



**HAL**  
open science

## La QCD et son histoire : partons d'un bon pied!

Patrick Aurenche

► **To cite this version:**

Patrick Aurenche. La QCD et son histoire : partons d'un bon pied!. Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire, Maubuisson, 2005, 2006. cel-00093000

**HAL Id: cel-00093000**

**<https://cel.hal.science/cel-00093000>**

Submitted on 12 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# La QCD et son histoire : partons d'un bon pied!<sup>||</sup>

P. Aurenche<sup>1</sup>

1. *Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTH, \**  
*B.P. 110, F-74941 Annecy-le-Vieux Cedex, France*

## Résumé

On présente d'abord très brièvement les modèles d'interactions fortes des années '60-'70. On décrit ensuite les différents ingrédients qui constituent ce qu'il est convenu d'appeler la Chromodynamique Quantique (QCD) perturbative : modèle des partons, le lagrangien QCD, liberté asymptotique, violations d'invariance d'échelle. On mentionne enfin quelques applications de la QCD perturbative.

## Abstract

The strong interaction models of the years 1960-1970 are briefly presented. The basics of perturbative Quantum Chromodynamics (QCD) are then introduced: parton model, the QCD lagrangian, renormalisation, asymptotic freedom, scaling violations. Some phenomenological applications are discussed.

LAPTH-Conf-1151/06

---

<sup>||</sup>Cours à l'Ecole Joliot-Curie de Physique Nucléaire 2005, Maubuisson.

<sup>\*</sup>UMR5108 du CNRS, associée à l'Université de Savoie.

Je remercie le comité d'organisation pour le titre plein d'humour sur un sujet très à la mode cette année. La suite de l'exposé n'est pas à la hauteur et aucune trace d'humour ne peut y être décelée.

La problématique que l'on considère dans ces notes est la suivante : comment décrire l'interaction (forte) à haute énergie de particules telles que le proton ou le neutron, qui sont des objets étendus ou composites, à l'aide de quanta élémentaires, ponctuels, les quarks et les gluons, dont la dynamique est donnée par le lagrangien de QCD. De plus, comme l'approche perturbative en théorie des champs est un outil bien connu et efficace pour calculer des observables (*cf* le succès de l'Electrodynamique Quantique (QED)) est-il possible de décrire cette interaction forte par la théorie des perturbations? On verra que ceci est possible sous certaines conditions.

Après avoir rapidement rappelé les modèles pré-QCD en vogue pour décrire la structure du nucléon (modèle des quarks) et la diffusion à haute énergie (pôles de Regge et modèles duaux) on se tourne vers le modèle des partons naïf (le titre oblige!) sur lequel repose la QCD perturbative. L'invariance de jauge et le lagrangien QCD font l'objet de la troisième section, suivie d'une présentation succincte de la renormalisation et de ses conséquences (couplage mobile et liberté asymptotique de QCD). La violation d'invariance d'échelle des distributions de partons dans les hadrons est ensuite discutée avant de conclure par quelques applications à la diffusion hadronique à haute énergie. Il existe de très nombreuses revues et livres sur la Chromodynamique Quantique [1, 2].

## 1 Les interactions fortes : ère pré-QCD

Au début des années 1930, les noyaux apparaissent formés de protons et de neutrons. Ces derniers sont considérés, avec l'électron, comme les constituants élémentaires de la matière. La dimension caractéristique du noyau d'un atome est de l'ordre de  $10^{-14}$  mètre. La quatrième particule fondamentale est le photon, médiateur des interactions électromagnétiques.

Le pion a été imaginé par Hideka Yukawa en 1935, pour expliquer la cohésion du noyau des atomes qui aurait dû se désintégrer sous l'effet de la force électromagnétique répulsive : le pion est le porteur de la force nucléaire forte qui lie protons et neutrons. Sa masse était estimée à  $200 m_e$ . Il a été observé en 1947 à Berkeley par C. Powell *et al*<sup>†</sup>. L'interaction entre proton, neutron, pion est dite forte par opposition aux autres interactions identifiées : électromagnétique et faible sans parler de l'interaction gravitationnelle.

La fin des années 1940 et les années 1950 voient le développement des accélérateurs de particules (synchrocyclotron, puis synchrotron) avec, en particulier, le Bevatron à Berkeley (énergie de 6,2 GeV) qui permet la découverte de l'antiproton et de résonances, particules à courte durée de vie. Les grands accélérateurs ont été par la suite les principaux instruments de découverte en physique des particules<sup>‡</sup>.

---

<sup>†</sup>La masse du pion est 140 MeV, soit 275 fois la masse de l'électron.

<sup>‡</sup>Actuellement en fonctionnement : collisionneurs proton-antiproton de Fermilab à 1,96 TeV dans le centre de masse, proton-proton du CERN (LHC) à 14 TeV à partir de 2007 ; électron-proton de DESY, Hambourg (HERA) à 310 GeV ; électron-positon de KEK, Japon (KEKB et collaboration Belle) et

Au début des années 1960 on avait découvert une centaine de particules élémentaires sensibles à l'interaction forte : les hadrons. Ces particules sont réparties en deux catégories :  
– les baryons (lourd) dont le prototype est le proton ou le neutron : ce sont des particules de spin demi-entier :  $1/2, 3/2, \dots$ . Comme exemple de résonance on peut citer le baryon  $\Delta$ , de spin  $3/2$ , se désintégrant en un proton et un pion ;  
– les mésons (moyen) dont le prototype est le pion : particules de spin entier  $0, 1, \dots$ .  
Comme exemples, on peut citer les mésons  $\rho$  et  $\omega$  de spin 1.

Vu leur nombre croissant, il était clair que ces hadrons ne pouvaient plus être considérés comme "élémentaires". D'autre part, un certain nombre d'expériences de diffusion montraient que le proton n'était pas ponctuel mais avait une extension spatiale de l'ordre de  $10^{-15}$  mètre.

Pour essayer d'établir un certain ordre dans l'accumulation des données expérimentales, deux approches complémentaires ont été suivies. La première a consisté à classer les hadrons c'est à dire à en faire la spectroscopie. L'échelle d'énergie caractéristique associée est de l'ordre de la masse des hadrons, soit approximativement le GeV<sup>§</sup>. Les dates et les résultats importants sont :

- 1961-1962 : la voie octuple ou *eightfold way* fondée sur le groupe de symétrie SU(3) (de saveur) par Y. Ne'eman [3] et M. Gell-Mann [4] ;
  - 1964 : le modèle des quarks proposé indépendamment par M. Gell-Mann [5] et S. Zweig<sup>¶</sup>[6].
- Le modèle des quarks est une réalisation explicite de la symétrie SU(3) de saveur.

L'autre approche suivie consiste à faire des expériences de diffusion aux plus hautes énergies possibles pour casser le hadron et libérer, s'ils existent, ses constituants. C'est cette quête d'énergie toujours plus élevée qui motive la construction d'accélérateurs, puis de collisionneurs toujours plus puissants. Du point de vue théorique, deux voies ont été suivies :

- dans les années 1960-1970, la "matrice  $S$ " et les pôles de Regge [7], qui permettent de comprendre les collisions avec petits transferts d'énergie [9] ;
- le modèle des partons par J.D. Bjorken [10] et R.P. Feynman [11], formulé en 1969-1972, faisant suite à la découverte, en 1968, de la structure granulaire du proton dans la diffusion *ep* à l'accélérateur linéaire du SLAC par Friedman, Kendall, Taylor *et al.* [12].

Les modèles de hadrons construits à partir des études de spectroscopie et diffusion à haute énergie sont maintenant unifiées dans une théorie unique, la Chromodynamique Quantique (QCD), dont les bases ont été établies dans les années 1970 et 1980 avec la participation de très nombreux physiciens. On peut dire, en schématisant, que la spectroscopie et la diffusion à haute énergie à grand transfert correspondent à deux régimes différents de la Chromodynamique Quantique : non perturbatif (voir le cours d'O. Pène) dans le premier cas et perturbatif dans le deuxième. La QCD fait l'objet de très nombreuses recherches, le but étant de calculer à partir d'un ensemble unique de paramètres de base de la théorie la quantité phénoménale d'observables expérimentales. Sera t-elle un jour prise en défaut?

---

de SLAC (PEP-II et collaboration Babar) à 11 GeV, sans oublier le LEP au CERN à 209 GeV qui a fonctionné jusqu'en 2000.

<sup>§</sup>Dans ces notes, les conventions habituelles sont systématiquement utilisées, soit  $\hbar = c = 1$ , de sorte que la masse, l'impulsion et l'énergie ont la même dimension que l'on exprime en MeV ou en GeV.

<sup>¶</sup>dont le papier n'a jamais été publié sans doute pour cause de trop grande originalité.

## 1.1 La "voie octuple"

Au début des années 1960, Ne'eman et Gell-Mann proposent indépendamment une classification des hadrons qui apparaissent comme éléments de représentations d'un groupe de symétrie. Ce groupe,  $SU(3)$ , est une généralisation du groupe de symétrie d'isospin introduit par W. Heisenberg en 1932 pour exprimer le fait que l'interaction forte ne distingue pas le proton du neutron : ces derniers sont les deux états d'une même particule, le nucléon. Par analogie avec le spin, le nucléon d'isospin  $1/2$  peut être dans un état d'isospin "up" ( $I_3 = 1/2$ , proton) ou d'isospin "down" ( $I_3 = -1/2$ , neutron). L'interaction forte ne peut distinguer ces deux états ce qui s'exprime mathématiquement par l'invariance sous une rotation dans l'espace d'isospin, en conséquence de quoi l'isospin est un nombre quantique conservé. Le groupe d'invariance associé est  $SU(2)$ . Le nucléon appartient à la représentation fondamentale **2**. Quant au pion ( $\pi^+$ ,  $\pi^0$ ,  $\pi^-$ ) il appartient à la représentation adjointe notée **3**.

Avec la découverte expérimentale des particules "étranges" après 1947 et l'introduction d'un nouveau nombre quantique conservé, l'hypercharge  $Y = S + B$  ( $S$  le nombre d'étrangeté,  $B$  le nombre baryonique), également reliée à la charge électrique  $Q$  par la relation  $Q = I_3 + Y/2$ , on peut naturellement introduire le groupe d'invariance  $SU(3)$  et classer les hadrons dans les représentations de ce groupe. Les hadrons d'un même multiplet ont les mêmes spin, parité, parité  $C$  mais ils se distinguent par la valeur de leur hypercharge et leur composante d'isospin. On observe que les mésons peuvent être classés dans les représentations singulet **1** ou octet **8** alors que les baryons sont tous dans les représentations octet **8** ou décuplet **10**. Des exemples de multiplets sont donnés dans la fig. 1 (**1** et **8** des mésons pseudos-scalaires) et la fig. 2 (**8** du proton et **10** du baryon  $\Delta$  de spin  $J = 3/2$ ).

La symétrie  $SU(3)$  que l'on vient de discuter est dite symétrie de saveur. Cette symétrie n'est pas exacte, en particulier parce que les particules d'un même multiplet n'ont pas la même masse ( $m_{\pi^-} \sim 139,5702$  MeV,  $m_K \sim 493,68$  MeV). On peut noter que la symétrie  $SU(2)$  d'isospin est également brisée, mais dans des proportions moindres, notamment par les interactions électromagnétiques ( $m_{\pi^-} \sim 139,5702$  MeV,  $m_{\pi^0} \sim 134,9766$  MeV).

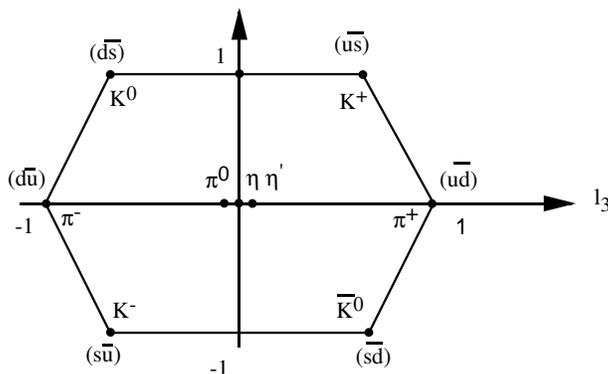


Figure 1: Le nonet du pion,  $J^{PC} = 0^{-+}$ , de spin 0, de parité négative et de C-parité positive. Les mésons  $\eta$  and  $\eta'$  sont des combinaisons linéaires d'une composante octet et d'une composante singulet. Le contenu en quarks est indiqué.

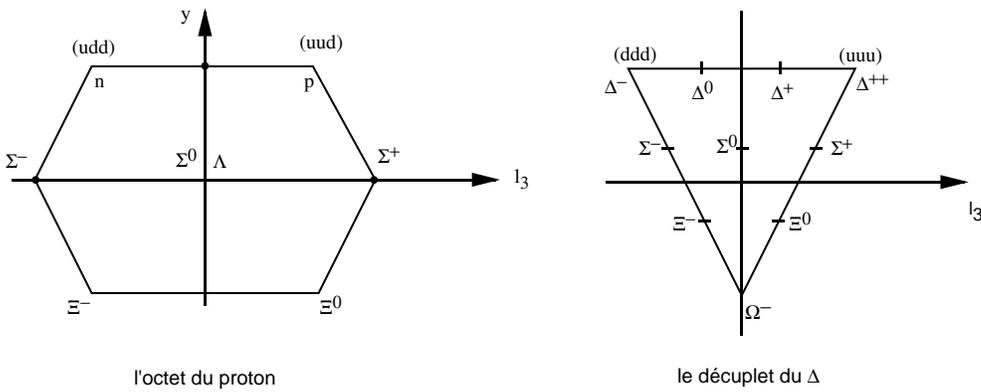


Figure 2: *L'octet du nucléon et le décuplet du baryon  $\Delta$ . Le contenu en quarks est indiqué.*

## 1.2 Le modèle des quarks [13]

Il était surprenant de voir que la représentation de plus basse dimension de  $SU(3)$ , la représentation fondamentale "triplet"  $\mathbf{3}$ , n'apparaissait pas. En 1964, Gell-Mann et indépendamment G. Zweig<sup>||</sup> introduisent le modèle des quarks. Les quarks sont des particules hypothétiques qui sont justement membres de la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  de  $SU(3)$ . Ces quarks sont caractérisés par les nombres quantiques suivants :

- charge fractionnaire, exprimée en unité de  $-e$ , la charge de l'électron, :  $(2/3, -1/3, -1/3)$
- nombre baryonique :  $(1/3, 1/3, 1/3)$
- étrangeté :  $(0, 0, -1)$  et donc hypercharge  $(1/3, 1/3, -2/3)$ .

