

Approche algébro-géométrique aux équations
d'Einstein et d'Einstein-Maxwell :
cas stationnaire avec symétrie axiale

Christian Klein

Laboratoire de l'Univers et de ses Théories (LUTh),
Observatoire de Paris, 92195 Meudon Cedex, France

Résumé

Ce travail présente une discussion d'aspects mathématiques et physiques des solutions des équations d'Einstein et d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire avec symétrie axiale, obtenues par des méthodes de la géométrie algébrique. Puisque dans ce cas les équations sont équivalentes aux systèmes d'Ernst complètement intégrables, les méthodes de Riemann-Hilbert peuvent être appliquées pour construire des solutions vérifiant des conditions aux limites données. Nous démontrons ici que des problèmes de Riemann-Hilbert avec des conditions analytiques peuvent être résolus sur des surfaces de Riemann. Sur des surfaces non-compactes, nous prouvons l'existence de solutions en utilisant la théorie des espaces fibrés. Les surfaces de Riemann sont compactes si les conditions aux limites du problème de Riemann-Hilbert sont des fonctions rationnelles ce qui permet de trouver des solutions explicites (dues à Korotkin) sous forme de fonctions thêta hyper-elliptiques. Grâce à l'identité de Fay, toutes les composantes de la métrique correspondant à ces solutions sont données sous forme de fonctions thêta. Nous discutons les singularités de ces solutions et nous identifions une sous-classe qui est régulière à l'extérieur d'un contour pouvant représenter la surface extrême d'une distribution de matière. Comme exemple astrophysique nous considérons le cas des disques de poussière qui peuvent servir de modèles pour certaines galaxies et pour la matière dans des disques d'accrétion autour de trous noirs. Les solutions sous forme de fonctions thêta et leurs dérivées sont reliées par des conditions algébriques qui déterminent les classes de problèmes aux limites pouvant être résolus sur une surface de Riemann donnée. Nous établissons ces relations qui sont utilisées pour résoudre des problèmes aux limites décrivant des disques de poussière. La solution explicite pour un disque de poussière avec deux composantes en contre-rotation est donnée. Cette solution contient un disque statique de Morgan et Morgan et le disque en rotation rigide avec une seule composante comme cas limites. Nous discutons la métrique, les cas limites, les moments multipolaires et le tenseur d'impulsion-énergie. Les fonctions thêta sont évaluées numériquement avec l'utilisation des méthodes spectrales. Le cas des trous noirs avec un disque annulaire statique est aussi discuté. Nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions en appliquant un théorème dû à Poole, et nous donnons des solutions approchées. Des solutions explicites sont présentées pour des disques annulaires infinis. Dans le cas stationnaire, nous montrons que des solutions hyper-elliptiques sur des surfaces dégénérées ont le même horizon que la solution de Kerr avec un disque infini autour. Nous discutons le cas d'une surface de genre deux quand les solutions peuvent être données sous forme de fonctions élémentaires en détail. Pour les équations d'Einstein-Maxwell, nous construisons des solutions hyper-elliptiques avec charges. Nous exploitons la symétrie des équations pour construire ces solutions à partir des solutions sans champs électromagnétiques en utilisant une transformation de Harrison. Les disques de poussière avec charge en contre-rotation sont également discutés.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Solutions hyper-elliptiques de l'équation d'Ernst	8
2.1	Métrique, équation d'Ernst et système linéaire	9
2.2	Problème de Riemann-Hilbert	11
2.3	Singularités, moments multipolaires et symétries	16
2.4	Identités de Fay, formules de Rauch et fonctions métriques	18
3	Problèmes aux limites et disques de poussière	21
3.1	Disques de poussière Newtoniens	21
3.2	Disques relativiste de poussière en contre-rotation	23
3.3	Relations algébriques pour les potentiels hyper-elliptiques	24
4	Méthodes numériques et discussion physique	28
4.1	Méthodes numériques	28
4.2	Ergo-régions et cas limites	33
4.3	Le disque	37
5	Trous noirs et disques de poussière	40
5.1	Trous noirs avec disques de poussière statiques	41
5.2	Équations intégrales	43
5.3	Cas stationnaire et surfaces de Riemann dégénérées	46
6	Disques de poussière chargée	53
6.1	Les équations d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire avec symétrie axiale	53
6.2	Transformation de Harrison	55
6.3	Disques de poussière chargée en contre-rotation	57
6.4	Disque transformé	59
7	Conclusions et Perspectives	64

8	Curriculum Vitae	72
8.1	Thèmes de Recherches Développés	73
8.2	Activités d'Enseignement :	73
8.3	Encadrement d'étudiants	73
8.4	Participation à des Congrès	74
9	Liste de Publications	75

Chapitre 1

Introduction

La relativité générale, ou la théorie d'Einstein de 1915, est considérée jusqu'à présent comme la théorie fondamentale de la gravitation. Elle a passé sans problèmes tous les tests expérimentaux dans notre système planétaire [1] ou dans des systèmes avec champs gravitationnels forts comme dans le cas du pulsar binaire de Hulse et Taylor [2]. Avec l'arrivée des premiers détecteurs d'ondes gravitationnelles (GEO600, LIGO, TAMA300, VIRGO) [3] à [7], une des plus importantes prédictions de la théorie sera finalement accessible aux expérimentateurs. Mais l'observation d'ondes gravitationnelles ne sera pas seulement un test pour la relativité générale mais également un nouvel outil d'observation pour l'astrophysique et la cosmologie.

La condition préliminaire pour la détection des ondes gravitationnelles et ainsi pour l'observation des sources de cette radiation est une compréhension mathématique et physique profonde de la théorie relativiste. Puisque les équations d'Einstein sont équivalentes à un système compliqué d'équations aux dérivées partielles non-linéaires, une description théorique des situations d'intérêt astrophysique est un but majeur. En principe, trois approches peuvent être pratiquées dans ce contexte, et seule la combinaison de ces trois méthodes finira par être efficace :

- Des méthodes perturbatives sont utilisées afin de construire des solutions pour des situations proches d'une solution exacte. Les plus importantes sont les solutions post-newtoniennes [8], des perturbations de l'espace-temps plat, puisque la plupart des systèmes astrophysiques sont presque newtoniens, des perturbations des trous noirs [9], et des perturbations cosmologiques d'un Univers de Friedmann-Lemaître [10].
- Des méthodes numériques sont probablement les seules capables de décrire des champs forts dans des situations sans symétrie particulière. On peut espérer que le progrès du développement des ordinateurs et des méthodes numériques résultera, par exemple, en une description relativiste des trous noirs binaires, probablement la source la plus prometteuse d'ondes gravitationnelles (voir [11, 12]).
- Des méthodes analytiques peuvent être appliquées dans des situations avec symétries particulières afin d'engendrer des solutions explicites [13].

Avec les techniques actuelles il ne semble pas probable de trouver une solution générale du système d'équations d'Einstein sous forme de quadratures comme c'est le cas de l'équation de Poisson dans la théorie Newtonienne. Toutefois il est possible de trouver de larges classes de solutions intéressantes pour l'astrophysique, comme par exemple les trous noirs de Schwarzschild et de Kerr. Les méthodes exactes étant limitées aux situations particulières avec symétrie, elles sont néanmoins d'une grande importance. Premièrement, les solutions exactes servent pour la visualisation des effets relativistes et pour le développement de nouveaux concepts scientifiques comme l'effondrement gravitationnel d'une étoile afin de former un trou noir, ou le concept d'un horizon des événements. En outre, elles peuvent être utiles pour tester les méthodes perturbatives et numériques dans des situations bien contrôlées.

Les méthodes les plus efficaces pour engendrer des solutions explicites des équations aux dérivées partielles sont dues à la théorie des systèmes intégrables y compris la théorie des solitons. Les techniques les plus puissantes dans ce contexte ont pour origine la géométrie algébrique et fournissent des solutions explicites sous forme des fonctions définies sur des surfaces de Riemann. La théorie des solutions des équations intégrables sous forme de fonctions thêta prend son origine dans les travaux de Novikov, Dubrovin, Matveev, Its et Krichever [15, 16, 17] pour des conditions périodiques ou quasi-périodiques.

En Relativité Générale, le cas important des espace-temps vides, stationnaires et avec symétrie axiale est décrit par des équations intégrables. La plupart des étoiles et des galaxies dans notre Univers sont proches d'un équilibre thermodynamique. Alors la matière dont ils sont formés est dans une bonne approximation un fluide parfait. On peut prouver [18, 21] que les configurations d'un fluide parfait isolé mènent dans le cadre de la Relativité Générale aux espaces-temps stationnaires avec symétrie axiale. Les équations d'Einstein dans le vide forment dans ce cas un système intégrable [22, 23, 24, 25], mais ceci ne semble pas être le cas pour les équations à l'intérieur d'une étoile dans une région remplie par un fluide parfait.

Par conséquent, seules quelques solutions explicites sont connues pour des fluides parfaits qui sont probablement toutes physiquement inacceptables pour décrire l'intérieur d'une étoile, comme la solution de Wahlquist [30, 31] et [32, 33]. La recherche de solutions globales, valables dans le vide et à l'intérieur de la matière, est donc plus ou moins limitée aux distributions de matière à deux dimensions comme des coquilles ou des disques. Les disques sont importants en astrophysique puisque l'on modélise ainsi certaines galaxies ou la matière dans des disques d'accrétion autour d'un trou noir. La théorie Newtonienne étant suffisante pour la description des galaxies sans trou noir central, le système relativiste le plus intéressant dans ce contexte est un trou noir avec un disque de matière, un trou noir étant un objet relativiste sans analogue dans la théorie Newtonienne. Puisqu'on s'intéresse à des situations stationnaires ceci correspondrait à une galaxie non-active. La recherche d'une solution relativiste pour des disques se concentrera ici sur la poussière, de la matière sans pression. Ce cas est d'intérêt pour l'astrophysique puisqu'il y a si peu de collisions dans les galaxies décrites de manière approchée par des disques, que la pression peut être négligée. Du point de vue de la théorie, la poussière est intéressante parce que c'est en l'absence de pression que l'influence de la gravitation est la plus visible. Des solu-

tions exactes ont été construites pour des disques statiques [35, 36] et des disques infinis stationnaires [38]. Les méthodes développées dans ce travail peuvent être aussi appliquées aux équations d'Einstein-Maxwell [42, 43]. Ainsi il est possible de construire des solutions exactes pour des disques auto-gravitants avec champs magnétiques, solutions qui sont importantes dans le contexte de la magnéto-hydrodynamique.

Les solutions exactes construites avec ces techniques peuvent servir pour tester des solutions post-newtoniennes et des codes numériques pour des étoiles à neutrons (voir [44]). Puisque la matière considérée n'a pas de pression, les solutions Newtoniennes sont instables, et il y a des analyses numériques [45] qui indiquent des instabilités comparables pour des disques de poussière relativistes. Par conséquent ces solutions pourraient servir comme conditions initiales exactes pour des calculs numériques d'effondrement relativistes : l'implémentation sur une grille numérique résultera dans l'effondrement de la solution due à l'inévitable erreur numérique.

Mathématiquement l'exercice consiste à trouver une solution pour des conditions aux limites résultantes de la matière. Pour des démonstrations d'existence des solutions voir [46, 47]. Les équations d'Einstein dans le vide stationnaire avec symétrie axiale sont complètement intégrables, ce qui veut dire qu'elles peuvent être traitées comme la condition d'intégrabilité pour un système différentiel linéaire surdéterminé [24, 25]. Ce système contient une variable supplémentaire, le paramètre spectral, qui est relié au groupe de symétrie de dimension infinie de l'équation d'Ernst, le groupe de Geroch [23, 48]. L'existence de ce paramètre spectral est la base des méthodes pour engendrer des solutions de l'équation d'Ernst. Contrairement au cas des équations hyperboliques intégrables connues comme l'équation de Korteweg-de Vries et de Sine-Gordon (voir [20]), pour les équations discutées ici le paramètre spectral est défini sur une surface de Riemann où les points de branchement sont paramétrisés par les coordonnées physiques. Ainsi les solutions algébro-géométriques correspondantes de l'équation d'Ernst ne sont ni périodiques ni quasi-périodiques. Puisque le module et non l'argument des solutions données sous forme de fonctions θ est important dans le cas d'Ernst, des techniques mathématiques différentes doivent être appliquées ici [49].

Dans le chapitre 2 nous présentons la métrique et les équations d'Einstein pour les espace-temps vides, stationnaires et avec symétrie axiale. Ces équations sont équivalentes à une équation aux dérivées partielles intégrable pour un potentiel d'Ernst complexe [22]. Pour résoudre des problèmes aux limites, les techniques les plus efficaces sont des problèmes de Riemann-Hilbert, problèmes aux limites sur la surface de Riemann du paramètre spectral. Nous démontrons que les problèmes de Riemann-Hilbert équivalents à la solution d'une équation intégrale peuvent être résolus explicitement pour l'équation d'Ernst pour une large classe de problèmes [52, 53]. Ces solutions de Korotkin [54] à [57] sont construites sous forme de fonctions θ sur des surfaces de Riemann hyper-elliptiques. Le cas des surfaces non-compactes est traité avec des espaces fibrés. La discussion des singularités possibles dans cette classe de solutions permet d'identifier une sous-classe [58, 59] où les seules singularités possibles sont reliées à la matière, dans notre cas les disques. Les solutions sont asymptotiquement plates, et peuvent par conséquent décrire des systèmes isolés. Les membres de cette sous-classe ont une symétrie équatoriale,

ce qui implique la structure désirée des moments multipolaires [89, 90, 91]. On discutera également le cas de l'axe de symétrie régulier et du plan équatorial, pour lesquelles les expressions se simplifient grâce à la symétrie équatoriale. Si le genre de la surface de Riemann est égal à zéro, le potentiel d'Ernst, étant réel, présente une solution de l'équation de Laplace. Les solutions sont donc statiques et font partie de la classe de Weyl.

Dans le chapitre 3 nous considérons les disques de poussière et les conditions aux limites qui résultent de ce modèle de matière. Nous commençons par le cas Newtonien où la force centrifuge est seule pour compenser l'attraction gravitationnelle. La gravitation Newtonienne étant décrite par un potentiel qui est une solution de l'équation de Laplace, un problème aux limites pour cette équation doit être résolu. La classe de solutions discutées dans le chapitre précédent peut être utilisée dans ce contexte dans le cas d'une surface de Riemann de genre zéro. Le problème aux limites se réduit à la résolution d'une équation intégrale Abélienne linéaire qui peut être résolue sous forme de quadratures. La même méthode peut être appliquée dans le cas statique pour les disques de deux composantes de poussière en contre-rotation. Pour traiter les disques non-statiques généraux on aurait besoin d'une classe de solutions où deux fonctions pourraient être spécifiées qui vérifieraient les conditions aux limites. Puisque les solutions hyper-elliptiques contiennent une fonction et des paramètres complexes libres, représentant les points de branchement de la surface de Riemann, on ne peut résoudre que certaines classes de problèmes aux limites sur une surface donnée. Nous développons une approche algébrique pour les solutions hyper-elliptiques [60] et nous trouvons un système d'équations différentielles qui détermine ces classes de conditions aux limites. Une version intégrée de ce système de Picard-Fuchs [61] à [64] est obtenue en considérant le système linéaire de l'équation d'Ernst en [65]. Le cas de genre 2 où on trouve les solutions les plus simples non-statiques est discuté en détail. Nous présentons une solution pour un disque avec deux composantes en contre-rotation [66, 60] qui admet le disque en rotation rigide avec une seule composante ([45] et [67] à [69]) et un disque statique [35] comme cas limites. Les limites des paramètres physiques sont déterminées pour lesquelles la solution est globalement régulière à l'extérieur du disque.

Les interprétations physiques des solutions hyper-elliptiques sont discutées de manière générale dans le chapitre 4, le disque en contre-rotation étant présenté comme exemple. Nous dérivons des formules pour les moments multipolaires comme la masse et le moment angulaire, pour les vitesses angulaires et pour la densité de la matière dans le disque. Nous discutons les ergo-régions et les cas limites comme la limite ultra-relativiste où le redshift central diverge, voir [70, 71]. Pour évaluer les intégrales hyper-elliptiques nous utilisons un code numérique construit à l'aide des méthodes pseudo-spectrales dont les résultats peuvent être comparés à ceux obtenus par d'autres codes ayant simulé des étoiles à neutrons.

Le cas des trous noirs avec disques est discuté dans le chapitre 5. Puisque toute matière à l'intérieur de l'anneau de lumière doit atteindre des vitesses supraluminiques, il ne peut pas y avoir de matière non-exotique près de l'horizon. Ainsi les disques de matière conventionnelle doivent présenter une région sans matière près de l'horizon. La situation statique est équivalente à un problème aux limites pour l'équation de Laplace avec un disque an-

nulaire. L'existence d'une solution unique pour ce problème est prouvée en appliquant un théorème dû à Poole [72, 73]. Pour des disques avec rayon infini nous donnons une solution explicite. Le cas stationnaire peut être traité avec des solutions hyper-elliptiques sur des surfaces partiellement dégénérées [74]. Nous discutons en détails le cas d'une "superposition" d'un trou noir de Kerr avec un disque statique.

Puisque les équations d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire avec symétrie axiale sont intégrables, les mêmes méthodes algébriques peuvent être utilisées pour décrire des disques de poussière avec des champs électromagnétiques. Des solutions hyper-elliptiques sont obtenues par la symétrie $SU(2,1)$ ("transformation de Harrison") [75, 76] des équations Einstein-Maxwell stationnaires dans le chapitre 6. Comme illustration nous considérons le cas d'une transformation de Harrison [75] du disque présenté dans le chapitre 4. Le cas général pour les équations Einstein-Maxwell nécessite des surfaces de Riemann à trois couches [54].

Dans le chapitre 7, nous résumons les travaux présentés ici et discutons les nouvelles perspectives de recherche consécutives des résultats obtenus : afin d'obtenir une compréhension profonde des solutions algébro-géométriques de l'équation d'Ernst et des disques relativistes, le cas général de genre 2 et le cas de genre supérieur à 2 doivent être étudiés. La description explicite de disques avec ou sans trou noir central et avec ou sans champs électromagnétiques semble possibles pour une large classe de vitesses angulaires dans un avenir très proche. Par ailleurs les méthodes développées dans ce travail peuvent être appliquées aux cas intégrables des équations des contraintes qui définissent les conditions initiales pour les équations d'Einstein. Ceci est un point important car les solutions numériques seront indispensables pour l'identification des ondes gravitationnelles, mais ces solutions ne pourront être considérées comme satisfaisantes que si la physique qu'elles décrivent (contenue dans les conditions initiales) est bien comprise. En outre, les méthodes développées dans ce travail peuvent être directement appliquées aux équations auto-duales de Yang-Mills [77].

Chapitre 2

Solutions hyper-elliptiques de l'équation d'Ernst

Dans ce chapitre nous discutons la classe des solutions des équations d'Einstein due à Korotkin [54] sous forme de fonctions thêta hyper-elliptiques. Nous introduisons dans la section 1 les coordonnées et la métrique canoniques de Weyl et le potentiel complexe d'Ernst. Dans ce formalisme les équations d'Einstein sont équivalentes à l'équation d'Ernst, et la métrique peut être obtenue par des quadratures si le potentiel d'Ernst est donné. Puisque l'équation d'Ernst est complètement intégrable, elle peut être traitée comme la condition d'intégrabilité d'un système différentiel linéaire contenant un paramètre supplémentaire, le paramètre spectral. L'application d'un théorème standard à la matrice du système linéaire permet de construire des solutions de l'équation d'Ernst grâce à la théorie des fonctions sur la surface de Riemann du paramètre spectral. Dans la section 2 nous discutons le problème de Riemann-Hilbert, l'outil standard pour résoudre des problèmes aux limites ou de Cauchy pour des équations intégrables. Nous discutons le cas scalaire impliquant des solutions de l'équation de Laplace, solutions statiques de la classe de Weyl. Dans le cas général, le problème avec des conditions analytiques peut être relié par une transformation de jauge à un problème scalaire sur une surface de Riemann. Dans le cas des surfaces non-compactes on démontre que le problème peut être résolu à l'aide des espaces fibrés. Sur des surfaces compactes, des solutions explicites sont données sous forme de fonctions thêta hyper-elliptiques.

Les propriétés analytiques des solutions hyper-elliptiques sont discutées dans la section 3. Nous identifions une sous-classe de solutions ne comportant de singularités que sur une surface à deux dimensions spatiales sur laquelle les conditions aux limites sont imposées. Cette sous-classe est asymptotiquement plate et présente une symétrie équatoriale, ce qui garantit la structure désirée des moments multipolaires. Des formules simplifiées peuvent être présentées sur l'axe de symétrie et dans le plan équatorial. Dans la section 4 nous obtenons des expressions explicites pour la métrique sous forme de fonctions thêta par l'identité de Fay. Ainsi nous identifions une classe de solutions explicites en termes de fonctions connues satisfaisant toutes les conditions de régularité nécessaires pour résoudre un problème aux limites.

2.1 Métrique, équation d'Ernst et système linéaire

Afin d'étudier les équations d'Einstein pour le vide stationnaire avec symétrie axiale nous utilisons les coordonnées ρ, ζ, ϕ cylindriques canoniques de Weyl. L'axe de symétrie est donné par $\rho = 0$ et paramétrisé par ζ . La métrique peut être écrite dans ce cas sous la forme de Weyl-Lewis-Papapetrou (voir [13])

$$ds^2 = -e^{2U}(dt + a d\phi)^2 + e^{-2U}(e^{2k}(d\rho^2 + d\zeta^2) + \rho^2 d\phi^2), \quad (2.1)$$

où ∂_t et ∂_ϕ sont les vecteurs de Killing qui commutent et qui sont respectivement asymptotiquement temporel et spatial. Avec $\xi = \zeta - i\rho$, nous définissons le potentiel d'Ernst $\mathcal{E} = f + ib$ satisfaisant l'équation d'Ernst [22]

$$\mathcal{E}_{\xi\bar{\xi}} - \frac{1}{2(\bar{\xi} - \xi)}(\mathcal{E}_{\bar{\xi}} - \mathcal{E}_\xi) = \frac{2}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}}\mathcal{E}_\xi\bar{\mathcal{E}}_{\bar{\xi}}. \quad (2.2)$$

En notation standard, cette équation peut être écrite sous la forme de

$$f\Delta\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E})^2, \quad (2.3)$$

car le potentiel d'Ernst ne dépend pas de ϕ . Si le potentiel d'Ernst est réel, l'espace-temps est statique et fait partie de la classe de Weyl. Le potentiel d'Ernst étant donné, la métrique (2.1) est déterminée par les relations suivantes :

$$e^{2U} = f, \quad (2.4)$$

$$a_\xi = 2\rho \frac{(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}})_\xi}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2}, \quad (2.5)$$

$$k_\xi = (\xi - \bar{\xi}) \frac{\mathcal{E}_\xi \bar{\mathcal{E}}_{\bar{\xi}}}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2}. \quad (2.6)$$

Ainsi toutes les composantes de la métrique peuvent être obtenues par des quadratures.

L'intégrabilité de l'équation d'Ernst a été montrée par Maison [24] et Belinski-Zakharov [25]. Ceci implique l'existence d'un groupe de symétrie de dimension infinie, le groupe de Geroch (voir [23, 48]). L'équation d'Ernst peut être considérée comme la condition d'intégrabilité d'un système différentiel surdéterminé pour une matrice Ψ de la forme 2×2 (voir [54, 26]) vérifiant

$$\begin{aligned} \Psi_\xi \Psi^{-1} &= \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{N} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{K - \xi}{K - \bar{\xi}}} \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{M} \\ \mathcal{N} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_{\bar{\xi}} \Psi^{-1} &= \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{N}} & 0 \\ 0 & \bar{\mathcal{M}} \end{pmatrix} + \sqrt{\frac{K - \xi}{K - \bar{\xi}}} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mathcal{N}} \\ \bar{\mathcal{M}} & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (2.7)$$

ici K est le paramètre spectral, et

$$\mathcal{M} = \frac{\bar{\mathcal{E}}_\xi}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}}, \quad \mathcal{N} = \frac{\mathcal{E}_\xi}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}}. \quad (2.8)$$

Le paramètre spectral est défini sur une famille de surfaces de Riemann $\Sigma_0(\xi, \bar{\xi})$ de genre zéro données par la relation algébrique entre μ_0 et K ,

$$\mu_0^2 = (K - \xi)(K - \bar{\xi}). \quad (2.9)$$

Notons que les points de branchement $\xi, \bar{\xi}$ dépendent des coordonnées de l'espace-temps. Un point P sur Σ_0 est dénoté par $(K, \pm\mu_0(K))$ ou par K^\pm où K dénote sa projection dans le plan complexe et où les couches sont définies pour $K \rightarrow \infty, \mu/K \rightarrow \pm 1$ si $P \rightarrow \infty^\pm$.

L'existence du système linéaire (2.7) peut servir à engendrer des solutions de l'équation d'Ernst. L'idée est de construire des matrices Ψ qui sont une solution de ce système afin d'obtenir par (2.8) des potentiels d'Ernst. Le fondement de cette approche est le théorème suivant (voir [54]) où Ψ est considéré comme une fonction sur Σ_0 ,

Théorème 2.1 :

Soit la matrice Ψ soumise aux conditions suivantes :

I. La matrice Ψ est au moins deux fois différentiable par rapport à ξ et $\bar{\xi}$. $\Psi(P)$ est holomorphe et inversible aux points de branchement ξ et $\bar{\xi}$ de façon que la dérivée logarithmique $\Psi_\xi \Psi^{-1}$ a un pôle simple en ξ et $\Psi_{\bar{\xi}} \Psi^{-1}$ a un pôle simple en $\bar{\xi}$.

II. Toutes les singularités de Ψ sur Σ_0 sont telles que les dérivées logarithmiques $\Psi_\xi \Psi^{-1}$ et $\Psi_{\bar{\xi}} \Psi^{-1}$ y sont holomorphes.

III. Ψ satisfait la condition de réductibilité

$$\Psi(P^{\sigma_0}) = \sigma_3 \Psi(P) \sigma_1, \quad (2.10)$$

où σ_1, σ_3 sont les matrices de Pauli et où σ_0 dénote l'involution sur Σ_0 qui interchange les couches.

IV. La condition de normalisation et de réalité

$$\Psi(P = \infty^+) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{E}} & 1 \\ \mathcal{E} & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Alors la fonction \mathcal{E} définie par l'équation (2.11) est une solution de l'équation d'Ernst.

Pour une démonstration voir [54, 59].

Remarques :

1. Le choix de la matrice σ_1 en condition III est un choix de jauge qui néanmoins ne la fixe pas complètement. Si $C(K)$ est une matrice de la forme

$$C(K) = \kappa_1(K) \hat{1} + \kappa_2(K) \sigma_1, \quad (2.12)$$

où les κ_i sont indépendants de $\xi, \bar{\xi}$ et vérifient les conditions asymptotiques $\kappa_1(\infty) = 1$ et $\kappa_2(\infty) = 0$. La matrice $\Psi' = \Psi C(K)$ et Ψ sont alors des solutions du système (2.7) avec le même potentiel d'Ernst.

2. Si dans la condition III on choisit la matrice $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ au lieu de σ_1 et si on remplace (2.11) par

$$\Psi(P = \infty^+) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{E}} & -i \\ \mathcal{E} & i \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

la relation

$$\Psi^{-1}(\infty^-)\Psi(\infty^+) = \frac{1}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} 2\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} & i(\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}) \\ i(\bar{\mathcal{E}} - \mathcal{E}) & 2 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

révèle alors l'invariance de l'équation d'Ernst sous l'action du groupe $SU(1,1)/SO(1,1)$ (voir [48]).

