
DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE LANG-NÉRON

par

Bruno Kahn

Résumé. — On donne une démonstration “sans hauteurs” du théorème de Lang-Néron : si K/k est une extension de type fini régulière et A est une K -variété abélienne, le groupe $A(K)/\mathrm{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\mathrm{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k -trace de A au sens de Chow. La méthode fournit une expression du rang de ce groupe en fonction de ceux de certains groupes de Néron-Severi.

Abstract. — We give a proof without heights of the Lang-Néron theorem : if K/k is a regular extension of finite type and A is an abelian K -variety, the group $A(K)/\mathrm{Tr}_{K/k} A(k)$ is finitely generated, where $\mathrm{Tr}_{K/k} A$ denotes the K/k -trace of A in the sense of Chow. Our method computes the rank of this group in terms of certain ranks of Néron-Severi groups.

Soient K/k une extension de type fini régulière et A une K -variété abélienne. On se propose de donner une démonstration “sans hauteurs” du théorème de Lang-Néron :

Théorème 1 ([4]). — *Le groupe $A(K)/\mathrm{Tr}_{K/k} A(k)$ est de type fini, où $\mathrm{Tr}_{K/k} A$ désigne la K/k -trace de A au sens de Chow.*

(La démonstration de Lang et Néron est exposée dans le langage des schémas dans [3, App. B].)

On se ramène immédiatement au cas où k est algébriquement clos. Soit X un modèle lisse de K/k choisi de telle sorte que A se prolonge en un schéma abélien $p : \mathcal{A} \rightarrow X$.

Classification mathématique par sujets (2000). — 11G10, 14C22, 14K30.

Lemme 1. — *La suite*

$$0 \rightarrow \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A) \rightarrow 0$$

est exacte, où j est l'inclusion de A dans \mathcal{A} .

Démonstration. — On a un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{x \in \mathcal{A}^{(1)}} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{j^*} & \mathrm{Pic}(A) & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow \wr & & \uparrow p^* & & \uparrow & & \\ \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & 0 & & \end{array}$$

d'où la suite exacte désirée, sauf l'exactitude en $\mathrm{Pic}(X)$. Celle-ci résulte du fait que p a une section. \square

Lemme 2. — *Soit $A^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{A})$ le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro. Alors $j^* A^1(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$, où $\hat{A} = \mathrm{Pic}_{A/k}^0$ est la variété abélienne duale de A .*

Démonstration (cf. [2, Lect. 1, lemme 1.3]). — Par définition, $A^1(X)$ est engendré via les correspondances algébriques par des jacobiniennes de courbes, donc le lemme résulte de la définition de la K/k -trace. \square

Lemme 3. — *On a $j^* A^1(\mathcal{A}) = \mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$, et une suite exacte scindée*

$$0 \rightarrow \mathrm{NS}(X) \xrightarrow{p^*} \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Pic}(A) / \mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k) \rightarrow 0$$

où NS désigne le groupe des cycles de codimension 1 modulo l'équivalence algébrique.

Démonstration. — Le lemme du serpent appliqué au diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A^1(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(\mathcal{A}) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(\mathcal{A}) \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow p_A^* & & \uparrow p^* & & \uparrow p_N^* \\ 0 & \longrightarrow & A^1(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}(X) & \longrightarrow & \mathrm{NS}(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

fournit, via le lemme 1 et compte tenu du fait que p a une section, une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathrm{Coker} p_A^* \rightarrow \mathrm{Pic} A \rightarrow \mathrm{Coker} p_N^* \rightarrow 0.$$

Par le lemme 2, $\text{Coker } p_A^* \subset \text{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)$. D'après [3, th. 3], $\text{Coker } p_N^*$ est de type fini. Le groupe $\text{Tr}_{K/k} \hat{A}(k) / \text{Coker } p_A^*$, divisible et de type fini, est donc nul. On obtient donc un isomorphisme $\text{Pic}(A) / \text{Tr}_{K/k} \hat{A}(k) \xrightarrow{\sim} \text{Coker } p_N^*$, comme désiré. \square

Le théorème 1 résulte du lemme 3 et de la génération finie de $\text{NS}(\mathcal{A})$, déjà utilisée dans sa démonstration. \square

On obtient aussi :

