illustrations fournies par divers ouvrages⁷ sont nécessaires pour comprendre l'organisation de l'abaque à colonnes et pour commencer à s'exercer à ses calculs.

Le propos déclaré de cette arithmétique, c'est de se livrer à la réalisation de multiplications, de divisions et d'opérations sur les fractions romaines. Notre connaissance récente de cette littérature difficile et d'un abord parfois rebutant est tributaire des travaux de trois historiens au premier rang desquels il faut citer ceux de Guy Beaujouan qui, depuis 1947 et sa thèse de l'École des Chartes, n'a cessé d'étudier les arithmétiques médiévales. Il a en particulier contribué à clarifier notre connaissance du sujet en élucidant le problème des apparences variées que prenaient les chiffres arabo-indiens ou les lettres grecques représentés sur les *apices*. Ces variations d'apparence qui firent longtemps croire à des systèmes différents de numération étaient en fait dues à ce que le rédacteur du traité recopiait le schéma de l'abaque qu'il avait devant lui. Les *apices* n'étaient pas placés toujours dans le même sens et ainsi un même chiffre ou lettre représenté dans des positions différentes pouvait laisser croire à une autre signification. Retenons aussi de Guy Beaujouan une première synthèse parue en 1957 dans *l'Histoire générale des sciences*, introduction obligée à une première approche de ces problèmes arithmétiques. Gillian Rosemary Evans a elle aussi apporté beaucoup à l'histoire de l'abaque gerbertien et de son enseignement dans les écoles, la lecture de trois de ses articles parus de 1975 à 1979 constitue une excellente introduction à ce monde compliqué. Ce sont enfin les recherches de Werner Bergmann qui permettent depuis 1985 d'avoir une vue plus claire sur les sources et la typologie de ces méthodes de calcul. Pour qui veut s'initier à la mise en pratique de cette arithmétique, je signale que l'édition et la traduction française par Béatrice Bakhouché et Jean Cassinet du traité d'abaque de Bernelin donnent de commodités interprétations graphiques des calculs proposés par ce disciple présumé de Gerbert.

De nombreux manuscrits d'abaque sont conservés dans les bibliothèques, mais il n'en existe pas de catalogue général qui permettrait d'en prendre une mesure véritablement quantitative. Un certain nombre d'entre eux ont été édités, surtout au XIXe siècle dans le *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*⁸ du prince Boncompagni et par le savant russe Bubnov (1899). Bergmann (1985) distingue trois types d'abacques – et autant de genre de traités - caractérisés par la nature des inscriptions gravées sur les jetons : lettres grecques ou bien chiffres arabo-indiens. En voici la nomenclature propre à éclairer la bibliographie des éditions citées plus loin :

Type 1 : type de l'abaque romain classique.

Type 2 : les jetons portent des lettres grecques (*caractères*). Ce premier groupe d'abacistes est formé en particulier par Gerbert, Abbon de Fleury, Notker de Saint

⁷ Ifrah 1994 ; Folkerts 1996 et surtout Bakhouché et Cassinet 2000.

⁸ Cette revue est parue pendant 20 ans de 1868 à 1887.

Gall, Hériger de Lobbes et Hermann de Reichenau. Leur point commun est de ne pas utiliser les chiffres arabo-indiens.

Type 3 : l'abaque est identique mais ce sont les chiffres arabo-indiens qui sont reproduits sur les jetons (*apices vel caracteres*). Traités du Pseudo-Boèce (*Géométrie II*), de Bernelin.

Type 4 : l'abaque est identique, mais les chiffres arabo-indiens sont désormais intégrés dans le texte des traités tout comme le nom de ces chiffres : *igin (1), andras (2), ormis (3), arbas (4), quimas (5), caletis (6), zenis (7), temenias (8), celentis (9)*. Les lettres grecques sont absentes. Les œuvres de Gerland de Besançon et de Raoul de Laon sont caractéristiques du type 4.

On retiendra que la diffusion de cet instrument n'a pas dépassé une frange sûrement très restreinte d'une élite lettrée. Elle a eu l'avantage de répandre dans ces milieux d'Occident une première notion d'une arithmétique qui introduit déjà le concept de position et qui entrevoit le zéro.

Textes

Bubnov (Nicolas), *Gerberti postea Silvestri II papae opera mathematica (972-1003)*, Berlin, Friedländer, 1899 (première édition en russe : 1888). Disponible sur Gallica : < <http://gallica.bnf.fr/> >

Abbon de Fleury : 940-1004. Bergmann type 2. Ed. Bubnov, p. 197-204.

Gerbert : 945-1003. Bergmann type 2. Ed. Bubnov, p. 1-24 : **a** - *Regulae de numerorum abaci rationibus* [Constantino (de Fleury) suo Gerbertus scolasticus] ou bien *Libellus de numerorum divisione (regulae multiplicationis et regulae divisionis)* ; **b** - *Fragmentum de norma rationis abaci*.

Hériger de Lobbes : 950-1005. Bergmann type 2. Ed. Bubnov, p. 205-225 : *Ratio numerorum abaci*.

Bernelin : 1000-1100. Bergmann type 3. Ed. *PL*, t. 139, col. 85. Ed. et trad. française : Bakhouché (Béatrice) et Cassinet (Jean), *Bernelin élève de Gerbert d'Aurillac, livre d'abaque*, Pau, Princi Néguer editor, 2000.