Dans la construction des solutions des équations intégrables, la matrice L de monodromie [78, 20, 59] joue un rôle important. Pour un système linéaire comme (2.7) de la forme $\Psi_\xi = W\Psi$ et $\Psi_{\bar{\xi}} = V\Psi$, la matrice de monodromie est définie par le système différentiel

$$L_\xi = [W, L], \quad L_{\bar{\xi}} = [V, L]. \quad (2.15)$$

Si une solution Ψ du système (2.7) est connue, L peut être directement construite par,

$$L(K) = -\hat{\mu}(K)\Psi\mathcal{C}\Psi^{-1}, \quad (2.16)$$

où \mathcal{C} est une matrice arbitraire avec $\det\mathcal{C} = -1$ et où $\hat{\mu}$ est indépendant des coordonnées physiques. Puisque Ψ est analytique en K , une solution analytique de (2.15) existe. Pour une définition alternative de la matrice de monodromie voir [48].

Une des conséquences de (2.15) est le fait que les coefficients du polynôme caractéristique $Q(\mu, K) = \det(L(K) - \hat{\mu}\hat{1})$ sont indépendants des coordonnées physiques. Sans perte de généralité nous choisissons $\text{Tr}L(K) = 0$ ce qui implique

$$L = \begin{pmatrix} A(K) & B(K) \\ C(K) & -A(K) \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

L'équation $Q(\hat{\mu}, K) = 0$, soit

$$\hat{\mu}^2 = A^2 + BC, \quad (2.18)$$

définit une courbe algébrique qui est en général de genre infini. Dans le cas d'un genre g fini, la surface de Riemann $\hat{\mathcal{L}}$ est donnée par une équation de la forme

$$\hat{\mu}^2 = \prod_{i=1}^g (K - E_i)(K - F_i), \quad g \in \mathbb{R}^+ \quad (2.19)$$

où E_i et F_i sont indépendants des coordonnées physiques. Cette équation représente un recouvrement à deux couches de la sphère de Riemann, par conséquent un recouvrement à quatre couches du plan complexe, voir la figure 2.1. Dans la section suivante nous construirons les solutions explicites de Korotkin [54] sur cette surface de Riemann par un problème de Riemann-Hilbert.

2.2 Problème de Riemann-Hilbert

Le théorème 2.1 garantit que la fonction $\mathcal{E} = \Psi_{21}(\infty^+)$ est une solution de l'équation d'Ernst si la matrice Ψ satisfait les conditions I-IV. Le théorème de Lichnerowicz [79]

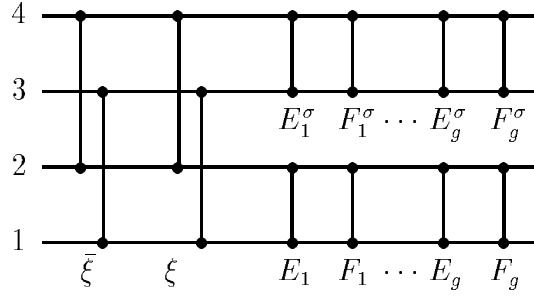


FIG. 2.1: Le diagramme de Hurwitz qui montre la surface de Riemann $\hat{\mathcal{L}}$ vue de côté.

implique néanmoins que la seule solution globalement régulière des équations dans le vide stationnaire est l'espace-temps de Minkowski. En effet, le théorème 2.1 indique les points où le potentiel d'Ernst peut être singulier : ceux où $\xi, \bar{\xi}$ coïncident avec les singularités de Ψ , et où la condition I n'est donc plus satisfaite. Ceci peut servir pour engendrer des solutions de l'équation d'Ernst avec des singularités prescrites : le potentiel doit être donné à la surface extrême d'une distribution de matière avec une valeur finie sur cette surface. Une surface de topologie sphérique correspond à un contour Γ_ξ dans le plan $(\xi, \bar{\xi})$ où le potentiel est fini, mais discontinu. Un contour Γ dans le plan du paramètre spectral donné par $K, \bar{K} \in \Gamma_\xi$ correspond à ce contour Γ_ξ . Par conséquent, nous nous sommes intéressés à des matrices Ψ qui admettent des discontinuités sur un contour Γ , ce qui est équivalent à un problème de Riemann-Hilbert. Pour l'équation d'Ernst ceci peut être formulé de la façon suivante :

Problème de Riemann-Hilbert :

Soit Γ des contours C^∞ dont la projection dans le plan complexe est une courbe de topologie sphérique¹. Soit $\mathcal{G}_\pm(P)$ des matrices sur Γ_\pm dont les composantes sont continues dans le sens de Hölder et dont les déterminants tous non-nuls satisfont la condition de réalité $\mathcal{G}_{ij}(\bar{P}) = \bar{\mathcal{G}}_{ij}(P)$ pour $i = j$, et $\mathcal{G}_{ij}(\bar{P}) = -\bar{\mathcal{G}}_{ij}(P)$ pour $i \neq j$. Soit $\mathcal{G}(P^\sigma) = \sigma_1 \mathcal{G}(P) \sigma_1$. Γ et \mathcal{G} doivent être indépendants de $\xi, \bar{\xi}$. La matrice Ψ doit être partout régulière sauf sur le contour Γ où les valeurs limites des deux cotés des contours (désignés par Ψ_\pm) sont reliées par

$$\Psi_-(P) = \Psi_+(P)\mathcal{G}(P)|_{P \in \Gamma}. \quad (2.20)$$

On peut vérifier directement qu'une matrice Ψ construite comme solution de ce problème de Riemann-Hilbert satisfait les conditions du théorème 2.1. En outre, le théorème implique que le potentiel d'Ernst ne peut être singulier que sur le contour Γ_ξ et en des points où Ψ ne peut pas être normalisé à l'infini. Sur le contour, le potentiel \mathcal{E} peut être discontinu, mais il reste fini. Il est à retenir que le potentiel d'Ernst n'est pas forcément singulier si $\xi, \bar{\xi}$ coïncident avec des singularités de la matrice Ψ car ces singularités peuvent être reliées à un choix de jauge. Le Théorème 2.1 garantit seulement

¹Pour des raisons de simplicité nous considérons ici seulement le cas où la projection de Γ dans le plan complexe est simplement connectée. Les contours sur les couches \pm sont dénotées par Γ_\pm . Pour le cas général voir [52, 59, 53].

que le potentiel est analytique aux points où les conditions I-IV sont satisfaites.

Pour la solution des problèmes de Riemann–Hilbert sur des surfaces de Riemann (voir [80, 81]), en principe les mêmes techniques ne s’appliquent que pour le cas le plus simple, le problème pour une fonction scalaire dans le plan complexe. Si Γ_K est un contour C^∞ simplement connexe et si G est une fonction non-nul et continue dans le sens de Hölder sur $\Gamma_K \in \mathbb{C}$, la fonction ψ qui est holomorphe sauf sur Γ_K où

$$\psi_- = \psi_+ G \quad (2.21)$$

est donnée par l’intégrale de Cauchy,

$$\psi(K) = F(K) \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_K} \frac{\ln G dX}{X - K} \right), \quad (2.22)$$

où $F(K)$ est une fonction holomorphe arbitraire, et où la valeur principale du logarithme doit être prise. Les propriétés analytiques de l’intégrale de Cauchy assurent que la condition (2.21) est satisfaite. Formule (2.22) démontre que la solution d’un problème de Riemann–Hilbert (2.21) ne fixe pas la fonction holomorphe F . Puisque cette fonction est holomorphe, la solution sera définie uniquement (à cause du théorème de Liouville) par une condition de normalisation $\psi(\infty) = \psi_0$ si $\infty \notin \Gamma_K$. Notons que le contour ne peut consister que d’un arc si cet arc fait partie d’un contour C^∞ avec topologie sphérique. La fonction G doit être égale à 1 sur le reste du contour et aux points extrêmes de l’arc (voir [59, 53] pour les détails).

Les problèmes de Riemann–Hilbert sur la sphère Σ_0 dans le cas de l’équation d’Ernst peuvent être traités de la même façon que les problèmes dans le plan complexe. L’ingrédient fondamental est le différentiel de troisième espèce

$$d\omega_{K+K^-}(X) = \frac{\mu_0(K) + \mu_0(X)}{2\mu_0(X)(X - K)} dX \quad (2.23)$$

correspondant au différentiel $dX/(X - K)$ dans le plan complexe, cela veut dire un différentiel qui est holomorphe sauf si $X = K^\pm$ où les résidus sont ± 1 . Nous cherchons des solutions sous la forme de

$$\Psi - \Psi_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \chi(X) d\omega_{K+K^-}(X), \quad (2.24)$$

où χ représente les matrices χ_\pm de la forme 2×2 et où Ψ_0 est une fonction holomorphe. Ceci implique pour (2.20) sur le contour Γ avec la formule de Plemelj (voir [83])

$$\Psi^\pm = \pm \frac{1}{2} \chi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \chi(X) d\omega_{K+K^-}(X). \quad (2.25)$$

Par conséquent, le problème de Riemann–Hilbert (2.20) est équivalent à une équation intégrale linéaire (sur Γ)

$$\frac{1}{2} \chi(\mathcal{G} + 1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \chi(X) d\omega_{K+K^-}(X) (\mathcal{G} - 1) = 0. \quad (2.26)$$

En général il est difficile de trouver des solutions explicites de cette équation si \mathcal{G} n'est pas diagonal. Pour $\mathcal{G} = \text{diag}(\alpha(K), 1)$ le problème est scalaire et la solution est donnée par l'intégrale correspondant à l'intégrale de Cauchy sur la surface Σ_0 . Dans ce cas le potentiel d'Ernst est réel et fait partie de la classe statique de Weyl,

$$U = -\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{\ln \alpha(K) dK}{\sqrt{(K - \zeta)^2 + \rho^2}}. \quad (2.27)$$

Dans le cas général pour l'équation d'Ernst on peut exploiter les jauges (2.12) pour simplifier le problème. Soit C une matrice de la forme (2.12) la solution du problème de Riemann-Hilbert

$$\mathcal{G}C_- = C_+\mathcal{G}', \quad (2.28)$$

alors la matrice $\Psi' = \Psi C$ satisfait $\Psi'_- = \Psi'_+\mathcal{G}'$ si $\Psi_- = \Psi_+\mathcal{G}$ sur Γ . On peut démontrer que la matrice \mathcal{G}_+ peut être choisie sur le contour Γ_+ de façon que

$$\mathcal{G}_+ = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Le potentiel d'Ernst correspondant à la solution du problème de Riemann-Hilbert (2.20) contient donc deux fonctions réelles α et β qui peuvent être librement choisies pour résoudre des problèmes aux limites. Ceci est le nombre de fonctions nécessaire puisque le potentiel d'Ernst est complexe.

Si les composantes de la matrice \mathcal{G} sont analytiques, le problème (2.20) peut être simplifié avec des transformations de jauge où les κ_i en (2.12) ne sont pas analytiques à l'extérieur du contour Γ . Avec (voir [59] pour les détails)

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} = \lambda \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dX}{K - X} \ln \frac{\mathcal{G}_{11} + \mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{21} + \mathcal{G}_{22}}{\mathcal{G}_{11} - \mathcal{G}_{12} - \mathcal{G}_{21} + \mathcal{G}_{22}} \right), \quad (2.30)$$

où

$$\lambda^2 = \frac{\mathcal{G}_{11} - \mathcal{G}_{12} + \mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{22}}{\mathcal{G}_{11} + \mathcal{G}_{12} - \mathcal{G}_{21} - \mathcal{G}_{22}}, \quad (2.31)$$

le problème (2.20) peut être transformé dans un problème avec une matrice $\mathcal{G}' = \text{diag}(G, 1)$ diagonale. Puisque λ est une fonction méromorphe sur une surface de Riemann avec deux couches et puisque le problème (2.20) était défini sur la surface Σ_0 avec deux couches, le problème transformé est un problème scalaire sur une surface avec quatre couches. Ceci est la surface de Riemann définie par la matrice de monodromie (2.19).

En général le genre de cette surface sera infini. Utilisant des résultats de Röhrl [82], on peut relier le problème de Riemann-Hilbert sur une surface de Riemann à des espaces fibrés linéaires [85, 86, 53]. Sur des surfaces non-compactes ces espaces fibrés sont triviaux d'après le théorème de Grauert [84]. Les espaces fibrés relient le problème de Riemann-Hilbert sur une surface de Riemann à un problème de Riemann-Hilbert dans le plan complexe ce qui garantit que le problème est soluble (voir [53] pour les détails). Ici nous nous intéressons à des surfaces compactes où les solutions peuvent être données sous forme

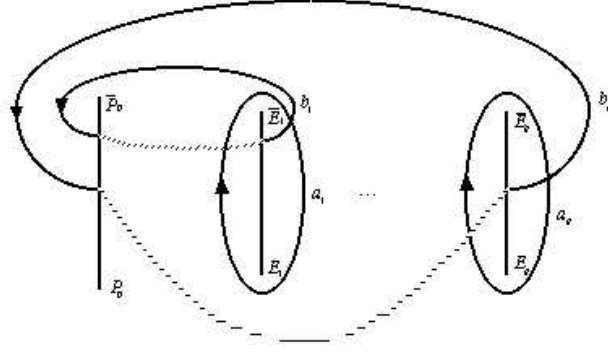


FIG. 2.2: Base canonique des cycles sur \mathcal{L} (ici $P_0 = \xi$).

de fonctions explicites, des fonctions thêta. Les solutions de l'équation d'Ernst sur une surface compacte peuvent être construites sur la surface hyper-elliptique \mathcal{L} de genre g obtenue en factorisant $\hat{\mathcal{L}}$ (2.19) par l'involution σ_0 sur Σ_0 ,

$$\mu^2 = (K - \xi)(K - \bar{\xi}) \prod_{i=1}^g (K - E_i)(K - \bar{E}_i). \quad (2.32)$$

Les points fixes de σ_0 deviennent des points de branchement de \mathcal{L} . Sur cette surface nous introduisons une base canonique de cycles (a_i, b_i) (voir figure 2.2), $i = 1, \dots, g$, la base des différentiels de premier espèce normalisés par la condition $\int_{a_i} d\omega_j = 2\pi i \delta_{ij}$, et la matrice $\pi_{ij} = \int_{b_i} d\omega_j$ de leurs périodes b . La fonction thêta avec caractéristique correspondant à la courbe algébrique \mathcal{L} est donnée par

$$\Theta_{pq}(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \{ \langle \Pi(p + m), p + m \rangle + \langle p + m, q + z \rangle \}; \quad (2.33)$$

ici $z \in \mathbb{C}^g$ est l'argument et $p, q \in \mathbb{C}^g$ sont les vecteurs caractéristiques, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire. L'application d'Abel-Jacobi $\omega(P)$, $P \in \mathcal{L}$ est défini par $\omega(P) = \int_{\xi}^P d\omega$. Nous rappelons qu'un diviseur D sur une surface de Riemann est un symbole formel $D = \sum_{i=1}^k n_i P_i$ avec $P_i \in \mathcal{L}$ et $n_i \in \mathbb{Z}$; le degré de ce diviseur est $\sum_{i=1}^k n_i$.

La solution d'un problème de Riemann-Hilbert sur \mathcal{L} pour une fonction ψ peut être donnée sous forme de fonctions thêta [80, 81]. Avec ces fonctions on peut construire la matrice Ψ qui est la solution du problème de Riemann-Hilbert après la transformation de jauge, voir [52, 59] et donc le potentiel d'Ernst correspondant,

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta_{pq}(\omega(\infty^+) + u)}{\Theta_{pq}(\omega(\infty^-) + u)} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega_{\infty^+ \infty^-}(\tau) \right), \quad (2.34)$$

où $u = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega$ sont les périodes b de l'intégrale dans l'exposant, et où les caractéristiques sont $p_i = 0$, $q_i = 0, \frac{1}{2}$. Ici nous supposons que le diviseur correspondant à u

n'est pas spécial, alors que la fonction thêta n'est pas identique à zéro (pour ce cas voir [59]). Ces solutions étaient données pour la première fois par Korotkin [54]. Notons que le cas $g = 0$ correspond à un problème scalaire où il n'y a pas de fonctions thêta ce qui implique que le potentiel d'Ernst est réel et que l'espace-temps est statique. Les solutions 'solitonique' comme la solution de Kerr sont obtenues de (2.34) dans le cas limite où des paires de points de branchement coïncident. Dans ce cas la surface \mathcal{L} dégénère et les fonctions thêta réduisent aux fonctions algébriques.

2.3 Singularités, moments multipolaires et symétries

Le potentiel \mathcal{E} (2.34) peut être singulier sur le contour Γ , aux points où la fonction thêta dans le dénominateur a des zéros et aux points où la surface \mathcal{L} est singulière. Sur le contour Γ , le potentiel d'Ernst a des valeurs limites finies, si les points de branchement ne sont pas sur Γ . Le potentiel a des pôles aux zéros de la fonction thêta dans le dénominateur ce qui implique en général des singularités des invariants de courbure. La surface de Riemann devient singulière si des points de branchement coïncident. La limite $\xi \rightarrow \bar{\xi}$ correspond à l'axe de symétrie ce qui rappelle que l'opérateur de Laplace en coordonnées cylindriques est singulier pour $\rho = 0$. En appliquant un théorème dû à Fay [49] et [88], il peut être démontré que le potentiel (2.34) a une expansion de la forme $\mathcal{E} = F_0(\zeta) + \rho^2 F_1(\zeta) + \dots$ pour $\rho \rightarrow 0$. Le potentiel $F_0(\zeta)$ sur l'axe est analytique à l'extérieur de Γ . L'analyse du problème de Riemann-Hilbert dans la section précédente a montré que les points de branchement E_i et \bar{E}_i sont reliés à une transformation de jauge. En effet la régularité de ces points peut être démontrée avec les mêmes techniques utilisées pour l'axe de symétrie. Pour les valeurs limites du potentiel d'Ernst voir [59, 70, 71]. Nous savons que Korotkin a démontré que la condition de réalité dans le théorème 2.1 peut être aussi satisfaite, si des paires de points de branchement sont réels. Ces points ne peuvent pas être reliés à des transformations de jauge, et nous avons montré en [59] que ces points correspondent à des défauts topologiques dans l'espace-temps sur l'axe.

L'espace-temps peut avoir des ergo-régions, des régions où la fonction métrique e^{2U} est égale à zéro, ce qui est le cas si

$$\Theta(u)\Theta(u + \omega(\bar{\xi})) = 0. \quad (2.35)$$

Dans ces régions comme dans l'espace-temps de Kerr il ne peut pas y avoir des observateurs statiques par rapport à l'infini. En utilisant un système de coordonnées localement corotatives (où la métrique est localement diagonale), on reconnaît que les ergo-régions sont des singularités de coordonnées sauf si l'ergo-région touche l'axe de symétrie. Dans ce cas il peut y avoir des horizons ou des singularités sur l'axe.

Le potentiel sur l'axe de symétrie peut être donné sous forme de fonctions thêta sur la surface Σ'_{g-1} de genre $g - 1$ défini par

$$\mu'^2 = \prod_{i=1}^g (K - E_i)(K - F_i), \quad (2.36)$$

alors la surface \mathcal{L} sans l'intersection $[\xi, \bar{\xi}]$. Puisque les points de branchements sont constantes par rapport aux coordonnées physiques, le comportement du potentiel (2.34) à l'infini peut être directement étudié. On trouve que l'espace-temps correspondant à (2.34) est asymptotiquement plat si

$$\Theta'(u') \neq 0, \quad (2.37)$$

où les quantités avec prime sont définies sur la surface Σ'_{g-1} et où $u' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega'$. Dans le cas $\Theta'(u') = 0$, la fonction e^{2U} est égale à zéro sur l'axe entier, ce qui correspond à un axe singulier. Ce cas extrême sera discuté en détail dans le chapitre 4.

Si la condition (2.37) est satisfaite, on peut définir des moments multipolaires, le potentiel sur l'axe ayant une expansion sous la forme de $\mathcal{E} = 1 - 2M/\zeta + 2iJ/\zeta^2 + \dots$. En général ni la masse ADM (Arnowitt-Deser-Misner), ni le moment angulaire sont réels ce qui veut dire qu'il y a un paramètre NUT (Newman-Unti-Tamburino), voir par exemple [92]. Ici nous sommes intéressés à des situations physiques, des champs gravitationnels des fluides parfaits en équilibre thermodynamique. Dans la théorie Newtonienne ces solutions ont une symétrie équatoriale, une symétrie sous réflexion au plan équatorial $\zeta = 0$. Il n'y a pas de preuve, mais en général on présume que ceci est aussi le cas pour des situations relativistes. Des espace-temps avec symétrie équatoriale, $\mathcal{E}(-\zeta) = \bar{\mathcal{E}}(\zeta)$ ont automatiquement une masse et un moment angulaire réel. Nous avons démontré en [58, 59] que des solutions (2.34) sur une surface avec genre $g = 2s$ donnée par

$$\mu^2 = (K - \xi)(K - \bar{\xi}) \sum_{i=1}^{2s} (K^2 - E_i^2)(K^2 - \bar{E}_i)^2 \quad (2.38)$$

avec des contours Γ où $-K \in \Gamma$ si $K \in \Gamma$ ($E_i \notin \Gamma$) et avec $G(-K) = G(K)$, le potentiel d'Ernst en (2.34) admet une symétrie équatoriale. Les résultats peuvent être résumés dans le théorème suivant :

Théorème 2.2 :

Soit \mathcal{L} une surface hyper-elliptique de genre $g = 2s$ donnée par (2.38), soit Γ un contour C^∞ où avec $K \in \Gamma$ aussi $\bar{K} \in \Gamma$ et $-K \in \Gamma$, soit G une fonction continue dans le sens de Hölder non-nulle avec $\bar{G}(\bar{K}) = G(K) = G(-K)$. Alors la fonction

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta(\omega(\infty^+) + u)}{\Theta(\omega(\infty^-) + u)} \exp \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G d\omega_{\infty^+ \infty^-}(\tau) \right) \quad (2.39)$$

est

1. une solution de l'équation d'Ernst qui est pour $\xi \notin \Gamma$ seulement singulière si $\Theta(\omega(\infty^-) + u) = 0$,
2. en général discontinue sur Γ où les valeurs limites de la fonction sont continues dans le sens de Hölder,
3. asymptotiquement donnée par $\mathcal{E} = 1 - 2M/|\xi| + 2iJ/|\xi|^2 + \dots$ si $\Theta'(u') \neq 0$ où M et J sont des constantes réelles,
4. et l'espace-temps a une symétrie équatoriale.

Remarque :

Puisque les points de branchement $\xi, \bar{\xi}$ dépendent des coordonnées physiques, la surface de Riemann \mathcal{L} est en général irréductible, cela veut dire que les solutions ne peuvent pas être données sous forme de fonctions thêta sur des surfaces avec genre inférieur à g . Sauf sur l'axe de symétrie, où la surface est dégénérée, le potentiel \mathcal{E} peut être donné sous forme de fonctions sur une surface de genre $g - 1$, et dans le plan équatoriale où la surface est invariante sous des transformations $K \rightarrow -K$, \mathcal{E} peut être exprimé par des fonctions thêta sur des surfaces de Riemann de genre s [59].

Nous remarquons que le potentiel (2.39) ne peut pas avoir de singularités dans le cas $g = 0$ où les espace-temps sont statiques, où \mathcal{E} est réel et où U est une solution de l'équation de Laplace. Les singularités sont possibles dans des situations stationnaires, ce qui est en accord avec des intuitions (par exemple la *hoop conjecture* [87]) qu'il est impossible de concentrer des masses arbitraires dans une région limitée d'un espace-temps sans qu'un trou noir ou une singularité se forme.

2.4 Identités de Fay, formules de Rauch et fonctions métriques

Dans la section précédente nous avons démontré qu'une classe de solutions hyper-elliptiques satisfait les conditions analytiques demandées à une solution décrivant le champ gravitationnel engendré par une étoile ou une galaxie dans le vide. Pour résoudre un problème aux limites appartenant à cette classe et pour une discussion ultérieure des phénomènes physiques, il est utile d'avoir des expressions explicites pour la métrique. Ceci implique l'intégration des équations (2.5) et (2.6) ce qui n'est absolument pas trivial dans le cas des solutions sous forme de fonctions thêta. Cette intégration était effectuée par des techniques différentes (système linéaire (2.7), fonction τ, \dots) en [54, 59, 57]. Une approche unifiée était présentée en [93].

En [93], des solutions hyper-elliptiques étaient considérées sous la forme de

$$\mathcal{E} = \frac{\Theta_{pq}(\omega(\infty^+))}{\Theta_{pq}(\omega(\infty^-))} \quad (2.40)$$

sur une surface \mathcal{L} définie par $\mu^2 = (K - \xi)(K - \bar{\xi}) \prod_{i=1}^N (K - E_i)(K - F_i)$ avec $E_i = \bar{E}_i$ ou $E_i, F_i \in \mathbb{R}$; la caractéristique vérifie la condition de réalité

$$\Pi p + q \in \mathbb{R}^g. \quad (2.41)$$

Ces solutions sont plus générales que celles de la section précédente en ce qui concerne les points de branchement et les caractéristiques. La forme (2.34) peut être obtenue dans la limite où $N - g$ paires de points de branchement coïncident et où la limite continue ($N \rightarrow \infty$) de ces doubles points est considérée (ce qui résulte dans le contour Γ).

Nous trouvons la métrique correspondant au potentiel (2.40) dans le

Théorème 2.3 :

Soit le potentiel d'Ernst donné par (2.40). Alors la fonction e^{2U} peut être écrite sous la forme de

$$e^{2U} = Q \frac{\Theta_{pq}(0)\Theta_{pq}(\omega(\bar{\xi}))}{\Theta_{pq}(\omega(\infty^-))\Theta_{pq}(\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))}, \quad (2.42)$$

où

$$Q = \frac{\Theta(\omega(\infty^-))\Theta(\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))}{\Theta(0)\Theta(\omega(\bar{\xi}))}. \quad (2.43)$$

La fonction a est donnée par

$$(a - a_0)e^{2U} = -\rho \left(\frac{\Theta_{pq}(0)\Theta_{pq}(2\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))}{Q\Theta_{pq}(\omega(\infty^-))\Theta_{pq}(\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))} - 1 \right), \quad (2.44)$$

où la constante a_0 est déterminée par la condition que $a = 0$ sur la partie régulière de l'axe de symétrie. La fonction métrique e^{2k} peut être écrite sous la forme de

$$e^{2k} = K \frac{\Theta_{pq}(0)\Theta_{pq}(\omega(\bar{\xi}))}{\Theta(0)\Theta(\omega(\bar{\xi}))}, \quad (2.45)$$

où la constante K est déterminée par la condition $k = 0$ sur la partie régulière de l'axe de symétrie.

Nous notons que e^{2U} et e^{2k} sont négatifs dans les ergo-régions (2.35), mais la fonction métrique $e^{2(k-U)}$ est positive, ce qui souligne qu'une ergo-sphère est une singularité des coordonnées.

La démonstration de ce théorème se sert d'une identité pour des fonctions thêta dû à Fay [49]. Nous définissons la forme prime, le différentiel d'ordre $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ sur $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$,

$$E(P, Q) = \frac{\Theta_*(\omega(P) - \omega(Q))}{h_\Delta(P)h_\Delta(Q)}, \quad (2.46)$$

où $h_\Delta^2(P) = \sum_{n=1}^N \partial_{z_n} \Theta_*(0) d\omega_n(\tau_P)$, où $\tau(P)$ est le paramètre local à P , et où $*$ = $[p^*q^*]$ est une caractéristique impaire non-singulière (alors $\Theta_*(0) = 0$). L'identité de Fay est valable pour 4 points arbitraires $P_1, \dots, P_4 \in \mathcal{L}$ et pour un vecteur arbitraire $z \in \mathbb{C}^N$,

$$\begin{aligned} & E(P_3, P_1)E(P_4, P_2)\Theta_{pq}(z + \omega(P_3) - \omega(P_2))\Theta_{pq}(z + \omega(P_4) - \omega(P_1)) \\ & + E(P_3, P_2)E(P_1, P_4)\Theta_{pq}(z + \omega(P_3) - \omega(P_1))\Theta_{pq}(z + \omega(P_4) - \omega(P_2)) \\ & = E(P_3, P_4)E(P_1, P_2)\Theta_{pq}(z)\Theta_{pq}(z + \omega(P_3) + \omega(P_4) - \omega(P_1) - \omega(P_2)). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Pour une interprétation géométrique de cette identité voir [49, 94, 95]. Puisque les points P_i en (2.47) sont arbitraires, l'identité peut être considérée dans la limite des points coïncidents, ce qui fournit des relations entre des dérivées de fonctions thêta.