Ces trois quarks correspondent à trois saveurs (u, d, s) pour "up", "down" et "strange". Les antiquarks sont dans la représentation conjuguée  $\bar{\mathbf{3}}$ . La fig. 3 représente les multiplets des quarks et des antiquarks. Tous les hadrons connus pouvaient être construits à l'aide,

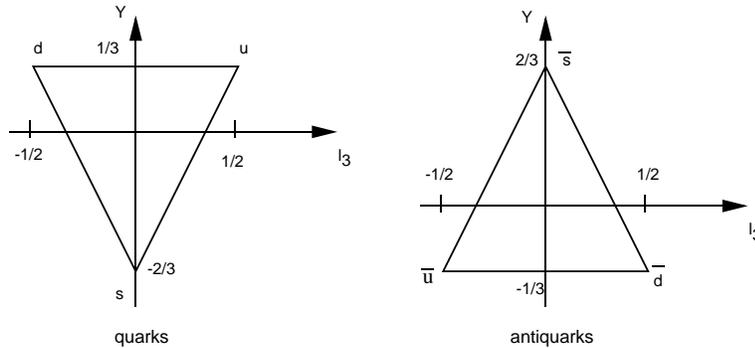


Figure 3: *Le triplet  $\mathbf{3}$  du quark et l'anti-triplet  $\bar{\mathbf{3}}$  de l'anti-quark.*

- pour les mésons, d'une paire quark-antiquark (nombre baryonique  $B = 0$ ),
- pour les baryons, de trois quarks ( $B = 1$ ).

En termes mathématiques, les hadrons appartiennent à des représentations irréductibles, construites à partir de produits directs de la représentation fondamentale des quarks ou antiquarks. Ainsi puisque :

<sup>||</sup>G. Zweig les appelait les as.

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

les mésons appartiennent à des  $\mathbf{1}$  et  $\mathbf{8}$ , en accord avec l'expérience. Pour les baryons on a :

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$$

où la représentation  $\mathbf{10}$  est totalement symétrique et le singulet  $\mathbf{1}$  est totalement antisymétrique. A noter qu'aucun baryon n'appartient à la représentation  $\mathbf{1}$  (voir plus bas).

En tenant compte de la brisure de masse (quark  $s$  beaucoup plus lourd que les quarks  $u$  et  $d$ ) on arrive à comprendre, dans ce modèle, la masse des hadrons ainsi que leur propriétés de désintégration. Un des succès incontestable du modèle est la prédiction du baryon  $\Omega^- = (sss)$  (voir fig. 2) avant sa découverte expérimentale.

Du point de vue théorique ce modèle posait un problème : en effet la fonction d'onde d'un baryon, construite à partir des fonctions d'onde des quarks, était symétrique par échange de deux quarks ce qui est en contradiction avec la statistique de Fermi-Dirac. Pour résoudre ce problème, on introduit un nouveau nombre quantique [14], la couleur. Chaque quark existe en trois variétés de couleur ( $N_c = 3$ ),  $i = R, G, B$ , que l'on écrit

$$u = \begin{pmatrix} u_R \\ u_G \\ u_B \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_R \\ d_G \\ d_B \end{pmatrix} \quad s = \begin{pmatrix} s_R \\ s_G \\ s_B \end{pmatrix}$$

A ce nouveau nombre quantique est associé le groupe de symétrie de couleur  $SU(3)$ , quelquefois dénoté  $SU(3)_c$  pour le distinguer de la symétrie  $SU(3)$  de saveur opérant sur les  $u, d, s$ . Chaque quark est donc un triplet de couleur et on postule que les hadrons sont des  $\mathbf{1}$  de couleur (les hadrons sont incolores et la couleur est donc une symétrie cachée). Ainsi la fonction d'onde du  $\Delta^{++}$ , de spin  $J_3 = 3/2$ , est

$$\Delta^{++} = \frac{1}{\sqrt{6}} \left( u_R^\uparrow u_G^\uparrow u_B^\uparrow - u_R^\uparrow u_B^\uparrow u_G^\uparrow + u_B^\uparrow u_R^\uparrow u_G^\uparrow - u_B^\uparrow u_G^\uparrow u_R^\uparrow + u_G^\uparrow u_B^\uparrow u_R^\uparrow - u_G^\uparrow u_R^\uparrow u_B^\uparrow \right)$$

qui est totalement antisymétrique sous une permutation des couleurs. De manière générale, la fonction d'onde du baryon est construite de façon qu'elle soit totalement antisymétrique dans l'espace des couleurs mais totalement symétrique en ce qui concerne le moment orbital  $\otimes$  spin  $\otimes$  saveur. On "comprend" aussi qu'il n'existe pas de baryon dans la représentation  $\mathbf{1}$  de saveur, comme mentionné plus haut, car sa fonction d'onde serait globalement symétrique, puisqu'antisymétrique à la fois dans l'espace des couleurs et des saveurs. Les mésons sont aussi des singulets de  $SU(3)_c$ , et leur fonction d'onde s'écrit, du point de vue de la couleur

$$M = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_i^3 \bar{q}_i q'_i = \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{q}_R q'_R + \bar{q}_G q'_G + \bar{q}_B q'_B)$$

Les règles ci-dessus "expliquent" pourquoi il n'existe pas d'états hadroniques  $[qq]$  ou  $[qq\bar{q}]$  puisqu'ils ne sont pas des  $\mathbf{1}$  de couleur, mais n'exclut pas l'existence d'états  $[qq\bar{q}\bar{q}]$ ,  $[qqq\bar{q}\bar{q}]$ .

Si la couleur est nécessaire pour la cohérence interne du modèle des quarks elle l'est également du point de vue expérimental comme on peut le voir en considérant la désintégration du pion,  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  via une boucle de quarks : sans la couleur le taux de décroissance serait un facteur  $N_c^2 = 9$  trop faible (il faut sommer sur  $N_c = 3$  couleurs dans la boucle).

Le modèle des quarks s'est enrichi au cours des années avec la découverte de 3 nouveaux éléments :

- quark "charmé" ( $m_c \sim 1,15$  à  $1,35$  GeV) en 1974 dans une expérience  $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$  au SLAC (B. Richter *et al.* [15]) et simultanément  $pp \rightarrow \text{hadrons}$  (S. Ting *et al.* [16]) à Brookhaven ;

- quark "bottom" en 1977 à Fermilab par L. Lederman *et al.* [17] ( $m_b \sim 4,5$  GeV).

Ces deux quarks ont été découverts sous forme d'états liés lourds,  $J/\Psi$  et  $\Upsilon$  respectivement, de temps de vie anormalement long pour leur masse.

- quark "top" en 1994 à Fermilab par l'expérience CDF [18] et un peu plus tard par D0. La masse très élevée ( $m_t \sim 176$  GeV) avait été estimée, par des calculs théoriques, sur la base du résultat des expériences extrêmement précises du LEP. Ceci a permis au directeur général du CERN, C. Llewellyn-Smith, de féliciter ses collègues de Fermilab d'avoir confirmé l'existence du top déjà découvert au CERN\*\*!

En résumé, les quarks apparaissent sous 6 saveurs différentes qui sont maintenant regroupées en trois "générations": (u, d), (c, s) et (t, b), chaque quark ayant trois couleurs.

Question : Tous les hadrons entrent-ils dans la classification ci-dessus? La réponse n'est pas claire. Récemment, en particulier, les résultats d'expériences variées ont semblé indiquer l'existence de baryons n'étant pas constitués de 3 quarks mais plutôt de 5 quarks : les pentaquarks  $[qqqq\bar{q}]$ . Il semble cependant que cette année la signification de ces résultats se soit affaiblie. De même l'existence de mésons de type tetraquarks ou baryonium est mentionnée, ainsi que celle des mésons hybrides  $[qqg]$  ou de gluonium [19].

### 1.3 Diffusion hadronique à haute énergie

Si le modèle des quarks permettait de comprendre la spectroscopie des hadrons (masse, désintégration) il ne permettait pas de comprendre l'interaction entre hadrons dans les collisions à haute énergie. L'intérêt des expériences à des énergies toujours plus grandes est de sonder les particules avec une résolution toujours plus fine (*cf.* les relations d'incertitude de Heisenberg de type  $\Delta x \sim 0,2 \text{ GeV} \cdot \text{fm}/\Delta E$ ) et ainsi de voir la structure des hadrons à des échelles de longueur toujours plus petites.

L'approche en vogue à l'époque est celle de la "théorie de la matrice  $S$ " [7]. Les degrés de liberté fondamentaux sont les hadrons eux-mêmes (et non d'hypothétiques constituants des hadrons) et l'on s'intéresse à construire l'amplitude de diffusion  $\mathcal{A}$  entre les hadrons. Elle est contrainte par les relations d'unitarité, de type  $\text{Im } \mathcal{A} \sim \mathcal{A}^2$ , et d'analyticité,

---

\*\*Etant donnée sa grande masse le quark top se désintègre avant de pouvoir former un état lié.

Re  $\mathcal{A} \sim \not\propto$  Im  $\mathcal{A}$ . On étudie dans ce cadre les diffusions à (quasi-)deux corps du type :

$$\begin{array}{ccccccc} a + b & \rightarrow & c & + & d & & (1.1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & e + f & & g + h & & \end{array}$$

Pour une réaction à deux corps, ignorant le spin, les variables cinématiques pertinentes sont les variables de Mandelstam : le carré de l'énergie invariante  $s$  ( $s > 0$ ) et le carré de l'impulsion de transfert  $t$  ( $t < 0$ ). Tous les hadrons sont traités sur une base démocratique : ils apparaissent soit comme particules fondamentales (entrantes ou sortantes dans la réaction) soit, à l'état virtuel, comme médiateurs de la force entre les particules. Dans cette approche, la diffusion

$$\pi + p \rightarrow \pi + p \quad (1.2)$$

procède, par exemple, par production de résonance  $\Delta$  dans la voie  $s$  et échange de méson  $\rho$  dans la voie  $t$ , tandis que les réactions

$$\pi + p \rightarrow \rho + p \quad (1.3)$$

et

$$\pi + p \rightarrow \pi + \Delta \quad (1.4)$$

procèdent par production de résonance  $\Delta$  dans la voie  $s$  et échange de  $\pi$  dans la voie  $t$ , pour la première, et nucléon  $N$  et  $\rho$  pour la seconde. A basse énergie le mécanisme de production de résonances domine tandis qu'à haute énergie c'est celui d'échange de "pôles de Regge" qui décrit la diffusion [8, 9]. Dans ce dernier cas, l'amplitude de diffusion  $\mathcal{A}(s, t)$  est exprimée comme la transformée de Mellin de l'amplitude dans le plan de moment cinétique complexe  $J$  (omettant les détails de spin, parité, choix du contour, ...):

$$\mathcal{A}(s, t) = \int_{\mathcal{C}} dJ \mathcal{A}(J, t) s^J \quad (1.5)$$

où  $\mathcal{A}(J, t)$  est simplement paramétrée comme une somme d'une infinité de pôles dans le plan du moment cinétique complexe ( $t < 0$ ),

$$\mathcal{A}(J, t) = \sum_i \frac{\beta_i(t)}{J - \alpha_i(t)}, \quad (1.6)$$

$\alpha_i(t) = \alpha_i + \alpha' t$  étant la trajectoire de Regge  $i$  échangée dans la voie  $t$  ( $\alpha_i$  l'intercept et  $\alpha'$  la pente universelle)\*\*. Il en résulte que l'amplitude de diffusion a la forme asymptotique:

$$\mathcal{A}(s, t) \sim \sum_i \beta_i(t) s^{\alpha_i(t)}, \quad s \rightarrow \text{grand}, \quad t \text{ fini.} \quad (1.7)$$

Pour une diffusion élastique, aux énergies asymptotiques, la trajectoire dominante est le Pomeron d'intercept 1. Cette approche a rencontré un très grand succès dans la description des réactions hadroniques exclusives dans le domaine  $s > 10 \text{ GeV}^2$ ,  $t < 2 \text{ GeV}^2$  [9].

---

\*\*Une trajectoire de Regge correspond à une famille de résonances dans la région  $t > 0$  : pour les mésons, à une valeur entière de  $J$  correspond une résonance de masse  $m_J$  telle que  $\alpha(m_J^2) = J$ . Pour les fermions les résonances correspondent aux valeurs demi-entières de  $J$ .