Hermann de Reichenau : 1013-1054. Bergmann type 2. Ed. Treutlein, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t.10, 1877, p. 643-647.

Pseudo-Boèce (Géométrie II) : 1000-1050. Bergmann type 3. Ed. Folkerts (Menso), *Boethius Geometrie II : ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters*, Wiesbaden, Franz Steiner, 1970. Ed. Bubnov, p. 155-161. Composée par un lettré de Lorraine, première moitié du XIe siècle.

Adélard de Bath : c. 1070-1142. *Regule abaci*. Ed. B. Boncompagni, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. 14, 1881, p. 1-134. Burnett (Charles) (éd.), *Adelard of Bath : An English scientist and arabist of the early 12th century*, Londres, The Warburg Institute, Univ. of London, 1987 (Warburg Institute surveys and texts, 14).

Gerland de Besançon : 1100-1200. Bergmann type 4. Ed. Boncompagni, *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. 20, 1887.

Garlandus Compotista [le même ?] Ed. B. Boncompagni, « Scritti inediti relativi al calcolo dell'abaco », *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e*

fisiche, t. 10, 1877, p. 595-656. Garlandus Compotista, *Dialectica*, éd. L. M. de Rijk, Assen, 1959.

Pandolphe de Capoue : 1100-1200. Gibson (Craig A.) et Newton (Francis), « Pandulf of Capua's *De calculatione* : An Illustrated Abacus Treatise and Some Evidence for the Hindu-Arabic Numerals in Eleventh-Century Italy », *Mediaeval Studies*, t. 57, 1995, p. 293-335.

Turchillus. Ed. Narducci (E.), « Intorno a due trattati inediti d'abaco », *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t. 15, 1882, p. 111-163.

Raoul de Laon : 1100-1131. Bergmann type 4. *Liber de abaco*, éd. Nagl (A.), *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, t. 5, 1890, p. 96-133.

2 – L'algorithmisme, le calcul sur la poussière (milieu XIIe - XVIe siècle)

Pendant que les écoliers pratiquaient l'arithmétique de l'abaque gerbertien et apprenaient le plus souvent le calcul par jetons, leurs maîtres cherchaient toujours à perfectionner les procédés de calcul. C'est vers le milieu du XIIe siècle que se produit en Occident la révolution décisive qui est celle de l'introduction de l'arithmétique du calcul indien, utilisation d'une numération de position avec 9 chiffres et le zéro, *al-hisab al-hind* des mathématiciens arabes. Le calcul se fait sur la table à poussière en effaçant les résultats intermédiaires.

Les travaux historiques des dernières décennies ont permis de voir plus clair dans les problèmes complexes de filiation et d'influence entre les traités. André Allard, Charles Burnett et Gillian Rosemary Evans ont décrit les principaux jalons qui, depuis les écrits disparus du mathématicien de Bagdad Mohammed ibn Musa al-Khwarizmi [Algorithmisme] au IXe siècle, marquent l'introduction du nouveau calcul dans les écoles et les premières universités. Un ensemble de textes latins du XIIe siècle connu par 24 manuscrits constitue le premier relai de cette arithmétique dans le monde latin par le biais d'un cheminement qui passe par l'Espagne, Adélard de Bath et quelques autres⁹. Mais la grande diffusion de l'algorithmisme a été atteinte grâce à son enseignement dans les universités naissantes au début du XIIIe siècle à cause du succès colossal de deux manuels élémentaires, le *Carmen de algorismo* d'Alexandre de Villedieu et l'*Algorismus vulgaris* de Jean de Sacrobosco. Le *Carmen de algorismo* est composé vers 1200-1202, il est rédigé en vers comme les autres manuels produits par ce normand pédagogue et versificateur (*Doctrinale puerorum, Massa compoti*). L'*Algorismus vulgaris* [1230-1245] de l'auteur du *Traité de la sphère* connaît un succès énorme comme manuel, on en conserve plusieurs centaines de manuscrits médiévaux ; imprimé dès 1488, il le sera jusqu'en 1582.

La postérité du calcul sur la poussière passe par son adaptation au papier, à la plume et à l'encre. Guy Beaujouan, je l'ai dit plus haut, distingue un groupe de manuscrits¹⁰ dans la France du nord (Wallonie, Normandie et Bassin parisien) qui

⁹ Allard 1992 ; Haskins 1924 ; Burnett 1996.

¹⁰ Beaujouan 1988, p.74-77 : les manuscrits de Jean Fusoris adaptent les calculs de Sacrobosco aux calculs sur le papier : Paris, Bibliothèque nationale de France, lat. 7287 (copié vers 1460) et fr. 1339 ; Nantes, Bibliothèque municipale, ms. 456 (copié vers 1480). Voir aussi des calculs de ce type dans Florence, Laurenziana, plut. 29 cod. 43 et dans Tournai 86 (détruit en 1940). Sur Fusoris voir Poulle (Emmanuel), *Un*

enseigne le calcul avec jetons parallèlement à celui d'adaptations sans originalité, nous dit-il, de l'*Algorisme* de Sacrobosco au calcul sur le papier. Cette évolution typologique, le couplage éditorial du calcul par jetons avec une arithmétique d'algorisme adaptée à la plume et au papier, se dessine dans la production manuscrite de la seconde moitié du 15^e siècle et se retrouve dans beaucoup des premiers ouvrages imprimés d'arithmétique pendant tout le 16^e siècle.