La dépendance des différentiels holomorphes et donc de leurs périodes des points de branchement est établie par les formules variationnelles de Rauch [97]

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_n(P)}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{W(P, \xi)}{d\tau_\xi} \frac{d\omega_n(\xi)}{d\tau_\xi}, \\ \frac{d\Pi_{mn}}{d\xi} &= \frac{1}{2} \frac{d\omega_n(\xi)}{d\tau_\xi} \frac{d\omega_m(\xi)}{d\tau_\xi}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

où $W(P, Q) = d_P d_Q \ln E(P, Q)$ est le noyau de Bergman. La fonction thêta satisfait l'équation de chaleur,

$$\partial_{\pi_{nm}} \Theta_{pq}(z, \Pi) = \frac{1}{2} \partial_{z_n} \partial_{z_m} \Theta_{pq}(z, \Pi). \quad (2.49)$$

Avec (2.48) et (2.49), les dérivées des fonctions thêta par rapport aux points de branchement peuvent être reliées à des dérivées par rapport à l'argument,

$$\partial_{\xi} \Theta_{pq}(z) = \frac{1}{4} D_{\xi} D_{\xi} \Theta_{pq}(z) + \sum_{n=1}^N (\partial_{z_n} \Theta_{pq}(z)) \frac{dz}{d\xi}, \quad (2.50)$$

où $D_{\xi} F = \sum_{n=1}^N (\partial_{z_n} F) \frac{d\omega_n(\xi)}{d\tau_{\xi}}$.

Les dérivées du potentiel d'Ernst par rapport à ξ et $\bar{\xi}$ peuvent être exprimées avec (2.50) par des dérivées de deuxième ordre par rapport à l'argument. Les expressions obtenues peuvent être simplifiées grâce à l'identité de Fay (2.47) dans la limite $P_4 \rightarrow P_2$ [93] pour obtenir des expressions qui contiennent seulement des dérivées de premier ordre. Avec ces techniques on peut prouver (voir [93]) que (2.40) fournit des solutions de l'équation d'Ernst et que théorème 2.3 fournit la métrique correspondante.

Chapitre 3

Problèmes aux limites et disques de poussière

Nous utilisons dans ce chapitre la classe de solutions hyper-elliptiques discutées au chapitre précédent pour résoudre des problèmes aux limites. Le modèle que nous considérons ici sont des disques de deux composantes de poussière en contre-rotation. Dans la section 1 nous discutons le cas Newtonien pour illustrer les méthodes. En utilisant la classe de solutions algèbro-géométrique sur une surface de genre 0, la solution des problèmes aux limites pour des disques de poussière est réduite à une équation intégrale du type Abel pouvant être résolue explicitement. Nous présentons les conditions aux limites pour le cas relativiste dans la section 2. Puisque les solutions hyper-elliptiques contiennent une fonction et un ensemble de paramètres complexes, les points de branchement pouvant être librement choisis, on peut résoudre sur une surface donnée seulement certaines classes de problèmes aux limites. Dans la section 3 nous étudions les relations différentielles qui existent dans l'espace-temps entier et par conséquent aussi au disque pour une surface donnée. Nous nous servons du système linéaire (2.7) pour trouver des équations algébriques pour des intégrales du potentiel d'Ernst et de ses dérivées par une approche purement algébrique. Le cas de genre 2 fournissant les solutions les plus simples non-statiques avec symétrie équatoriale est discuté en détail. Dans la section 4 nous construisons la solution explicite pour le disque [66] qui contient le disque d'une seule composante en rotation rigide [69] et une solution statique [35] comme cas limites. Nous prouvons la régularité globale de la solution à l'extérieur du disque jusqu'à la limite extrême où le redshift central diverge.

3.1 Disques de poussière Newtoniens

Pour illustrer les méthodes appliquées dans le cas relativiste, nous étudions la situation Newtonienne. Dans la théorie Newtonienne la gravitation est décrite par un potentiel scalaire U qui est dans le vide une solution de l'équation de Laplace. Sur le disque les dérivées normales sont discontinues puisque le disque est une couche singulière dans le vide. Par manque de pression la seule force dans la poussière stabilisant le disque contre

l'effondrement gravitationnel est la force centrifuge,

$$U_\rho = \Omega^2(\rho)\rho, \quad (3.1)$$

où $\Omega(\rho)$ est la vitesse angulaire des particules dépendant de ρ . Puisque la relation (3.1) est quadratique en Ω , il n'y a pas d'effets linéaires en Ω appelés gravito-magnétiques dans la Relativité Générale. Ainsi les disques avec des composantes en contre-rotation engendrent le même champ gravitationnel que les disques avec une seule composante.

Un disque de poussière est caractérisé uniquement par la vitesse angulaire ou par la densité de la matière. Puisque l'équation de Laplace est une équation elliptique, seulement une des ces quantités peut être prédéterminée, ce qui est équivalent à un problème aux limites. Avec les solutions (2.27), le cas spécial de la classe (2.39) applicable ici avec Γ la partie de l'axe imaginaire entre $-i$ et i dans la couche $+$, nous obtenons

Théorème 3.1 :

Soit U_ζ ou U_ρ des fonctions continues dans le sens de Hölder données sur le disque $\zeta = 0$, $\rho \leq 1$. Alors la solution de l'équation de Laplace qui est globalement régulière sauf au disque est donnée par (2.27) avec

$$\ln G(t) = 4 \left(U(0,0) + t \int_0^t \frac{U_\rho(\rho)d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \right), \quad (3.2)$$

ou avec

$$\ln G(t) = 4 \int_t^1 \frac{\rho U_\zeta(\rho)d\rho}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}, \quad (3.3)$$

où $t = -i\tau$.

Remarque :

La constante $U(0,0)$ ne peut pas être librement choisie si le potentiel U doit être continu au bord du disque. Pour cela on doit avoir $\ln G(\pm i) = 0$, ce qui fixe la constante par (3.2).

Démonstration :

Le potentiel (2.27) implique sur le disque à cause de la symétrie équatoriale

$$U(\rho, 0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\rho \frac{\ln G(t)dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}, \quad (3.4)$$

et

$$U_\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_\rho^1 \frac{\partial_t(\ln G(t))dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}}. \quad (3.5)$$

Si le coté gauche de ces équations est donné, elles représentent des équations intégrales du type Abel pour la quantité $\ln G$ qui peuvent être résolues sous la forme de (3.2) et (3.3) (voir [98]).

Nous notons que les relations (2.27) et (3.3) peuvent être combinées pour fournir le potentiel sur le disque en dépendance de la densité $2\pi\sigma = U_\zeta$

$$U(\rho) = -4 \int_0^1 d\rho' \sigma(\rho') \rho' \frac{K[k(\rho, \rho')]}{\rho + \rho'}, \quad (3.6)$$

où $k(\rho, \rho') = 2\sqrt{\rho\rho'}/(\rho + \rho')$ et où K est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Formule (3.6) est équivalente à l'intégrale de Poisson pour des disques. Les propriétés analytiques de l'intégrale de Poisson garantissent que le potentiel U est globalement analytique à l'extérieur du disque. Par conséquent les problèmes aux limites pour des disques Newtoniens peuvent être résolus localement au disque, ce qui ne sera pas possible dans le cas relativiste.

3.2 Disques relativiste de poussière en contre-rotation

Les disques de poussière en contre-rotation présentent des modèles intéressants pour l'étude mathématique des problèmes aux limites pour les équations d'Einstein car leur simplicité permet la construction des solutions explicites dans des situations typiques pour le cas général. Il est possible d'étudier la transition d'une solution stationnaire à une solution statique [35] dans ces modèles. Des disques infinis en contre-rotation étaient discutés en [36, 37] et comme source de la métrique de Kerr en [38]. Afin de trouver les conditions aux limites pour les disques il semble être optimal de se servir des conditions invariantes de jonctions introduites par Israel [99]. Nous considérons l'ajustement des régions V^\pm correspondantes à $\pm\zeta$ dans le plan équatorial. La discontinuité $\gamma_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^-$ de la courbure extrinsèque $K_{\alpha\beta}$ de l'hyperplan $\zeta = 0$ est reliée au tenseur d'impulsion-énergie $S_{\alpha\beta}$ du disque par

$$-8\pi S_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} - h_{\alpha\beta}\gamma_\epsilon^\epsilon, \quad (3.7)$$

où h est la métrique de l'hyperplan (les indices grecs prennent les valeurs correspondantes aux coordonnées t, ρ et ϕ). Nous écrivons le tenseur $S^{\alpha\beta}$ sous la forme de

$$S^{\mu\nu} = \sigma_+ u_+^\mu u_+^\nu + \sigma_- u_-^\mu u_-^\nu, \quad (3.8)$$

où les vecteurs u_\pm sont une combinaison linéaire des vecteurs de Killing, $u_\pm = (1, 0, \pm\Omega(\rho))$. La définition (3.8) est une définition algébrique pour construire des tenseurs S avec trois composantes S_{00}, S_{03} et S_{33} paramétrisées par $\tilde{\sigma} = \sigma_+ + \sigma_-$ ("densité totale"),

$$\gamma(\rho) = \frac{\sigma_+(\rho) - \sigma_-(\rho)}{\sigma_+(\rho) + \sigma_-(\rho)}. \quad (3.9)$$

("densité relative") et $\Omega(\rho)$ ("vitesse angulaire"). Une interprétation physique sera donnée au chapitre prochain dans la discussion des aspects physiques des disques en contre-rotation.

Nous obtenons les conditions aux limites [60]

$$\mathcal{E}_\zeta = -i \frac{R^2 + \rho^2 + \delta e^{4U}}{2R\rho} \mathcal{E}_\rho + \frac{i}{R} e^{2U}, \quad (3.10)$$

si $\Omega(\rho)$ et $\delta(\rho)$ sont donnés où

$$R = \left(a + \frac{\gamma}{\Omega}\right) e^{2U}, \quad (3.11)$$

et

$$\delta(\rho) = \frac{1 - \gamma^2(\rho)}{\Omega^2(\rho)}. \quad (3.12)$$

Si les σ_{\pm} sont donnés, nous obtenons

$$(\rho^2 + \delta e^{4U}) \left((e^{2U})_{\rho} (e^{2U})_{\zeta} + b_{\rho} b_{\zeta} \right)^2 - 2\rho e^{2U} (e^{2U})_{\zeta} \left((e^{2U})_{\rho} (e^{2U})_{\zeta} + b_{\rho} b_{\zeta} \right) + b_{\rho}^2 e^{4U} = 0, \quad (3.13)$$

et

$$\left(b_{\rho} - a \left((e^{2U})_{\rho} (e^{2U})_{\zeta} + b_{\rho} b_{\zeta} \right) \right)^2 + 8\pi\rho\sigma e^{2U}\gamma^2 \left((e^{2U})_{\rho} (e^{2U})_{\zeta} + b_{\rho} b_{\zeta} \right) = 0. \quad (3.14)$$

Dans les deux cas il s'agit de problèmes aux limites mixtes non-linéaires pour l'équation d'Ernst. Nous avons utilisé le fait que le tenseur S est covariamment constant, $S_{;\beta}^{\alpha\beta} = 0$, pour éliminer la fonction métrique k des conditions. Pour $\Omega = \text{const}$ et $\delta = \text{const}$ une des équations (3.10) peut être intégrée,

$$R^2 - \rho^2 + \delta e^{4U} = \frac{2}{\lambda} e^{2U}, \quad (3.15)$$

où $\lambda = 2\Omega^2 e^{-2U_0}$. En général cette équation est une équation du type Abel.

3.3 Relations algébriques pour les potentiels hyper-elliptiques

Les solutions hyper-elliptiques (2.39) contiennent la fonction G et les points de branchement E_i , $i = 1, \dots, s$ pouvant être librement choisis. Afin de résoudre un problème aux limites du type (3.10) pour des fonctions $\Omega(\rho)$ et $\delta(\rho)$ arbitraires, on aurait besoin d'une classe de solutions avec deux fonctions arbitraires. Par conséquent avec les solutions (3.10), on peut résoudre seulement certaines classes de problèmes aux limites sur une surface donnée. Pour une fonction G arbitraire, il existe des relations entre la partie réelle et la partie imaginaire du potentiel d'Ernst. Ceci est illustré par la fonction $F = e^{i\psi(\rho, \zeta)}$ qui est dans un certain sens l'analogue des fonctions thêta sur la sphère de Riemann. Même si ψ est une fonction arbitraire, on peut seulement résoudre des problèmes aux limites avec $(\Re F)^2 + (\Im F)^2 = 1$, une relation valable dans l'espace-temps entier et sur le contour limite en particulier.

Dans le cas des solutions hyper-elliptiques des relations existent entre les dérivées du potentiel d'Ernst. Pour les trouver nous introduisons une approche algébrique [60, 100]. Soit $X = \sum_{i=1}^g X_i$ le diviseur défini comme la solution du problème d'inversion de Jacobi,

$$\omega_i(X) - \omega_i(D) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G \frac{\tau^{i-1} d\tau}{\mu(\tau)} =: \tilde{u}_i, \quad (3.16)$$

où le diviseur $D = \sum_{i=1}^g E_i$. Alors le potentiel d'Ernst (2.39) peut être écrit sous la forme

$$\ln \mathcal{E} = \int_D^X \frac{\tau^g d\tau}{\mu(\tau)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \ln G \frac{\tau^g d\tau}{\mu(\tau)}. \quad (3.17)$$

Puisque les \tilde{u}_i en (3.16) sont les périodes de la deuxième intégrale en (3.17), ils vérifient un système d'équations différentielles, le système de Picard-Fuchs (voir [61] à [64] et [59]). Nous obtenons ($n = 1, \dots, g$)

$$\sum_{n=1}^g \frac{(X_n - \xi) X_n^j}{\mu(X_n)} X_{n,\xi} = 0, \quad j = 0, \dots, g-2 \quad (3.18)$$

et

$$(\ln \mathcal{E})_{\xi} = \sum_{n=1}^g \frac{(X_n - \xi) X_n^{g-1}}{\mu(X_n)} X_{n,\xi}, \quad (3.19)$$

ce qui est équivalent à

$$X_{n,\xi} = (\ln \mathcal{E})_{\xi} \frac{\mu(X_n)}{X_n - \xi} \frac{1}{\prod_{m=1, m \neq n}^g (X_n - X_m)}. \quad (3.20)$$

La réalité des u_i implique à cause du théorème d'Abel (voir [94, 60]) la relation pour $K \in \mathbb{C}$ arbitraire

$$(1 - x^2) \prod_{i=1}^g (K - K_i)(K - \bar{K}_i) = \prod_{i=1}^g (K - E_i)(K - \bar{E}_i) - (K - P_0)(K - \bar{P}_0) Q_2^2(K), \quad (3.21)$$

où avec x_i , x purement imaginaire

$$Q_2(K) = x_0 + x_1 K + \dots + x_{g-2} K^{g-2} + x K^{g-1}. \quad (3.22)$$

Puisque la relation (3.21) est valable pour $K \in \mathbb{C}$ arbitraire, elle est équivalente à un système de $2g$ équations algébriques réelles pour les X_i , si les x_i sont donnés. La quantité x est reliée au potentiel d'Ernst par

$$\frac{\mathcal{E}}{\bar{\mathcal{E}}} = \frac{1+x}{1-x}, \quad (3.23)$$

alors $x = ibe^{-2U}$.

En principe le système (3.21) peut être résolu pour les X_i . Alors les équations de Picard-Fuchs peuvent être utilisées pour établir un système d'équations différentielles pour les solutions hyper-elliptiques sur une surface donnée qui est valable pour une fonction G arbitraire. Les seuls paramètres dans ce système sont les points de branchement E_i . Sur l'axe de symétrie nous trouvons une relation intégrée

$$P_1(\zeta) \mathcal{E} \bar{\mathcal{E}} + P_2(\zeta) b + P_3(\zeta) = 0, \quad (3.24)$$

où P_1 et P_3 sont des polynômes en ζ de degré $2g - 3$ et où P_2 est un polynôme en ζ de degré $2g - 2$ pour $g > 1$.

Pour établir des relations différentielles à l'extérieur de l'axe, il est utile d'exprimer la fonction métrique a par le diviseur X . Avec $E_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ et $Z = (a - a_0)e^{2U}$ on trouve pour le cas de genre 1

$$(1 - x^2)Z = ix(\alpha_1 - \zeta) + \sqrt{(1 - x^2)(\beta_1^2 - \rho^2 x^2) - x^2(\alpha_1 - \zeta)^2}, \quad (3.25)$$

une relation qui est valable dans l'espace-temps entier pour une fonction G arbitraire. Le cas le plus simple de solutions non-statiques avec symétrie équatoriale est de genre 2. Ici nous nous limitons aux relations pour les disques de poussière, cela veut dire nous considérons les relations générales de [60] sur le disque, et nous remplaçons les dérivées normales par (3.10),

$$\begin{aligned} ix_0 + (Z - ix_0)\frac{R_0 - \rho^2}{I_1 R} &= \left(\rho - \frac{R^2 + \rho^2 + \delta f^2}{2R\rho} \frac{R_0 - \rho^2}{I_1} \right) \left((-Z + ix_0)\frac{f_\rho}{f} - sZ\frac{b_\rho}{f} \right), \\ \rho s \left(1 - \frac{Z}{R} \right) &= \left(\frac{R_0 - \rho^2}{I_1} - \frac{R^2 + \rho^2 + \delta f^2}{2R} \right) \left(sZ\frac{f_\rho}{f} + (-Z + ix_0)\frac{b_\rho}{f} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

ici $E_1^2 = \alpha + i\beta$ et

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{ix_0}{1 - x^2} - Z, \\ R_0 &= \frac{ix_0 Z - \alpha - \frac{\rho^2}{2}}{1 - x^2} - \frac{Z^2 - \rho^2}{2}, \\ 0 &= R_0^2 + \frac{(R_0 - \rho^2)^2}{I_1^2} \frac{x^2 x_0^2}{(1 - x^2)^2} - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \rho^2 x_0^2}{1 - x^2}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

En [65] nous établissons une relation algébrique obtenue par une expansion de la matrice Ψ de (2.7) dans le paramètre local près de ∞^- . Nous montrons qu'il est possible d'établir des relations algébriques pour le cas de genre 2 en utilisant la quantité

$$\int_\kappa d\kappa \frac{\xi - \bar{\xi}}{2} \frac{\mathcal{E}^2 \bar{\mathcal{E}}_\xi - \bar{\mathcal{E}}^2 \mathcal{E}_\xi}{(\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}})^2}, \quad (3.28)$$

où $\int_\kappa d\kappa$ dénote l'intégrale de chemin dans le plan complexe de ξ de ξ_0 à ξ . Ce formalisme permet de démontrer que les seuls disques ayant une limite Newtonienne $|\Omega| \ll 1$ sont des disques en rotation rigide. Il serait intéressant de trouver le spectre possible de $\Omega(\rho)$ dans le cas relativiste sur des surfaces de genre 2.

Un premier pas important dans cette direction était fait en [66, 60] où la solution pour un disque de la forme (3.10) pour Ω et δ constante était présentée. Les points de branchement sont donnés par

$$\alpha = -1 + \frac{\delta}{2}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} + \delta - \frac{\delta^2}{4}}. \quad (3.29)$$

Le paramètre δ varie entre $\delta = 0$ (seulement une composante de poussière) et $\delta = \delta_s$,

$$\delta_s = 2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\lambda^2}} \right), \quad (3.30)$$

la limite statique. La fonction G est donnée par

$$G(\tau) = \frac{\sqrt{(\tau^2 - \alpha)^2 + \beta^2} + \tau^2 + 1}{\sqrt{(\tau^2 - \alpha)^2 + \beta^2} - (\tau^2 + 1)}. \quad (3.31)$$

Le paramètre λ varie entre 0, la limite Newtonienne, et la limite ultrarelativiste où le redshift central diverge. Ceci est atteint pour $\delta \neq 0$ pour $\lambda \rightarrow \infty$ et pour $\delta = 0$ pour $\lambda = 4.629 \dots$

Il est à retenir que la solution du problème aux limites qui est construite localement au disque comme dans le cas Newtonien ne garantit pas que la solution trouvée est globalement régulière à l'extérieur du disque puisque la fonction θ dans le dénominateur de (2.39) peut avoir des zéros. En [60] nous étions capables de prouver que la solution pour le disque discuté ici est globalement régulière à l'extérieur du disque jusqu'à la limite ultrarelativiste. Pour la démonstration on utilise le fait que le diviseur θ qui contrôle les zéros d'une fonction θ est relié à une solution de l'équation de Laplace; alors le principe extrémal peut être appliqué. La méthode de démonstration indique que les solutions du problème aux limites au delà de la limite ultrarelativiste auront des singularités dans le plan équatorial. Ceci est le premier résultat pour la régularité globale des solutions hyper-elliptiques de l'équation d'Ernst.

Chapitre 4

Méthodes numériques et discussion physique

La solution exacte du chapitre précédent est discutée comme exemple pour une solution hyper-elliptique de l'équation d'Ernst. La solution est paramétrisée par deux réels qui interpolent entre la limite Newtonienne et la limite ultrarelativiste et la limite statique et un disque d'une seule composante respectivement. Dans le chapitre 2 la métrique complète pour cette solution était donnée sous forme de fonctions θ , une adaptation de ces formules pour les disques peut être trouvée en [70, 71]. Puisque les intégrales hyper-elliptiques sont irréductibles en général, elles doivent être évaluées numériquement. Dans la section 1 nous discutons une approche numérique basée sur des méthodes pseudo-spectrales. Nous présentons des graphiques pour les fonctions métriques et le potentiel d'Ernst pour une situation typique du disque en contre-rotation. Cette discussion est inspirée par [45]. Dans la section 2 nous discutons les ergo-régions et la limite ultrarelativiste où le redshift central diverge. Les propriétés physiques comme la masse et le moment angulaire, la densité et les vitesses angulaires dans le disque selon [38], sont discutées dans la section 3.

4.1 Méthodes numériques

Les expressions explicites pour la métrique correspondante aux solutions (2.39) étaient données en [70, 71] sous forme des fonctions θ sur une surface de genre 2. Alors nous avons trouvé une solution exacte dans le sens classique sous forme d'intégrales et de fonctions connues. Le problème avec les fonctions θ est leur dépendance d'un grand nombre de paramètres, des points de branchements. Dans le cas de genre 2, il s'agit de trois paramètres complexes, avec les symétries considérées ici, de deux paramètres complexes. Cela veut dire qu'il est difficile de présenter des tableaux des fonctions hyper-elliptiques comme par exemple pour les fonctions trigonométriques. Pour obtenir des valeurs numériques il faut donc évaluer les intégrales avec des méthodes numériques.

La situation avec les solutions sous forme des fonctions θ est plus difficile dans le cas de l'équation d'Ernst que dans le cas de Korteweg-de Vries (KdV) par exemple, car le potentiel d'Ernst est discuté comme dépendant des points de branchement et non de

l'argument comme avec KdV. Par conséquent il faut calculer les quantités fondamentales de la surface de Riemann seulement une fois pour KdV, mais de nouveau pour chaque point dans l'espace-temps pour Ernst. En outre le potentiel d'Ernst doit être déterminé aussi dans des situations où la surface de Riemann dégénère comme près de l'axe de symétrie. Dans ce cas les périodes divergent, ce qui rend l'utilisation des méthodes d'une grande précision nécessaire. Car les résultats numériques doivent être comparés avec ceux des codes pour des étoiles à neutrons [44] qui ont une précision jusqu'à 10^{-14} , des méthodes avec une précision comparable sont utilisées ici.

Les périodes a et b sur une surface de Riemann sont données par des intégrales entre des points de branchements $P_i, P_j, i \neq j$,

$$\int_{P_i}^{P_j} \frac{\tau^n d\tau}{\mu(\tau)}, \quad n = 0, 1, 2. \quad (4.1)$$

En utilisant une transformation linéaire ces intégrales peuvent être écrites dans la forme standard

$$\int_{-1}^1 \frac{\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2}{\sqrt{1-t^2}} H(t) dt, \quad (4.2)$$

où les α_i sont des constantes complexes et où $H(t)$ est une fonction complexe analytique sur l'intervalle $[-1, 1]$. Cette forme de l'intégrale suggère d'exprimer les termes t^n par les trois premiers polynômes de Tchebyshev $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$ et $T_2(t) = 2t^2 - 1$ et d'approximer la fonction $H(t)$ par une combinaison linéaire de polynômes de Tchebyshev

$$H(t) = \sum_{n \geq 0} h_n T_n(t).$$

Puisque les T_n forment un système orthogonal complet sur cet intervalle, cette approximation peut être effectuée avec une précision arbitraire en utilisant suffisamment de termes. Avec la relation d'orthogonalité entre les polynômes de Tchebyshev

$$\int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \pi & m = n = 0 \\ \pi/2 & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}, \quad (4.3)$$

l'intégrale (4.3) est la combinaison linéaire des coefficients h_0, h_1 and h_2 . Ces coefficients sont déterminés par une *Fast Cosine Transform* (FCT) en Matlab. Nous obtenons une précision dans l'ordre de la précision de la machine ($\approx 10^{-14}$) avec 32, et au maximum 128 polynômes.

Ceci peut être contrôlé par la somme des périodes a et de l'intégrale autour de $[E_1, \bar{E}_1]$ qui doit être égale à zéro. Nous utilisons le système de coupures comme sur la figure 4.1, adapté à la symétrie du problème. Ainsi seulement la moitié des intégrales doit être déterminée, en plus le système est adapté à la limite $\xi \rightarrow E_2$ où la surface dégénère. En principe la région près de l'axe de symétrie pourrait poser problème, ce qui n'est pas le cas puisque les potentiels ont là un développement en ρ^2 et puisque les expressions analytiques sous forme de fonctions elliptiques existent sur l'axe, voir [59].

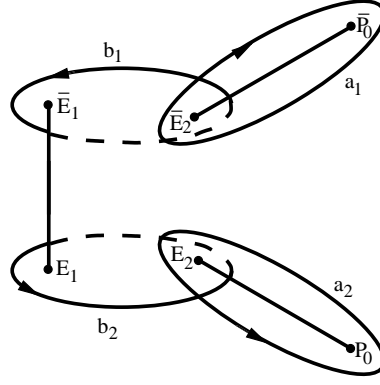


FIG. 4.1: Cycles canoniques ($P_0 = \xi$).

Les différentiels $d\omega_i$ de première espèce sont normalisés par la condition $\oint_{a_j} d\omega_i = 2\pi i\delta_{ij}$, le différentiel $d\omega_{\infty^+\infty^-}$ de troisième espèce est normalisé par les conditions qu'il ait des résidus $+1$ et -1 à ∞^+ et ∞^- respectivement, et que les périodes a soient nuls. La fonction thêta est approchée par la somme

$$\Theta(x) = \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N \exp\left(\frac{1}{2}\pi_{11}n_1^2 + \pi_{12}n_1n_2 + \frac{1}{2}\pi_{22}n_2^2 + n_1x_1 + n_2x_2\right). \quad (4.4)$$

La convergence rapide est due à la partie réelle définie négative de $\Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{pmatrix}$. Ainsi il est possible d'atteindre la précision de machine avec des valeurs de $N \leq 5$. Pour déterminer les intégrales $\omega(\infty^+)$ nous exploitons le fait (voir par exemple [19]) que les périodes b des intégrales de troisième espèce peuvent être exprimées par des intégrales de première espèce,

$$\oint_{b_i} d\omega_{\infty^+\infty^-} = \omega_i(\infty^+) - \omega_i(\infty^-). \quad (4.5)$$

Ces intégrales sont déterminées en même temps que les périodes b des intégrales de première espèce. Les intégrales elliptiques dans le plan équatorial et sur l'axe de symétrie sont calculées de manière équivalente.