Corollaire 1. — $\text{rg}(\hat{A}(K) / \text{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)) = \rho(\mathcal{A}) - \rho(X) - \rho(\hat{A})$, où $\rho(Y) := \text{rg NS}(Y)$ pour une variété lisse Y . (Noter que $\rho(\hat{A})$ est calculé “sur K ”.) \square

Remarque 1. — Cette démonstration a une interprétation agréable en termes de 1-motifs, dans le cadre développé dans [1]. Supposons seulement k parfait ; soit \mathcal{M}_1 la catégorie des 1-motifs de Deligne sur k et soit $D^b(\mathcal{M}_1)$ sa catégorie dérivée au sens de [1, déf. 1.5.2]. Soient $\text{LAlb}(X)$ et $\text{LAlb}(\mathcal{A})$ les objets de $D^b(\mathcal{M}_1)$ associés à X et \mathcal{A} par [1, déf. 8.1.1], et soit $\text{LAlb}(\mathcal{A}/X)$ la fibre du morphisme $p_* : \text{LAlb}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{LAlb}(X)$. D'après [1, cor. 10.2.3], on a, pour toute k -variété lisse Y :

$$\text{L}_i \text{Alb}(Y) = \begin{cases} [\mathbf{Z}[\pi_0(Y)] \rightarrow 0] & \text{si } i = 0 \\ [0 \rightarrow \mathcal{A}_{Y/k}^0] & \text{si } i = 1 \\ [0 \rightarrow \text{NS}_{Y/k}^*] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\pi_0(Y)$, $\mathcal{A}_{Y/k}^0$ et $\text{NS}_{Y/k}^*$ désignent respectivement l'ensemble des composantes connexes géométriques, la variété d'Albanese et le dual de Cartier du groupe de Néron-Severi (au sens ci-dessus) de Y ; les $\text{L}_i \text{Alb}(Y)$ sont calculés par rapport à une t -structure convenable sur $D^b(\mathcal{M}_1)$. Les résultats précédents et un calcul facile de suite exacte donnent alors

$$\text{L}_i \text{Alb}(\mathcal{A}/X) = \begin{cases} [0 \rightarrow \text{Im}_{K/k} A] & \text{si } i = 1 \\ [0 \rightarrow M^*] & \text{si } i = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\text{Im}_{K/k} A$ est la K/k -image de A et $M(\bar{k}) := \text{Pic}(A_{\bar{k}}) / \text{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k})$ est une extension

$$0 \rightarrow \hat{A}(\bar{k}K) / \text{Tr}_{K/k} \hat{A}(\bar{k}) \rightarrow M(\bar{k}) \rightarrow \text{NS}(A_{\bar{k}K}) \rightarrow 0$$

\bar{k} étant une clôture algébrique de k .

Remarque 2. — Revenons au cas où k est algébriquement clos, et soit l un nombre premier différent de la caractéristique de k . En jouant avec la suite spectrale de Leray relative à p , on obtient facilement une injection

$$f : (\hat{A}(K)/\mathrm{Tr}_{K/k} \hat{A}(k)) \otimes \mathbf{Z}_l \hookrightarrow H_{\text{ét}}^1(X, j_* T_l(\hat{A})).$$

Si k est la clôture algébrique d'un corps k_0 de type fini sur son sous-corps premier, on a évidemment

$$\mathrm{Im} f \subset \bigcup_L H_{\text{ét}}^1(X, j_* T_l(\hat{A}))^{Gal(k/L)}$$

où L décrit les extensions finies de k_0 .

Références

- [1] L. Barbieri-Viale, B. Kahn *On the derived category of 1-motives*, prépublication, 2006.
- [2] S. Bloch *Lectures on algebraic cycles*, Duke Univ. Math. Series IV, 1980.
- [3] B. Kahn *Sur le groupe des classes d'un schéma arithmétique* (avec un appendice de Marc Hindry), Bull. SMF **134** (2006), 395–415.
- [4] S. Lang, A. Néron. *Rational points of abelian varieties over function fields*, Amer. J. Math. **81** (1959), 95–118.

2 mars 2007

BRUNO KAHN, Institut de Mathématiques de Jussieu, 175–179 rue du Chevaleret, 75013 Paris, France • *E-mail* : kahn@math.jussieu.fr