Textes

Alexandre de Villedieu, *Carmen de algorismo*. Ed. Halliwell Philipps (J. O.), *Rara mathematica*, Londres, 1841, p.73-83.

Allard (André), *Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, le calcul indien (Algorismus), histoire des textes, édition critique, traduction et commentaire des plus anciennes versions latines remaniées du XIIe siècle*, Paris, A. Blanchard, et Namur, Société des études classiques, 1992.

Anonimo, *Algorismus (dal cod. AD. XII. 53 della Biblioteca Nazionale Braidense di Milano)*, a cura e con introduzione di G. Arrighi, 1999 (*Quaderni del Centro studi della matematica medioevale*, 24).

Henry (Charles), « Sur les deux plus anciens traités français d'algorisme et de géométrie », *Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*, t.15, 1882, p.49-70.

Jean de Sacrobosco, *Algorisme*. Ed. Curtze (Maximilian), *Petri Philomeni de Dacia in Algorismus vulgarem Johannis de Sacrobosco commentarius, una cum Algorismo ipso*, Copenhague, 1897. Ed. Halliwell Philipps (J. O.), *Rara mathematica*, p. 1-26.

Jordanus Nemorarius : éd. Busard (H. L. L.), « The Algorismus demonstratus of Jordanus Nemorarius », *Centaurus : International Magazine of the History of Mathematics, Science, and Technology*, t. 15, 1970, p. 193-227.

Jean Ocreatus : Burnett (Charles), « "Algorismi vel helcep decentior est diligentia" : The arithmetic of Adelard of Bath and his circle » : éd. et trad. anglaise du texte *Helcep* [al-hisab] *Sarracenicum* de J. Ocreatus et des *Anxiomata artis arismetice*.

3 – Un apprentissage de marchands : les traités d'arithmétique commerciale et l'introduction de l'algèbre en Occident

En Occident se produisent à partir du début du 13^e siècle des changements importants. Divers facteurs d'évolution modifient la façon de faire les opérations. A partir des années 1330, la langue des traités d'arithmétique passe du latin à la langue vulgaire et, fait capital, la diffusion du papier en Occident, en le rendant moins onéreux, amène un changement dans la pratique opératoire : « Les chiffres sont posés, les résultats intermédiaires maintenus, de nouvelles mises en forme des opérations deviennent possibles, donc de nouvelles pratiques opératoires.»¹¹. L'exécution des calculs passe de la table à poussière à la feuille de papier, à la plume et à l'encre. Alors que la conduite du calcul sur la poussière impliquait

constructeur d'instruments astronomiques au XV^e siècle, Jean Fusoris, Paris, 1963. Fusoris vivait à Paris de 1339 à 1460 environ.

¹¹ Beaujouan 1954.

l'effacement des résultats intermédiaires, l'usage du papier permet de conserver la trace de toute l'opération, c'est ce que nous signale, à l'aube du 16^e siècle, le titre de cet incunable : *Algorismus nouus de integris compendiose sine figurarum (more Italarum) deletione compilatus*¹². La deuxième grande nouveauté de cette période réside dans l'introduction de la méthode algébrique dont le premier exemple occidental est constitué par le livre 15 et dernier du *Liber abaci* de Leonardo Fibonacci en 1202. De là date le développement de cette partie des mathématiques en Occident, discipline qui ne prendra véritablement son essor qu'à partir de la fin du 14^e siècle en Italie. Mais ceci est une autre histoire qui sort du cadre fixé à ce travail.

Pour rester avec l'arithmétique, on peut voir cette nouvelle méthode se développer, se répandre et s'enseigner dans les milieux marchands des nations qui bordent la Méditerranée. Leonardo Fibonacci, au début de la version de 1228 du *Liber Abaci* (1202), dans un texte rare et célèbre, nous raconte sa formation et donne un panorama vivant des pratiques mathématiques du commerce méditerranéen : « Mon père, nous dit-il, après sa nomination comme administrateur du bureau des douanes génoise de Bougie pour assister les marchands pisans qui se pressaient dans ce port, me fit venir dans mon enfance pour m'y employer et pour y être instruit quelque temps dans l'étude du calcul. ... Là, en poursuivant mon initiation aux neuf chiffres des Hindous, la connaissance de cet art m'attira fortement et je réalisais que tous ses aspects étaient étudiés en Egypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile et en Provence et, plus tard, lorsque je fus dans ces pays pour me livrer à mes affaires je poursuivis mes études en profondeur... »¹³

La floraison italienne des 14^e et 15^e siècles se situe en dehors du courant universitaire et cet exemple, avec les nombreux traités d'abaque subsistants, est bien connu grâce en particulier aux travaux de recension de manuscrits effectués par Warren Van Egmond et aux publications du *Centro di Matematica Medioevale* de l'université de Sienne. Une mention spéciale doit être faite pour les *Quaderni...* édités par lui depuis 1982. Ces ouvrages fournissent des transcriptions et des éditions commodes de nombreux textes italiens qui s'échelonnent du 12^e au 16^e siècle. En France et en Italie l'enseignement du calcul indien touche désormais d'autres auditoires que ceux des écoles et des universités, il s'enseigne aux apprentis marchands et sert à résoudre les problèmes qui se posent dans l'activité économique.