Pour calculer les intégrales de chemin non-Abéliennes u_i et I nous appliquons également des méthodes pseudo-spectrales. Les intégrales peuvent être écrites sous la forme de

$$\int_{-1}^1 dt H(t), \quad (4.6)$$

où $H(t)$ est une fonction complexe continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. L'intégration est faite en approximant l'intégrande par une combinaison linéaire de polynômes de Tchebyshev comme avant. En utilisant l'identité

$$\frac{T'_{m+1}}{m+1} - \frac{T'_{m-1}}{m-1} = 2T_m \quad (4.7)$$

nous pouvons calculer les coefficients de l'expansion de la fonction \tilde{H} sur $[-1, 1]$ avec $\tilde{H}' = H$ par la relation $2k\tilde{h}_k = h_{k-1} - h_{k+1}$ ($k > 0$) entre les coefficients. Finalement la valeur de l'intégrale est obtenue comme $g(1) - g(-1)$ après transformation inverse.

Pour illustrer les fonctions métriques nous montrons des figures pour $\epsilon = 0.85$ (où ϵ est relié à le redshift central z_R par $\epsilon = z_R/(1+z_R)$) et $\gamma = 0.99$ (ce qui correspond à $\lambda = 10.12$ and $\delta = 0.856$), cela veut dire un disque dans une situation extrêmement relativiste. La

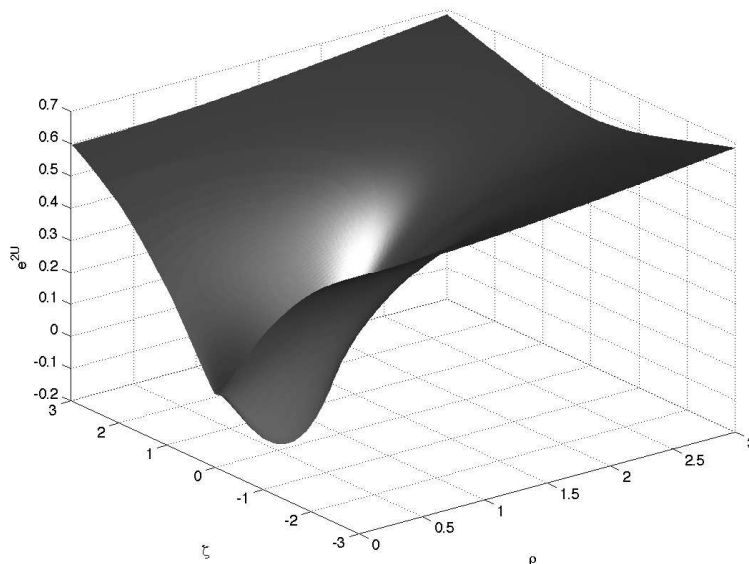


FIG. 4.2: Fonction métrique e^{2U} .

fonction métrique e^{2U} (voir figure 4.2), la partie réelle du potentiel d'Ernst, tend vers 1 pour des distances du disque larges puisque l'espace-temps est asymptotiquement plat. A la frontière du disque la fonction est continue, mais les dérivées normales ont une discontinuité. A cause de la symétrie équatoriale, elle est symétrique en ζ . Près du disque la fonction est négative ce qui indique la présence d'une ergo-région. A l'extérieur du disque e^{2U} est analytique jusqu'à la limite ultrarelativiste. Le minimum global de la fonction se trouve toujours au disque. Par conséquent e^{2U} a les mêmes propriétés analytiques qu'une solution de l'équation de Laplace pour un disque.

La partie imaginaire du potentiel d'Ernst (voir figure 4.3) est une fonction impaire en ζ . Par conséquent elle est nulle dans le plan équatorial à l'extérieur du disque et elle a une discontinuité à la frontière du disque. Pour des distances du disque larges la fonction tend vers zéro.

La fonction métrique ae^{2U} (voir figure 4.4) est symétrique en ζ et continue dans l'espace-temps entier. Sur le disque les dérivées normales ont une discontinuité, à l'extérieur du disque la fonction est analytique. Sur l'axe de symétrie et à l'infini la fonction est identiquement nulle. Puisque la fonction a décrit les effets du dragging à cause de la matière en rotation, il n'est pas surprenant que ces effets sont maximaux sur le disque.

La fonction e^{2k} de la figure 4.5 a des propriétés similaires : elle a une symétrie équatoriale et elle est continue dans l'espace-temps entier avec des dérivées normales

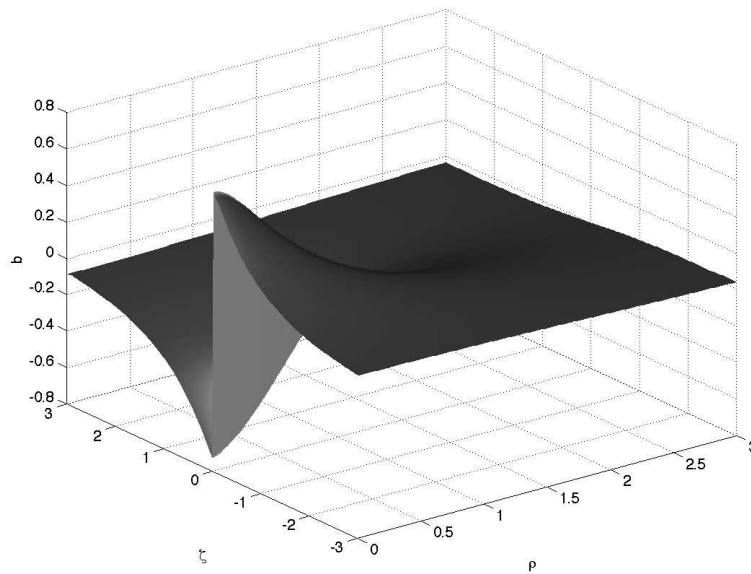
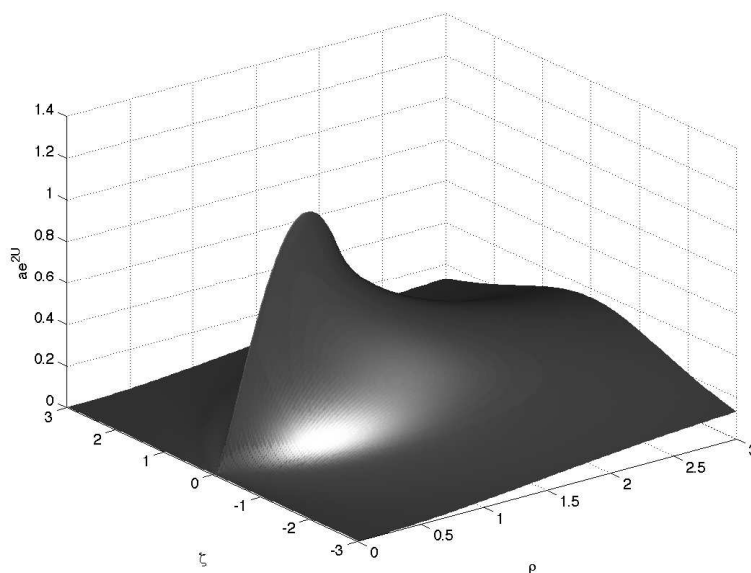


FIG. 4.3: Partie imaginaire du potentiel d'Ernst.

FIG. 4.4: Fonction métrique ae^{2U} .

discontinues au disque. La fonction est identique à 1 sur l'axe de symétrie et à l'infini. Ainsi l'axe de symétrie est régulier et localement euclidien. Les valeurs de la fonction sont seulement sensiblement différentes de 1 près du disque. La fonction métrique $e^{2(k-U)}$ est toujours positive même dans les ergo-régions, ce qui implique que la signature de la métrique n'y change pas. Ainsi la fonction e^{2k} est négative dans les ergo-régions.

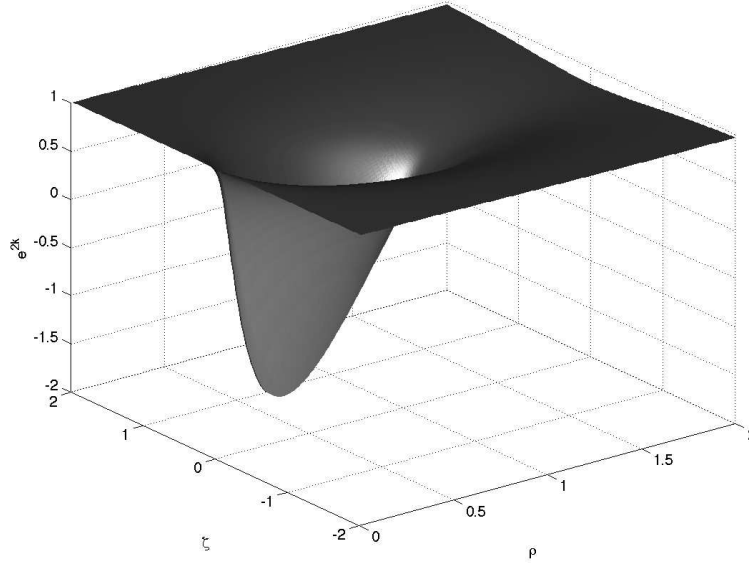


FIG. 4.5: Fonction métrique e^{2k} .

4.2 Ergo-régions et cas limites

La solution pour le disque en contre-rotation est discutée en fonction de deux paramètres, ϵ et γ . Le paramètre ϵ est relié au redshift central, $\epsilon = z_R/(1 + z_R)$ où le redshift des photons émis au centre du disque et détectés à l'infini est donnée par $z_R = e^{-U(0,0)} - 1$. Il est démontré en [71] comment les valeurs de λ et δ dont dépend la solution sont déterminées, si ϵ et γ sont données. Les paramètres ont les limites suivantes :

Limite Newtonienne. $\epsilon = 0$ ($\lambda = 0$), quand les vitesses $\Omega\rho_0$ et les redshifts sont petits. La limite du disque considérée ici est le disque de Maclaurin, la limite de disque des ellipsoïdes de Maclaurin où la pression tend vers zéro.

Limite ultrarelativiste. $\epsilon = 1$ ($\lambda = \infty$ pour $\gamma < 1$ ou $\lambda = 4.629\dots$ pour $\gamma = 1$).

Limite statique. $\gamma = 0$ ($\delta = \delta_s(\lambda)$). Dans cette limite les points de branchements coïncident ($E_i \rightarrow \bar{E}_i$), alors la surface de Riemann dégénère et le potentiel d'Ernst devient réel. La solution fait partie de la classe de Morgan et Morgan [35].

Une composante. $\gamma = 1$ ($\delta = 0$), ce qui représente le disque étudié par Bardeen et Wagoner [45] dont la solution exacte était trouvée par Neugebauer et Meinel [69].

Si le paramètre ϵ (et par conséquent λ) atteint des valeurs de plus en plus larges, on arrive à partir d'une situation Newtonienne à des situations de plus en plus relativistes. Pour des situations assez dynamiques ($\gamma > 0.707\dots$), une ergo-région peut se former. Cela veut dire qu'il y a dans l'espace-temps une région où le vecteur de Killing ∂_t devient nul dans le système de coordonnées fixé à l'infini. Ceci est une singularité des coordonnées, ce qui devient évident en utilisant des coordonnées localement co-rotatives (où la métrique est localement diagonale). Dans ces coordonnées le vecteur de Killing considéré est toujours temporel, sauf si l'ergo-sphère touche l'axe de symétrie ce qui n'arrive qu'à la limite ultrarelativiste. Puisque le potentiel prend toujours son minimum global au disque, une

ergo-sphère apparaît pour la première fois à cet endroit précis.

Pour illustrer la dépendance des ergo-régions des paramètres physiques, nous montrons des ergo-sphères sur la figure 4.6 pour $\gamma = 1$ et plusieurs valeurs de ϵ . Puisque ceci est le cas sans contre-rotation, les effets gravito-magnétiques comme les ergo-régions sont le mieux visibles ici. A partir d'une certaine valeur de ϵ il peut y avoir une ergo-région dans le disque. Les ergo-sphères sont des toroïdes avec une discontinuité sur le disque puisque les dérivées normales des fonctions métriques sont discontinues à cet endroit. Comme fonction de ϵ les ergo-régions deviennent de plus en plus larges et touchent l'axe de symétrie dans la limite ultrarelativiste où l'axe entière fait partie de l'ergo-sphère (voir en bas).

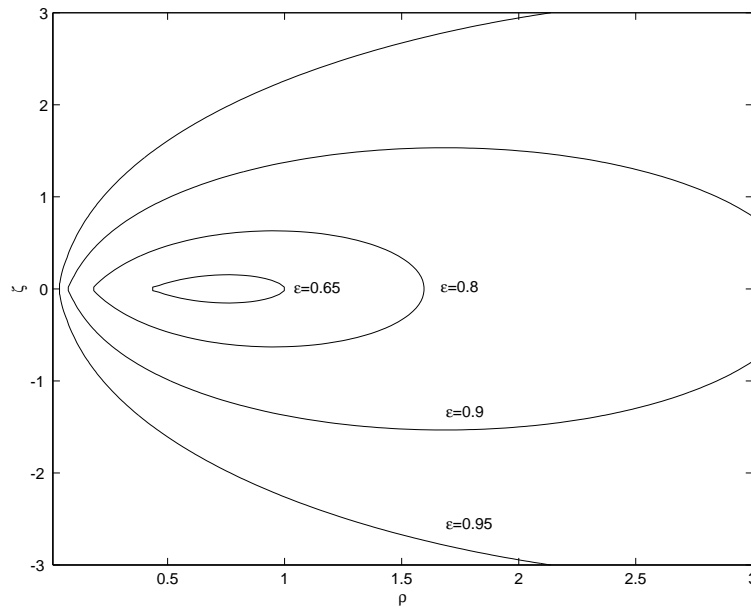


FIG. 4.6: Ergo-sphères pour $\gamma = 1$ et plusieurs valeurs de ϵ .

Si la quantité de la matière en contre-rotation est augmenté, les effets gravito-magnétiques sont supprimés. Ainsi les ergo-régions deviennent de plus en plus larges avec γ . Il n'y a pas d'ergo-région pour $\gamma < 0.707\dots$

Si $\epsilon \rightarrow 1$, le redshift central diverge, ce qui définit le cas ultrarelativiste. Dans cette limite des photons émis du centre du disque n'atteindront plus l'infini. Ce cas est observé même dans des situations sans ergo-sphère. Dans le cas statique le potentiel sur le disque et sa dérivée normale sont donnés par

$$e^{2U} = \frac{\rho}{2} \quad , \quad (e^{2U})_{,\zeta} = \frac{1}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\rho^2}}. \quad (4.8)$$

La vitesse angulaire du disque est $\Omega/2$, ce qui implique que la matière dans le disque entier atteint la vitesse de la lumière. Alors il s'agit des particules de masse nulle. La densité de l'énergie diverge au centre du disque, mais la masse ADM reste finie. Les rayons invariants restent finis dans cette limite.

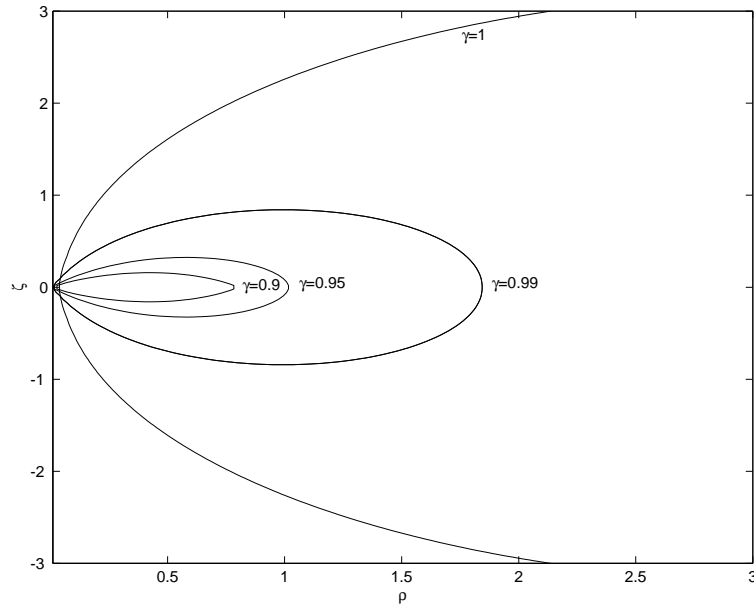


FIG. 4.7: Ergo-sphères pour $\epsilon = 0.95$ et plusieurs valeurs de γ .

Pour $0 < \gamma < 1$ la limite ultrarelativiste est comparable au cas $\gamma = 0$, mais les vitesses dans le disque restent subluminiques et la densité de l'énergie est toujours finie. Le potentiel e^{2U} au disque a la forme montrée en figure 4.8.

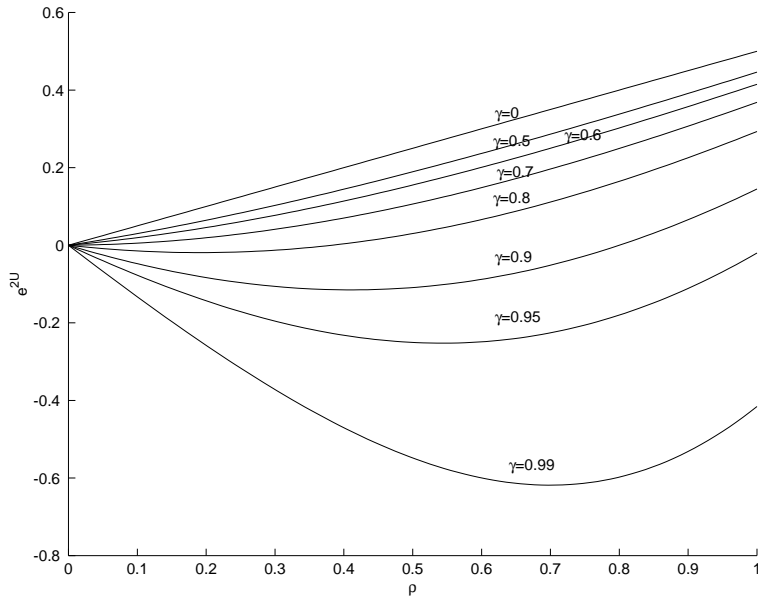


FIG. 4.8: Fonction métrique e^{2U} dans la limite ultrarelativiste au disque pour plusieurs valeurs de γ .

Nous notons que les limites $\epsilon \rightarrow 1$ et $\gamma \rightarrow 1$ n'interchangent pas puisque la limite ultrarelativiste pour les disques en contre-rotation est toujours atteinte pour $\lambda \rightarrow \infty$. En revanche, pour $\gamma = 1$ (seulement une composante), cette limite est atteinte pour une valeur finie de $\lambda = 4.629\dots$. Dans ce cas le potentiel d'Ernst est nul sur l'axe de symétrie entier, ce qu'on peut voir en figure 4.9.

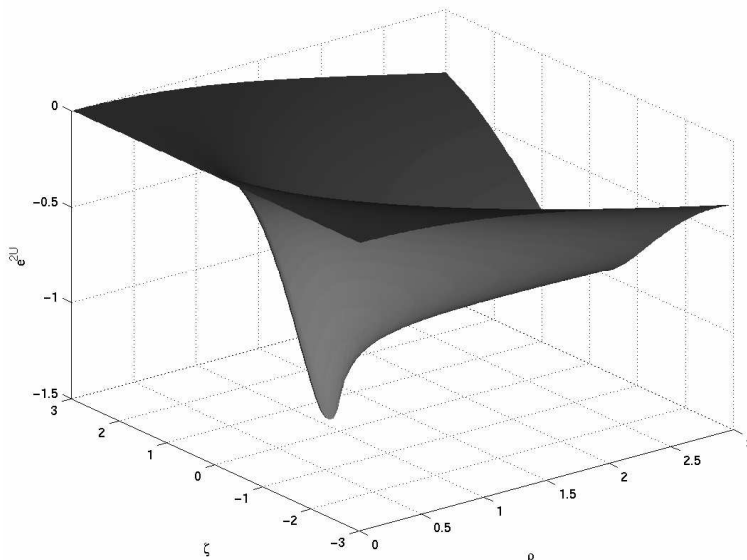


FIG. 4.9: Fonction métrique e^{2U} dans la limite ultrarelativiste pour $\gamma = 1$.

Dans cette limite l'espace-temps n'est pas asymptotiquement plat et l'axe de symétrie est singulier. Néanmoins le quotient M^2/J de masse et de moment angulaire reste fini et tend vers 1, la valeur de la métrique de Kerr extrême. Les fonctions a et k ne peuvent plus être choisies de façon d'être 0 et 1 respectivement sur l'axe, ce qui correspond à un axe singulier, un *Weyl strut*. La quantité $\Omega\rho_0$ est nulle dans cette limite.

Comme l'ont proposé Bardeen et Wagoner [45], cette situation peut être interprétée de la façon suivante : Dans la limite ultrarelativiste le rayon du disque tend vers zéro, un trou noir de Kerr extrême se forme et le disque disparaît derrière l'horizon du trou noir. Un observateur à l'intérieur du disque ne peut plus communiquer avec l'extérieur, il voit un espace-temps qui n'est pas asymptotiquement plat. Si l'on prend la limite $\rho_0 \rightarrow 0$ pour $(\rho, \zeta) \neq (0, 0)$, on trouve (voir [58, 101, 71]) la métrique de Kerr extrême sous la forme analytique.

Nous notons que le cas $\gamma = 1$ est spécial dans le sens que la solution du problème aux limites existe aussi pour des valeurs surextrêmes, alors $\lambda > 4.629\dots$. Comme la démonstration de la régularité globale à l'extérieur du disque en [60] a montré, les solutions surextrêmes ont une singularité dans le plan équatorial pour $\rho > 1$, voir figure 4.10. Ceci démontre qu'il n'est pas suffisant dans le cas d'Ernst de résoudre des problèmes aux limites seulement localement au disque, il faut en plus prouver que la solution trouvée n'a pas de singularité supplémentaire. Il est à noter que les techniques utilisées en [60] peuvent être directement généralisées aux cas de genre $g > 2$.

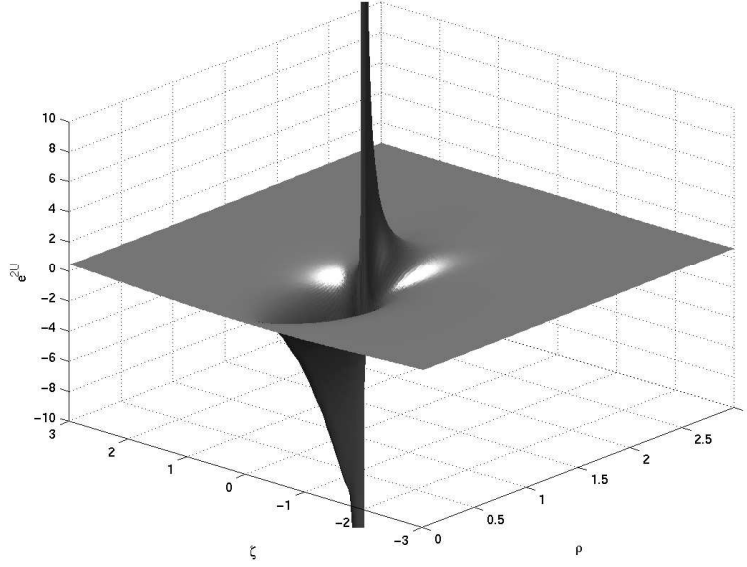


FIG. 4.10: Fonction métrique e^{2U} dans la région surextême pour $\gamma = 1$.

4.3 Le disque

L'interprétation de la matière contenue dans le disque se fait suivant [38]. Un tenseur sous la forme de (3.8) avec trois composantes indépendantes peut être écrit toujours comme suit :

$$S^{\mu\nu} = \sigma_p^* v^\mu v^\nu + p_p^* w^\mu w^\nu, \quad (4.9)$$

où v est un vecteur unitaire temporel et où w est un vecteur unitaire spatial, $(v^\mu) = N_1(1, 0, \omega_\phi)$ et $(w^\mu) = N_2(\kappa, 0, 1)$. Ceci correspond à des observateurs qui sont en rotation de manière à ce que le tenseur S est diagonal pour eux. Ces observateurs peuvent interpréter la matière soit comme un fluide avec une pression purement azimuthale, soit comme un disque de poussière avec deux composantes en contre-rotation si $p_p^*/\sigma_p^* < 1$. On peut montrer numériquement que la fonction p_p^*/σ_p^* est maximale dans le cas statique où elle est seulement nulle dans la limite ultrarelativiste. Dans ce cas extrême la matière circule avec la vitesse de la lumière. Ainsi le disque peut être toujours interprété par ces observateurs comme un disque de poussière avec deux composantes en contre-rotation,

$$S^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma_p^* (U_+^\mu U_+^\nu + U_-^\mu U_-^\nu) \quad (4.10)$$

où $(U_\pm^\mu) = U^*(v^\mu \pm \sqrt{p_p^*/\sigma_p^*} w^\mu)$ sont des vecteurs temporels unitaires. Une autre conséquence de $S_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ est le fait que les particules dans le disque suivent des géodésiques par rapport à la géométrie intérieure du disque puisque les U_\pm sont des combinaisons des vecteurs de Killing. Par conséquent il y a dans le disque deux composantes de poussière avec densité d'énergie propre (dans les sens de [45]) $\sigma_p^*/2$ qui sont en contre-rotation avec la même vitesse angulaire $\Omega_c := (N_2/N_1) \sqrt{p_p^*/\sigma_p^*}$ sur des géodésiques.

La vitesse angulaire des observateurs ω_ϕ est monotonique en γ . Elle est nulle dans le cas statique, où le tenseur S est diagonal, et égal à Ω dans le cas d'une composante où ils sont en co-rotation avec la matière. Pour $\gamma = 0.7$ la dépendance de ω_ϕ de ϵ est montrée en figure 4.11. La valeur au centre du disque est toujours égale à la valeur Newtonienne.

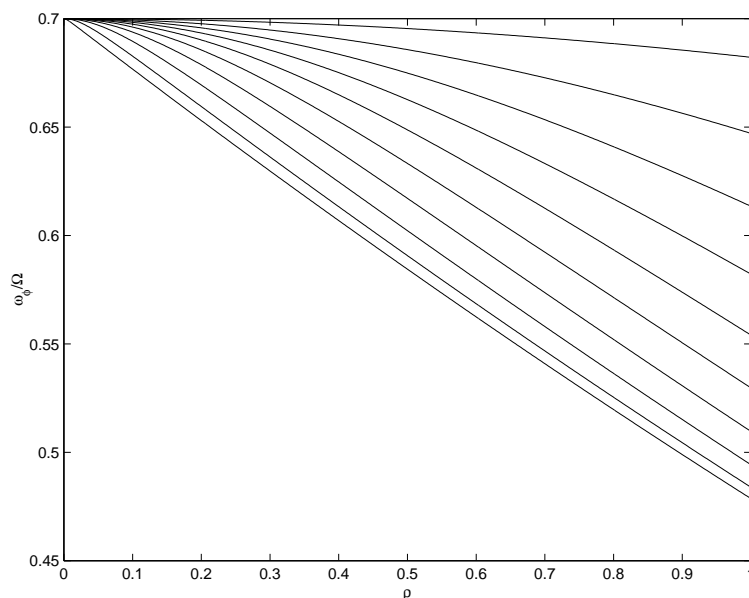


FIG. 4.11: Vitesse angulaire ω_ϕ pour $\gamma = 0.7$ et d'en haut en bas $\epsilon = 0.05, 0.15, \dots, 0.95$.

La vitesse au bord du disque décroît monotiquement avec ϵ .