Cette description de la diffusion hadronique, résonances à basse énergie et pôles de Regge à haute énergie, a été unifiée de façon spectaculaire dans le modèle dual de G. Veneziano [20]. Pour une diffusion  $2 \rightarrow 2$  de particules scalaires, l'amplitude est extrêmement simple,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, t) \cong B(-\alpha(s), -\alpha(t)) &= \int_0^1 dx x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} \\ &= \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \end{aligned} \quad (1.8)$$

qui peut être vue comme une somme infinie de résonances (de largeur nulle) dans la voie  $s$  ou dans la voie  $t^{\dagger\dagger}$  : ceci illustre la propriété de dualité à la base du modèle. De plus dans la limite  $t/s \ll 1$  et  $s \rightarrow \infty$  on retrouve le comportement à la Regge  $s^{\alpha(t)}$ . Cette formule a été généralisée par un grand nombre d'auteurs à la diffusion multiparticules. Nambu [21] et d'autres ont remarqué que le spectre de résonances du modèle dual est le même que celui des excitations d'une corde quantifiée. Mais il est apparu que, d'un point de vue théorique, les modèles duaux [22] n'étaient cohérents qu'en 10 ou 26 dimensions suivant les cas considérés : ces conditions étaient nécessaires pour éliminer les états tachyoniques non physiques. Du fait de ces difficultés l'approche duale (ou de façon équivalente le modèle des cordes) a été presque complètement oubliée, à partir des années 1975-1980, comme modèle des interactions fortes au profit du modèle des partons (voir section suivante) qui connut alors un essor spectaculaire et justifié. Cependant J. Scherk et J. Schwartz [23] avaient montré, en 1974, que la théorie de la gravitation (augmenté d'un champ scalaire) était la limite quand  $\alpha' \rightarrow 0$  d'un modèle dual. Avec de nombreux développements théoriques le modèle des cordes, enrichi de la propriété de supersymétrie et ses extensions, est maintenant, de façon un peu trop hégémonique peut-être, considéré comme le candidat à l'unification de toutes les interactions. Il n'existe cependant actuellement aucune base expérimentale pour ces époustouflantes idées théoriques.

## 1.4 La diffusion inélastique profonde à SLAC

Pendant qu'un grand nombre de physiciens, théoriciens et expérimentateurs, étudiait les collisions hadroniques dans le cadre de l'approche de Regge ou du modèle dual, un groupe expérimental à l'accélérateur linéaire de SLAC s'intéressait à la réaction d'électroproduction suivante :

$$e + p \rightarrow e + \text{hadrons}, \quad E_e = 20 \text{ GeV}, \quad (1.9)$$

où l'on observait la distribution angulaire de l'électron final. C'est la fameuse expérience de diffusion profondément inélastique. Le nombre d'électrons diffusés à grand angle était plus important que prévu : par analogie avec l'expérience de Rutherford sur les noyaux, l'interprétation de l'expérience était que la charge du proton n'était pas uniformément répartie mais plutôt qu'elle était portée par des grains de matière ponctuels. De plus, alors que la taille du proton était estimée à  $10^{-15}$  m, cette expérience, dont le pouvoir de résolution variait de  $2 \cdot 10^{-16}$  à  $5 \cdot 10^{-17}$  m, indiquait que l'image du proton n'était pas modifiée quand on variait le pouvoir de résolution : c'est la fameuse propriété "d'invariance

---

<sup>††</sup>On rappelle que la fonction  $\Gamma(x)$  a un pôle simple en  $x$ ,  $\forall x$  entier  $\leq 0$ .

d'échelle" (*scaling*). Sous certaines conditions cinématiques, le proton se comportait donc comme une collection de diffuseurs ponctuels, appelés partons par R.P. Feynman.

Ce n'est qu'après de nombreuses études expérimentales et théoriques que les partons chargés ont été identifiés comme ayant les nombres quantiques des quarks de Gell-Mann (spin 1/2, charge électrique fractionnaire et portant une charge de couleur). A la différence du modèle des quarks cependant, l'accord du modèle des partons avec les données nécessitait l'existence de partons électriquement neutres : les gluons.

L'interaction entre les quarks et les gluons est contenue dans le lagrangien de la Chromodynamique Quantique (QCD) construit, comme celui de l'Electrodynamique Quantique (QED), sur la base d'une invariance de jauge qui est non abélienne dans le cas des interactions colorées. Deux propriétés fondamentales justifient la validité de la QCD perturbative comme théorie des interactions entre hadrons à haute énergie :

- la "liberté asymptotique" qui exprime le fait que le couplage de QCD devient petit quand l'énergie en jeu est grande, ce qui justifie une approche perturbative à la dynamique des quarks et des gluons [24] ;
- le "théorème de factorisation" qui permet de construire les sections efficaces de diffusion entre hadrons à partir de sections efficaces de processus partoniques [25].

Le domaine d'applicabilité de la QCD perturbative n'est pas le même que celui des pôles de Regge : toutes les variables cinématiques sont supposées être grandes et du même ordre dans le premier cas tandis que  $s$  grand,  $t \sim 1$ . GeV<sup>2</sup> dans le second. Mais on peut noter un intense effort théorique, avec L. Lipatov [26] notamment, pour étendre les techniques perturbatives de QCD au domaine de Regge.

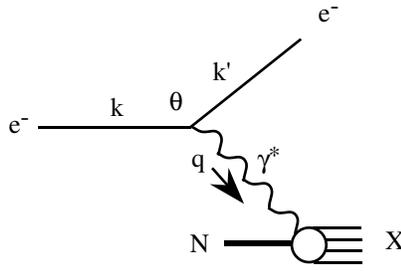
Comme le modèle des partons est un des piliers de l'application de la QCD à la physique des hautes énergies il est nécessaire de s'attarder sur ce modèle et, en particulier, sur la diffusion profondément inélastique qui a joué un rôle fondamental dans son élaboration. Ce sera l'objet de la prochaine section. Puis, dans les parties suivantes on justifiera la propriété de liberté asymptotique et celle de factorisation avant de conclure par quelques applications. Différentes applications font l'objet de la dernière section.

## 2 La diffusion profondément inélastique (DIS).

Historiquement, l'expérience qui a joué un rôle fondamental est la diffusion profondément inélastique du nucléon (Deep Inelastic Scattering: DIS) au SLAC au début des années 1970 [12]. Le processus considéré est

$$e^- N \rightarrow e^- X \text{ (ou } \mu^- N \rightarrow \mu^- X)$$

où  $N$  est un nucléon et  $X$  est le système hadronique produit mais non détecté. En diagramme, on a



Le photon virtuel émis par l'électron (ou le muon) à haute énergie est absorbé par le nucléon qui se casse en hadrons. Du point de vue expérimental, on n'observe que le lepton sortant. Dans le référentiel du laboratoire la cinématique est définie comme suit :

$$\begin{aligned}
\text{nucléon, N} & \quad P = (M, \vec{0}) \\
e^- \text{ entrant,} & \quad k = (E, 0, 0, k) \simeq (E, 0, 0, E), \quad E \gg m, \text{ masse du lepton} \\
e^- \text{ sortant,} & \quad k' = (E', E' \sin \theta, 0, E' \cos \theta) \\
\text{photon virtuel,} & \quad q = (E - E', -E' \sin \theta, 0, E - E' \cos \theta), \text{ impulsion du transfert.}
\end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'angle de diffusion du lepton. Le système photon-hadron est caractérisé par les variables :

$$\begin{aligned}
\nu = E - E', & \quad \text{énergie du } \gamma^* \text{ dans le laboratoire} \\
Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}, & \quad \text{carré de l'impulsion de transfert} \\
x = \frac{Q^2}{2Pq} = \frac{Q^2}{2M\nu}, & \quad \text{variable de Bjorken, sans dimension, qui prendra} \\
& \quad \text{une signification physique dans le modèle des partons.}
\end{aligned}$$

On peut alors écrire, pour la collision  $\gamma^* N \rightarrow X$ ,

$$M_X^2 = (P + q)^2 = M^2 + Q^2 \frac{(1-x)}{x}$$

Puisque  $M_X^2 > M^2$  (le nucléon étant le plus léger des baryons), on a nécessairement  $0 \leq x \leq 1$ , le cas  $x = 1$  correspondant à la diffusion élastique.

L'élément de matrice au carré se décompose en trois parties :

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{Q^4} L^{\mu\nu} W_{\mu\nu}, \quad \text{avec} \quad (2.10)$$

– le tenseur leptonique connu qui décrit l'interaction lepton-photon :

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{k}' \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu) = 2(k'^\mu k^\nu + k^\nu k'^\mu - k k' g^{\mu\nu}) ; \quad (2.11)$$

– le carré du propagateur du photon  $e^4/Q^4$  ;  
– le tenseur hadronique que l'on paramètre comme

$$W^{\mu\nu} = -2M W_1 \left( g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} \right) + \frac{2W_2}{M} \left( P^\mu - \frac{Pq}{q^2} q^\mu \right) \left( P^\nu - \frac{Pq}{q^2} q^\nu \right) \quad (2.12)$$

qui est la forme la plus générale respectant (i) la parité et (ii) l'invariance de jauge  $q_\mu W^{\mu\nu} = 0$ . Les fonctions de structure,  $W_1(Q^2, 2Pq, P^2)$  et  $W_2(Q^2, 2Pq, P^2)$  dépendent

des invariants du système hadronique. Après contraction des indices, l'élément de matrice au carré devient,

$$|\mathcal{M}|^2 = 8ME E' \frac{e^4}{Q^4} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right). \quad (2.13)$$

La section efficace lepton-proton est alors donnée par

$$\sigma = \frac{1}{2(P+k)^2} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3 2E'} \frac{d^4 P_X}{(2\pi)^3} |\mathcal{M}|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P+k-P_X-k') \quad (2.14)$$

où :

- $1/2(P+k)^2 \sim 1/4ME$  est le facteur de flux ;
- $d^3 k'/(2\pi)^3 2E'$ , l'espace de phase invariant du lepton final ;
- $d^4 P_X/(2\pi)^3$ , l'espace de phase de  $X$  (on intègre non seulement sur la tri-impulsion mais aussi sur la masse invariante du système).

Evaluant explicitement l'équation ci-dessus on a, dans le repère du laboratoire :

$$\frac{d\sigma}{dE' d\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 2W_1(Q^2, 2Pq, M^2) \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2(Q^2, 2Pq, M^2) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right).$$

Il est utile d'avoir l'expression de la section différentielle sous forme invariante de Lorentz :

$$\frac{E' d\sigma}{dk'^3} = \frac{\alpha^2}{s} \frac{2}{Q^4} \left\{ Q^2 (2MW_1 - \frac{W_2 P \cdot q}{M x}) + \frac{W_2}{2M} (s^2 + u^2) \right\}. \quad (2.15)$$

où les invariants de Mandelstam,  $s$  et  $u$ , sont définis par :  $(P+k)^2 = s$ ,  $(P-k')^2 = u$ .

Remarques :

- la dynamique de l'interaction  $\gamma^* N$  est entièrement dans les fonctions inconnues  $W_1$ ,  $W_2$  ;
- en jouant sur  $E$ ,  $E'$ ,  $\theta$  on peut extraire  $W_1(Q^2, 2Pq, M^2)$ ,  $W_2(Q^2, 2Pq, M^2)$  expérimentalement ;
- $MW_1$ ,  $\frac{P \cdot q}{M} W_2 = \nu W_2$  sont sans dimensions ; on peut donc les exprimer comme fonctions de variables sans dimension et écrire

$$MW_1 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right), \quad \nu W_2 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right). \quad (2.16)$$

L'expérience permet de mettre en évidence les deux faits importants suivants (voir fig. 4) :

$$MW_1 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right) \equiv MW_1(x), \quad \nu W_2 \left( x, \frac{M^2}{Q^2} \right) \equiv \nu W_2(x) \quad (2.17)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dépendance explicite en  $Q^2$ , à l'intérieur des barres d'erreurs expérimentales. C'est la propriété d'invariance d'échelle [10]. Si l'on avait négligé depuis le début la masse  $M$  du proton, ( $P^2 = M^2 = 0$ ) on aurait eu immédiatement l'invariance d'échelle<sup>††</sup>. Tout se passe donc comme si le photon virtuel est insensible à la taille du proton ;

- la relation  $2MW_1(x) \equiv \nu W_2(x)/x$  est satisfaite expérimentalement.

Nous allons maintenant montrer comment ces deux propriétés se comprennent dans le modèle des partons de spin  $\frac{1}{2}$ .

---

<sup>††</sup>Ce raisonnement n'est valable que si l'on suppose qu'il n'existe pas d'échelle "cachée". On verra cependant dans le chapitre 5 qu'une telle échelle est bien présente.

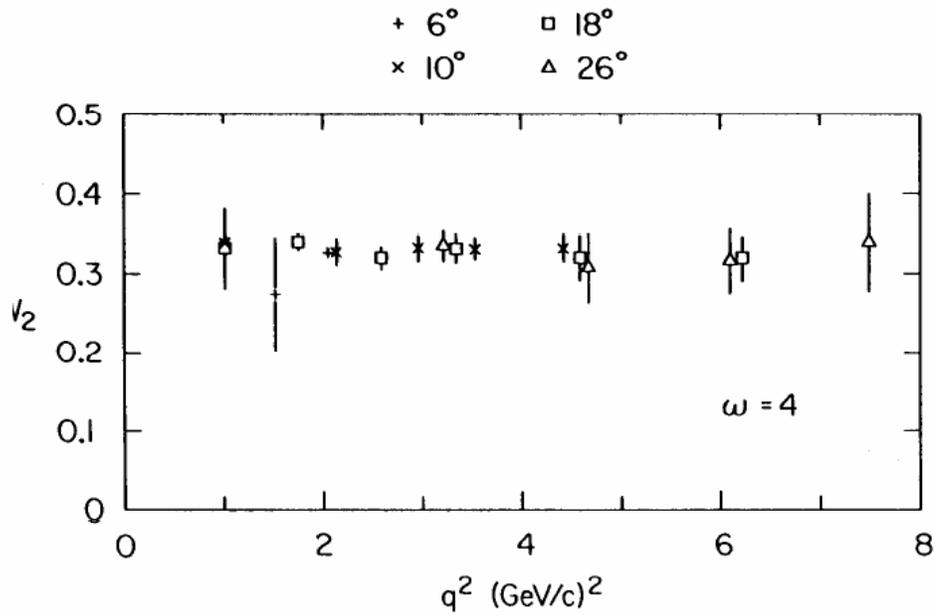


Figure 4: Résultats expérimentaux de SLAC [12] montrant l'invariance d'échelle de la fonction  $\nu W_2$ . La variable  $\omega = 1/x$ .