A côté de ce foisonnement italien on assiste également à l'émergence d'une production en français, en occitan et en catalan de ce type d'ouvrages, production qui semble appartenir à une autre tradition que celle qui caractérise le genre italien, *more Italarum*. Ces traités paraissent témoigner d'un autre axe de diffusion du nouveau calcul dans l'arc méditerranéen occidental et la vallée du Rhône. Guy Beaujouan et Jean Cassinet¹⁴ nous en signalent quelques uns :

¹² Imprimé par Cornelis de Zierikzee, Cologne, 1500?, in 4.

¹³ Ed. Libri 1838-1841.

¹⁴ Beaujouan 1988 ; Cassinet 1993 : « Ce manuscrit, par son contenu et sa période de rédaction, constitue un maillon essentiel de la transmission de l'algorithme au quinzième siècle. Il comble partiellement un vide entre le manuscrit de Pamiers, écrit en occitan vers 1430, et les oeuvres bien connues de Nicolas Chuquet, le Triparty en la science des nombres et son appendice, rédigé en français, à Lyon en 1484. »

- L'algorithme de Pamiers, en provençal, (ms. Paris, Bibl. Nat. de France, nouv. acq. fr. 4140), 15^e siècle (Sesiano, 1984). Composé vers 1430 selon Cassinet qui l'appelle le « manuscrit de Pamiers ».
- Le ms. Paris, Bibl. Nat. de France, ms. fr. 2050. En français mais adaptation d'un modèle occitan, transcrit vers 1450.
- Le *Compendion de l'abaco* de Francesc Pellos (imprimé à Turin en 1492), rédigé en occitan central. Composé vers 1460 selon Sesiano.
- La *Suma de la art de arismetica* de Francesc Sanct Climent, rédigé en catalan (imprimé à Barcelone en 1482) (Labarthe, 2002).
- Le *Kadran aux marchans*, commencé à Bilbao en 1485 et écrit en français par le marchand marseillais Jehan Certain (Benoît, 1982).
- Ms. Cesena, Biblioteca Malatestiana, S. XXVI-6, écrit en français en 1471. Origine occitane (Cassinet, 1993).

L'étude des textes de cette veine est aujourd'hui l'objet de nouveaux travaux, gageons qu'ils apporteront de la lumière à ce problème de la diffusion du calcul sur le papier et de la typologie de ses pratiques opératoires.

Textes

Algorithme de Pamiers : Bibliothèque nationale de France, nouv. acq. fr. 4140, ms. du XVe siècle, 118 fos. Etude et éd. partielle : Sesiano (Jacques), « Une arithmétique médiévale en langue provençale », *Centaurus : International Magazine of the History of Mathematics, Science, and Technology*, 1984, t. 27, p. 26-75.

Francesc Pellos : *Compendion de l'abaco*, éd. Laffont (Robert) et Tournerie (Guy), Montpellier, 1967. D'après l'édition de 1492. C. R. : Anatole (Christian), *Marche romane*, 1971, p. 51-52.

Francesc Sanct Climent : *Summa de la art de arismetica*, Barcelone, 1482. Edition d'extraits dans Karpinski, "The first printed arithmetic of Spain", *Osiris*, t. 1, 1936, p. 411-420. En catalan. Conservé à la bibliothèque catalane de Barcelone, 136 fos. Malet (Antoni) (éd.), *Francesc Santcliment, Summa de l'art d'aritmètica. Introducció, transcripció i notes a cura d'Antoni Malet*, Vic, Eumo, 1998 (Textos d'història de la ciència 1). Etude : Labarthe (Marie-Hélène), « La Suma de la art de arismetica de Francesch Sanct Climent », dans *Domitia. Revue du centre de recherches historiques sur les sociétés méditerranéennes, université de Perpignan*, n° 2, février 2002, p. 63-88.

Leonardo Fibonacci (vers 1175-vers 1238) : *Liber abaci*. Ecrit en 1202 et remanié en 1228. Ed. Boncompagni (Baldassare), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Rome, 1857-1862, t. 1. Ed. partielle : *E'chasi della terza parte del XV capitolo del Liber Abaci...*, 1984 (Quaderni del Centro studi della matematica medioevale, n° 10).

Leonardo Fibonacci, *Practica geometriae*. Vers 1220-1222. Ed. Boncompagni (Baldassare), *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo*, Rome, 1857-1862, t. 2.

Paolo dell'Abaco, *Trattato di tutta l'arte dell'abacho*, ms. Florence, Biblioteca nazionale centrale, Fondo principale, II.IX.57. Manuscrit rédigé vers 1339. Edition

des passages astronomiques : *Pratica d'astrologia dal Codici Fond. Prin. II.IX.57...*, 1985 (Quaderni del Centro studi della matematica medioevale, n°14). Vivait vers 1281-1367 : Van Egmond (Warren), « New light on Paolo dell'Abaco », *Annali dell'Istituto e museo di storia della scienza di Firenze*, t.2, 1977, p.3-21. Etude du traité : Piochi (Brunetto), « Il Trattato di Paolo dell'Abaco », *Annali dell'Istituto e museo di storia della scienza di Firenze*, t.9, 1984, p.21-40 ; table des matières du manuscrit de Florence.