La vitesse Ω_c des composantes de poussières dans le disque décroît monotiquement avec γ de Ω dans la limite statique à zéro dans la limite d'une composante où les observateurs sont en co-rotation avec la matière. Pour $\gamma = 0.7$ la dépendance de Ω_c de ϵ est montrée en figure 4.12. La valeur centrale est égale à la valeur Newtonienne, tandis que la vitesse au bord du disque décroît monotiquement avec ϵ .

La raison pour laquelle ces vitesses sont maximales au centre est la distribution de la matière dans le disque. Nous montrons la densité de l'énergie pour $\gamma = 0.7$ et plusieurs valeurs de ϵ de figure 4.13. La densité est toujours nulle au bord du disque où la tangente est verticale. Sa valeur au centre augmente avec ϵ . Puisque la matière est fortement concentrée au centre dans les cas plus relativistes, l'influence de la matière sur les vitesses angulaires y est maximale.

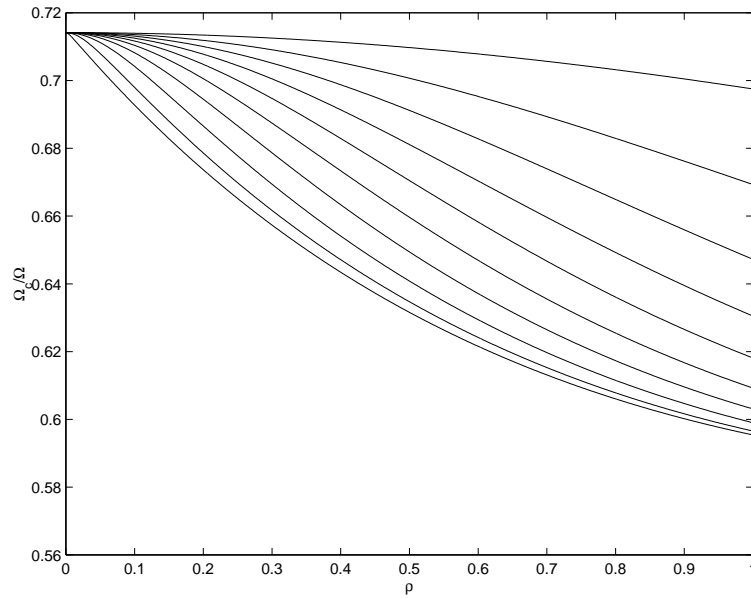


FIG. 4.12: Vitesse angulaire Ω_c pour $\gamma = 0.7$ et de haut en bas $\epsilon = 0.05, 0.15, \dots, 0.95$.

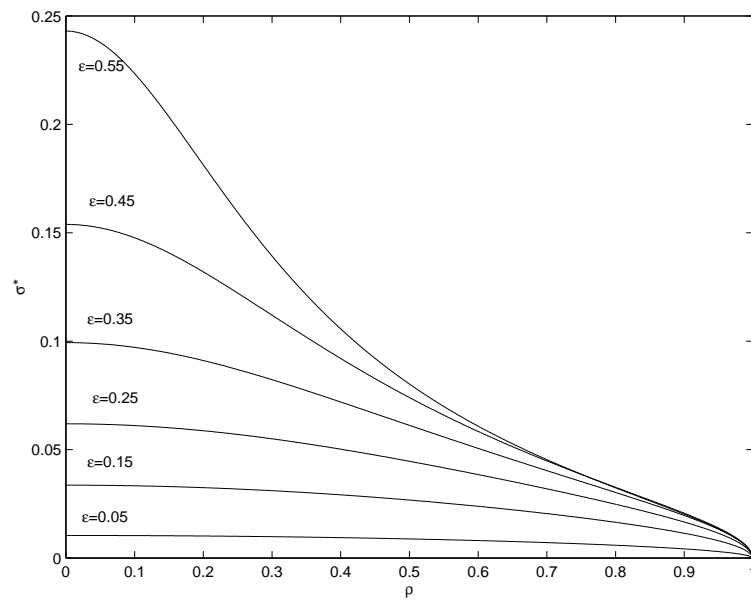


FIG. 4.13: Densité d'énergie σ^* pour $\gamma = 0.7$ et plusieurs valeurs de ϵ .

Chapitre 5

Trous noirs et disques de poussière

Des évidences expérimentales indiquent que des trous noirs massifs avec des disques d'accrétion se trouvent au milieu d'un grand nombre de galaxies. Par conséquent, la configuration contenant un trou noir avec disque de matière est d'intérêt pour l'astrophysique. Puisque la description exacte de ces configurations est un problème mathématique compliqué, des techniques d'approximation sont normalement appliquées (voir par exemple [102]). Des études numériques de l'effondrement d'un objet relativiste par Nakamura [103], Piran et Stark [104] et Nakamura et al. [105] indiquent néanmoins la formation des disques et des anneaux avec une masse non-négligeable en comparaison avec l'objet central. Il serait donc intéressant de trouver une description exacte des trous noirs avec des disques de matières auto-gravitants. En vue des résultats des chapitres précédents, un trou noir avec un disque de poussière stationnaire peut être discuté en utilisant les mêmes méthodes. Pour une étude numérique de ces modèles dans le cas d'une galaxie non-active voir Lanza [106]. Puisqu'il ne peut pas y avoir de matière non-exotique à l'intérieur de l'anneau de lumière, un disque de matière non-tachyonique doit avoir un rayon intérieur qui est plus large que ce rayon. Par conséquent nous sommes intéressés par un disque avec un trou central. Pour un article de revue compréhensive du sujet, voir Semerák [107].

Dans la section 1 nous discutons le problème d'un disque annulaire statique de poussière autour d'un trou noir de Schwarzschild. Puisque dans ce cas les équations d'Einstein sont équivalentes à l'équation de Laplace, on considère la superposition d'une solution de Schwarzschild avec un disque annulaire. Nous utilisons des coordonnées adaptées, dans lesquelles l'équation de Laplace sépare, pour relier ce problème à un problème de Sturm-Liouville pour des équations ordinaires de Lamé. Dans ce cas un théorème dû à Poole [72] peut être appliqué pour prouver l'existence et l'unicité de la solution pour un problème aux limites, voir [73]. Dans la section 2 nous exploitons les formules de chapitre 3 pour démontrer que le problème aux limites pour un disque annulaire est équivalent à un système d'équations intégrales linéaires. Ce système était étudié par Kanwal [109] pour engendrer des solutions approchées. Des solutions explicites sont obtenues dans le cas d'un disque annulaire infini qui est équivalent au cas d'un disque sans trou noir traité en général dans le chapitre 3. Comme exemple nous discutons un disque "isochrone". Dans la section 3 nous étudions la situation stationnaire avec pour but de trouver une solution

explicitite pour un trou noir plus disque annulaire infini de poussière. Nous démontrons que des solutions avec un trou noir peuvent être obtenues sur des surfaces de Riemann dégénérées. On montre que ces solutions ont un horizon comme la métrique de Kerr et un disque annulaire. Le cas d'une surface dégénérée de genre 2 est discuté en détail. On montre que le tenseur d'impulsion-énergie ne satisfait pas les conditions d'énergie dans ce cas.

5.1 Trous noirs avec disques de poussière statiques

Pour décrire des systèmes de trous noirs plus disques statiques nous utilisons les coordonnées et la métrique (2.1) de chapitre 3. Puisque l'équation d'Ernst se réduit à l'équation de Laplace pour le potentiel U , nous devons résoudre une équation linéaire. Par conséquent, nous cherchons la superposition d'un trou noir de Schwarzschild qui est donné en coordonnées de Weyl avec $r_{\pm}^2 = \rho^2 + (\zeta \pm m)^2$ par

$$U_h = \frac{1}{2} \ln \frac{r_+ + r_- - 2m}{r_+ + r_- + 2m}, \quad (5.1)$$

et un disque annulaire dans le plan équatorial pour $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$. La solution de Schwarzschild a un horizon sur l'axe de symétrie entre $-m$ et m . Puisque l'équation de Laplace est linéaire, nous pouvons discuter le problème pour un potentiel $V = U - U_h$, correspondant alors à un disque annulaire sans trou noir. Si des conditions de Dirichlet sur le disque annulaire sont données, ceci est équivalent à un problème aux limites en trois parties,

$$\begin{aligned} V_{\zeta}(\rho, 0) &= 0, & 0 \leq \rho \leq \rho_1, \\ V(\rho, 0) &= F(\rho), & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ V_{\zeta}(\rho, 0) &= 0, & \rho \geq \rho_2, \end{aligned} \quad (5.2)$$

c'est à dire une région intérieure et une région extérieure sans matière (densité et donc $V_{\zeta} = 0$) et des conditions de Dirichlet au disque. Si la densité est donnée sur le disque, la solution est obtenue par l'intégrale de Poisson ou par les formules dans le chapitre 3.1. Dans le cas des conditions de Dirichlet pour des disques de poussière statiques, les relations (3.10) sont équivalentes à

$$\rho \Omega^2(\rho) = (\Omega^2(\rho) \rho^2 + e^{4U}) U_{\rho}, \quad (5.3)$$

alors pour $\Omega = \text{const}$ à

$$e^{2U} = \frac{1}{2} e^{2U_0} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{4U_0} + \Omega^2 \rho^2}, \quad (5.4)$$

où $U_0 = U(0, 0)$. Dans ce cas les conditions limites $F(\rho)$ au disque ont la forme

$$F(\rho) = -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\rho^2 + m^2} - m}{\sqrt{\rho^2 + m^2} + m} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1}{2} e^{2U_0} + \sqrt{\frac{1}{4} e^{4U_0} + \Omega^2 \rho^2} \right). \quad (5.5)$$

Il est utile de définir des quantités sans dimension, $\tilde{\rho} = \rho/\rho_2$, $\tilde{\zeta} = \zeta/\rho_2$ et

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{\rho_1}{\rho_2}, \\ \tilde{m} &= \frac{m}{\rho_1}, \\ \nu &= 2\Omega\rho^2 e^{-2U_0}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Puisque les paramètres U_0 et \tilde{m} seront déterminés par les conditions de régularité du potentiel V pour $\tilde{\rho} = \epsilon$ et $\tilde{\rho} = 1$, les seuls paramètres libres sont ϵ et ν (ρ_2 est l'échelle pour les longueurs). Le paramètre ν est un "paramètre de relativité" : dans le cas Newtonien, Ω et le redshift central (donc $|U_0|$) sont petits, ce qui implique que $\nu \sim 0$. Le paramètre grandit dans les cas plus relativistes jusqu'à l'infini dans la limite ultrarelativiste où le redshift central ($e^{-U_0} - 1$) diverge.

L'approche standard pour résoudre un tel problème est l'introduction des coordonnées qui sont singulières sur le contour où les conditions aux limites sont imposées et dans lesquels l'équation de Laplace se sépare, voir [110]. Suivant Poole [72] nous définissons des coordonnées u et v par

$$\rho + i\zeta = \frac{A}{k'}(\operatorname{dn}(u + iv) - k\operatorname{cn}(u + iv)),\tag{5.7}$$

où cn et dn sont les fonctions elliptiques de Jacobi [111], et où k ($k' = \sqrt{1 - k^2}$) avec $0 < k < 1$ est le module des intégrales elliptiques. La surface $v = 0$ est équivalente à la (double) surface du disque annulaire

$$\zeta = 0, \quad \rho_1 = A\sqrt{\frac{1 - k}{1 + k}} \leq \rho \leq A\sqrt{\frac{1 + k}{1 - k}} = \rho_2,\tag{5.8}$$

alors $A = \sqrt{\rho_1\rho_2}$ et $k = (1 - \epsilon)/(1 + \epsilon)$. Si nous écrivons V sous la forme de $V = \rho^{-\frac{1}{2}}\mathcal{U}(u)\mathcal{V}(iv)$, l'équation de Laplace dans le cas avec symétrie axiale se sépare dans des équations de Lamé [111] $y''(x) = (n(n + 1)k^2\operatorname{sn}^2x + \kappa)y$ avec $n = -1/2$ pour \mathcal{U} et \mathcal{V} ,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}''(u) &= \left(-\frac{1}{4}k^2\operatorname{sn}^2u + \kappa\right)\mathcal{U}(u), \\ \mathcal{V}''(iv) &= \left(-\frac{1}{4}k^2\operatorname{sn}^2iv + \kappa\right)\mathcal{V}(iv),\end{aligned}\tag{5.9}$$

où sn est une des fonctions elliptiques de Jacobi (voir [111]). Les conditions aux limites impliquent $\mathcal{U}(u)\mathcal{V}(0) = \sqrt{\rho}F(\rho)$. Poole [72] a prouvé le théorème suivant :

Théorème 5.1 : (Poole)

Soit $\int_{\rho_1}^{\rho_2} F^2(\rho)d\rho$ défini, le problème aux limites a une solution unique qui est régulière à l'extérieur du disque annulaire $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$ et $\zeta = 0$.

La démonstration de ce théorème que l'on peut trouver dans [72] utilise les fonctions propres et les valeurs propres des équations (5.9). Puisque la fonction V ne doit pas changer

après un tour complet autour du disque annulaire, la fonction \mathcal{U} doit être périodique, $\mathcal{U}(u + 4K) = \mathcal{U}(u)$ où K est l'intégrale complète elliptique de première espèce. Cette condition est suffisante pour établir le spectre des κ_m et pour relier le problème à un problème de Sturm-Liouville pour l'équation (5.9). Les fonctions propres peuvent être données sous forme de séries doubles de Fourier, mais apparemment aucune solution explicite est connue. L'équation pour la fonction G peut être traitée de façon similaire avec la condition que $G(0)$ est fini (on choisit $G(0) = 1$).

Un développement de ces fonctions en puissances de k peut être donné (voir [72] et [112]) pour le cas $\rho_1 \sim \rho_2$. Afin d'obtenir un développement en ϵ , il vaut mieux utiliser les coordonnées de [110], voir [73].

5.2 Équations intégrales

Les expressions intégrales (3.2) à (3.5) pour les solutions de l'équation de Laplace qui sont singulières dans le plan équatorial peuvent servir pour établir deux relations équivalentes entre le potentiel V et la dérivée normale dans ce plan,

$$V(\rho, 0) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\rho \frac{dk}{\sqrt{\rho^2 - k^2}} \int_k^{\rho_2} \frac{\rho' V_\zeta(\rho')}{\sqrt{\rho'^2 - k^2}} d\rho', \quad (5.10)$$

et

$$V(\rho, 0) = -\frac{2}{\pi} \int_\rho^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 - \rho^2}} \int_{\rho_1}^k d\rho' \frac{\rho' V_\zeta(\rho')}{\sqrt{k^2 - \rho'^2}} \quad (5.11)$$

où $V_\zeta = 0$ pour $\rho < \rho_1$ et $\rho > \rho_2$. Les conditions aux limites sur le disque annulaire sont partagées selon Kanwal [109] dans une contribution V_1 dont la continuation analytique est finie pour $\rho = 0$ et une fonction V_2 dont la continuation analytique est finie pour $\rho \rightarrow \infty$,

$$V_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n = U_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\Omega^2 \rho^2 e^{-4U_0}} \right), \quad \rho \leq \rho_2, \quad (5.12)$$

$$V_2(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^{-(n+1)} = -\ln(\sqrt{\rho^2 + m^2} - m) + \ln \rho, \quad \rho \geq \rho_1. \quad (5.13)$$

La dérivée normale de V ,

$$V_\zeta(\rho, 0) = g(\rho), \quad (5.14)$$

est traitée de la même façon,

$$g_1(\rho) + g_2(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < \rho_1 \\ g(\rho), & \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ 0, & \rho > \rho_2 \end{cases} ; \quad (5.15)$$

où g_1 est relié à V_1 par (5.10) et g_2 est relié à V_2 par (5.11). Les fonctions inconnues g_1 et g_2 sont déterminées sous la forme de

$$\int_k^\infty d\rho' \frac{\rho' g_1(\rho')}{\sqrt{\rho'^2 - k^2}} = \begin{cases} S_1(k), & k < \rho_2 \\ -T_1(k), & k > \rho_2 \end{cases}, \quad (5.16)$$

et

$$\int_0^k d\rho' \frac{\rho' g_2(\rho')}{\sqrt{k^2 - \rho'^2}} = \begin{cases} -T_2(k), & 0 < k < \rho_1 \\ S_2(k), & k > \rho_1 \end{cases}. \quad (5.17)$$

Les fonctions S_1 et S_2 sont fixées par les conditions aux limites et par les relations (5.10) et (5.11),

$$V_1(\rho) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\rho dk \frac{S_1(k)}{\sqrt{\rho^2 - k^2}}, \quad \rho < \rho_2, \quad (5.18)$$

$$V_2(\rho) = -\frac{2}{\pi} \int_\rho^\infty dk \frac{S_2(k)}{\sqrt{k^2 - \rho^2}}, \quad \rho > \rho_1. \quad (5.19)$$

Puisqu'il s'agit d'équations intégrales d'Abel, ces relations peuvent être résolues pour les S_i (les intégrales existent avec les conditions du théorème 5.1). De la même manière on peut exprimer les T_i par les g_i par (5.15). Les conditions de régularité (potentiels continus au bords du disque annulaire) impliquent la continuité des g_i et $S_1(\rho_2) = -T_1(\rho_2)$ et $S_2(\rho_1) = -T_2(\rho_1)$. Finalement on obtient le système d'équations intégrales du type Fredholm (voir [73])

$$T_1(s) = \frac{\epsilon^2 s}{\pi} \int_0^1 du \frac{T_2(u)}{1 - \epsilon^2 s u} \quad (5.20)$$

$$+ \frac{\sqrt{s}}{\pi} \int_0^s \frac{dv}{v\sqrt{s-v}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \tilde{m}^2 v}} \arctan \tilde{m} \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2 v}{1 + \epsilon^2 \tilde{m}^2 v}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2 v}} \arctan \tilde{m} \right),$$

$$T_2(t) = \frac{\epsilon}{\pi} \left(\sqrt{t} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{T_1(u)}{1 - \epsilon^2 t u} + \int_0^t \frac{dv}{\sqrt{t-v}} \frac{\nu}{2\sqrt{1 + \epsilon^2 \nu^2 v}} \arctan \nu \sqrt{\frac{1 - \epsilon^2 v}{1 + \epsilon^2 \nu^2 v}} - \frac{U_0 + \frac{1}{4} \ln(1 + \nu^2)}{\sqrt{1 - \epsilon^2 v}} \right), \quad (5.21)$$

où $x = \rho^2$, $s = x_2/k^2$ et $t = x_1 k^2$ avec s, t en $[0, 1]$.

Ce système peut être résolu par un développement en ϵ . Les conditions aux limites $T_1(1) = U_0 + \frac{1}{4} \ln(1 + \nu^2)$ et $T_2(1) = \arctan \tilde{m}$ fixent les constantes U_0 et \tilde{m} sous la forme d'un développement en ϵ ,

$$\begin{aligned} \tilde{m} &= \frac{\epsilon \nu}{\pi} \arctan \nu + \frac{\epsilon^3 \nu^3}{3\pi^3} \arctan^3 \nu - \frac{\epsilon^3 \nu^2}{3\pi} (\nu \arctan \nu + 1) \\ &\quad + \frac{16\epsilon^4}{9\pi^3} \nu \arctan \nu + 0(\epsilon^5), \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$U_0 = -\frac{1}{4} \ln(1 + \nu^2) - \frac{4\epsilon^3 \nu}{3\pi^2} \arctan \nu + 0(\epsilon^5). \quad (5.23)$$

Le paramètre \tilde{m} du trou noir est positif pour ϵ petit, et il est égal à zéro dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ correspondant à un disque sans trou noir. La solution limite fait partie de la famille des solutions de Morgan et Morgan [35]. L'interprétation suggérée du paramètre

est analogue à celle de la vacuole de Schwarzschild [113] dans un univers Friedmann : dans ce cas la masse enlevée de l'univers pour former la vacuole est compactifiée sous la forme d'un trou noir. De la même manière la matière dans le disque pour $\rho < \rho_1$ peut être considérée comme compactifiée dans le trou noir central. Par conséquent la masse du trou noir grandit avec ϵ . Par construction la matière dans le disque n'est jamais tachyonique, même pour $\epsilon \rightarrow 0$ puisque le rayon de Schwarzschild tend aussi vers zéro dans ce cas.

Avec ces relations, nous trouvons

$$T_1 = -\frac{4\epsilon^3 s}{3\pi^2} \nu \arctan \nu + 0(\epsilon^5) \quad (5.24)$$

$$T_2 = \frac{\epsilon\sqrt{t}}{\pi} \nu \arctan \nu - \frac{\epsilon^3 \nu^2}{3\pi} t^{\frac{3}{2}} (\nu \arctan \nu + 1) + \frac{16\epsilon^4 \sqrt{t}}{9\pi^3} \nu \arctan \nu + 0(\epsilon^5). \quad (5.25)$$

Les fonctions T_i données, on peut calculer le potentiel V et par conséquent la métrique dans l'espace-temps entier avec toutes les quantités caractéristiques de la matière comme la densité d'énergie, voir [73]. Pour la contribution du disque annulaire à la masse ADM on trouve par exemple

$$M_d/\rho_2 = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2\nu} \arctan \nu - \frac{1}{2} - \frac{8\epsilon^3}{3\pi^2} \nu \arctan \nu + 0(\epsilon^5) \right). \quad (5.26)$$

Cette expansion converge rapidement pour ϵ . Il est à retenir que les résultats sont exacts en ν , le paramètre relativiste, jusqu'à la limite ultrarelativiste. Ainsi il est évident que les problèmes mathématiques ne sont pas reliés à la relativité, mais aux conditions aux limites de trois parties.

La situation simplifie décisivement dans la limite $\rho_2 \rightarrow \infty$, alors un disque annulaire infini. L'espace temps peut être asymptotiquement plat si la densité d'énergie décroît rapidement dans le disque comme en [36]. Dans ce cas on peut utiliser une transformation de Kelvin comme en [114] pour relier le problème à un disque avec les coordonnées

$$\rho' = \frac{\rho_1 \rho}{\rho^2 + \zeta^2}, \quad \zeta' = \frac{\rho_1 \zeta}{\rho^2 + \zeta^2}. \quad (5.27)$$

Puisque l'opérateur de Laplace est invariant sous des transformations conformes, nous devons trouver une solution de l'équation de Laplace $\Delta' V' = 0$ avec $V' = V/\sqrt{\rho'^2 + \zeta'^2}$ qui est singulière au disque $0 \leq \rho' \leq 1$ dans le plan équatorial.

Comme exemple, nous considérons un potentiel isochrone $U = -M/(b + \sqrt{b^2 + \rho^2})$ qui est souvent utilisé pour décrire les galaxies Newtoniennes (voir par exemple [34]) : dans ce cas la densité de la galaxie est plus ou moins constante près du centre et tend rapidement vers zéro pour $\rho \rightarrow \infty$. Le paramètre M correspond à la masse ADM de l'espace-temps. Ce potentiel étant le mieux applicable pour la gravitation Newtonienne, nous l'appliquons ici pour illustrer les méthodes de solution dans le cas statique relativiste. En plus les situations statiques approcheront des situations Newtoniennes pour de grandes valeurs de ρ où le potentiel isochrone devrait être applicable. Pour un disque isochrone dans le plan équatorial entier voir [36].

Pour trouver la solution V d'un disque annulaire infini isochrone avec le rayon ρ_1 autour d'un trou noir de Schwarzschild, nous devons résoudre un problème aux limites pour un disque de rayon unitaire avec les conditions aux limites :

$$V'(\tilde{\rho}, 0) = -\frac{1}{\rho'} \ln \left(\sqrt{1 + \tilde{m}^2 \rho'^2} - \tilde{m} \rho' \right) - \frac{\tilde{M}}{\tilde{b} \rho' + \sqrt{1 + \tilde{b}^2 \rho'^2}}, \quad 0 \leq \tilde{\rho} \leq 1, \quad (5.28)$$

où $\tilde{M} = M/\rho_1$ et $\tilde{b} = b/\rho_1$. Avec (5.18) nous cherchons une solution sous la forme de

$$V'(\rho', \zeta') = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{S(k) dk}{\sqrt{(ik - \zeta')^2 + \rho'^2}} \quad (5.29)$$

où

$$\frac{1}{4} S(k) = \frac{1}{k} \arctan \frac{\tilde{m}}{k} - \tilde{M} + \tilde{M} \tilde{b} k \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \tilde{b} k \right). \quad (5.30)$$

Afin d'assurer que la densité est finie au bord du disque, nous imposons la condition $S(1) = 0$ qui détermine le paramètre du trou noir \tilde{m} en dépendance de \tilde{b} et \tilde{M} ,

$$\arctan \tilde{m} = \tilde{M} \left(1 - \tilde{b} \arctan \frac{1}{\tilde{b}} \right). \quad (5.31)$$

Avec (5.30) et (5.29) le potentiel V' et donc V est donné dans l'espace-temps entier sous forme de quadratures.

La densité d'énergie du disque annulaire est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} g'(\rho') &= -\frac{1}{\rho'^2} \left(\sqrt{1 - \rho'^2} \arctan \tilde{m} - \frac{\tilde{m}}{\sqrt{\rho'^2 + \tilde{m}^2}} \arctan \sqrt{\frac{1 - \rho'^2}{\rho'^2 + \tilde{m}^2}} \right) \\ &+ \tilde{M} \tilde{b} \left(\int_{\rho'}^1 \frac{dk}{\sqrt{k^2 - \rho'^2}} \arctan \frac{1}{k \tilde{b}} - \frac{1}{1 + \tilde{b}^2 \rho'^2} \arctan \tilde{b} \frac{\sqrt{1 - \rho'^2}}{1 + \tilde{b}^2 \rho'^2} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

et par $g(\rho) = (\rho_1/\rho)^3 g'(\rho_1/\rho)$.

Les mêmes méthodes peuvent être appliquées pour des conditions aux limites générales comme dans le théorème 5.1, ce qui veut dire que le cas d'un disque annulaire autour d'un trou noir statique peut être traité en général comme les disques statiques sans trou noir.

5.3 Cas stationnaire et surfaces de Riemann dégénérées

Les résultats des chapitres précédents indiquent que les disques statiques peuvent être décrits par des solutions de l'équation de Laplace, par exemple sous forme des intégrales du type de Poisson en (2.27), tandis que les solutions de l'équation d'Ernst pour des disques stationnaires sont obtenues sur des surfaces de Riemann. Puisque le cas des trous noirs

avec un disque de poussière est analogue aux disques sans trou central, il est probable que les surfaces des Riemann ont une importance comparable pour ces modèles. Dans la section 2.3 nous avons démontré que les solutions de l'équation d'Ernst sur des surfaces de Riemann non-dégénérées ne peuvent pas s'annuler dans des points isolés sur l'axe de symétrie ce qui indiquerait la présence d'un horizon dans les coordonnées de Weyl. Par conséquent des solutions pour des trous noirs avec disques de matières peuvent être uniquement obtenues sur des surfaces partiellement dégénérées.

Nous considérons une surface $\tilde{\Sigma}$ de genre $g + 2$ de la forme (2.33) dans la limite $E_{g+i} \rightarrow \bar{E}_{g+i} \rightarrow K_i$, $i = 1, 2$ avec $K_1 = -\alpha$ et $K_2 = \alpha$. Sur cette famille de surfaces nous étudions des solutions de l'équation d'Ernst sous la forme de (2.34) avec des fonctions thêta de la caractéristique (les γ_i purement imaginaire avec $\gamma_1 = -\gamma_2$)

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \gamma_1 & 1 + \gamma_2 \end{bmatrix}. \quad (5.33)$$

La relation de cette caractéristique avec la solution de Kerr est établie dans le cas $G = 0$ par la proposition suivante :

Proposition 5.2 :

Soit pour $i = 1, 2$ $c_i = e^{i\pi\gamma_i}$, $r_i = \sqrt{(K_i - \zeta)^2 + \rho^2}$ et

$$e^{-i\phi} = \frac{ic_1 + 1}{ic_1 - 1} \prod_{j=1}^g \sqrt{\frac{K_1 - \bar{E}_j}{K_1 - E_j}} \quad (5.34)$$

avec $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. Alors dans la limite $E_{g+i} \rightarrow \bar{E}_{g+i}$, le potentiel d'Ernst peut être écrit sous la forme de

$$\mathcal{E} = \frac{e^{-i\phi}r_1 + e^{i\phi}r_2 + K_1 - K_2}{e^{-i\phi}r_1 + e^{i\phi}r_2 + K_2 - K_1}, \quad (5.35)$$

le potentiel d'Ernst de la solution de Kerr.