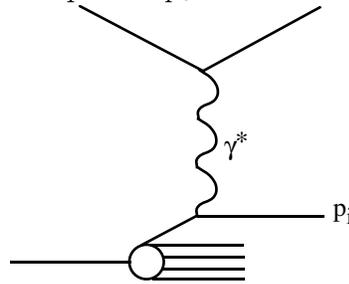
## 2.1 Le modèle des partons et la diffusion profondément inélastique

Feynman a proposé de considérer le proton (ou le nucléon) comme composé de partons, objets sans structure (ponctuels) dont les nombres quantiques sont à priori inconnus (spin, charge ...) mais qui doivent cependant former un objet de spin, charge,... connus [11]. On se place dans un repère où l'impulsion du proton  $P \sim (E, 0, 0, E)$ ,  $E \rightarrow \infty$  (repère d'impulsion infinie) et on négligera éventuellement les masses du proton et des partons. L'impulsion du proton est portée par les constituants et on peut donc écrire

$$p_i = x_i P$$

où  $p_i$  est l'impulsion du parton  $i$  et on a  $\sum_i x_i = 1$ .

Le postulat de base consiste à décrire l'interaction  $\gamma^*$ -hadron en termes d'interaction  $\gamma^*$ -parton puisque le photon très virtuel a un pouvoir de résolution très élevé et qu'il peut donc "voir" les constituants du proton. Ceci est symbolisé par le diagramme suivant où le photon virtuel est absorbé par le parton  $p_i$



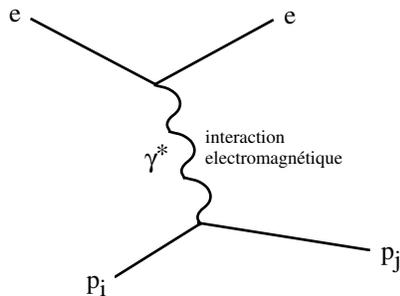
Le temps caractéristique de l'interaction électromagnétique est (l'inverse de la virtualité du photon "dilatée" dans le repère d'impulsion infinie) :

$$\tau_{emg} \sim \frac{1}{\sqrt{Q^2}} \frac{q_0 + q}{\sqrt{Q^2}} = \frac{1}{xE} \rightarrow \infty \text{ quand } E \rightarrow \infty . \quad (2.18)$$

En comparaison, le temps caractéristique de l'interaction forte (en supposant le proton de masse  $M$  constitué de 2 partons de masse nulle pour simplifier) est :

$$\tau_{i.f.} \sim \frac{1}{E - E_1 - E_2} \sim \frac{E}{M^2} \rightarrow \infty \text{ quand } E \rightarrow \infty. \quad (2.19)$$

On en conclut l'inégalité  $\tau_{emg} \ll \tau_{i.f.}$  et l'interaction électromagnétique est quasi instantanée comparée au temps d'interaction forte quand  $E \rightarrow \infty$ ,  $x \neq 0$ . Il paraît donc justifié de négliger les effets de l'interaction forte et de considérer les partons comme "libres" lors de la diffusion électromagnétique. Pendant le temps de l'interaction  $\gamma^* p_i$ , on va ignorer l'interaction hadronique qui prend place sur une échelle de temps beaucoup plus grande. Bien après l'interaction électromagnétique, les partons se recombinent pour donner des hadrons avec une probabilité unité puisque l'on n'observe que des hadrons dans le système  $X$ . Puisque les interactions fortes de confinement n'affectent pas l'interaction du  $\gamma^*$  avec le parton quand  $E \rightarrow \infty$ , il suffira donc de calculer



et d'ajouter ensuite de façon incohérente les sections efficaces invariantes  $ep_i$  pour reconstituer la section efficace électron-proton.

### 2.1.1 Section efficace électron-parton

On va décomposer l'amplitude invariante de la manière suivante (c.f. éq. 2.10)

$$|\mathcal{M}|_{ep_i}^2 = \frac{e_i^2 e^4}{Q^4} L^{\mu\nu} \underbrace{\hat{W}_{\mu\nu}}_{\text{interact. } \gamma^* \text{-parton}}.$$

où  $e_i$  est la charge du parton mesurée par rapport à celle du proton  $e$ . On suppose pour le moment que les partons ont un spin  $\frac{1}{2}$  (certains partons ont nécessairement un spin demi-entier, puisque le proton a  $S = \frac{1}{2}$ ). On peut poser pour l'interaction  $\gamma^*$ -parton, et par analogie avec QED, l'éq. (2.11),

$$\hat{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\not{p}' \gamma^\mu \not{p} \gamma^\nu) = 2(p_{i\mu} p'_{i\nu} + p_{i\nu} p'_{i\mu} - p_i p'_i g_{\mu\nu}), \quad (2.20)$$

où l'impulsion du parton final est  $p'_i = p_i + q$ . Pour des partons de masse nulle on a alors,

$$|\mathcal{M}|_{ep_i}^2 = 8 \frac{e_i^2 e^4}{Q^4} ((p_i k)^2 + (p_i k')^2). \quad (2.21)$$

La section efficace de diffusion électron-parton sera donc (c.f. (éq. 2.14))

$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{2\hat{s}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{d^3 k'}{2E'} \frac{d^3 p'_i}{2p'_i{}^0} |\mathcal{M}|_{ep_i}^2 \delta^{(4)}(k + p_i - k' - p'_i) \quad (2.22)$$

avec  $\hat{s} = (p_i + k)^2$ . Après intégration, la section efficace différentielle invariante aura la forme :

$$\frac{E'd\hat{\sigma}}{d^3k'} = \frac{\alpha^2}{\hat{s}} e_i^2 \frac{8}{Q^4} ((p_i k)^2 + (p_i k')^2) \delta(2p_i q - Q^2).$$

Pour trouver la forme de la section efficace hadronique, on va sommer de façon incohérente les diverses contributions partoniques. On va donc devoir calculer :

$$\frac{E'd\sigma}{d^3k'} = \sum_i \int_0^1 dz_i F_i(z_i) \left. \frac{E'd\hat{\sigma}}{d^3k'} \right|_{p_i=z_i P} \quad (2.23)$$

où  $F_i(z)$  est la densité de partons, par unité d'impulsion  $z$ , de partons de type  $i$  portant la fraction d'impulsion  $z$  du proton. Introduisant la notation  $\hat{s} = 2p_i k = z_i s$  et  $2p_i k' = -z_i u$ , on trouve.

$$\begin{aligned} \frac{E'd\sigma}{d^3k'} &= \frac{\alpha^2}{s} \sum_i e_i^2 \int_0^1 \frac{dz_i}{z_i} F_i(z_i) \frac{2z_i^2}{Q^4} (s^2 + u^2) \delta(2z_i P \cdot q - Q^2) \\ &= \frac{\alpha^2}{s} \frac{s^2 + u^2}{Q^4} \sum_i e_i^2 \frac{x}{Pq} F_i(x) \end{aligned} \quad (2.24)$$

valable pour des partons de spin  $\frac{1}{2}$ . On note que les contraintes cinématiques fixent la valeur de l'impulsion du parton interagissant à  $z_i = \frac{Q^2}{2Pq} = x$ , la variable de Bjorken. Si on compare avec la formule de la section efficace différentielle invariante électron-proton (éq. 2.15), on peut identifier:

$$\frac{W_2}{M}(x, Q^2, P^2) = \sum_i e_i^2 \frac{x}{Pq} F_i(x)$$

qui est équivalent à

$$\nu W_2(x, Q^2, P^2) = \sum_i e_i^2 x F_i(x) \quad (2.25)$$

et on observe, de plus, que

$$2MW_1(x, Q^2, P^2) = \frac{1}{x} \nu W_2(x)$$

Exercice : Montrer que pour des partons de spin 0 (couplage au  $\gamma^*$  donné par  $e_i(p_i + p'_i)^\mu$ ) on a  $W_1 \equiv 0$ .

En conclusion,

- On voit donc que le modèle des partons prédit bien l'invariance d'échelle, c'est-à-dire que  $\nu W_2(x, Q^2, P^2) = \nu W_2(x)$  (conséquence de la nature ponctuelle des partons) ;
- La relation  $2MW_1(x) = \nu W_2(x)/x$  est une conséquence du spin  $\frac{1}{2}$  des partons : cela montre que les seuls partons chargés dans le proton sont de spin  $\frac{1}{2}$  ;
- La variable de Bjorken  $x = \frac{Q^2}{2Pq}$  prend un sens physique : c'est l'impulsion du parton, qui a subi l'interaction électromagnétique, normalisée à celle du proton ;
- La fonction de structure  $\nu W_2$  acquiert également une interprétation : c'est la somme pondérée, par l'impulsion  $x$  et la charge  $e_i^2$ , des densités de partons  $i$  dans le proton.

## 2.1.2 Identification partons $\equiv$ quarks + ... ; règles de somme

Il est tentant d'identifier les partons de Feynman aux quarks de Gell-Mann<sup>††</sup> et Zweig et de supposer que le proton et le neutron, dans les expériences d'inélastique profond s'expriment, comme dans le modèle des quarks, par:

$$\begin{aligned} \text{proton} &= (uud) \\ \text{neutron} &= (udd). \end{aligned}$$

Ce sont les quarks de valence et on dénote  $u_v(x)$  et  $d_v(x)$  la distribution de ces quarks  $u$  et  $d$  dans le proton. Par la symétrie d'isospin on a ( $p$  dénote ici le proton et  $n$  le neutron)

$$\begin{aligned} F_u^p(x) &= F_d^n(x) = u_v(x) \\ F_d^p(x) &= F_u^n(x) = d_v(x) \end{aligned}$$

Les nombres quantiques du nucléon sont portés par les quarks de valence. L'expérience montre que le proton contient également des antiquarks : ce sont les antiquarks de la mer ou "matelots"<sup>\*</sup>. La somme des nombres quantiques portés par les quarks et antiquarks matelots est nulle. Leur distribution est donc notée :  $u_s(x) = \bar{u}_s(x)$ ,  $d_s(x) = \bar{d}_s(x)$ ,  $s_s(x) = \bar{s}_s(x)$ . On définit

$$\begin{aligned} u(x) &= u_v(x) + u_s(x) \\ d(x) &= d_v(x) + d_s(x). \end{aligned}$$

En négligeant le rôle des quarks étranges, on peut écrire, suivant le modèle des partons (voir éq. (2.25))

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \nu W_2^{ep} &= \frac{4}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{1}{9}(d(x) + \bar{d}(x)) \\ \frac{1}{x} \nu W_2^{en} &= \frac{1}{9}(u(x) + \bar{u}(x)) + \frac{4}{9}(d(x) + \bar{d}(x)). \end{aligned}$$

où on utilise la notation simplifiée:  $\bar{u}_s = \bar{u}$ ,  $\bar{d}_s = \bar{d}$ .

L'interprétation des fonctions  $u(x)$ ,  $d(x)$  comme densités de probabilité de trouver des quarks dans le nucléon permet d'écrire de nombreuses "règles de somme" qui expriment le fait que les caractéristiques d'un hadron sont entièrement portées par ses constituants. Par exemple, la différence:

$$\frac{\nu}{x} W_2^{ep}(x) - \frac{\nu}{x} W_2^{en}(x) = \frac{\nu}{x} W_2^{ep-en}(x) = \frac{1}{3} (u(x) + \bar{u}(x) - d(x) - \bar{d}(x)) = \frac{1}{3} (u_v(x) - d_v(x))$$

dont l'intégrale mesurée expérimentalement est :

$$3 \int_0^1 \frac{dx}{x} \nu W_2^{ep-en}(x) = \int_0^1 dx (u_v(x) - d_v(x)) = 1$$

---

<sup>††</sup>Pour la petite histoire, on peut rappeler que Feynman et Gell-Mann, tous deux professeurs à Caltech, ont eu pendant longtemps des relations "tendues".

<sup>\*</sup>Jolie dénomination due, je crois, à Marc Winter de l'IN2P3 à Strasbourg

qui correspond bien à la différence du nombre de quarks de valence de type  $u$  et  $d$ . Si l'on connaît  $u$ ,  $d$ ,  $\bar{u}$  et  $\bar{d}$  indépendamment, on peut également vérifier les règles de somme de charge:

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{2}{3}(u - \bar{u}) - \frac{1}{9}(d - \bar{d}) \right] = 1 = \text{charge du proton}$$

$$\int_0^1 dx \left[ \frac{2}{3}(d - \bar{d}) - \frac{1}{9}(u - \bar{u}) \right] = 0 = \text{charge du neutron}$$

Ces règles de somme sont en accord avec l'expérience. D'autre part, il est possible de mesurer

$$\frac{1}{x} \nu W_2^{ep+en} = \frac{5}{9} (u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x))$$

et ainsi calculer

$$\frac{9}{5} \int_0^1 dx \nu W_2^{ep+en} = \int_0^1 dx x (u(x) + \bar{u}(x) + d(x) + \bar{d}(x))$$

qui mesure l'impulsion moyenne portée par les quarks  $u$ ,  $d$ ,  $\bar{u}$  et  $\bar{d}$  dans le nucléon. Le résultat de cette expérience est:

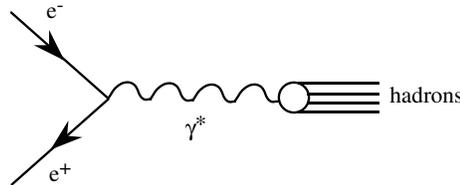
$$\langle x \rangle_{q+\bar{q}} \simeq 0.45 < 1. \quad (2.26)$$

ce qui signifie que les quarks ne portent que la moitié de l'impulsion du nucléon, le reste étant porté par des partons neutres : il est tentant, alors, d'identifier ces partons neutres aux "gluons" qui lient les quarks entre eux dans le nucléon (le quark  $s$  ne joue pas un rôle important dans cette réaction).