Paris, Bibliothèque nationale de France, fr. 2050. Manuscrit arithmétique écrit en français vers 1460, adaptation d'un modèle du Sud.

Piero della Francesca : *Trattato d'abaco*. Ed. Arrighi (Gino), *Piero della Francesca, trattato d'abaco, dal codice Ashburnamiano 280 della biblioteca Medicea-Laurenziana di Firenze*, Pise, 1970. Partie géométrique, la perspective. Vivait vers 1410/1420-1492. Maître de Luca Paccioli.

Quaderni del Centro studi della matematica medioevale édités par le Centro di Matematica Medioevale de l'université de Sienne :

1 : Tommaso della Gazzaia, *Pratiche di geometria e tutte misure di terre* (dal ms C. III. 23 della Biblioteca Comunale di Siena). Trascrizione di G. Nanni, introduzione di G. Arrighi, 1982.

2 : M° Benedetto da Firenze, *La reghola de algebra amuchabale* (dal cod. L. IV. 21 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di L. Salomone, 1982

3 : Giovanni di Bartolo, "*Certi chasi*" nella *trascelta* a cura di M° Benedetto (secondo la lezione del codice L. IV. 21 della Biblioteca degli Intronati di Siena). A cura e con introduzione di M. Pancanti, 1982.

4 : Filippo Calandri, *Una raccolta di ragioni* (dal cod. L. VI. 45 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di D. Santini, 1982.

5 : M° Biagio, "*Chasi exenplari alla regola dell'algebra*" nella *trascelta* a cura di M° Benedetto (dal cod. L. IV. 21 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di L. Pieraccini, 1983.

6 : M° Gilio, *Questioni d'algebra* (dal cod. L. IX. 28 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di R. Franci, 1983.

7 : Raffaello Canacci, *Ragionamenti d'algebra : i problemi* (dal cod. Palat. 567 della Biblioteca Nazionale di Firenze), a cura e con introduzione di A. Procissi, 1983.

8 : Anonimo maestro lombardo, *Arte giamata aresmetica* (un'antologia dal cod. N. III. 53 della Biblioteca Nazionale di Torino). A cura e con introduzione di M. T. Rivolo, 1983.

9 : Dionigi Gori, *Libro e trattato della pratica d'algebra* (dal cod. L. IV. 22 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di L. Toti Rigatelli, 1984.

10 : Leonardo Pisano, "*E chasi*" della *terza parte del XV capitolo del 'Liber Abaci'* nella *trascelta* a cura di M° Benedetto (secondo la lezione del cod. L. IV. 21 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di L. Salomone, 1984.

11 : Maestro Gratia de' Castelani, *Chasi sopra chompagnie* (dal cod. Palat. 573 della Biblioteca Nazionale di Firenze). A cura e con introduzione di M. Pancanti, 1984.

12 : Dionigi Gori, *Libro di ragioni e misure in sunto e a mente* (dal cod. L. IX. 30 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di R. Franci, 1984.

13 : Anonimo Senese (sec. XV), *Differenze di geometria e misure a occhio* (dal ms. Plimpton 194 della Biblioteca della Columbia University). A cura e con introduzione di M. T. Rivolo, 1985.

14 : Paolo dell'Abaco, *Praticha d'astrologia* (dai codd. Fon. Prin. II. IX. 57 della Biblioteca Nazionale di Firenze e Ash. 1662 della Biblioteca Laurenziana di Firenze). A cura e con introduzione di B. Piochi, 1985.

15 : Anonimo (sec. XV), *Della radice de' numeri e metodo di trovarla : trattatello di algebra e geometria* (dal cod. Ital. 578 della Biblioteca Estense di Modena), parte I. A cura e con introduzione di W. Van Egmond, 1986.

16 : Anonimo (sec. XV), *Della radice de' numeri e metodo di trovarla : trattatello di algebra e geometria* (dal cod. Ital. 578 della Biblioteca Estense di Modena), parte II. A cura e con introduzione di F. Barbieri e P. Lancellotti, 1987.

17 : Bastiano da Pisa (sec. XVI), *Trattato d'arismeticha pratica* (dal cod. Ital. 1110 della Biblioteca Estense di Modena). A cura e con introduzione di F. Barbieri e P. Lancellotti, 1988.

18 : Anonimo (sec. XIV), *Il trattato d'algebra* (dal ms. Fon. Prin. II. V. 152 della Biblioteca Nazionale di Firenze). A cura e con introduzione di R. Franci e M. Pancanti, 1988.

19 : Orbetano da Montepulciano (sec. XV), *Regole di geometria pratica* (dal ms. Moreni 130 della Biblioteca Riccardiana di Firenze). A cura e con introduzione di A. Simi, 1991.

20 : Anonimo fiorentino (sec. XV), *Regole di geometria e della cosa* (dal cod. Palat. 575 della Biblioteca Nazionale di Firenze). A cura e con introduzione di A. Simi, 1992.

21 : Anonimo fiorentino (sec. XV), *Trattato di geometria pratica* (dal cod. L. VI. 18 della Biblioteca Comunale di Siena). A cura e con introduzione di A. Simi, 1993.