Pour la démonstration voir [74].

Cela veut dire qu'une solution sous la forme de (5.33) avec $G = 0$ est dans la limite considérée pour g arbitraire identique à la solution de Kerr.

Notons pour le cas $G \neq 0$ que la fonction $\tilde{\Theta}(\tilde{x})$ peut être exprimée dans la limite $E_{g+i} \rightarrow \bar{E}_{g+i}$ par des fonctions thêta sur la surface Σ_g donnée par (2.34); elle est proportionnelle à

$$\begin{aligned} & \Theta(x + \omega(E_1^+) + \omega(E_2^+)) + \Theta(x - \omega(E_1^+) + \omega(E_2^+))e^{x_{g+1}-P} \\ & + \Theta(x + \omega(E_1^+) - \omega(E_2^+))e^{x_{g+2}-P} + \Theta(x - \omega(E_1^+) - \omega(E_2^+))e^{x_{g+1}+x_{g+2}}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

où $P = \pi_{(g+1)(g+2)}/2$ et où Θ est la fonction thêta définie sur Σ_g . Toutes les composantes de la métrique peuvent être données pour le potentiel d'Ernst correspondant sous la forme explicite comme avant, voir [74].

Pour des raisons de simplicité la discussion de ces solutions se concentrera sur le cas $g = 0$ où la métrique peut être représentée par des fonctions élémentaires. Nous

considérons le cas d'un disque entre $\rho = 1$ et l'infini dans le plan équatorial. Soit

$$I = -\frac{1}{2\pi i \sqrt{\xi \bar{\xi}}} \int_{-i}^i \frac{\mathcal{A} d\tau}{\sqrt{(\tau - 1/\xi)(\tau - 1/\bar{\xi})}}, \quad (5.37)$$

et

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{r_1}{2\pi i \alpha \sqrt{\xi \bar{\xi}}} \int_{-i}^i \frac{\mathcal{A} \tau d\tau}{(\tau + 1/\alpha) \sqrt{(\tau - 1/\xi)(\tau - 1/\bar{\xi})}}, \\ u_2 &= \frac{r_2}{2\pi i \alpha \sqrt{\xi \bar{\xi}}} \int_{-i}^i \frac{\mathcal{A} \tau d\tau}{(\tau - 1/\alpha) \sqrt{(\tau - 1/\xi)(\tau - 1/\bar{\xi})}}, \end{aligned} \quad (5.38)$$

où $\mathcal{A}(\tau)$ est une fonction continue dans le sens de Hölder avec les mêmes propriétés que G dans les chapitres précédents et avec $\mathcal{A}(0)$ fini et non-nul. Notons que $I(\rho, \zeta)$ représente un disque soumis à une transformation de Kelvin (5.27). Avec les coordonnées

$$X = \frac{r_1 + r_2}{2\alpha}, \quad Y = \frac{r_1 - r_2}{2\alpha}, \quad (5.39)$$

et avec $a_1 = \cot \frac{\phi}{2} e^{u_1}$, $a_2 = \tan \frac{\phi}{2} e^{u_2}$, le potentiel d'Ernst peut être écrit sous la forme de

$$\mathcal{E} = \frac{\Xi - 1}{\Xi + 1} e^I, \quad (5.40)$$

où

$$\Xi = \frac{1 + a_1 a_2}{1 - a_1 a_2 - i(a_1 + a_2)} X + \frac{i(a_1 - a_2)}{1 - a_1 a_2 - i(a_1 + a_2)} Y. \quad (5.41)$$

Nous imposons $\alpha = m \cos \phi$ où m est la contribution du trou noir à la masse ADM. Puisque cette solution est pour $\mathcal{A} = 0$ la solution de Kerr et pour $m = 0$ un disque dans le plan équatorial entre 1 et l'infini, la solution (5.41) peut être considérée comme une "superposition non-linéaire" d'un trou noir avec un disque infini. Pour $\phi = 0$, la solution est statique et le potentiel est identique aux solutions considérés dans la section précédente. Pour $\phi = 0$, la limite extrême de Kerr est atteinte. Dans le cas avec disque il faut assurer que $\Xi + 1 > 0$ dans l'espace-temps entier pour garantir l'absence de singularités à l'extérieur du disque. Ceci peut limiter ϕ , il est possible que la limite extrême ne peut pas être atteinte à cause de cette condition.

La fonction métrique ae^{2U} prend la forme

$$(a - a_0) e^{2U} = -\alpha \times \frac{(a_1 - a_2)(1 - X^2)((1 - Y)^2 + a_1 a_2(1 + Y)^2) - (1 + a_1 a_2)(1 - Y^2)(a_1(1 + X)^2 - a_2(1 - X)^2)}{(1 - a_1 a_2 - (1 + a_1 a_2)Y)^2 + (a_1 + a_2 + (a_1 - a_2)X)^2}. \quad (5.42)$$

La constante a_0 est déterminée sur la partie régulière de l'axe de symétrie, où la fonction a s'annule,

$$a_0 = -2m \sin \phi \mathcal{J}, \quad (5.43)$$

où

$$\ln \mathcal{J} = \frac{1}{2\pi i \alpha^2} \int_{-i}^i \frac{\mathcal{A} d\tau}{\tau^2 - 1/\alpha^2}. \quad (5.44)$$

Sur l'horizon, a est égal à une constante $-1/\Omega_{BH}$ qui peut être interprétée comme vitesse angulaire du trou noir,

$$\frac{1}{\Omega_{BH}} = 2m \cot \frac{\phi}{2} \mathcal{J}. \quad (5.45)$$

Nous trouvons pour la fonction métrique e^{2k} ,

$$e^{2k} = 4 \cot^2 \phi \frac{(1 + a_1 a_2)^2 (Y^2 - 1) + (a_1 - a_2)^2 (X^2 - 1)}{a_1 a_2 (X^2 - Y^2)} e^W, \quad (5.46)$$

où

$$W = \frac{1}{(4\pi i)^2} \int_{-i}^i \int_{-i}^i \frac{K_1 K_2 dK_1 dK_2}{(K_1 - K_2)^2} \mathcal{A}(K_1) \mathcal{A}(K_2) \times \left(\sqrt{\frac{(K_1 - 1/\xi)(K_2 - 1/\bar{\xi})}{(K_2 - 1/\xi)(K_1 - 1/\bar{\xi})}} + \sqrt{\frac{(K_2 - 1/\xi)(K_1 - 1/\bar{\xi})}{(K_1 - 1/\xi)(K_2 - 1/\bar{\xi})}} - 2 \right). \quad (5.47)$$

La fonction est identiquement 1 sur la partie régulière de l'axe. Sur l'horizon, nous avons $e^{2k} = -\tan^2 \phi$ comme dans le cas de Kerr. La surface invariante de l'horizon est donc

$$A_{BH} = \int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^{2\pi} d\zeta d\varphi \sqrt{-g_{22}g_{33}} = 16\pi m^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \mathcal{J}. \quad (5.48)$$

La masse ADM peut être calculée sur l'axe de symétrie,

$$M = m + \frac{1}{4} \mathcal{A}(0) - \frac{i}{2} m \sin \phi (\mathcal{J} - 1/\mathcal{J}). \quad (5.49)$$

Par conséquent il y a un paramètre NUT, une partie imaginaire de la masse, si $\mathcal{J} \neq 1$, cela veut dire l'espace-temps est seulement asymptotiquement plat pour $\mathcal{J} = 1$. Dans ce cas le moment angulaire est donné par

$$J = m^2 \sin \phi \left(1 + \frac{\mathcal{A}(0)}{2m} \right). \quad (5.50)$$

Pour illustrer le comportement des fonctions métriques dans cette classe, nous considérons la "superposition" d'un trou noir de Kerr avec un disque de Morgan et Morgan [35] soumis à une transformation de Kelvin, alors

$$\mathcal{A}(\tau) = -\ln \left(1 - \frac{4}{\delta} (1 + \tau^2) \right); \quad (5.51)$$

ceci représente la limite statique de la classe de solutions discutée dans le chapitre 4. Le paramètre δ varie entre 4, la limite ultrarelativiste de ces disques où la contribution à la

masse ADM diverge, et l'infini, où la masse s'annule. Nous montrons le potentiel d'Ernst pour une situation où la contribution à la masse ADM du disque et du trou noir sont de même ordre.

La fonction métrique dans la figure 5.1 a une symétrie équatoriale. Elle s'annule aux points limites de l'horizon situé sur l'axe et sur l'ergosphère. Au disque qui se trouve entre 1 et l'infini dans le plan équatorial, la fonction n'est pas différentiable.

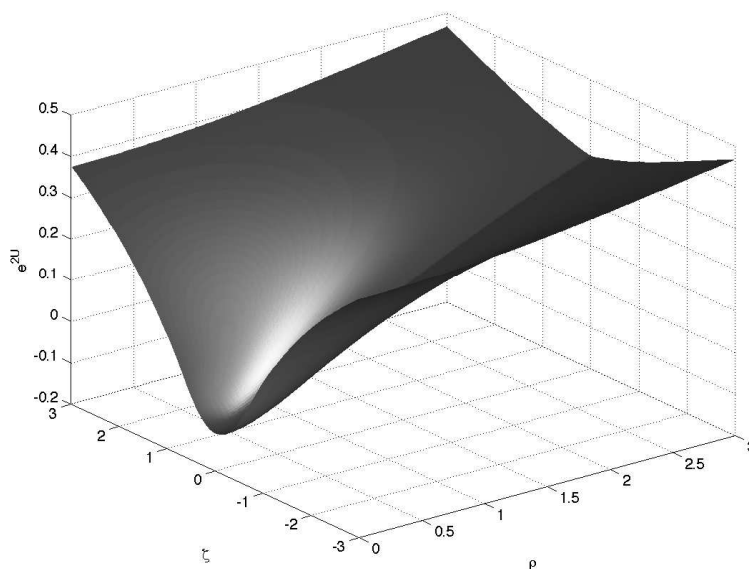


FIG. 5.1: Fonction métrique e^{2U} pour $m = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\delta = 4.1$.

La partie imaginaire du potentiel d'Ernst dans la figure 5.2 est une fonction impaire en ζ . Au disque le potentiel est discontinu.

La fonction métrique ae^{2U} dans la figure 5.3 est une fonction paire en ζ . Elle s'annule sur la partie régulière de l'axe de symétrie. A l'horizon, la fonction a est égale à une constante correspondant à la vitesse angulaire du trou noir. Au disque les dérivées normales sont discontinues.

La fonction métrique e^{2k} dans la figure 5.4 montre aussi la symétrie équatoriale. Sur la partie régulière de l'axe, elle est identiquement 1, à l'horizon elle est égale à $-\tan^2 \phi$. Les dérivées normales sont discontinues au disque.

En principe la matière dans le disque peut être interprétée de la même manière que dans le chapitre 4. Puisque le disque a une extension infini, il faut contrôler si les vitesses dans le disque ne sont pas supraluminiques, cela veut dire si les conditions d'énergie sont satisfaites aussi pour des rayons larges. Si l'intégral \mathcal{J} en (5.44) n'est pas égale à 1, la fonction a ne tend pas vers zéro et la fonction b est asymptotiquement donnée par $b = \text{const}/\rho$, le comportement typique pour un espace-temps avec un paramètre NUT. Par conséquent la composante s_{03} du tenseur d'impulsion-énergie est proportionnelle à $1/\rho$ tandis que la composante s_{00} est proportionnelle à $1/\rho^3$. Cela veut dire que les conditions d'énergie ne peuvent pas être satisfaites dans ce cas pour des valeurs larges de ρ .

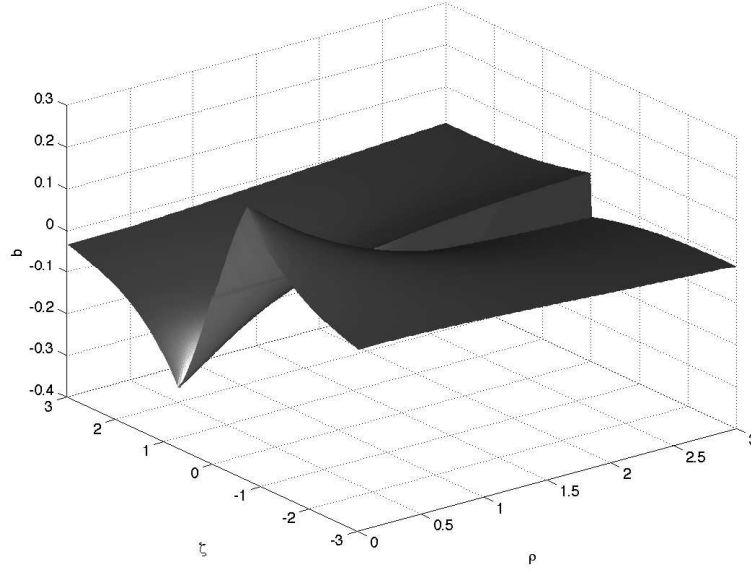


FIG. 5.2: Partie imaginaire du potentiel d'Ernst b pour $m = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\delta = 4.1$.

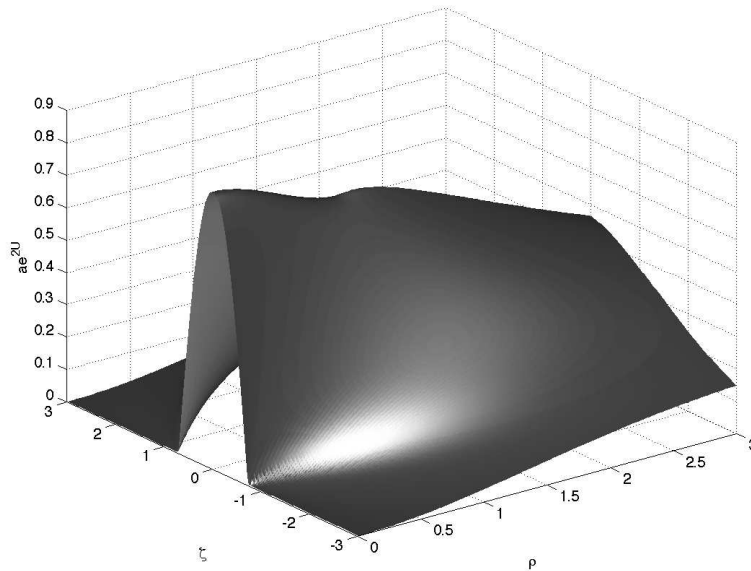


FIG. 5.3: Fonction métrique ae^{2U} pour $m = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\delta = 4.1$.

Si l'intégral $\mathcal{J} = 1$, l'espace-temps est asymptotiquement plat. Dans ce cas la fonction a s'annule asymptotiquement et b est proportionnelle à $1/\rho^3$. Ainsi les vitesses dans le disque peuvent rester subluminiques. La relation (5.44) indique néanmoins que la fonction \mathcal{A} doit changer de signe afin que \mathcal{J} puisse être égal à 1. Ceci implique toutefois que la densité dans le disque doit être négative dans des parties du disque. En somme les disques non-statiques dans le cas $g = 0$ ne peuvent pas satisfaire les conditions d'énergie, il s'agit toujours de la matière exotique. Il faut donc passer au cas $g > 0$ où les paramètres supplémentaires (les

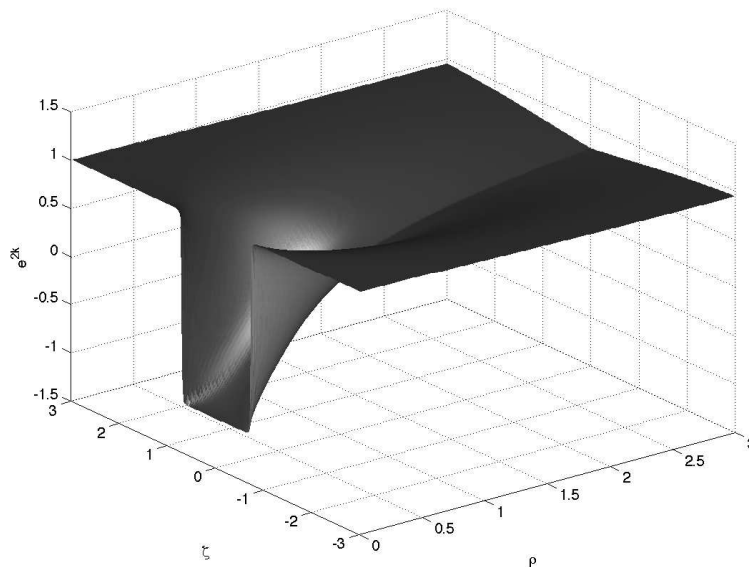


FIG. 5.4: Fonction métrique e^{2k} pour $m = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ et $\delta = 4.1$.

points de branchement E_i) permettront de trouver des disques satisfaisant les conditions d'énergie. En vue des résultats des chapitres précédents, ceci n'est pas surprenant puisque des disques non-statiques sans trou noir étaient obtenus sur des surfaces de Riemann avec $g > 0$. Pour les trous noirs avec disques, il faut donc étudier également le cas de genre $g > 0$.

Chapitre 6

Disques de poussière chargée

Des champs électromagnétiques, en particulier des champs magnétiques sont d'importance pour l'astrophysique dans le contexte des étoiles à neutrons, des naines blanches et de la formation des galaxies. Pour une description complète de ces situations il faut étudier les équations couplées d'Einstein-Maxwell. Dans la section 1 nous présentons ces équations dans le cas stationnaire avec symétrie axiale. Puisque les équations sous la forme d'Ernst [42] sont complètement intégrables, les mêmes techniques que dans le cas sans champs électromagnétiques peuvent être appliquées. Dans la section 2 nous discutons la structure des groupes de symétrie des équations stationnaires, ici $SU(2,1)/S[U(1,1) \times U(1)]$. Cette symétrie permet d'engendrer de nouvelles solutions à partir des solutions données. Nous utilisons une transformation de Harrison sur les solutions hyper-elliptiques discutées dans les chapitres précédents pour engendrer des solutions hyper-elliptiques avec des champs électromagnétiques. La métrique complète peut être donnée sous forme de fonctions thêta. Dans la section 3 nous discutons des disques de poussière avec charges (pour des disques statiques avec des champs magnétiques voir [116]). Comme exemple, nous présentons la transformation du disque avec poussière en contre-rotation des chapitres 3 et 4 dans la section 4. Le disque transformé peut être interprété suivant [117] comme un disque de poussière en contre-rotation avec des courants électriques.

6.1 Les équations d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire avec symétrie axiale

Nous utilisons les mêmes coordonnées et la même métrique (2.1) que dans le cas sans champs électromagnétiques. Le potentiel électromagnétique est jaugé de façon que seulement les composantes A_t et A_ϕ ne sont pas égales à zéro. Ce potentiel satisfait les équations de Maxwell,

$$F_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0, \quad {}^*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = 0, \quad F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}. \quad (6.1)$$

Les équations d'Einstein peuvent être écrites sous la forme suivante ($R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci)

$$R_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}F_{\nu}^{\lambda} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\kappa\lambda}F^{\kappa\lambda}. \quad (6.2)$$

Les équations d'Einstein-Maxwell sans matière dans le cas stationnaire avec symétrie axiale sont équivalentes aux équations complexes d'Ernst [42]

$$\begin{aligned} f\Delta\mathcal{E} &= (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\nabla\mathcal{E}, \\ f\Delta\bar{\Phi} &= (\nabla\mathcal{E} + 2\bar{\Phi}\nabla\Phi)\nabla\bar{\Phi}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

où les potentiels \mathcal{E} et Φ sont indépendants de ϕ , et où $\Re\mathcal{E} = f - \Phi\bar{\Phi}$ et $f = e^{2U}$. Le reste de la métrique peut être obtenu des potentiels d'Ernst \mathcal{E} et Φ par

$$k_{\xi} = \frac{\xi - \bar{\xi}}{f} \left(\frac{1}{4f} (\mathcal{E}_{\xi} + 2\bar{\Phi}\Phi_{\xi})(\bar{\mathcal{E}}_{\xi} + 2\Phi\bar{\Phi}_{\xi}) - \Phi_{\xi}\bar{\Phi}_{\xi} \right), \quad (6.4)$$

$$a_{\xi} = \frac{\rho}{f^2} (i(\Im\mathcal{E})_{\xi} + \Phi\bar{\Phi}_{\xi} - \bar{\Phi}\Phi_{\xi}). \quad (6.5)$$

Les potentiels électromagnétiques sont reliés à Φ par $A_t = \Re\Phi$ et

$$(\Im\Phi)_{\xi} = \frac{i}{\rho} f (A_{\phi,\xi} - aA_{t,\xi}). \quad (6.6)$$

Dans le cas $\Phi = 0$ on obtient le cas d'Einstein pur des chapitres précédents.

Le système (2.3) est complètement intégrable et peut être traité comme la condition d'intégrabilité d'un système différentiel linéaire comme dans le cas d'Einstein pur (voir [43, 76]). Ce système pour une matrice Ψ de la forme 3×3 peut être écrit comme suit [115],

$$\begin{aligned} \Psi_{\xi}\Psi^{-1} &= \begin{pmatrix} B_1 & 0 & C_1 \\ 0 & A_1 & 0 \\ -D_1 & 0 & \frac{1}{2}(A_1 + B_1) \end{pmatrix} + \frac{K - \bar{\xi}}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & B_1 & 0 \\ A_1 & 0 & -C_1 \\ 0 & -D_1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Psi_{\bar{\xi}}\Psi^{-1} &= \begin{pmatrix} B_2 & 0 & C_2 \\ 0 & A_2 & 0 \\ -D_2 & 0 & \frac{1}{2}(A_2 + B_2) \end{pmatrix} + \frac{K - \xi}{\mu^0} \begin{pmatrix} 0 & B_2 & 0 \\ A_2 & 0 & -C_2 \\ 0 & -D_2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

où le paramètre spectral est défini sur la surface Σ_0 comme en (2.9). Les expressions pour A_i , B_i , C_i et D_i ($i = 1, 2$) sont une conséquence de la condition

$$\Psi(\infty^+, z, \bar{z}) = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{E}} + 2\bar{\Phi}\bar{\Phi} & 1 & \sqrt{2}i\bar{\Phi} \\ \mathcal{E} & -1 & -\sqrt{2}i\Phi \\ -2i\bar{\Phi}e^U & 0 & \sqrt{2}e^U \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Les conditions de réalité sont équivalentes à

$$A_2 = \bar{B}_1, \quad A_1 = \bar{B}_2, \quad D_2 = -\bar{C}_1, \quad C_2 = -\bar{D}_1. \quad (6.9)$$

6.2 Transformation de Harrison

Même sans symétrie axiale les équations stationnaires d'Einstein-Maxwell sont équivalentes à un modèle sigma non-linéaire $SU(2,1)/S[U(1,1) \times U(1)]$. Ce groupe peut être paramétrisé par des matrices triangulaires de la forme 3×3 ,

$$V = \begin{pmatrix} \sqrt{f} & 0 & 0 \\ i\sqrt{2}\Phi & 1 & 0 \\ (b+i|\Phi|^2)/\sqrt{f} & (\sqrt{2}\Phi)/\sqrt{f} & 1/\sqrt{f} \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

La matrice V satisfait

$$V^\dagger \eta V = \eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.11)$$

cela veut dire qu'elle est unitaire par rapport à la métrique η de $SU(2,1)$. L'action de $\mathcal{G} \in SU(2,1)$ sur V est $V \rightarrow h(V, \mathcal{G})V\mathcal{G}^{-1}$ où $h(V, \mathcal{G}) \in S[U(1,1) \times U(1)]$ restaure la jauge triangulaire de V . Pour une paramétrisation invariante de jauge la matrice $\chi := \Xi V^\dagger \Xi V$ avec $\Xi = \text{diag}(1, -1, 1)$ est introduite sur laquelle l'action de $\mathcal{G} \in SU(2,1)$ est donnée par $\chi \rightarrow \Xi(\mathcal{G}^{-1})^\dagger \Xi \chi \mathcal{G}^{-1}$. Nous avons

$$\chi = \begin{pmatrix} f - 2|\Phi|^2 + (b^2 + |\Phi|^4)/f & \sqrt{2}\bar{\Phi}(b - i|\Phi|^2 + if)/f & (b - i|\Phi|^2)/f \\ -\sqrt{2}\Phi(b + i|\Phi|^2 - if)/f & 1 - 2|\Phi|^2/f & -\sqrt{2}\Phi/f \\ (b + i|\Phi|^2)/f & \sqrt{2}\bar{\Phi}/f & 1/f \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

La symétrie $SU(2,1)$ peut être utilisée pour engendrer des solutions par l'action d'un élément \mathcal{G} . Nous présentons la liste des transformations infinitésimales et de leurs

conséquences : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 \\ \theta_2 & \theta_3 & 0 \end{pmatrix}$ représente des transformations de jauge qui ajoutent

des constantes sans importance physique à $\Im\mathcal{E}$ et $\Im\Phi$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une trans-

formation d'Ehlers qui change $f \rightarrow b$, $\begin{pmatrix} i\theta & 0 & 0 \\ 0 & -2i\theta & 0 \\ 0 & 0 & i\theta \end{pmatrix}$ est une transformation de

dualité électromagnétique, $\begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta \end{pmatrix}$ est une transformation d'échelles, $f, b, \Phi \rightarrow$

$e^\theta f, e^\theta b, e^{\theta/2}\Phi$, et $\begin{pmatrix} 0 & -i\theta & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\theta} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une transformation de Harrison [75] qui change $f \rightarrow \Phi$.

Ici nous sommes intéressés aux transformations de Harrison pour engendrer des solutions des équations d'Einstein-Maxwell avec une constante supplémentaire à partir des

solutions du cas d'Einstein pur. Nous considérons des transformations des solutions avec symétrie équatoriale qui sont asymptotiquement plates, ce qui veut dire que $f \rightarrow 1$, $\Phi \rightarrow 0$ et $b \rightarrow 0$ pour $|\xi| \rightarrow \infty$. Afin d'assurer que les solutions transformées ont les mêmes propriétés, nous considérons une combinaison de transformations (voir [75]). La matrice \mathcal{G} peut être écrite sous la forme de

$$\mathcal{G} = \frac{1}{1-q^2} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2}q & -iq^2 \\ -i\sqrt{2}q & 1+q^2 & -\sqrt{2}q \\ iq^2 & -\sqrt{2}q & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.13)$$

Puisque nous avons imposé une symétrie équatoriale, la solution n'a pas de monopole magnétique et de paramètre NUT. Elle peut être écrite sous la forme de

$$f' = \frac{(1-q^2)^2 f}{(1-q^2 f)^2 + q^4 b^2} \quad (6.14)$$

$$b' = \frac{(1-q^4)b}{(1-q^2 f)^2 + q^4 b^2} \quad (6.15)$$

$$\Phi' = -q \frac{(1-f)(1-q^2 f) + q^2 b^2 + ib(1-q^2)}{(1-q^2 f)^2 + q^4 b^2}. \quad (6.16)$$

Le paramètre réel q doit se trouver dans la région $0 < |q| < 1$, pour $q > 1$ l'espace-temps transformé aurait une masse négative. La valeur $q = 0$ correspond à la solution non-transformée. Par conséquent des formules (6.16) les fonctions f' , b' and Φ' sont analytiques, si la métrique non-transformée était analytique.