Pour terminer avec cette succincte introduction au modèle des partons, on peut noter que la diffusion  $\nu$ -nucléon est susceptible d'une description similaire à celle de  $e$ -nucléon à condition de remplacer l'échange d'un photon virtuel par l'échange d'un boson de jauge  $W^\pm$  ou  $Z$  virtuel suivant que l'on étudie les courants chargé ou neutre.

### 2.1.3 Application du modèle des partons

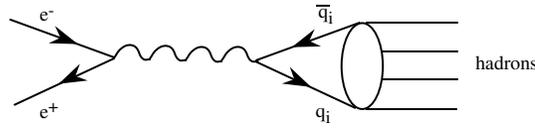
On peut considérer le processus croisé de DIS, à savoir  $e^+e^- \rightarrow$  hadrons:



Pour  $E_{e^+e^-} = Q \rightarrow \infty$  on peut appliquer le modèle des partons: le photon virtuel de genre temps ( $Q^2 > 0$ ) se couplera à une paire quark-antiquark qui, "longtemps" après l'interaction électromagnétique, se désintègrera en hadrons :

La transition  $q_i\bar{q}_i \rightarrow$  hadrons se fait avec probabilité 1. On peut donc écrire

$$\sigma^{e^+e^- \rightarrow had} = \sum_i \sigma^{e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i}.$$



Il est traditionnel de définir le rapport sans dimension :

$$R = \frac{\sigma^{e^+e^- \rightarrow had.}}{\sigma^{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}} = \sum_i e_i^2.$$

On voit que les seules différences entre le processus hadronique et le processus purement leptonique sont les facteurs de charge (les facteurs cinématiques,  $\gamma^\mu$ , espace de phase sont identiques pour les quarks et les  $\mu$  car ce sont des particules de spin 1/2, et on néglige les masses). On trouve alors

$$R = \underbrace{\frac{4}{9}}_u + \underbrace{\frac{1}{9}}_d + \underbrace{\frac{1}{9}}_s + \underbrace{\frac{4}{9}}_c + \underbrace{\frac{1}{9}}_b = \frac{11}{9}$$

où pour  $Q > 10$  GeV, il faut prendre en compte la contribution des saveurs lourdes  $c$  et  $b$  (le seuil de production du quark  $top$  est beaucoup plus élevé et correspond à  $Q > 350$  GeV). Cette estimation est en désaccord avec les résultats expérimentaux comme on peut le voir sur la fig. 5 où l'on observe plutôt un facteur 3,7 pour  $\sqrt{s} = Q > 10$  GeV (les pics correspondent à la production d'états liés de quarks lourds près du seuil de production de ces quarks.).

En fait, dans le calcul ci-dessus, on n'a pas tenu compte du fait que les quarks sont colorés. Prenant ceci en compte il faut sommer sur les 3 types de couleur, ce qui donne

$$R = N_c \sum_i e_i^2 = \frac{11}{3}$$

et qui est en accord avec l'expérience (voir la courbe "naive quark model" sur la figure). On peut noter qu'en dessous du seuil de production du quark charmé ( $\sqrt{s} \sim 3$  GeV) les données sont de l'ordre de  $R = 2$  comme il se doit.

#### 2.1.4 Le modèle des partons: formulation générale

1. Sous certaines conditions que l'on précisera ci-dessous, on considère qu'un hadron est constitué de partons. On travaille dans le repère d'impulsion infinie du hadron. On a donc

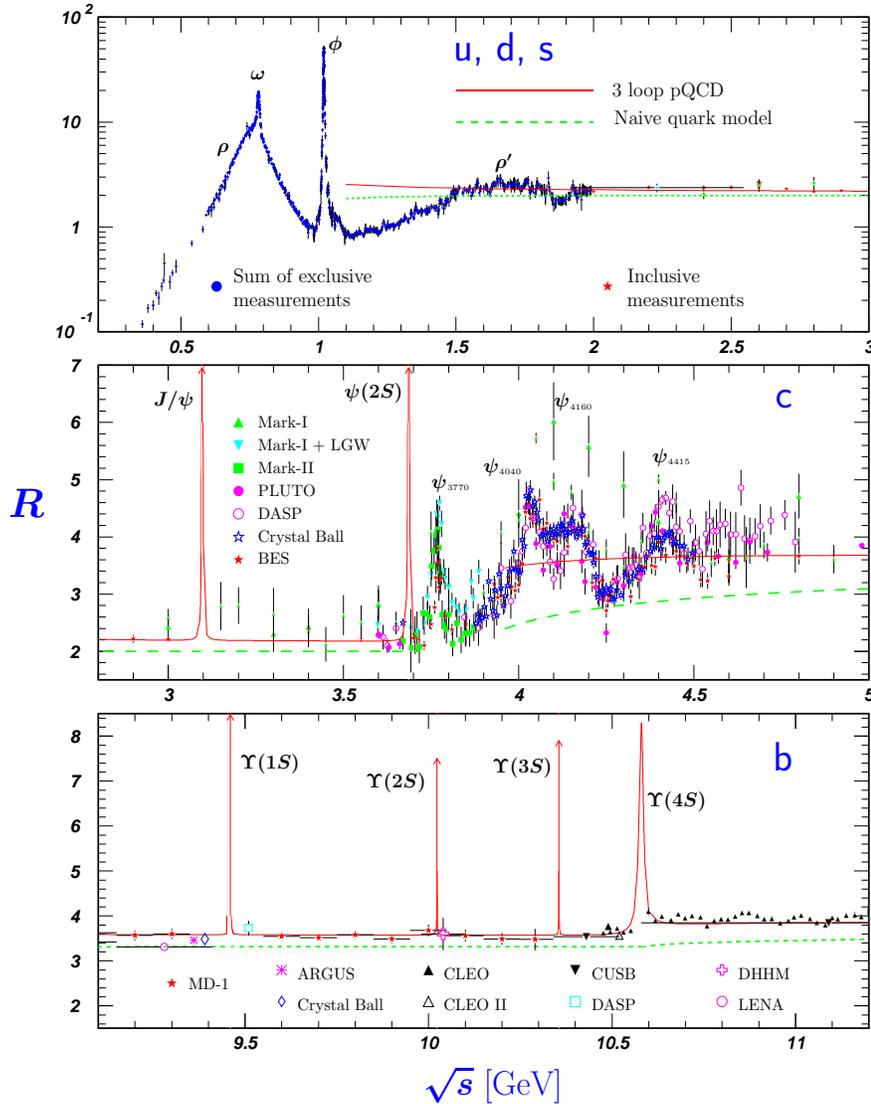
$$H = \{p_i\} \quad i = 1, \infty$$

$$P = \sum_i p_i \quad \text{où les } P, p_i \text{ sont les impulsions du hadron et des partons respectivement.}$$

On néglige toutes les masses (du hadron et des partons) et on peut alors écrire

$$p_i = x_i P \quad \text{avec} \quad \sum_i x_i = 1.$$

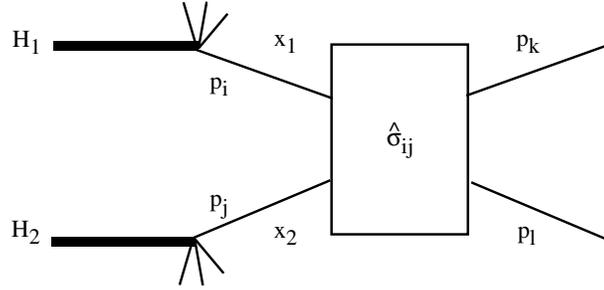
Les partons sont sans structure et on ignore leurs interactions à l'intérieur du hadron.

$R$  in Light-Flavor, Charm, and Beauty Threshold Regions

**Figure 40.7:**  $R$  in the light-flavor, charm, and beauty threshold regions. Data errors are total below 2 GeV and statistical above 2 GeV. The curves are the same as in Fig. 40.6. **Note:** CLEO data above  $\Upsilon(4S)$  were not fully corrected for radiative effects, and we retain them on the plot only for illustrative purposes with a normalization factor of 0.8. The full list of references to the original data and the details of the  $R$  ratio extraction from them can be found in [arXiv:hep-ph/0312114]. The computer-readable data are available at <http://pdg.ihep.su/xsect/contents.html> (Courtesy of the COMPAS(Protvino) and HEPDATA(Durham) Groups, August 2005.)

Figure 5: *Compilation par le "Particle Data Group" des données expérimentales sur le rapport  $R$  au dessous de  $\sqrt{s} = 12$  GeV.*

2. L'interaction entre hadrons se réduit à une interaction entre partons selon le diagramme suivant



où  $\hat{\sigma}_{ij}$  est la section efficace de l'interaction "dure" entre partons. La section efficace hadronique est une superposition incohérente des sections efficaces partoniques c'est-à-dire que l'on ajoute les probabilités et non les amplitudes. On écrit alors

$$\sigma^{H_1 H_2} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 F_i^{H_1}(x_1) F_j^{H_2}(x_2) \hat{\sigma}_{ij}(x_1, x_2, s).$$

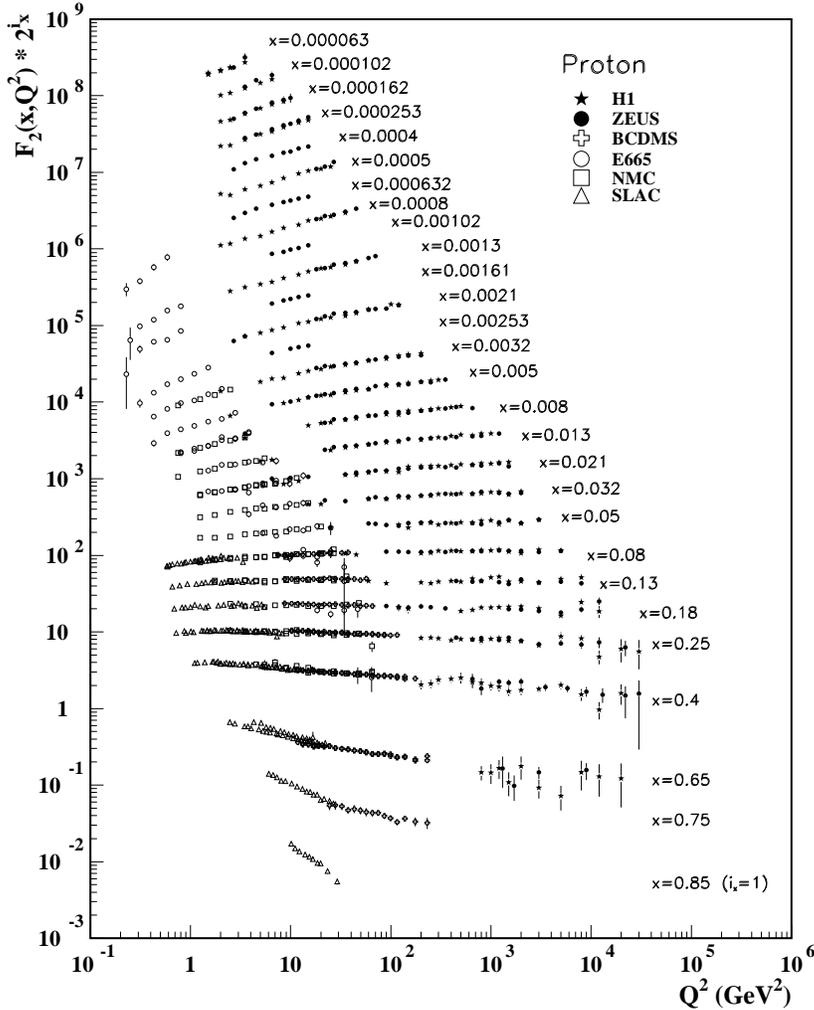
La fonction  $F_i^H(x)$  est la densité partonique c'est-à-dire la probabilité de trouver dans le hadron  $H$  un parton de type  $i$  portant la fraction  $x$  de l'impulsion du hadron. On néglige les effets d'impulsion transverse. La fonction  $F_i^H(x)$  est invariante d'échelle, c'est-à-dire indépendante des variables (dimensionnées) de Mandelstam  $s, t, u$ . Elle contient les effets à "longue distance" (confinement) et la dépendance en  $x$  n'est pas prédite par la théorie. Les effets de "courte distance" sont contenus dans la section efficace partonique "dure"  $\hat{\sigma}_{ij}$ . Cette séparation - factorisation - entre physique à longue distance et physique à courte distance est analogue à celle réalisée par l'approche beaucoup plus rigoureuse mais plus restrictive du développement en produit d'opérateurs sur le cône de lumière [28].

3. Le modèle des partons est un postulat valable quand toutes les variables dimensionnées  $s, t, u$  sont grandes comparées à l'échelle de masse des hadrons ( $\sim 1 \text{ GeV}^2$ ).

## 2.2 Au delà du modèle des partons naïf

Une version moderne de la fig. 4 est montrée en fig. 6. Les données combinées de nombreuses expériences permettent de couvrir un très grand domaine en  $x$ ,  $6,310^{-5} < x < 0,85$ , et  $Q^2$ ,  $0,3 < Q^2[\text{GeV}^2] < 30000$ . Si l'invariance d'échelle est bien vérifiée pour les valeurs  $0,05 < x < 0,25$  ce n'est le cas ni à petit  $x$ , ni à grand  $x$  où une violation logarithmique (en  $\ln(Q^2)$ ) est clairement visible. L'hypothèse à la base du modèle des partons, selon laquelle les partons sont libres et indépendants dans un hadron, est donc une simplification trop drastique. Il est nécessaire de prendre en compte l'interaction entre partons qui est décrite par la Chromodynamique Quantique. Quand les énergies mises en jeu sont grandes ( $s, t, u \rightarrow \infty$ ) on verra que la constante de couplage de QCD  $\alpha_s \rightarrow 0$ . Cela justifie une approche perturbative. Le résultat fondamental de l'application de QCD perturbatif au modèle des partons est que l'interprétation probabilistique du modèle est

NOTE: THE FIGURES IN THIS SECTION ARE INTENDED TO SHOW THE REPRESENTATIVE DATA. THEY ARE NOT MEANT TO BE COMPLETE COMPILATIONS OF ALL THE WORLD'S RELIABLE DATA.