22 : Anonimo (sec. XIV), *Trattato dell'algebra amuchabile* (dal Codice Ricc. 2263 della Biblioteca Riccardiana di Firenze). A cura e con introduzione di A. Simi, 1994.

23 : Anonimo fiorentino (sec. XIV), *Alchuno chaso sottile. La quinta distinzione della "Pratica di Geometria"* (dal Codice Ottoboniano latino 3307 della Biblioteca Apostolica Romana). A cura e con introduzione di A. Simi, 1998.

24 : Anonimo, *Algorismus* (dal cod. AD. XII. 53 della Biblioteca Nazionale Braidense di Milano). A cura e con introduzione di G. Arrighi, 1999.

Pour terminer cette revue des études et des textes consacrés au calcul élémentaire, il faut se poser la question de l'utilisation dans la pratique de tous ces savoirs théoriques. A partir de quand voit-on se répandre l'usage de la numération indienne en dehors des milieux lettrés ? Quand et comment se diffusent les pratiques opératoires que l'on voit évoluer dans les manuels manuscrits et imprimés ? Le secteur de la mise en application pratique de l'arithmétique est assurément très mal connu avant la fin du 14^e siècle et l'explosion italienne des traités et des *botteghe d'abbaco*.

Un premier élément de réponse est donné par la pérennité du vieux système de calcul par jetons depuis l'époque romaine jusqu'à la fin du 18^e siècle. Cette méthode

rustique semble suffire aux besoins du commerce, de l'administration et de ceux qui manipulent les nombres dans un but pratique. A travers des témoignages épars, on peut apprécier la lenteur de la diffusion des chiffres indo-arabes dans les pratiques quotidiennes de l'administration publique et privée. La cité de Florence, de 1299 à 1316, promulgue dans les statuts des changeurs¹⁵ l'interdiction répétée : « Quod nullus de arte scribat in suo libro per abbacum ». Que personne n'utilise les chiffres arabo-indiens dans ses livres de comptes ! Toujours à Florence, à la banque Médicis, ceux-ci apparaissent sporadiquement à partir de 1406¹⁶. En 1439 ils remplacent les chiffres romains dans une partie des livres mais ce n'est qu'en 1482 que les chiffres romains sont interdits dans ses bureaux. Ces quelques indications, relevées dans une des villes et une des entreprises les plus « performantes » du 15^e siècle italien, laissent penser combien la pénétration du nouveau calcul a dû être lente dans d'autres secteurs.

Les résultats de nouvelles études¹⁷ qui s'attachent, dans le domaine de la construction de la fin du Moyen Âge, à mettre en rapport les indications des documents d'archives (devis, etc.) avec celles des manuels de calcul, fournissent d'intéressantes pistes pour explorer le secteur de la diffusion de ces savoirs dans le monde de la pratique. C'est assurément un chemin qu'il faudrait continuer à prendre pour commencer à mieux connaître l'histoire de la diffusion des pratiques arithmétiques dans la société médiévale.

Bibliographie

Allard (André), « L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval » in Rashed (Roshdi) et Morelon (Régis) (dir.), *Histoire des sciences arabes...*, t. 2 : *Mathématiques et physique*, p. 198-229.

Barnard (Francis Pierrepont), *The casting counter and the counting board, a chapter in the history of numismatics and early arithmetic*, Oxford, Clarendon Press, 1916.

Beaujouan (Guy) « Étude paléographique sur la "rotation" des chiffres et l'emploi des apices du 10^e au 12^e siècle », *Revue de l'histoire des sciences*, t. 1, 1948, p. 301-313.

Beaujouan (Guy), « La science dans l'Occident médiéval chrétien », in Taton (René) (dir.), *Histoire générale des sciences*, Paris, PUF, 1957.

Beaujouan (Guy), « Les arithmétiques françaises des XIV^e et XV^e siècles », in *Actes du VIII^e congrès international d'histoire des sciences, Florence, 3-9 septembre 1956*, Vinci, Gruppo italiano di storia delle scienze, 1958, p. 84-87.

Beaujouan (Guy), « The place of Nicolas Chuquet in a typology of 15th-century French arithmetics » in Hay (Cynthia) (éd.), *Mathematics from manuscript to print...*

¹⁵ *Statuti dell'Arte del cambio di Firenze (1299-1316) con aggiunte e correzioni fino al 1320. A cura di Giulia Camerani Marri*, Firenze, L. S. Olschki, 1955, in 8, (Fonti sulle corporazioni medioevali, raccolte a cura della Deputazione di storia patria per la Toscana e pubblicate dalla Camera di commercio, industria e agricoltura di Firenze, 4).

¹⁶ Struik (Dirk J.), *Abriss der Geschichte der Mathematik*, Braunschweig, Vieweg Verlag, 1967, p. 92.

¹⁷ *Histoire et mesure*, t. 16, 2001, fasc. 3-4, *passim*.

Beaujouan (Guy), *Par raison de nombres. L'art du calcul et les savoirs scientifiques médiévaux*, Aldershot/Brookfield, Variorum reprints, 1991, (Collected Studies, 344), notamment : « L'enseignement de l'arithmétique élémentaire à l'université de Paris aux XIIIe et XIVe siècles » [1954], n° XI. « Les apocryphes mathématiques de Gerbert » [1985], n° II.