La fonction métrique k est invariante sous l'action des transformations $SU(2,1)$. La fonction métrique a peut être déterminée, si la matrice Ψ dans (6.7) est connue pour le cas non-transformé (voir [75]). Avec

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{\rho}{2f} \left(\frac{\Theta[m](u)\Theta[m](u+2\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))}{L\Theta[m](u+\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))\Theta[m](u+\omega(\infty^-))} - 1 \right), \\ S_{21} &= -\frac{\rho\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}}}{2f} \left(\frac{\Theta[m](u)\Theta[m](u+2\omega(\infty^+) + \omega(\bar{\xi}))}{L\Theta[m](u+\omega(\infty^+) + \omega(\bar{\xi}))\Theta[m](u+\omega(\infty^+))} - 1 \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

où

$$L = \frac{\Theta(\omega(\infty^-))\Theta(\omega(\infty^-) + \omega(\bar{\xi}))}{\Theta(0)\Theta(\omega(\bar{\xi}))}, \quad (6.18)$$

nous obtenons

$$a' - a'_0 = -\frac{2}{(1-q^2)^2} (\mathcal{S}_{12} - q^4 \mathcal{S}_{21}). \quad (6.19)$$

La constante a'_0 est déterminée par la condition que $a = 0$ sur la partie régulière de l'axe de symétrie,

$$a'_0 = a_0 \frac{1+q^4}{(1-q^2)^2}. \quad (6.20)$$

Un exemple bien connu de la transformation de Harrison est la solution de Reissner-Nordström comme solution de Schwarzschild transformée. Avec (5.1) et (6.16)

$$f' = \frac{(r_+ + r_-)^2 - 4m^2}{(r_+ + r_- + 2m')^2}, \quad \Phi' = \frac{2Q}{r_+ + r_- + 2m'}, \quad (6.21)$$

et $b' = 0$. Par conséquent nous obtenons une solution statique avec masse m' et charge Q qui sont reliées par $m'^2 - Q^2 = m^2$.

En général si l'asymptotique de la solution non-transformée est donnée sur l'axe de symétrie par $f = 1 - 2M/|\zeta| + \dots$, $b = -2J/\zeta^2 + \dots$ et $\Phi = Q/|\zeta| - iJ_M/\zeta^2 + \dots$ où M est la masse ADM, J est le moment angulaire, Q est la charge électrique et J_M est le moment magnétique, la solution transformée aura une asymptotique similaire avec

$$M' = M \frac{1+q^2}{1-q^2} - \frac{2q}{1-q^2}Q, \quad J' = J \frac{1+q^2}{1-q^2} - \frac{2q}{1-q^2}J_M, \quad (6.22)$$

et

$$Q' = Q \frac{1+q^2}{1-q^2} - \frac{2q}{1-q^2}M, \quad J'_M = J_M \frac{1+q^2}{1-q^2} - \frac{2q}{1-q^2}J. \quad (6.23)$$

Il est intéressant de noter que les quantités $M^2 - Q^2$ et $J^2 - J_M^2$ sont des invariants de la transformation qui sont reliées à l'opérateur de Casimir du groupe $SU(2, 1)$. Si la solution non-transformée est sans charge, la relation extrême $M' = \pm Q'$ sera seulement possible dans la limite $M \rightarrow 0$.

Un invariant supplémentaire est $J_M M - JQ$ qui est important dans le contexte du rapport gyromagnétique

$$g_M = \frac{2MJ_M}{JQ}. \quad (6.24)$$

Relation (6.22) implique que $g_M = 2$ si $Q = J_M = 0$ et $q \neq 0$. Par conséquent toutes les solutions des équations d'Einstein-Maxwell qui peuvent être engendrées par une transformation de Harrison d'une solution sans champs électromagnétiques comme la famille de Kerr-Newman de Kerr ont $g_M = 2$. Due à l'invariance de $J_M M - JQ$ sous les transformations de Harrison des solutions avec $g_M = 2$ sont transformées en des solutions avec $g_M = 2$.

6.3 Disques de poussière chargée en contre-rotation

Comme dans le cas d'Einstein pur (i.e. en l'absence d'un champ électromagnétique) nous sommes intéressés aux configurations de disques, car ces modèles permettent de trouver des solutions globales et parce que des disques avec des champs magnétiques sont d'intérêt pour l'astrophysique. En discutant la matière dans les disques nous suivons [117]. Le tenseur d'impulsion-énergie est donné par (3.7), la même approche qu'au chapitre 3 peut être appliquée. Une discontinuité dans les champs électromagnétiques au disque est due à une densité de courant J^α donnée par

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}} \left(\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} F^{\alpha\beta} \right)_{;\beta} = -4\pi J^\alpha. \quad (6.25)$$

Les contributions à J résultent des dérivées normales discontinues au disque. Nous définissons j^α dans le disque comme $s^{\alpha\beta}$ par la relation $J^\alpha =: e^{-2(k-U)} j^\alpha \delta(\zeta)$. Le tenseur d'impulsion-énergie ne produit pas de contributions de type δ puisque $F^{\alpha\beta}$ est fini au disque. Avec (6.25) nous obtenons à cause de la symétrie équatoriale (les dérivées sont déterminées pour $\zeta \rightarrow 0, \zeta > 0$)

$$2\pi j_0 = -(\Re\Phi)_\zeta, \quad 2\pi(j_3 - aj_0) = -\frac{\rho}{f}(\Im\Phi)_\rho. \quad (6.26)$$

Les identités de Bianchi, $T_{;\nu}^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} J_\nu$, au disque sont équivalentes à

$$g_{00,\rho} s^{00} + 2g_{03,\rho} s^{03} + g_{33,\rho} s^{33} = 2(F_{10} j^0 + F_{13} j^3). \quad (6.27)$$

Cette équation peut servir de nouveau pour éliminer la fonction k des conditions aux limites.

La matière dans le disque peut être interprétée comme en [117] de deux manières. D'une part on peut introduire comme au chapitre 4 des observateurs pour lesquels le tenseur S est diagonal, cela veut dire qui sont en rotation par rapport à l'infini,

$$\omega_\phi = \frac{g_{33}s_{00} - g_{00}s_{33} + \sqrt{(g_{33}s_{00} - g_{00}s_{33})^2 + 4(g_{03}s_{00} - g_{00}s_{03})(g_{03}s_{33} - g_{33}s_{03})}}{2(g_{03}s_{33} - g_{33}s_{03})}. \quad (6.28)$$

Si les conditions d'énergie sont satisfaites, ces observateurs peuvent interpréter la matière soit comme un fluide avec une pression purement azimutale, soit comme deux composantes de poussière en contre-rotation, $S^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sigma^*(U_+^\alpha U_+^\beta + U_-^\alpha U_-^\beta)$ avec $(U_\pm^\alpha) = N(1, 0, \pm\Omega_c)$. Le mouvement de la matière est géodésique si $j_\alpha w^\alpha = 0$, cela veut dire s'il n'y a pas de courants dans le système de référence de ces observateurs.

D'autre part on peut interpréter la matière dans le disque comme deux composantes de poussière en contre-rotation géodésique dans le système de référence asymptotiquement non-rotatif. Alors on cherche une décomposition de la matière sous la forme de

$$s^{\alpha\beta} = \sigma_m^+ U_+^\alpha U_+^\beta + \sigma_m^- U_-^\alpha U_-^\beta, \quad j^\alpha = \sigma_e^+ U_+^\alpha + \sigma_e^- U_-^\alpha \quad (6.29)$$

avec $(U_\pm^\alpha) = N_\pm(1, 0, \omega_\pm)$. La vitesse angulaire est obtenue par l'équation électro-géodésique (équation géodésique en présence d'une force de Lorentz) pour chaque composante,

$$\frac{1}{2}\sigma_m^\pm (g_{00,\rho} + 2g_{03,\rho}\omega_\pm + g_{33,\rho}\omega_\pm^2) = \sigma_e^\pm (A_{0,\rho} + A_{3,\rho}\omega_\pm). \quad (6.30)$$

Ce système d'équations peut être toujours résolu à cause des conditions de Bianchi. Mais l'interprétation physique est seulement possible si les vitesses angulaires sont réelles. En outre les vitesses $\omega_\pm \rho$ dans le disque doivent être inférieures à 1, la vitesse de la lumière, et les densités d'énergie doivent être positives pour éviter de la matière tachyonique ou exotique. Relation (6.29) implique (voir [75])

$$\sigma_e^+ N_+^2 = \frac{j^3 - \omega_- j^0}{\omega_+ - \omega_-}, \quad \sigma_e^- N_-^2 = \frac{j^3 - \omega_+ j^0}{\omega_- - \omega_+}, \quad (6.31)$$

$$\sigma_m^+ N_+^2 = \frac{s^{03} - \omega_- s^{00}}{\omega_+ - \omega_-}, \quad \sigma_m^- N_-^2 = \frac{s^{03} - \omega_+ s^{00}}{\omega_- - \omega_+}, \quad (6.32)$$

et

$$\omega_- = \frac{s^{33} - \omega_+ s^{03}}{s^{03} - \omega_+ s^{00}}. \quad (6.33)$$

6.4 Disque transformé

Comme exemple appartenant à la classe de solutions hyper-elliptique des équations d'Einstein-Maxwell obtenue par une transformation de Harrison, nous considérons la transformation du disque discuté aux chapitres 3 et 4.

Puisque la fonction métrique k est invariante sous les transformations de Harrison, elle n'est pas changée en comparaison avec le chapitre 4. La fonction métrique f' en (6.14) est proportionnelle à f , ce qui implique que la fonction transformée a des zéros là où la fonction non-transformée s'annule. Puisque les zéros de f définissent les ergo-régions, la solution transformée a les mêmes ergo-régions que f .

Pour $|q| \ll 1$, les fonctions f et b ne sont pas plus ou moins affectées puisqu'elles sont quadratiques en q . Le potentiel électromagnétique Φ est dans cette limite avec (6.16) de la forme

$$\Phi' = -q(1 - f + ib). \quad (6.34)$$

Pour $|q| \sim 1$, $|f'|$ devient plus petit près de l'origine. Puisque les valeurs asymptotiques ne sont pas changées, f doit croître plus vite vers l'infini, ce qui est évident par la formule pour la masse (6.22). Dans la limite singulière $q \rightarrow 1$, la fonction f' est égale à 0 pour toutes les valeurs finies de ξ , mais égale à 1 à l'infini. Le comportement de b' est similaire, sauf que b' est une fonction impaire qui est nulle à l'infini. La fonction a est aussi singulière dans la limite $q \rightarrow 1$, ce qui est évident en vue du facteur $1/(1 - q^2)^2$ et de la constante a_0 (6.20). Ceci implique que la fonction ne peut plus être choisie d'être égale à zéro sur l'axe de symétrie. Dans la formule pour la fonction métrique $g'_{03} = -a'f'$, les facteurs $(1 - q^2)^2$ s'éliminent et la fonction ne dépend pas décisivement de q . Le comportement typique de g'_{03} pour des valeurs q avec $0 < |q| < 1$ est montré en 6.1. La fonction métrique est paire en ζ et zéro sur l'axe de symétrie et à l'infini. Elle est analytique à l'extérieur du disque où les dérivées normales ont une discontinuité.

Le potentiel électromagnétique tend vers -1 dans la limite $q \rightarrow 1$ pour ξ fini, mais il est nul à l'infini. La partie imaginaire est directement proportionnelle à b' , voir (6.15) et (6.16). Nous montrons des situations typiques pour des valeurs de q avec $0 < |q| < 1$ dans la figure 6.2 pour la partie réelle et dans la figure 6.3 pour la partie imaginaire. La partie réelle est une fonction paire en ζ qui est nul à l'infini et qui a des dérivées normales discontinues au disque. La partie imaginaire du potentiel Φ est une fonction impaire en ζ qui est zéro à l'infini et qui est discontinue au disque.

Puisque f' a les mêmes zéros que f , la solution transformée a un redshift divergent au même endroit que f , cela veut dire que les limites ultrarelativistes coïncident. Le cas $\gamma \neq 1$ correspond à un disque chargé avec extension finie et avec un redshift central divergent.

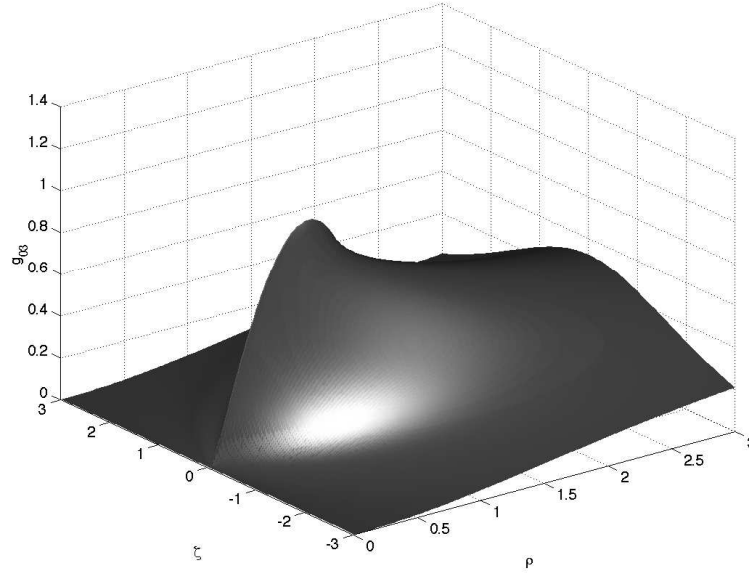


FIG. 6.1: Fonction métrique g'_{03} pour $\epsilon = 0.85$, $\gamma = 0.95$ et $q = 0.6$.

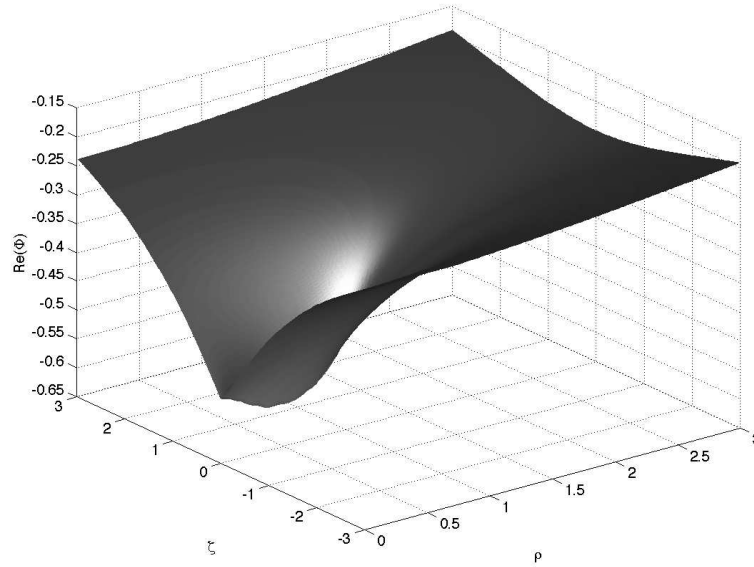


FIG. 6.2: Partie réelle du potentiel électromagnétique Φ pour $\epsilon = 0.85$, $\gamma = 0.95$ et $q = 0.6$.

Pour $\gamma = 1$ la solution à l'extérieur du disque peut être interprétée comme une métrique de Kerr-Newman extrême qui peut être obtenue comme une transformation de Harrison de la métrique de Kerr.

Dans la limite Newtonienne $\lambda \rightarrow 0$ on a $f = 1 + \lambda U_N + \dots$ et $b = \lambda^{\frac{3}{2}} \tilde{b} + \dots$. Par conséquent avec (6.14) à (6.16) pour $1 - q^2 \gg \lambda$

$$f' = 1 + \frac{1 + q^2}{1 - q^2} \lambda U_N, \quad b' = \frac{1 + q^2}{1 - q^2} \lambda^{\frac{3}{2}} \tilde{b} \quad \Phi' = -\frac{q}{1 - q^2} (\lambda U_N + i \lambda^{\frac{3}{2}} \tilde{b}). \quad (6.35)$$

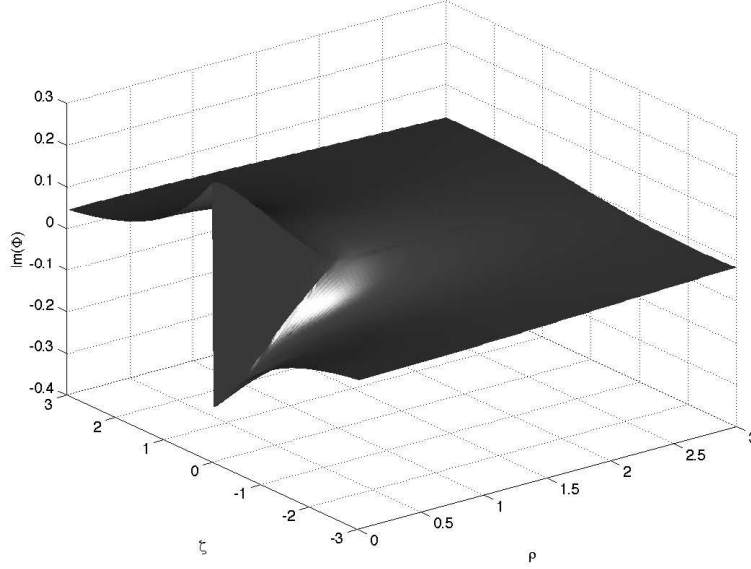


FIG. 6.3: Partie imaginaire du potentiel électromagnétique Φ pour $\epsilon = 0.85$, $\gamma = 0.95$ et $q = 0.6$.

La solution transformée a la même limite Newtonienne que la solution non-transformée et le comportement post-newtonien n'en est pas affecté. Le champ magnétique est de l'ordre Ω^3 comme b' .

La masse étant de l'ordre λ dans la limite Newtonienne il est possible d'avoir une limite extrême avec $M' = Q'$ comme dans la solution de Reissner-Nordström. Nous écrivons $1 - q^2 = \kappa\lambda$ avec $\kappa > 0$, ce qui implique dans la limite $\lambda \rightarrow 0$ pour (6.14) et (6.16)

$$f' = \frac{\kappa^2}{(\kappa - U_N)^2} \quad \Phi' = \frac{U_N}{\kappa - U_N}, \quad (6.36)$$

une solution statique comparable à la solution de Reissner-Nordström extrême, mais avec une discontinuité des dérivées normales de la métrique au disque et avec $f' \neq 0$ à l'origine. Puisque $U_N < 0$ dans l'espace-temps entier la solution est régulière à l'extérieur du disque. Ainsi on obtient une solution régulière à l'extérieur du disque pour $q \rightarrow 1$.

Dans la limite statique, nous avons $b' = \Im\Phi' = 0$, car ils sont les deux proportionnels à b , et

$$f' = \frac{(1 - q^2)f}{(1 - q^2 f)^2}, \quad \Phi' = -q \frac{1 - f}{1 - q^2 f}. \quad (6.37)$$

La transformation de Harrison d'une solution statique est donc statique avec un champ électromagnétique qui est un champ électrique pur.

La matière dans le disque transformé peut être interprétée par les observateurs (6.28) comme deux composantes de poussière en contre-rotation avec des courants électriques. Mais puisque $j_\alpha w^\alpha$ s'annule seulement dans le cas non-transformé (voir figure 6.4), une interprétation en termes de poussière électro-géodésique n'est pas possible par les observateurs (6.28). L'interprétation mettant en présence deux composantes de poussière

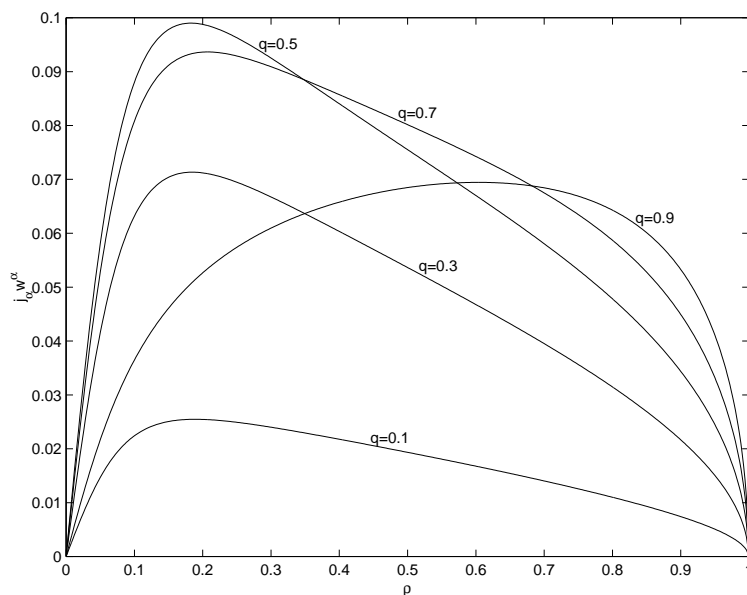


FIG. 6.4: Courants dans le système (6.28) pour $\epsilon = 0.85$, $\gamma = 0.95$, et $q = 0, \dots, 0.9$.

en contre-rotation électro-géodésique dans le système de référence asymptotique est possible dans des situations proches de la limite Newtonienne avec $q \sim 0$. Pour les cas plus relativistes, la matière dans le disque est exotique avec des vitesses supraluminiques et des densités négatives. Les vitesses angulaires ω_{\pm} sont montrées dans la figure 6.5 pour $\epsilon = 0.36$ et $\gamma = 0.08$ où des valeurs de q jusqu'à 0.75 sont possibles. Les densités d'énergie

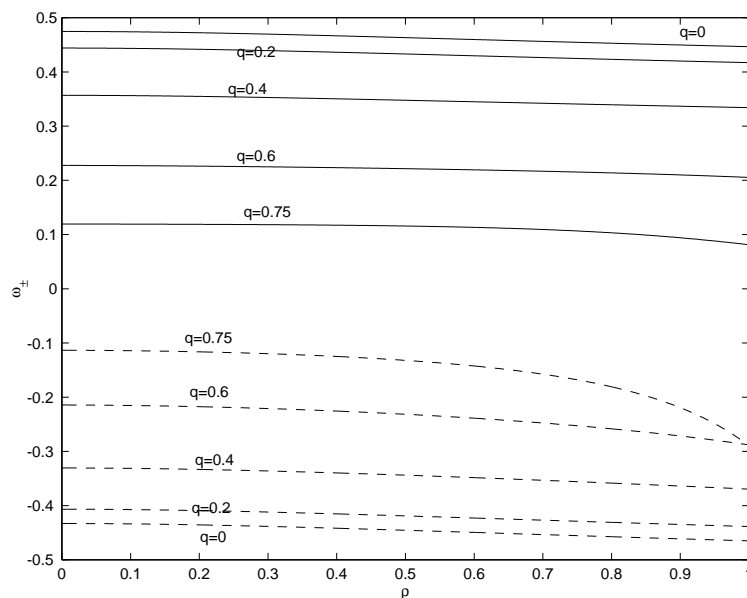


FIG. 6.5: Vitesses angulaires ω_{\pm} pour $\epsilon = 0.36$, $\gamma = 0.08$, et $q = 0, 0.2, \dots, 0.8$.

sont présentées en figure 6.6. Elles sont toujours nulles au bord du disque. Pour $|q| \rightarrow 1$

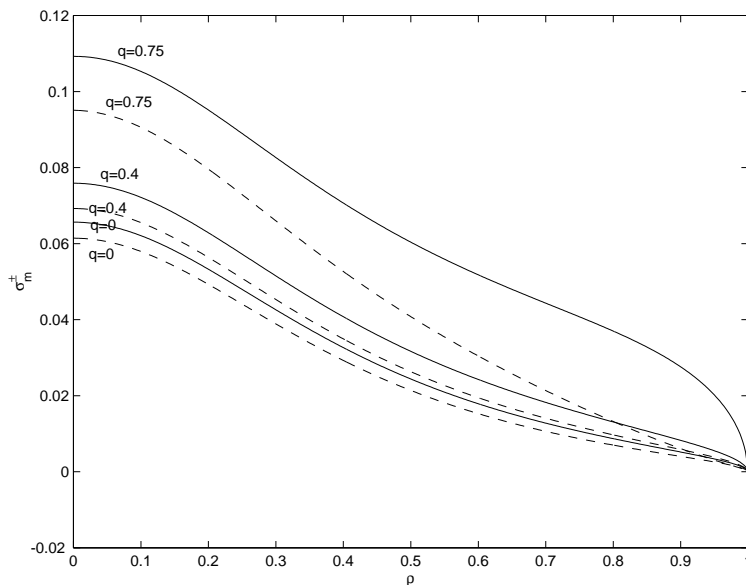


FIG. 6.6: Densités d'énergie σ_m^+ et σ_m^- (tiretée) pour $\epsilon = 0.36$, $\gamma = 0.08$, et $q = 0, 0.4, 0.8$.

la vitesse $-\omega_-$ devient de plus en plus large au bord du disque et diverge finalement. La densité σ_m^- devient négative dans ce cas près du bord du disque.

Il n'est pas surprenant que la transformation de Harrison d'un disque avec poussière en mouvement géodésique ne résulte pas en un disque avec poussière en mouvement électro-géodésique. Cet exemple était présenté pour démontrer comment les solutions hyper-elliptiques des équations d'Einstein-Maxwell peuvent être discutées. Pour une description d'un disque de poussière chargée on peut essayer de résoudre le problème aux limites correspondant en utilisant la classe de solutions hyper-elliptiques obtenue ici. Il reste à démontrer, si des solutions d'intérêt pour l'astrophysique peuvent être identifiées dans cette classe. Pour des cas plus généraux il faut probablement se servir de la classe de solutions sur des surfaces de Riemann avec trois couches de Korotkin [54]. Ceci impliquerait que le calcul hyper-elliptique ne peut plus être appliqué.

Chapitre 7

Conclusions et Perspectives

Dans ce travail nous avons étudié des solutions explicites des équations d'Einstein et d'Einstein-Maxwell dans le cas stationnaire avec symétrie axiale. Nous avons montré comment l'intégrabilité des équations dans le vide peut servir à construire des solutions avec des singularités prescrites pouvant être en principe reliées à une distribution de matière. Le problème de Riemann-Hilbert, l'outil le plus puissant pour la solution des problèmes aux limites et des problèmes de Cauchy pour des équations intégrables, pouvait être résolu explicitement pour une large classe de problèmes sous la forme de fonctions thêta hyper-elliptiques. Nous avons identifié une sous-classe asymptotiquement plate de solutions avec symétrie équatoriale. Cette classe peut être utilisée afin de construire des solutions globales pour des disques de poussière avec ou sans trou noir central. Comme premier exemple nous avons présenté une solution explicite pour une famille de disques avec deux composantes de poussière en contre-rotation. Une discussion physique de la classe hyper-elliptique était présentée dans le cas d'un exemple particulier d'un tel disque. Les fonctions thêta étaient évaluées numériquement avec l'aide des méthodes spectrales. Les moments multipolaires, le tenseur d'impulsion-énergie et la métrique sont discutés analytiquement et numériquement.

Pour le cas des trous noirs nous avons étudié des disques annulaires statiques autour d'un trou noir statique. Des formules explicites étaient données pour les disques infinis. Dans le cas stationnaire nous avons démontré qu'une classe de solutions sur des surfaces hyper-elliptiques dégénérées peut décrire des disques infinis autour d'un trou noir. L'exemple de solutions sur des surfaces dégénérées de genre deux qui peuvent être données sous forme de fonctions élémentaires était discuté en détail. Dans le cas des équations d'Einstein-Maxwell nous avons utilisé l'invariance des équations par rapport à des transformations $SU(2,1)$ pour construire une classe de solutions hyper-elliptiques. La discussion des phénomènes physiques était effectuée pour l'exemple du disque de poussière en contre-rotation soumis à une transformation de Harrison.

En somme nous avons proposé une discussion compréhensive des solutions hyper-elliptique de l'équation d'Ernst : à partir de la mathématique (la géométrie algébrique) utilisée pour étudier la régularité des solutions, de la discussion physique des solutions jusqu'à l'évaluation numérique des fonctions thêta. Ce travail indique naturellement de

nouvelles directions de recherche :

Pour une description générale des disques de poussière, les relations algébriques entre les fonctions métriques et leurs dérivées devraient être étudiées plus en détails. Il serait intéressant d'identifier des solutions sur des surfaces de genre élevé puisque seule une interprétation physique pour les solutions de genre 2 est connue à présent. L'idée consiste en un établissement des relations entre les conditions aux limites qui contiennent les aspects physiques et les quantités caractéristiques des surfaces de Riemann, en l'occurrence les points de branchements. Une discussion des géodésiques et des cônes de lumière serait intéressante dans ces cas.