**Figure 16.6:** The proton structure function  $F_2^p$  measured in electromagnetic scattering of positrons on protons (collider experiments ZEUS and H1), in the kinematic domain of the HERA data, for  $x > 0.000063$  (cf. Fig. 16.9 for data at smaller  $x$  and  $Q^2$ ), and for electrons (SLAC) and muons (BCDMS, E665, NMC) on a fixed target. Statistical and systematic errors added in quadrature are shown. The data are plotted as a function of  $Q^2$  in bins of fixed  $x$ . Some points have been slightly offset in  $Q^2$  for clarity. The ZEUS binning in  $x$  is used in this plot; all other data are rebinned to the  $x$  values of the ZEUS data. For the purpose of plotting,  $F_2^p$  has been multiplied by  $2^{i_x}$ , where  $i_x$  is the number of the  $x$  bin, ranging from  $i_x = 1$  ( $x = 0.85$ ) to  $i_x = 28$  ( $x = 0.000063$ ). References: **H1**—C. Adloff *et al.*, Eur. Phys. J. **C21**, 33 (2001); C. Adloff *et al.*, Eur. Phys. J. (accepted for publication) hep-ex/0304003; **ZEUS**—S. Chekanov *et al.*, Eur. Phys. J. **C21**, 443 (2001); **BCDMS**—A.C. Benvenuti *et al.*, Phys. Lett. **B223**, 485 (1989) (as given in [54]); **E665**—M.R. Adams *et al.*, Phys. Rev. **D54**, 3006 (1996); **NMC**—M. Arneodo *et al.*, Nucl. Phys. **B483**, 3 (97); **SLAC**—L.W. Whitlow *et al.*, Phys. Lett. **B282**, 475 (1992).

Figure 6: *Compilation par le "Particle Data Group" des données récentes de la fonction de structure  $F_2(x, Q^2) = \nu W_2(x, Q^2)/x$ .*

préservée mais il apparaîtrait des modifications. Le résultat final du calcul d'une section efficace est :

$$\sigma^{H_1 H_2} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 F_i^{H_1}(x_1, M) F_j^{H_2}(x_2, M) \left[ \hat{\sigma}_{ij} + \alpha_s(M) \hat{\sigma}_{ij}^{(1)} + \alpha_s^2(M) \hat{\sigma}_{ij}^{(2)} \dots \right]$$

où  $M$  est l'échelle de masse caractéristique du processus dur:  $M^2 \sim s, t, u$ . Plus précisément,

- la propriété de factorisation entre physique à courte distance (distributions partoniques) et physique à longue distance (section partonique dure) n'est pas détruite par les corrections QCD ;
- les densités partoniques acquièrent une dépendance logarithmique en  $M$ : c'est la fameuse "violation de l'invariance d'échelle" qui est prédite et calculable en QCD ;
- la section efficace partonique admet un développement en puissance de  $\alpha_s$  à coefficients finis et calculables.

Un des buts du cours sera de dériver la formule ci-dessus.

## 2.3 Conclusions

Nous avons essayé dans la section 2 de décrire quelques résultats qui semblent indiquer que les hadrons sont constitués d'entités plus fondamentales. En effet, on peut comprendre un grand nombre de phénomènes physiques aux échelles de masse de  $M \sim 1$  GeV aussi bien que  $M \gg 1$  GeV si l'on suppose que les hadrons sont constitués de quarks définis comme des objets ponctuels de spin  $\frac{1}{2}$ , et de charge fractionnaire. Ces quarks sont groupés en trois familles:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$$

D'autre part, dans le Modèle Standard, un quark de saveur donnée vient en 3 couleurs  $q = (q_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $q$  appartenant à la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  du groupe  $SU(3)_{\text{couleur}}$ . Les autres candidats possibles pour le groupe de couleur comme  $O(3)$ ,  $SO(3)$  et  $U(3)$  sont éliminés car ils sont en désaccord avec les résultats expérimentaux:

- $SO(3)$  et  $O(3)$  permettent l'existence d'états  $[qq]$  singulets de couleur de charge fractionnaire, car ils ne distinguent pas la couleur de l'anti-couleur. De tels états ne sont pas observés expérimentalement.
- $U(3)$  sera exclu ultérieurement lorsqu'on imposera l'invariance de jauge locale : il existerait alors un gluon de masse nulle, sans couleur, qui induirait une interaction à longue portée entre les hadrons, en contradiction avec l'expérience.

Remarque : A priori, le Modèle Standard, tel que décrit ci-dessus, n'était pas la seule possibilité. En particulier, Han et Nambu [27] ont proposé une alternative où les quarks ont une charge entière (c.f. table 1). La version jaugée de Han-Nambu (due à

Pati et Salam) a eu une certaine vogue: toutes les prédictions  $\sim \sum_q e_q^2$  coïncident avec celle du Modèle Standard. Elle a néanmoins été éliminée lorsque des mesures précises de quantités expérimentales dépendant de  $\sum_q e_q^4$  sont apparues (p. ex. dans les processus  $\gamma + p \rightarrow \gamma + X$ ,  $pp \rightarrow \gamma + \gamma + X$ ).

	R	G	B
u	0	1	1
d	-1	0	0
s	-1	0	0

Table 1: Charge des différents quarks colorés dans le modèle de Han-Nambu

### 3 Le Lagrangien QCD

Avant d'entrer dans le détail de l'interaction entre quarks et gluons nous allons faire quelques rappels sur l'Electrodynamique Quantique. Le principe de construction de la théorie, l'invariance de jauge, est le même dans les deux cas mais le cas abélien de QED est beaucoup plus simple à écrire. Le comportement asymptotique (infrarouge et ultraviolet) des deux théories est cependant complètement différent. Toute la physique est contenue dans la densité lagrangienne,  $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ , une fonctionnelle locale des champs  $\phi(x)$  et de leurs premières dérivées, à partir de laquelle on construit l'action:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)).$$

L'action est une quantité sans dimension dans les unités où  $\hbar = 1$ . Si on impose que l'action soit stationnaire sous une variation du champ (principe de Hamilton), on obtient les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi(x)} - \partial_\mu \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi(x)} = 0 \quad (3.27)$$

qui décrivent l'évolution classique du champ  $\phi(x)$ . C'est à partir de ces équations, qu'en formalisme de la seconde quantification, on obtient les règles de Feynman qui permettent de calculer perturbativement n'importe quel processus en théorie des champs.

#### 3.1 Le Lagrangien QED

Pour QED, la densité lagrangienne s'écrit pour un fermion  $\Psi$  de masse  $m$  et de charge  $e$

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i \not{D} - m)\psi \quad (3.28)$$

où le tenseur du champ électromagnétique est

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x)$$

avec  $A^\mu(x)$  est le champ du photon, tandis que la dérivée covariante est définie par  $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ . Une transformation de jauge locale est définie par

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \quad (3.29)$$

et simultanément pour le photon

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x).$$

avec  $\alpha(x)$  une fonction réelle. Sous forme infinitésimale une transformation de jauge s'écrit :

$$\delta\psi = ig\alpha\psi , \quad \delta\bar{\psi} = -ie\bar{\psi}\alpha , \quad \delta A_\mu = \partial_\mu\alpha \Rightarrow \delta F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.30)$$

L'invariance de jauge garantit que le photon est de masse nulle : en effet un terme de masse tel que  $m^2 A_\mu A^\mu$  ne serait pas invariant. L'application des équations d'Euler-Lagrange mènent à l'équation de Dirac

$$(i \not{\partial} - m)\psi(x) = \underbrace{-e \not{A}(x)\psi(x)}_{\text{terme d'interaction}} \quad (3.31)$$

et aux équations de Maxwell inhomogènes

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = e\bar{\Psi}\gamma_\nu\Psi. \quad (3.32)$$

Quant aux équations homogènes elles résultent de

$$\partial^\mu \tilde{F}_{\mu\nu}(x) \doteq \partial^\mu \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} F^{\rho\lambda} = 0 . \quad (3.33)$$

## 3.2 Invariance de jauge non abélienne et le Lagrangien QCD

En QCD, le champ du quark est une collection de 3 champs de Dirac, un pour chaque composante colorée  $\psi_i$ . Il est noté (voir p. 6) :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_G \\ \psi_B \end{pmatrix} ,$$

et il appartient à la représentation fondamentale  $\mathbf{3}$  du groupe SU(3) ou U(3) (on doit encore déterminer le groupe d'invariance). D'après la théorie des groupes de Lie, un élément  $U$  du groupe agissant sur la représentation fondamentale s'écrit :

$$U = e^{ig \sum_a \alpha_a T_a} ,$$

avec  $T_a$  les générateurs de l'algèbre,  $\alpha_a$  des paramètres réels arbitraires et  $g$ , le couplage. La condition d'unitarité  $U^\dagger = U^{-1}$  impose  $T_a = T_a^\dagger$ . Pour SU(3) comme groupe de jauge, la condition  $\det U = 1$  impose  $\text{Tr } T_a = 0$  et on a 8 générateurs  $T_a$  ( $a = 1, \dots, 8$ ) qui satisfont aux relations de commutation d'une algèbre de Lie,

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c,$$

avec  $f_{abc}$  totalement antisymétrique et réel. De plus, les générateurs  $T^a$  sont orthogonaux dans le sens où

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}.$$

Si on choisit U(3) comme groupe d'invariance au lieu de SU(3) on a alors un générateur supplémentaire qui est la matrice  $\mathbf{1}$  commutant avec tous les générateurs de SU(3) :  $[\mathbf{1}, T^a] = 0$ . On impose à la théorie une invariance de jauge locale [29]. Si on applique une transformation de jauge locale,

$$\delta\psi = ig\alpha_a T^a \psi, \quad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(-ig\alpha_a T^a),$$

à la densité lagrangienne  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i \not{\partial} - m)\psi$ , on obtient alors

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi} \{-g(\partial_\mu \alpha_a) T^a \gamma^\mu\} \psi.$$

Par analogie avec QED, on va rétablir l'invariance grâce aux champs vecteurs  $A_\mu^b(x)$  :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i(\partial_\mu - igA_\mu^b(x)T^b)\gamma^\mu - m) \psi, \quad b = 1, \dots, 8 \text{ pour SU(3) ou } 9 \text{ pour U(3),}$$

qui devient invariant de jauge si on impose la transformation suivante sur les champs  $A_\mu^b$  :

$$\delta A_\mu^c = \partial_\mu \alpha^c - f^{cab} \alpha^a A_\mu^b.$$

Comme pour QED on vérifie facilement qu'un terme de masse associé aux champs  $A_\mu^a(x)$  n'est pas invariant de jauge. Les gluons sont donc des champs de masse nulle qui induisent alors des interactions à longue portée. Ce dernier argument est déterminant pour le choix du groupe de jauge. En effet, si U(3) était le groupe d'invariance, on aurait une interaction à longue portée entre hadrons qui serait singulet  $\mathbf{1}$  de couleur. Ceci est contraire aux observations expérimentales puisqu'on sait que la force nucléaire forte est à courte portée :  $\sim \frac{1}{m_\pi}$ . Cet argument exclut donc le groupe U(3) comme groupe de couleur et on reste avec SU(3) et 8 gluons colorés de masse nulle.

Pour compléter le lagrangien de QCD il faut introduire le terme cinétique des champs de jauge. L'analogie du tenseur  $F_{\mu\nu}$  de QED est

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \underbrace{gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c}_{\text{terme non abélien}}.$$

Il est pratique d'introduire les notations matricielles suivantes :

$$\bar{\alpha} = \alpha_a(x) T^a, \quad \mathcal{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \quad (3.34)$$

ainsi que la dérivée covariante agissant sur le fermion  $D_\mu = \partial_\mu - ig\mathcal{A}_\mu(x)$ . Le lagrangien, pour un fermion coloré, prend alors la forme compacte suivante (*cf.* éq. 3.28) :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi \quad (3.35)$$

et l'on peut vérifier, avec pas mal de sueur, que  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  est invariant sous la transformation

$$\begin{aligned} \delta\psi &= ig\bar{\alpha}\psi \Rightarrow \delta(D_\mu\psi) = ig\bar{\alpha}D_\mu\psi \\ \delta\mathcal{A}_\mu &= \partial_\mu\alpha - ig[\mathcal{A}_\mu, \bar{\alpha}] \Rightarrow \delta\mathcal{F}_{\mu\nu} = -ig[\mathcal{F}_{\mu\nu}, \bar{\alpha}] \end{aligned} \quad (3.36)$$

L'application des équations d'Euler-Lagrange (3.27) au champ du fermion permet d'obtenir l'équation de Dirac du fermion coloré :

$$(i \not{\partial} - m)\psi = -gT^a A_\mu^a \gamma^\mu \psi, \quad \psi = (\psi_i). \quad (3.37)$$

tandis que pour les bosons de jauge on trouve :