Benedict (S. R.), *A comparative study of the early treatises introducing into Europe the Hindu art of reckoning*, Concord, New Hampshire, 1914.

Benoît (Paul), « Calcul, algèbre et marchandise », in Serres (Michel) (dir.), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, 1989, p.197 et suiv.

Benoît (Paul), « Langage populaire et langage savant : remarques sur la naissance du vocabulaire arithmétique élémentaire en langue française », in *Transfert de vocabulaire dans les sciences*, Paris, CNRS, 1988, p.207-211.

Benoît (Paul), « Recherches sur le vocabulaire des opérations élémentaires dans les arithmétiques de langue française de la fin du Moyen Âge », *Documents pour l'histoire du vocabulaire scientifique*, n°7, 1985, p.77-95.

Benoît (Paul), « La formation mathématique des marchands français à la fin du Moyen Âge : l'exemple du kadran aux marchands », *Annales de l'Est*, t. 34, 1982, p. 209-224.

Benoît (Paul), Chemla (Karine), Ritter (Jim) (éd.), *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Bâle, Birkhäuser, 1992. Voir en particulier : Allard (André), « Le traitement des fractions dans les premiers textes latins du XIIe siècle influencés par l'arithmétique arabe » ; Benoît (Paul), « Arithmétiques commerciales et comptabilités dans la France médiévale » ; Franci (Raffaella), « Des fractions arithmétiques aux fractions algébriques dans les "trattati d'abaco" du XIVe siècle ».

Bergmann (Werner), *Innovationen im Quadrivium des 10 und 11 Jahrhunderts : Studien zur Einführung von Astrolab und Abakus im lateinischen Mittelalter*, Stuttgart, F. Steiner Verlag Wiesbaden, 1985 (Sudhoffs Archiv. Beihefte Heft 26.)

Burnett (Charles), « "Algorismi vel helcep decentior est diligentia" : The arithmetic of Adelard of Bath and his circle », in Folkerts (Menso) (éd.), *Mathematische Probleme im Mittelalter : Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Wiesbaden, Harrassowitz, 1996, p.221-331.

Cassinet (Jean), « Le manuscrit XXVI de Cesena, important maillon occitan de transmission de l'algorithme au 15ème siècle », *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, t. 13, 1993, p. 251-285.

Charrier-Spiesser (Maryvonne), *Entre théorie et pratique, le "Compendy de la pratique des nombres" de Barthélémy de Romans et Mathieu Préhoude (1471), aspects mathématiques, linguistiques et culturels*, Thèse de doctorat en mathématiques, Paris, EHESS, 1999.

Dictionary of scientific biography, dir. Gillispie (Charles Coulston), New-York, Charles Scribner's sons, 1970-1980, 16 vol.

Englisch (Brigitte), *Die Artes liberales im frühen, 5.-9. Jh. : das Quadrivium und der Computus als Indikatoren für Kontinuität und Erneuerung der exacten Wissenschaften zwischen Antike und Mittelalter*, Stuttgart, Steiner, 1994. C. R. : Lindgren (Uta), *Archives internationales d'histoire des Sciences*, vol. 46, n. 137, 1996, p.410-411.

Evans (Gillian Rosemary), « "Duc Oculum" : Aids to understanding in some mediaeval treatises on the abacus », *Centaurus : International Magazine of the History of Mathematics, Science, and Technology*, t. 19, 1975, p. 252-263.

Evans (Gillian Rosemary), « "Difficillima et ardua" : Theory and practice in treatises on the abacus, 950-1150 », *Journal of Medieval History*, 1977, p. 21-38.

Evans (Gillian Rosemary), « From Abacus to Algorithm : Theories and Practice in Medieval Arithmetic », *British Journal for the History of Science*, t. 10, 1977, p. 114-131.

Evans (Gillian Rosemary), « Schools and scholars : The study of the abacus in English schools c. 980-c. 1150 », *English Historical Review*, t. 94, 1979, p. 71-89.

Folkerts (Menso), « Frühe Darstellungen des Gerbertischen Abakus », in Franci (Raffaella) et al. (éd.), *Itinera mathematica : Studi in onore di Gino Arrighi*, Centro Studi sulla Matematica Medioevale, Università di Siena, Sienna, 1996, p.23-43.

Franci (Raffaella), « L'insegnamento dell'aritmetica nel Medioevo », in Franci (Raffaella) et al. (éd.), *Itinera mathematica : Studi in onore di Gino Arrighi*, p.1-22.

Franci (Raffaella), « Le matematiche dell'abaco nel Quattrocento », in *Contributi alla storia delle matematiche. Scritti in onore di Gino Arrighi*, Modène, Mucchi, 1992, p.53-74.

Franci (Raffaella), «La matematica dell'abaco in Italia dal XIII al XVI secolo», in *Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*, Ancône, 1993, p. 62-67.

Gamba (Enrico), «La matematica abachistica tra ricupero della tradizione e rinnovamento scientifico», in *Cultura, scienze e tecniche nella Venezia del Cinquecento*, Venise, Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1987, p.169-202.

Gebhardt (Rainer) et Rochhaus (Peter), *Verzeichnis der Adam-Ries-Drucke : Katalog der gedruckten Rechenbücher und Rechenhilfsmittel des Rechenmeisters Adam Ries [1492-1559]*, Annaberg-Buchholz, Adam-Ries-Bund, 1997.