Du point de vue de l'astrophysique, les trous noirs avec des disques de poussière comme modèles pour des galaxies non-actives sont les modèles les plus intéressants. Puisque nous avons démontré dans ce travail que le problème d'un disque infini autour d'un trou noir est équivalent à un problème pour un disque d'extension fini, l'étude des disques de poussière indiquera ainsi comment construire des solutions pour des systèmes trous noirs plus matière. L'instabilité des disques de poussière dans des situations Newtoniennes, ce qui est probablement aussi vrai pour le cas relativiste, permet de considérer ces modèles comme des conditions initiales : si on les utilise de cette manière pour le traitement numérique du développement en temps des équations d'Einstein, l'inévitable erreur numérique résultera dans l'effondrement du disque dans le trou noir. Puisque les conditions initiales correspondent à un espace-temps stationnaire sans radiation, on peut étudier dans ces systèmes les ondes gravitationnelles résultant purement de cet effondrement.

L'instabilité des disques de poussière est la raison pour laquelle en astrophysique on discute des "disques chauds", des disques avec une pression seulement dans le disque. Ces disques ne peuvent plus être placés dans les coordonnées de Weyl dans le plan équatorial. La solution d'un problème aux limites pour un tel disque est donc équivalent à la solution d'un problème aux limites libre où le contour limite est déterminé comme solution du problème. Ceci sera la préparation pour le cas général des problèmes aux limites. Dans ce contexte il serait intéressant d'étudier si les techniques de Riemann-Hilbert peuvent être utilisés pour construire des solutions régulières à l'extérieur pour une solution donnée dans la région avec un fluide parfait. Alternativement on serait capable de démontrer la non-existence de solutions régulières à l'extérieur pour des solutions décrivant des fluides parfaits comme celle de Wahlquist.

Le cas des équations d'Einstein-Maxwell implique en général des solutions sur des surfaces avec trois couches dont les détails mathématiques sont moins bien établis que pour les surfaces hyper-elliptiques. Du point de vue physique le rôle des champs magnétiques pour les étoiles à neutrons est important. Du point de vue mathématique, il serait très intéressant de discuter des solutions pour le système d'Ernst sur une telle surface (peut-être trigonale) comme la dépendance modulaire des fonctions θ est décisive ici. Puisque les techniques discutées dans ce travail peuvent être appliquées aussi au cas des équations auto-duales d'Einstein et de Yang-Mills, les problèmes aux limites devraient être résolus également dans ce contexte.

Les solutions algèbro-géométriques discutées ici sont aussi intéressantes du point de vue géométrique. Il peut être montré que l'équation d'Ernst est reliée aux surfaces de

Bianchi, alors aux surfaces extrémales. Cette relation devrait être explorée plus en détail. On peut espérer d'obtenir ainsi une meilleure compréhension des solutions. Un autre aspect géométrique est la relation des systèmes intégrables à la théorie des twisteurs, qui devrait être étudiée pour les solutions hyper-elliptiques du système d'Ernst.

Il est bien connu que le formalisme d'Ernst n'est pas restreint aux espace-temps avec deux vecteurs de Killing commutatifs. L'équation d'Ernst peut être introduite dans le vide s'il n'y a qu'un seul vecteur de Killing, mais les équations ne seront pas intégrables en générale. Néanmoins cet approche simplifie les équations d'Einstein décisivement. L'application de ces techniques aux systèmes binaires de trous noirs dans les espaces-temps avec un vecteur de Killing hélicoïdal résulte dans un système d'équations qui est très efficace pour une résolution numérique. Ce projet est intéressant dans le contexte des sources pour des ondes gravitationnelles puisque les trous noirs binaires sont considérées comme les sources les plus prometteuses pour la radiation gravitationnelle.

Dans le cas général, les ondes gravitationnelles doivent être obtenues par la résolution numérique du développement dans le temps des conditions initiales pour les équations d'Einstein. Le problème majeure dans ce contexte est la construction de conditions initiales en accordance avec la situation physique qui doit être décrite. Ceci implique la résolution des équations contraintes dans le hyperplan initial. Il est à étudier s'il y a des cas intégrable des équations contraintes pour des situations d'intérêt physique. Dans ce cas les méthodes discutées dans ce travail pourraient être également appliquées pour la construction des conditions initiales.

Bibliographie

- [1] C. Will, *Theory and Experiment in Gravitational Physics. Revised Edition*, Cambridge : Cambridge University Press (1993).
- [2] J. Taylor, L. Fowler et J. Weisberg, *Nature* **277**, 437 (1979).
- [3] V. Lipunov, K. Postnov et M. Prokhorov, *New Astron.* **2**, 43 (1997).
- [4] E. Flanagan et S. Hughes, *Phys. Rev. D* **58**, 4535 (1998).
- [5] P. Brady, J. Creighton et K. Thorne, *Phys. Rev. D* **58**, 061501 (1998).
- [6] S. Portegies Zwart et S. McMillan, *Astrophys. J.* **528**, L17 (2000).
- [7] T. Damour, B. Iyer et B. Sathyaprakash, *Phys. Rev. D* **62**, 084036 (2000).
- [8] L. Blanchet en *Einstein's Field equations and Their Physical Implications-Selected Essays in Honour of Jürgen Ehlers*, ed. par B. Schmidt, 225 (Springer, Berlin, 2000).
- [9] T. Regge and J. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [10] V. Mukhanov, H. Feldman, K. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992).
- [11] E. Seidel, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **136**, 87 (1999).
- [12] P. Grandclément, E.ourgoulhon et S. Bonazzola, *Phys. Rev. D* **65**, 044021 (2002).
- [13] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt et M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge : CUP, (1980).
- [14] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii et V. E. Zakharov, *Theory of Solitons – The Inverse Scattering Method*, New York : Consultants Bureau, (1984).
- [15] B. Dubrovin, V. Matveev et S. Novikov, *Russian Math. Surveys*, **31** 59-146 (1976)
- [16] A. Its et V. Matveev, *Theor. and Math. Physics* **23** (1), 51-67 (1975)
- [17] I. Krichever, *Functional analysis and its applications*, **22** No.3 37-52 (1988).
- [18] J. B. Hartle et D. H. Sharp, *Astrophys. J.*, **147**, 317 (1967).
- [19] B. A. Dubrovin, *Russ. Math. Surv.* (Uspekhi), **36**, 11-92 (1981).
- [20] E.D. Belokolos, A.I. Bobenko, V.Z. Enolskii, A.R. Its et V.B. Matveev, *Algebraic-Geometric Approach to Nonlinear Integrable Equations*, Berlin : Springer, (1994).
- [21] L. Lindblom, *Astrophys. J.*, **208**, 873 (1976).
- [22] F. J. Ernst, *Phys. Rev.* **167**, 1175 (1968).
- [23] R. Geroch, *J. Math. Phys.*, **12**, 918 (1971).

- [24] D. Maison, *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 521 (1978).
- [25] V. A. Belinski and V. E. Zakharov, *Sov. Phys.-JETP*, **48**, 985 (1978).
- [26] G. Neugebauer, *J. Phys. A : Math. Gen.*, **12**, L67 (1979).
- [27] I. Hauser et F. Ernst, *J. Math. Phys.*, **21**, 1126 (1980).
- [28] C. M. Cosgrove, *J. Math. Phys.*, **21**, 2417 (1980).
- [29] N. Woodhouse et L. Mason, *Nonlinearity* **1**, 73 (1988).
- [30] H. D. Wahlquist, *Phys. Rev.*, **172**, 1291 (1968).
- [31] M. Bradley, G. Fodor, M. Marklund et Z. Perjés, *Class. Quant. Grav.*, **17**, 351 (2000).
- [32] D. Kramer, *Class. Quant. Grav.*, **1**, L3 (1984).
- [33] J. M. Senovilla, *Phys. Lett.*, **123A**, 211 (1987).
- [34] J. Binney et S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, (Princeton : Princeton University Press) (1987).
- [35] T. Morgan et L. Morgan *Phys. Rev.*, **183**, 1097 (1969); Errata : **188**, 2544 (1969).
- [36] J. Bičák, D. Lynden-Bell et J. Katz, *Phys. Rev. D*, **47**, 4334 (1993); *MNRAS*, **265**, 126 (1993).
- [37] C. Pichon et D. Lynden-Bell, *MNRAS*, **280**, 1007 (1996).
- [38] J. Bičák et T. Ledvinka, *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1669 (1993).
- [39] V. Rubin, J. Graham et J. Kenney, *Astrophys. J.* **394**, L9 (1992).
- [40] H. Rix, M. Franx, D. Fisher et G. Illingworth, *Astrophys. J.*, **400**, L5 (1992).
- [41] C. Struck, *Physics Reports*, **321**, 1 (1999).
- [42] F. J. Ernst, *Phys. Rev* **168**, 1415 (1968).
- [43] D. Maison, *Gen. Rel. Grav.* **10**, 717 (1979).
- [44] T. Nozawa, N. Stergioulas, E. Gourgoulhon, et Y. Eriguchi, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.*, **132**, 431 (1998).
- [45] J. M. Bardeen et R. V. Wagoner, *Astrophys. J.*, **167**, 359 (1971).
- [46] U. Schaudt et H. Pfister, *Phys. Rev. Lett.*, **77** 3284 (1996).
- [47] U. Schaudt, *Comm. Math. Phys.*, **190**, 509 (1998).
- [48] P. Breitenlohner et D. Maison, *Ann. Inst. H. Poincare*, **46**, 215 (1987).
- [49] J. D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces (Lecture Notes on Mathematics)*, **352**, New York : Springer (1973).
- [50] I. A. Taimanov, *Secants of Abelian varieties, theta functions, and soliton equations*, alg-geom/9609019 (1996).
- [51] O. Richter et C. Klein, Banach Center Publications, **41**, 195-204 (1997).
- [52] C. Klein et O. Richter, *Phys. Rev.*, **D57**, 857 (1998).

- [53] C. Klein et O. Richter, *J. Geom. Phys.*, **24**, 53, (1997).
- [54] D. A. Korotkin, *Theor. Math. Phys.*, **77**, 1018 (1989).
- [55] D. A. Korotkin, *Commun. Math. Phys.*, **137**, 383 (1991).
- [56] D. A. Korotkin, *Class. Quant. Grav.*, **10**, 2587 (1993).
- [57] D. Korotkin et V. Matveev, *Functional Analysis and Its Applications*, **34** No.4 18-34 (2000).
- [58] C. Klein et O. Richter, *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 565 (1997).
- [59] C. Klein et O. Richter, *Phys. Rev. D*, **58**, CID 124018 (1998).
- [60] C. Klein, *Phys. Rev. D* **63**, 084025 (2001).
- [61] P. A. Griffiths, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76**, 228 (1970).
- [62] D. R. Morrison, *Picard–Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces*, en *Essays on mirror manifolds*, ed. par S.-T. Yau, Hong Kong : International Press, (1992).
- [63] F. Foucault, *C. R. Acad. Sci.*, **314**, Série I, 617 (1992).
- [64] Yu. I. Manin, *Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Mat. 22, 737-756 (1958) (=A.M.S. Transl. (2), **37**, 59-78).
- [65] C. Klein, *Theor. Math. Phys.*, (2002).
- [66] C. Klein et O. Richter, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 2884 (1999).
- [67] G. Neugebauer et R. Meinel, *Astrophys. J.*, **414**, L97 (1993).
- [68] G. Neugebauer et R. Meinel, *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 2166 (1994).
- [69] G. Neugebauer et R. Meinel, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3046 (1995).
- [70] C. Klein, *Theor. Math. Phys.*, **127**, 767 (2002).
- [71] J. Frauendiener et C. Klein, *Phys. Rev. D* **63**, 064033 (2001).
- [72] E. Poole *Proc. London Math. Soc.* (2) **29** 342 (1929); *Proc. London Math. Soc.*, **30** 174 (1929).
- [73] C. Klein, *Class. Quant. Grav.*, **14**, 2267 (1997).
- [74] C. Klein et D. Korotkin, *en préparation*.
- [75] B. Harrison, *J. Math. Phys.* **9**, 1744 (1968).
- [76] D. Maison, *Nonlinear equations in classical and quantum field theory (Meudon/Paris, 1983/1984)*, Lecture Notes in Phys. **226**, 125, Berlin : Springer (1985).
- [77] D. Korotkin, *Comm. Math. Phys.* **134**, 397 (1990).
- [78] I. M. Krichever, *Nonlinear equations and elliptic curves*, in *Itogi nauki i tehniki, Sovremen. probl. mat.*, **23**, 79-136, Moscow : VINITI, (1983) (in Russian).
- [79] A. Lichnerowicz, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnetisme*, Masson : Paris (1955).
- [80] S. I. Zverovich, *Russ. Math. Surv. (Uspekhi)*, **26**, 117-192 (1971).

- [81] Yu. L. Rodin, *The Riemann Boundary Problem on Riemann Surfaces*, Dordrecht : Reidel, (1988).
- [82] H. Röhrl, Über das Riemann–Privalovsche Randwertproblem, *Math. Ann.*, **151**, 365 (1963).
- [83] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Groningen : Noordhoff, (1953).
- [84] H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph vollständigen Räumen, *Math. Ann.*, **135**, 263 (1958).
- [85] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry Vol. I*, New York : Plenum, (1963).
- [86] M. Nakahara, *Geometry, Topology, and Physics*, Bristol : Adam Hilger, (1990).
- [87] K. Thorne en *Magic Without Magic : John Archibald Wheeler*, ed. par J. Klauder (W.H. Freeman : San Francisco), 231 (1972).
- [88] H. Müller zum Hagen, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **68**, 199 (1970).
- [89] R. Geroch *J. Math. Phys.* **11**, 2580 (1970).
- [90] R. Hansen *J. Math. Phys.* **15**, 46 (1974).
- [91] G. Fodor, C. Hoenselaers and Z. Perjés, *J. Math. Phys.*, **30**, 2252 (1989).
- [92] C. Misner, K. Thorne et J. Wheeler, *Gravitation*, (Freeman : San Francisco, 1973).
- [93] C. Klein, D. Korotkin et V. Shramchenko, *Math. Res. Lett.*, **9**, 1 (2002).
- [94] H. M. Farkas and I. Kra, *Riemann surfaces*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 71, Berlin : Springer (1993).
- [95] D. Mumford, *Tata lectures on theta I and II*, Progress in Mathematics, Vol. 43, Boston : Birkhäuser (1993).
- [96] H. Stahl, *Theorie der Abel'schen Funktionen*, Teubner : Leipzig (1896).
- [97] H. E. Rauch, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**, 543 (1959).
- [98] I. Bronstein, K. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Thun und Frankfurt/Main : Harri Deutsch (1985).
- [99] W. Israel, *Nuovo Cimento* **44B** 1 (1966) ; Errata : *Nuovo Cimento*, **48B**, 463 (1967).
- [100] R. Meinel et G. Neugebauer, *Phys. Lett.*, **210A**, 160 (1996).
- [101] R. Meinel, en *Recent Developments in Gravitation and Mathematical Physics*, ed. par A. García, C. Lämmerzahl, A. Macías, T. Matos et D. Nuñez, Science Network Publishing : Konstanz, (1998), gr-qc/9703077.
- [102] D. Wilson, *Nature*, **312**, 620 (1984).
- [103] T. Nakamura *Prog. Theor. Phys.* **65** 1876 (1981).
- [104] T. Piran et R. Stark *Gravitational radiation from rotating gravitational collapse* en Proc. of the XIV Yamada Conference on Gravitational Collapse and Relativity, ed. par H. Sato et T. Nakamura (Singapur : World Scientific) (1986).

- [105] T. Nakamura, K. Oohara et Y. Kojima *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **90** 1 (1987).
- [106] A. Lanza en *Approaches to Numerical Relativity*, ed. par R. D'Inverno (Cambridge : Cambridge University Press) 281 (1992).
- [107] O. Semerák, gr-qc/0204025 (2002).
- [108] T. Zellerin et O. Semerák, *Class. Quant. Grav.* **17**, 5103 (2000).
- [109] R. Kanwal, *Linear Integral Equations* (New York : Pergamon Press) (1971).
- [110] P. Moon et D. Spencer *Field Theory Handbook* (Berlin : Springer) (1961).
- [111] A. Erdélyi et al. *Higher Transcendental Functions* Vol. 3, New York : Mac Graw-Hill, (1955).
- [112] E. Ince *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, **60**, 47 (1940); *Proc. Roy. Soc. Edinb.*, **60**, 83 (1940).
- [113] A. Einstein et E. Straus, *Rev. Mod. Phys.*, **17**, 120 (1945).
- [114] J. Lemos et P. Letelier, *Phys. Rev. D* **49**, 5135 (1994).
- [115] G. Neugebauer et D. Kramer, *Ann. Phys. (Leipzig)*, **24**, 62 (1969).
- [116] P. Letelier, *Phys. Rev. D* **60**, 104042 (1999).
- [117] T. Ledvinka, J. Bičák et M. Žofka, en Proceedings of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General relativity, ed. par T. Piran (World Scientific : Singapore) (1999).

Chapitre 8

Curriculum Vitae

Christian Friedrich KLEIN

né le 5 mars 1966, à Saarlouis (Saarland, Allemagne)

Adresse Domicile :

8, rue Baillou, 75014 Paris, France.

Adresse Professionnelle :

LUTh, Observatoire de Paris, 92195 Meudon Cedex, France.

Téléphone Domicile :

(33) 01 45 42 28 20

Téléphone Professionnel :

(33) 01 45 07 71 38

Télécopie : (33) 01 45 07 79 71

Adresse électronique :

christian.klein@obspm.fr

Février 2002 - :

Boursier Marie Curie à l'observatoire de Paris à Meudon.

Février 2001 - Janvier 2002 :

Boursier de la fondation Schloessmann au Max-Planck-Institut für Physik (Werner-Heisenberg-Institut) à München, Allemagne.

Février 2000 - Janvier 2001 :

Boursier Marie Curie au LGCR, Université Pierre et Marie Curie, Paris.

Janvier 1997 - Janvier 2000 :

Postdoc à l'université de Tübingen, Allemagne.

Janvier 1994 - Décembre 1996 :

Postdoc à l'université de Jena, Allemagne.

Décembre 1993 :

Doctorat en Physique Théorique de l'université de Tübingen, Allemagne.

Août 1990 :

Diplôme de Physique de l'université de Karlsruhe, Allemagne.

8.1 Thèmes de Recherches Développés

Après mon travail de doctorat sur les perturbations rotatives d'une coquille dans un Univers de Friedmann-Lemaître à l'aide d'un approche indépendant de jauge avec H. Pfister, je me suis concentré sur deux axes de recherches : des solutions exactes des équations d'Einstein et l'application des méthodes de la géométrie algébrique dans les systèmes intégrables. Ces résultats ont été obtenues en collaboration avec J. Frauendiener, D. Korotkin, O. Richter et V. Shramchenko.

- Solution du problème de Riemann-Hilbert pour l'équation d'Ernst.
- Classification des solutions hyper-elliptiques dues à Korotkin selon les singularités possibles.
- Discussion des conditions aux limites pour les solutions sous forme de fonctions thêta.
- Discussion des aspects physiques des solutions hyper-elliptiques.
- Calcul numérique des fonctions thêta avec des méthodes pseudo-spectrales.
- Discussion des solutions hyper-elliptiques des équations d'Einstein-Maxwell.

Puisque le travail *On crossing dust shells* avec J. Frauendiener n'est pas inclus dans ce texte, nous en donnons ici un bref résumé : l'effondrement d'une distribution de poussière sphérique est intéressant du point de vue de l'hypothèse de la censure cosmique car il peut y avoir des singularités dans ces modèles. Si une couche a une vitesse plus grande que celle des couches à l'intérieur, il peut y avoir le phénomène du shell crossing. Ceci correspond à des singularités nues dans l'espace-temps. Dans la littérature, on connaît plusieurs méthodes différentes pour continuer analytiquement l'espace-temps dans le cas du *shell crossing*. Afin d'illustrer la situation, nous avons discuté le cas de plusieurs coquilles de poussière dans une situation avec symétrie sphérique. Nous avons démontré que le cas du shell crossing correspond à la collision de deux particules dans la mécanique classique : après la collision (le shell crossing), il faut prescrire les vitesses des coquilles afin d'obtenir une description unique de la continuation de l'espace-temps.

8.2 Activités d'Enseignement :

- 1986 - 1990 : Travaux dirigés en mathématique à l'université de Karlsruhe.
- 1988 - 1990 : Travaux dirigés en Physique Théorique à l'université de Karlsruhe.
- 1990 - 1993 : Travaux dirigés en Physique Expérimental et Théorique à l'université de Tübingen.

NB : En Allemagne, l'habilitation était jusqu'à présent la précondition pour donner des cours.

8.3 Encadrement d'étudiants

- Encadrement d'une partie de travail de la thèse de Doctorat de Roberto Colistete, de l'université de Paris VI, "Quelques méthodes perturbatives en gravitation et

cosmologie”, soutenue en mai 2002.

- Encadrement d’une partie de travail de la thèse de Doctorat de Markus King, de l’université de Tübingen, “Rotierende geladene Massenschalen in der Allgemeinen Relativitätstheorie”, soutenue en juin 2002.
- Encadrement d’une partie de travail de la thèse de Diplôme de Andreas King, de l’université de Tübingen, “Erzeugung von Gravitationswellen beim Kollaps einer rotierenden Staubschale”, soutenue en juillet 1999.
- Encadrement d’une partie de travail de la thèse de Diplôme de Markus King, de l’université de Tübingen, “Zum elektromagnetischen Thirring-Problem”, soutenue en juillet 1997.

8.4 Participation à des Congrès

- Needs 2002, Cadiz, Espagne, Juin 2002.
- Needs 2001, Cambridge, Angleterre, Juillet 2001.
- 16th Conference on General Relativity and Gravitation, Durban, Afrique du Sud, Juillet 2001.
- XIII International Congress on Mathematical Physics, London, Angleterre, Juillet 2000.
- Needs2k, Goekova, Turquie, Juin 2000.
- Nonlinear Analysis 2000, New York, Etats Unis, Mai 2000.
- Sophia Kowalewskaja Memorial, St. Petersburg, Russie, Mai 2000.
- 8. Oporto meeting, Porto, Portugal, Juillet 1999.
- 15th Conference on General Relativity and Gravitation, Pune, Indes, Décembre 1998.
- 8th Marcel-Großmann Meeting, Jerusalem, Israel, Août 1997.
- *Mathematical Aspects in General Relativity*, Tübingen, Allemagne, Janvier 1997.
- *Journées Relativistes 96*, Ascona, Suisse, Mai 1996.
- *Mathematics of Gravitation*, Warszawa, Pologne, Mars 1996.
- 14th International Conference on General Relativity and Gravitation, Florence, Italie, Septembre 1995.
- 7th Marcel-Großmann Meeting, Stanford, Etats Unis, Juillet 1994.

Colloques et séminaires :

Universités de Augsburg, Chicago, Jena, Konstanz, München (LMU), Oxford, Paris VI, Pennsylvania, Prague, Southampton, Tours, Tübingen, Ulm, Vienna, Concordia University (Montreal), Imperial College (London), Queen Mary College (London), Albert-Einstein-Institut (Golm), Observatoire de Paris à Meudon (DARC, LUTh), Max-Planck-Institut für Astrophysik (Garching), Max-Planck-Institut für Physik (München), Max-Planck-Institut für Mathematik (Bonn).

Chapitre 9

Liste de Publications

Publications dans des revues avec comité de lecture

1. C. Klein, 'Harrison transformations of hyperelliptic solutions and charged dust disks', *Phys. Rev. D*, Vol. 65, 084029 (2002).
2. C. Klein, 'Isomonodromic Approach to Boundary Value Problems for the Ernst Equation', *Theor. Math. Phys.* (2002).
3. C. Klein, D. Korotkin et V. Shramchenko, 'Ernst equation, Fay identities and variational formulas on hyperelliptic curves', *Math. Res. Lett.*, Vol. 9, 1-20 (2002)
4. J. Frauendiener et C. Klein, 'On the exact Treatment of stationary counter-rotating dust disks : Physical Properties', *Phys. Rev. D*, Vol. 63, 84025 (2001).
5. C. Klein, 'Exact Treatment of stationary counter-rotating dust disks : Axis and Disk', *Theor. Math. Phys.*, Vol. 127, 767, (2001).
6. C. Klein, 'Exact Treatment of stationary counter-rotating dust disks : Boundary Value problems and Solutions', *Phys. Rev. D*, Vol. 63, 064033 (2001).
7. C. Klein et O. Richter, 'Exact Relativistic Gravitational Field of a Stationary Counterrotating Dust Disk', *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 83, 2884-2887 (1999).
8. C. Klein et O. Richter, 'Riemann-Hilbert Problems for the Ernst Equation and Fibre Bundles', *J. Geom. Phys.*, Vol. 30, 331-342 (1999).
9. C. Klein et O. Richter, 'Physically realistic Solutions to the Ernst Equation on hyperelliptic Riemann Surfaces', *Phys. Rev. D*, Vol. 58, CID 124018 (1998).
10. C. Klein et O. Richter, 'Explicit Solution of Riemann-Hilbert Problems for the Ernst Equation', *Phys. Rev. D*, Vol. 57, 857-862 (1998).
11. C. Klein et O. Richter, 'The Ernst Equation and the Riemann-Hilbert Problem on Hyperelliptic Riemann Surfaces', *J. Geom. Phys.*, Vol. 24, 53-60 (1997).
12. C. Klein et O. Richter, 'On a Class of Physically Realistic Solutions to the Ernst Equation', *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, 565-568 (1997).
13. O. Richter et C. Klein, 'Algebro-geometric Approach to the Ernst Equation I', *Mathematics of Gravitation (Banach Center Publications : Warsaw)*, Vol. 41/1, 195-204 (1997).

14. C. Klein, 'Counterrotating Dust Rings around a Static Black Hole', *Class. Quant. Grav.*, Vol. 14, 2267–2280 (1997).
15. J. Frauendiener et C. Klein, 'On Crossing Dust Shells', *J. Math. Phys.*, Vol. 36, 3632–3643 (1995).
16. C. Klein, 'Second Order Effects of Rotational Perturbations in a Friedman universe', *Class. Quant. Grav.*, Vol. 11, 1539–1553 (1994).
17. C. Klein, 'Rotational Perturbations and Frame Dragging in a Friedman universe', *Class. Quant. Grav.*, Vol. 10, 1619–1631 (1993).

Présentations dans des congrès publiés

1. C. Klein et O. Richter, 'Physically realistic solutions to the Ernst equation on hyperelliptic Riemann surfaces', to appear in the Proceedings of the 9th Marcel–Grossmann Meeting.
2. C. Klein et O. Richter, 'Stationary axisymmetric Dust Disks and hyperelliptic Riemann Surfaces', Proceedings of the 8th Marcel–Grossmann Meeting, ed. T. Piran, (World Scientific : Singapore), 336–338 (1999).
3. C. Klein, 'Rotational Perturbations of a Friedmann Universe', Proceedings of the 7th Marcel Grossmann Meeting, ed. R.T. Jantzen and G. Mac Keiser, (World Scientific : Singapore), 713–715 (1996).

Thèse et Habilitation à diriger des recherches

1. C. Klein, 'Rotative Störungen und Mitführungseffekte in einem Friedman–Universum', Thèse de Doctorat de l'Université de Tübingen (en allemand) (1993).
2. C. Klein, 'Approche algébro-géométrique aux équations stationnaires avec symétrie axiale d'Einstein et d'Einstein-Maxwell', Habilitation à diriger des recherches (2002).