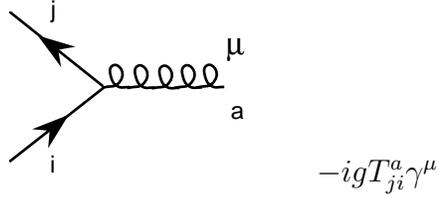
$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a = -g f^{abc} A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c - g \bar{\psi} \gamma_\nu T^a \psi. \quad (3.38)$$

ou, de façon explicite,

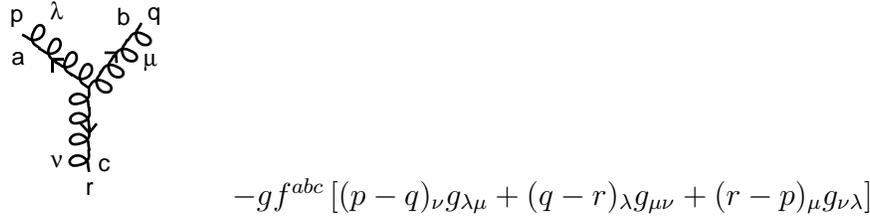
$$(\square g_\nu^\mu - \partial^\mu \partial_\nu) A_\mu^a(x) = -g \bar{\Psi} \gamma_\nu T^a \Psi - g f^{abc} A^{b\mu} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - g^2 f^{abc} f^{cde} A^{b\mu} A_\mu^d A_\nu^e \quad (3.39)$$

On peut alors extraire de ces équations :

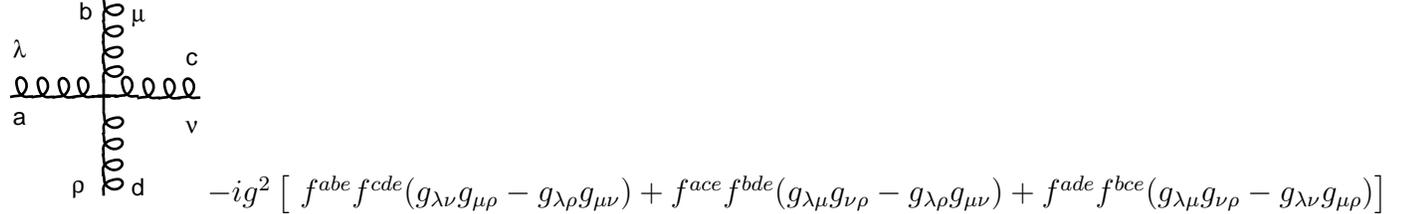
- le couplage fermion-gluon-fermion:



- le couplage à trois gluons :



- le couplage à 4 gluons:



Il est important de noter que la **même** constante de couplage apparaît tant dans le vertex à trois gluons (linéairement), le vertex à quatre gluons (quadratiquement) que dans le vertex quark-quark-gluon (linéairement). Ceci est due à l'invariance de jauge de la théorie.

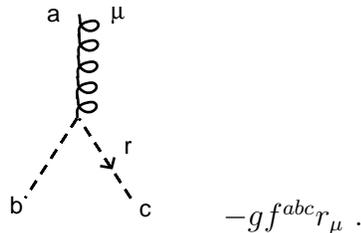
Les termes d'auto-couplage des bosons de jauge sont un des aspects caractéristiques de QCD et c'est une différence fondamentale entre cette théorie et QED. Ce sont eux qui vont être responsables, comme on le verra dans le chapitre suivant, de la propriété de liberté asymptotique de QCD aux hautes énergies et aussi, sans doute, du confinement des quarks et des gluons dans les hadrons (non encore prouvé théoriquement).

### 3.3 Fantômes de Fadeev-Popov

On rappelle que les formes covariantes du propagateur du gluon contiennent des sommes sur les degrés de liberté non physiques (polarisations scalaire, longitudinale). Ces contributions ne sont pas gênantes en QED car elles ne sont pas couplées au courant fermionique. En QCD, les gluons interagissent entre eux (couplage à 3 et 4 gluons) et les propriétés de ces auto-interactions ne permettent pas le découplage des états de polarisation non physiques. Pour les éliminer, on introduit, pour chaque gluon coloré  $A_\mu^a$ , un champ scalaire  $\phi^a$  (fantôme de Fadeev-Popov) obéissant à la statistique de Fermi (nombre de Grassmann) et dont le propagateur vaut

$$-\delta_{ab} \frac{i}{p^2 + i\epsilon}.$$

Le fait que  $\phi^a$  soit non-commutant est crucial car, pour chaque boucle, on obtiendra un facteur  $(-1)$  nécessaire pour compenser la contribution de  $A_\mu^a$  due aux états de polarisation non physique. Pour que la compensation de la contribution des états non physiques ait lieu le couplage du gluon au fantôme est nécessairement de la forme (faire attention au choix des impulsions et au sens de la flèche):



Le couplage  $\phi\phi A$  ci-dessus est valable dans la jauge de Landau aussi bien que dans la jauge de Feynman. Ces règles de Feynman associées aux fantômes correspondent dans le lagrangien à un nouveau terme

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} \sim \bar{\phi} \partial^\mu D_\mu \phi.$$

En conclusion, si on fait le calcul en jauge covariante, il ne faut pas omettre les diagrammes contenant les fantômes. Par contre, si on choisit de travailler avec une jauge non covariante ( $k\epsilon = n\epsilon = 0$ ), il n'y a pas de fantômes puisque seuls les deux degrés de polarisation physique des bosons de jauge sont pris en compte.

Notre introduction des fantômes de Fadeev-Popov est bien légère! La façon moderne et correcte de quantifier les théories de jauge non abéliennes repose sur la construction de la fonctionnelle génératrice qui, par dérivation, donnent les règles de Feynman de la série perturbative. Pour donner un sens mathématique à cette fonctionnelle il faut d'abord "fixer" la jauge par une contrainte. C'est cette contrainte qui peut s'exprimer sous forme de champs de Fadeev-Popov dans le lagrangien de QCD [30]. Quant à la renormalisabilité de QCD elle a d'abord été prouvée par 't Hooft [31] puis, clarifiée sous une forme élégante, par Becchi, Rouet, Stora [32]<sup>††</sup>.

---

<sup>††</sup>I.V. Tyutin a indépendamment introduit ce qu'il est convenu d'appeler la symétrie BRST [33].

## 4 Divergences ultraviolettes et renormalisation

Dans ce qui suit nous allons appliquer les règles de Feynman qui décrivent l'interaction entre électrons et photons (QED) et entre quarks et gluons (QCD) à l'étude des processus à hautes énergies. Dans un calcul d'ordre supérieur on est amené à calculer des diagrammes en "boucles". Or ces derniers sont divergents. L'objet de ce chapitre est de montrer comment traiter ces divergences pour donner un sens à la théorie. Le problème est d'abord illustré par l'étude d'un modèle scalaire simple.

### 4.1 Divergences ultraviolettes et renormalisation en $\lambda\phi^4$ .

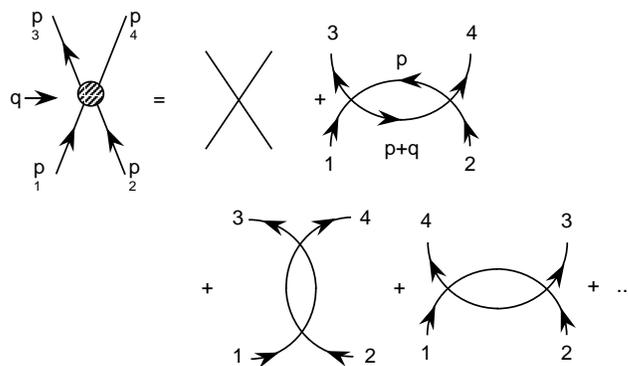
Le lagrangien de la théorie  $\lambda\phi^4$  est

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi(x))^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (4.40)$$

où  $\phi(x)$  est un champ scalaire réel. Les règles de Feynman correspondantes sont

$$\text{vertex : } \times = -i\lambda ; \quad \text{propagateur : } \text{---} = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

La diffusion de deux particules est représentée par:



On n'a gardé que les diagrammes aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations. Si on dénote  $q = p_1 - p_3$  l'impulsion de transfert entre particules entrante et sortante on a  $q^2 < 0$ . L'amplitude de diffusion s'écrit

$$\mathcal{M} = -i\lambda + \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2 + i\epsilon)((p+q)^2 - m^2 + i\epsilon)} + \dots \quad (4.41)$$

où  $p$  est l'impulsion dans la boucle et où "..." dénote la contribution des deux derniers diagrammes. L'élément d'espace de phase peut s'écrire

$$\int d^4p = \int p^3 dp d\Omega$$

où  $p$  dénote la norme du vecteur et  $d\Omega$  est l'élément d'angle solide. Une analyse dimensionnelle de l'intégrand montre que quand  $p \rightarrow \infty$  il se comporte comme  $\int dp/p$  qui

diverge logarithmiquement. Pour donner un sens au calcul on régularise l'intégrale en introduisant un cut-off ultraviolet  $\Lambda_{UV}$ ,

$$\int \frac{dp}{p} \rightarrow \int^{\Lambda_{UV}} \frac{dp}{p} \quad (4.42)$$

L'évaluation de l'éq. (4.41) donne une expression de la forme

$$-ig(q^2, \Lambda_{UV}^2) = -i\lambda + 3i \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{-q^2} + \text{termes indépendants de } \Lambda_{UV} \quad (4.43)$$

où la notation  $g(q^2, \Lambda_{UV}^2)$  rappelle que le résultat du calcul dépend de l'invariant physique  $q^2$  et du cut-off. Considérant maintenant le même processus à l'échelle  $10q^2$ , on a :

$$g(10q^2, \Lambda_{UV}^2) = \lambda - 3 \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda_{UV}^2}{-10q^2} + \dots \quad (4.44)$$

Eliminant  $\lambda$  à l'aide de l'équation (4.43) on a

$$g(10q^2, \Lambda_{UV}^2) = g(q^2, \Lambda_{UV}^2) + 3 \frac{g^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-10q^2}{-q^2} + \dots + \mathcal{O}(\lambda^3) \quad (4.45)$$

Dans le terme en  $\lambda^2$  on a substitué  $\lambda = g$  ce qui est tout à fait justifié puisque le calcul est mené aux deux premiers ordres de la théorie des perturbations et que l'on néglige les termes d'ordre supérieur en  $\lambda^3 \sim g^3$ . La morale de l'histoire est que si l'on exprime l'amplitude de diffusion à l'échelle  $10q^2$  en fonction de celle à l'échelle  $q^2$ , toute dépendance explicite en  $\Lambda_{UV}$  a disparu des équations. En d'autres termes, si on fait une expérience à l'échelle  $q^2$  pour déterminer la valeur de l'amplitude de diffusion à cette échelle, alors la théorie prédit, par l'équation (4.45), quel sera le résultat d'une expérience à  $10q^2$ .

En général, la série perturbative pour une quantité physique, ici  $g(q'^2)$  où  $q'^2$  est une échelle qui caractérise l'énergie du processus étudié, construite à l'aide du paramètre  $\lambda$  ( $\lambda$  couplage dans le lagrangien) n'est pas bien définie car les coefficients du développement en  $\lambda$  sont infinis (dépendent du cut-off non physique  $\Lambda_{UV}$  dans la théorie régularisée). En revanche, la série perturbative pour  $g(q'^2)$  construite à l'aide de  $g(q^2)$ , ( $q^2 \neq q'^2$ ) est parfaitement définie, les coefficients de la série étant finis. On rappelle que la divergence des coefficients de la série en  $\lambda$  est due aux divergences ultraviolettes dans les diagrammes en boucle. Ce que prédit la théorie n'est donc pas la valeur de l'amplitude de diffusion, en fonction de  $\lambda$  et des autres paramètres du lagrangien, mais seulement la variation de l'amplitude avec l'échelle d'énergie connaissant cette amplitude à une énergie donnée.

On peut exprimer l'éq. (4.44) sous forme différentielle :

$$\frac{dg(q^2, \Lambda_{UV}^2)}{dq^2} = 3 \frac{\lambda^2}{(4\pi^2)} \frac{1}{q^2} \sim 3 \frac{g^2}{(4\pi^2)} \frac{1}{q^2} \quad (4.46)$$

puisque  $\lambda \sim g$  à l'ordre auquel on fait le calcul. Il s'ensuit, par intégration :

$$g(q^2) = \frac{g(q_0^2)}{1 - c \frac{g(q_0^2)}{g(q_0^2)} \ln \frac{q^2}{q_0^2}}, \quad c = \frac{3}{(4\pi)^2} \text{ en théorie } \lambda\phi^4. \quad (4.47)$$

C'est ce que l'on appelle la "constante de couplage mobile" (running coupling). Connaissant la valeur du couplage en un point  $q_0^2$ , la théorie prédit sa valeur en tout point. Le paramètre de couplage  $\lambda$  dans le lagrangien est, quant à lui, appelé le "couplage nu". On peut ré-écrire l'éq. (4.45)

$$g(q^2) = \left[ g(q^2) - \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q^2}{\Lambda_{UV}^2} \right] + \frac{3g^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q^2}{\Lambda_{UV}^2}. \quad (4.48)$$

Le terme entre [ ] est la contribution du terme en arbre, exprimé en fonction du couplage renormalisé, tandis que le dernier terme est la correction à une boucle. La forme (4.48) est la forme sous laquelle on va construire la série perturbative, c'est-à-dire directement en fonction du couplage renormalisé. Pour cela on écrit la relation entre les deux couplages sous la forme (renormalisation multiplicative) :

$$\lambda = Z_\lambda g \quad \text{où} \quad Z_\lambda = 1 - \frac{3g}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q^2}{\Lambda_{UV}^2} \quad (4.49)$$

#### 4.1.1 Principes de la procédure de renormalisation.

Une analyse systématique montre qu'il faut aussi introduire une masse renormalisée et un champ renormalisé. En fait, pour chaque paramètre, dit paramètre nu, apparaissant dans le lagrangien il faut introduire son équivalent renormalisé. On écrit le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_B)^2 - \frac{m_B^2}{2} \phi_B^2 - \frac{\lambda_B}{4!} \phi_B^4 \quad (4.50)$$

où l'indice  $B$  dénote les quantités nues (bare en anglais). On exprime la relation entre paramètres nus et les paramètres renormalisés par une généralisation de l'équation (4.49)

$$\phi_B = Z_3^{1/2} \phi_R, \quad m_B^2 = Z_m m_R^2, \quad \lambda_B = Z_\lambda \lambda_R. \quad (4.51)$$

Les  $\phi_R$ ,  $m_R$  et  $\lambda_R$  sont les quantités renormalisées. Pour des raisons qui vont devenir évidentes, on écrit habituellement

$$Z_m = \frac{Z_0}{Z_3}, \quad Z_\lambda = \frac{Z_1}{Z_3^2} \quad (4.52)$$

Les  $Z_i$  sont de la forme éq. (4.49), c'est-à-dire qu'ils admettent un développement perturbatif en  $\lambda_R$ . A ce point, on introduit une théorie régularisée pour donner un sens mathématique aux divergences ultraviolettes. Ci-dessus on a introduit un cut-off  $\Lambda_{UV}$ . Pour QED, QCD, l'approche moderne consiste à travailler en  $n \neq 4$  dimensions (voir plus bas). Les relations de type (4.49) dépendent évidemment de la procédure de régularisation. Puisque l'on veut travailler directement avec les quantités renormalisées on va ré-écrire le lagrangien en fonction des  $\phi_R, m_R, \lambda_R$ . On trouve immédiatement

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{Z_3}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{Z_0}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{Z_1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{m_R^2}{2} \phi_R^2 - \frac{\lambda_R}{4!} \phi_R^4 + \frac{\delta Z_3}{2} (\partial_\mu \phi_R)^2 - \frac{\delta Z_0}{2} m_R^2 \phi_R^2 - \frac{\delta Z_1}{4!} \lambda_R \phi_R^4 \\ &\equiv \mathcal{L}_R + \delta \mathcal{L} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Par définition,  $\mathcal{L}_R$  est identique à  $\mathcal{L}$  sauf qu'il est exprimé en fonction des quantités renormalisées tandis que  $\delta\mathcal{L}$  contient les contre-terme proportionnels à  $\delta Z_i = Z_i - 1$ .