Glade (Heinz), *Am Anfang stand der Abacus : Aus der Kulturgeschichte der Rechenggeräte*, Leipzig, Urania-Verlag, 1973.

Haskins (Charles Homer), *Studies in the history of medieval science*, Cambridge, Harvard University Press, 1924 (Harvard historical studies).

Hay (Cynthia) (éd.), *Mathematics from manuscript to print, 1300-1600*, Oxford, Clarendon Press, 1988. Voir en particulier : Franci (Raffaella) et Toti Rigatelli (Lucia), « Fourteenth-century Italian algebra » ; Benoît (Paul), « The commercial arithmetic of Nicolas Chuquet » ; Van Egmond (Warren), « How algebra came to France ».

Hock (Jochen) et Jeannin (Pierre) (éd.), *Ars mercatoria [Handbücher und Traktate für den Gebrauch des Kaufmanns 1470-1820] : eine analytische Bibliographie*, Paderborn-Munich-Vienne, Schöningh, depuis 1991, 6 vol. : 1, 1470-1600 ; 2, 1600-1700 ; 3, *Analysen* (1470-1700).

Ifrah (Georges), *Histoire universelle des chiffres, l'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul*, Paris, Robert Laffont, 1994, 2 vol. (Bouquins) [Première éd. en 1981, Paris, Seghers]. Je renvoie à cet ouvrage pour ce qui est des représentations figurées des instruments de calcul (abaques). Sur les controverses suscitées lors de sa réédition augmentée de 1994, on pourra lire : Lévy (Tony), « A propos de l'histoire des numérations et de l'ouvrage de G. Ifrah : *Histoire Universelle*

des Chiffres », *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, n° 398, avril-mai 1995, p. 531–534.

Libri (Guillaume), *Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la Renaissance des lettres*, Paris, 1838-1841, t. 2, p. 287-290. Disponible sur Gallica <<http://gallica.bnf.fr/>> .

Lindgren (Uta), *Gerbert von Aurillac und das Quadrivium : Untersuchung zur Bildung im Zeitalter der Ottonen*, Wiesbaden, Steiner, 1976 (Sudhoffs Archiv, Beiheft 18).

Pullan (J. M.), *The History of the Abacus*, London, Hutchinson, 1968.

Rashed (Roshdi) et Morelon (Régis) (dir.), *Histoire des sciences arabes sous la direction de Roshdi Rashed avec la collaboration de Régis Morelon*, Paris, Seuil, 1997, 3 vol. : t. 1, *Astronomie théorique et appliquée* ; t. 2, *Mathématiques et physique* ; t. 3, *Technologie, alchimie et sciences de la vie*.

Rouyer (Jules) et Hucher (Eugène), *Histoire du jeton au Moyen Âge*, Paris - Le Mans, Rollin, Monnoyer, 1858, 180 p., 17 pl. de dessins de jetons. Réimpression : Paris, Le léopard d'or, 1982, avec une préface de Michel Pastoureau. P. 5 à 35 : avant-propos et « Remarques générales sur les jetons au Moyen Âge », p. 37-177 : « Description des jetons du Moyen Âge et explication des planches ».

Serres (Michel) (dir.), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris, 1989.

Smith (David Eugene), *History of mathematics*. Vol. 1 : *General survey of the history of elementary mathematics* ; Vol. 2 : *Special topics of elementary mathematics*, Boston, Ginn, 1923-1925.

Smith (David Eugene), *Rara arithmetica; a catalogue of the arithmetics written before the year MDCl, with a description of those in the library of George Arthur Plimpton, of New York, by David Eugene Smith of Teachers College Columbia University*, Boston-Londres, Ginn and Company, 1908.

Tröpfke (J.), *Geschichte der Elementar Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung der Fachwörter*, Berlin, De Gruyter, 2e éd., 1921-1924, 7 vol. ; 4e éd. du t.1, *Arithmetik und Algebra*, révisée par K. Vogel, K. Reich et H. Gericke, Berlin, De Gruyter, 1980.

Van Egmond (Warren), « The earliest vernacular treatment of algebra : The "Libro di ragioni" of Paolo Gerardi (1328) », *Physis : Rivista Internazionale di Storia della Scienza*, t. 20, 1978, p. 155-189.

Van Egmond (Warren), *Practical mathematics in the Italian Renaissance: A catalog of Italian abacus manuscripts and printed books to 1600*, Florence, Istituto e Museo di Storia della Scienza, 1980 (Supplémento agli *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, 1)

Van Egmond (Warren), *The commercial revolution and the beginnings of western mathematics in Renaissance Florence, 1300-1500*, Dissertation, Indiana Univ., 1976. Univ. Microfilms order no. 77-10932. 644 pp.

Vogel (Kurt), « L'aritmetica e la geometria de Gerberto », in *Gerberto, scienza, storia e mito. Atti del Gerberti symposium, Bobbio, 25-27 luglio 1983*, Bobbio, Editrice degli ASB, 1985, p. 577-596.

Witthöft (Harald), *Deutsche Bibliographie zur historischen Metrologie*, St-Katharinen, Scripta mercaturae Verlag, 1991. Voir aux p. 89-99 le chap. consacré aux

Rechenmeister, Rechenbücher et à l'arithmétique opérative, qui donne une bonne vue de la production allemande.