Au lieu maintenant de construire la série perturbative à partir de la forme éq. (4.50), on va la construire à partir de la décomposition éq. (4.53) du lagrangien. Les règles de Feynman pour  $\mathcal{L}_R$  sont les mêmes que celles pour  $\mathcal{L}$  sauf qu'elles concernent maintenant les quantités renormalisées. Pour avoir la même théorie que celle en éq. (4.50) il faudra alors ajouter la contribution des contre-terme qui seront choisis de façon à compenser les divergences engendrées par les boucles de  $\mathcal{L}_R$  (cf. éq. (4.48)). Ces contre-terme sont traités comme des couplages et correspondent à de nouveaux diagrammes de Feynman dont les règles sont:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{c} \times \\ \bullet \end{array} &= -i\lambda_R\delta Z_1, \quad \text{contre-terme du vertex} \\
 \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} &= ip^2\delta Z_3, \quad \text{contre-terme de la fonction d'onde} \\
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} &= -im_R^2\delta Z_0, \quad \text{contre-terme de masse}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Par exemple, pour la fonction à 4-points déjà considérée on aura à calculer la série de diagrammes

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \bullet \\ \text{---} \end{array} \xrightarrow{q'} = \begin{array}{c} \times \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ \times \end{array}$$

où, dans ce cas, seul le contre-terme de vertex entre en jeu, L'application des règles de Feynman donne alors, en accord avec l'éq. (4.48)

$$-ig(q^2) = -i\lambda_R + i\frac{3\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{\Lambda^2}{-q^2} - (i\lambda_R)\frac{3\lambda_R}{(4\pi)^2} \ln \frac{-q^2}{\Lambda^2}. \tag{4.55}$$

où la contribution du contre-terme est le dernier terme à droite, avec le choix  $\delta Z_1 = -(3\lambda_R/(4\pi)^2) \ln(-q^2/\Lambda^2)$ .

### 4.1.2 Résumé et discussion

Dans les calculs perturbatifs d'ordre supérieur (calculs en boucles) en théorie des champs, apparaissent des divergences ultraviolettes dans les coefficients du développement perturbatif. Pour donner un sens à la théorie il faut la renormaliser. La procédure de renormalisation se décompose en plusieurs étapes :

- on exprime, à priori, le lagrangien en fonction des paramètres renormalisés et on écrit les contre-terme ;
- on régularise la théorie pour donner un sens mathématique aux divergences ; on utilisera la "régularisation dimensionnelle", qui respecte les symétries, où l'espace de phase est en dimension  $n$  et les divergences apparaissent comme des pôles en  $1/\varepsilon$  où  $2\varepsilon = n - 4$  ;
- on choisit les contre-terme de façon à compenser les divergences ; différents choix de contre-terme, qui diffèrent par des termes finis, mènent à différents schémas de renormalisation. Les paramètres renormalisés dépendent d'une échelle de masse caractéristique

du problème considéré. Les coefficients du développement perturbatif de n'importe quel observable, sont alors finis (si la théorie est renormalisable) et, à l'ordre auquel on fait le calcul, tous les schémas de renormalisation donne le même résultat.

L'origine des divergences ultraviolettes est liée au fait que l'on suppose la théorie valable quelque soit l'échelle d'énergie considérée, en particulier quand  $|q^2| \rightarrow \infty$ . Par les relations d'incertitude de Heisenberg cela correspond à des distances infiniment petites. Ceci est à contraster avec la situation habituelle en physique où les lois ont un domaine de validité limité. Par exemple, la physique atomique est caractérisée par une longueur  $l \simeq 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$  alors que la physique nucléaire est caractérisée par  $l \simeq 1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$ . Cela correspond respectivement à des énergies de l'ordre de 1 eV et 100 MeV tandis que le domaine de la physique des particules est de 1 GeV et au delà.

Toute la connaissance de la physique nucléaire nécessaire à la physique atomique se résume à quelques constantes comme la masse et la charge du noyau. De même, la physique des particules utile à la physique nucléaire se réduit à la connaissance de la masse du proton, du neutron, du pion et du couplage  $\pi NN$ . Donc l'étude de la physique à une échelle donnée n'a pas besoin des détails de la physique à une échelle de distance beaucoup plus petite: seule la valeur de quelques constantes suffit. La procédure de renormalisation ramène le cas de la théorie des champs à une situation habituelle en physique puisque toutes les complications liées aux divergences ultraviolettes peuvent être éliminées par une re-définition de quelques paramètres tels que masse, couplage, normalisation de la fonction d'onde.

Avant de passer aux détails des calculs on peut faire la remarque suivante concernant le couplage mobile. Si dans le lagrangien, éq. (4.40) on avait choisi  $m = 0$ , il n'y aurait pas eu d'échelle de masse explicite dans la théorie puisque  $\lambda$  est sans dimension. On aurait pu définir le couplage mobile et on aurait alors trouvé l'éq. (4.47) qui dépend explicitement d'une échelle de masse. Ceci peut paraître paradoxal mais c'est une conséquence de la procédure de renormalisation car, pour définir le couplage renormalisé, on a du d'abord régulariser la théorie par l'introduction d'un cut-off ce qui a implicitement introduit une échelle de masse.

## 4.2 Analyse dimensionnelle

La régularisation dimensionnelle [34] consiste à travailler dans un espace à  $n$  dimensions,

$$n = 4 - 2\varepsilon ,$$

et à la fin des calculs prendre la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il est plus commode, lorsqu'on peut le faire, d'utiliser une procédure qui préserve les invariances de la théorie. Le cut-off utilisé précédemment brise l'invariance sous les translations, puisqu'il met une borne sur l'intégration de l'impulsion interne. Pour QED et QCD, théories covariantes de Lorentz, ce choix n'est pas approprié<sup>†</sup> et l'on préfère utiliser la régularisation dimensionnelle qui respecte l'invariance de la théorie sous les translations ainsi que l'invariance de jauge.

---

<sup>†</sup>Voir cependant le cours d'Olivier Pène et la régularisation "sur réseau".

On utilise QED comme exemple. On rappelle que l'action est une quantité sans dimension

$$S = \int d^n x \mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}, A_\mu).$$

Les paramètres (champs, couplage) voient leur dimension, exprimée en unité de masse, affectée lorsque l'on passe de  $\int d^4 x$  à  $\int d^n x$ . Si on dénote la dimension de  $\psi$  par le symbole  $[\psi]$ ,  $\dots$ , on a alors

$$[S] = 0 \quad , \quad [d^n x] = -n.$$

D'où, de façon évidente,

$$\begin{aligned} [\bar{\psi} \partial_\mu \psi] = n &\Rightarrow [\psi] = \frac{n-1}{2} & [\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu] = n &\Rightarrow [A_\mu] = \frac{n-2}{2} \\ [e \bar{\psi} \not{A} \psi] = n &\Rightarrow [e] = \frac{4-n}{2} = \varepsilon & [m \bar{\psi} \psi] = n &\Rightarrow [m] = 1 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Le résultat important est que la charge électrique (couplage) acquiert une dimension  $\varepsilon$ . Dans la théorie régularisée à  $n$ -dimensions, la charge sera alors écrite

$$e\mu^\varepsilon, \quad \mu \text{ paramètre de masse arbitraire.}$$

Le terme  $\mu^\varepsilon$  va jouer un rôle important dans la procédure de renormalisation : d'un certain point de vue il tient rôle du point de soustraction (arbitraire)  $-q^2$  dans la discussion précédente utilisant la régularisation par un cut-off.

Si en régularisation dimensionnelle le couplage est modifié les propagateurs, eux, ne sont pas modifiés. Lors du calcul des intégrales en boucles on devra typiquement évaluer :

$$\begin{aligned} (e\mu)^{2\varepsilon} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - M^2)^2} &= i \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{M^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \\ &= i \frac{e^2}{4\pi} \left[ \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma + \ln \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

### 4.3 Renormalisation de QED à une boucle.

Le lagrangien QED, exprimé en fonction des quantités nues, est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{B\mu\nu} F_B^{\mu\nu} + \bar{\psi}_B (i \not{\partial} - e_B \not{A}_B) \psi_B + m_B \bar{\psi}_B \psi_B. \quad (4.58)$$

On introduit les champs, couplage, masse renormalisés en relation avec leur équivalent nu

$$A_B^\mu = Z_3^{1/2} A^\mu, \quad m_B = \frac{Z_0}{Z_2} m, \quad \psi_B = Z_2^{1/2} \psi, \quad e_B = \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{1/2}} e\mu^\varepsilon \quad (4.59)$$

Le lagrangien se décompose alors  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_R + \delta\mathcal{L}$  avec

$$\mathcal{L}_R = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i \not{\partial} - e\mu^\varepsilon \not{A}) \psi + m \bar{\psi} \psi \quad (4.60)$$

exprimé en fonction des quantités renormalisées et

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (Z_2 - 1) \bar{\psi} i \not{\partial} \psi - (Z_1 - 1) e\mu^\varepsilon \bar{\psi} \not{A} \psi - (Z_0 - 1) m \bar{\psi} \psi. \quad (4.61)$$

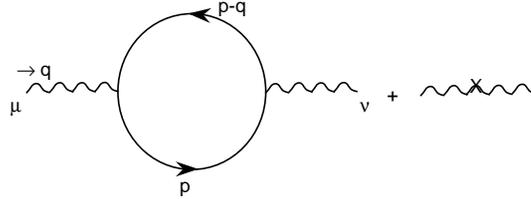
Le lagrangien renormalisé  $\mathcal{L}_R$  donnent les règles de Feynman usuelles tandis que  $\delta\mathcal{L}$  introduit de nouvelles règles associées aux contre-termes. Les contre-termes sont traités comme des termes d'interaction et on obtient les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{llll}
(Z_0 - 1)m\bar{\psi}\psi & \rightarrow & \text{---} \bullet \text{---} & = -im(Z_0 - 1) & \text{c.terme de masse} \\
(Z_2 - 1)\bar{\psi}i\partial\psi & \rightarrow & \text{---} \times \text{---} & = i \not{p}(Z_2 - 1) & \text{c.terme de fn. d'onde} \\
(Z_1 - 1)e\mu^\epsilon\bar{\psi}A\psi & \rightarrow & \text{---} \bullet \text{---} & = -ie\mu^\epsilon\gamma_\alpha(Z_1 - 1) & \text{c.terme de couplage} \\
-\frac{1}{4}(Z_3 - 1)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} & \rightarrow & \text{---} \times \text{---} & = i(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(Z_3 - 1) & \text{c.terme de fonction} \\
& & & & \text{d'onde du photon}
\end{array}$$

En QED, à l'approximation d'une boucle, il faut calculer 3 types de diagrammes pour lesquels on va maintenant citer les résultats.

#### 4.3.1 Polarisation du vide : calcul de $Z_3$ .

On considère "la polarisation du vide" donnée par les diagrammes à 2 photons externes, à l'ordre d'une boucle. On suppose les photons externes hors-couche  $q^2 < 0$  :



On dénote  $i\Pi_{\mu\nu}(q)$  ces contributions et on a donc,

$$i\Pi_{\mu\nu}(q) = i\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q) + i(Z_3 - 1)(q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu}). \quad (4.62)$$

On peut calculer la boucle explicitement ou remarquer que, puisque la régularisation respecte l'invariance de jauge, l'on a :

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{boucle}}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\Pi^{\text{boucle}}(q^2) \quad (4.63)$$

où  $\Pi^{\text{boucle}}(q^2)$  est une fonction scalaire. Il suffit alors de calculer la trace

$$\Pi_\mu^\mu(q^2)|^{\text{boucle}} = (2\varepsilon - 3) q^2 \Pi^{\text{boucle}}(q^2).$$

L'application des règles de Feynman donne le résultat :

$$\Pi(q^2) = Z_3 - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma\right)\frac{\alpha}{\pi} - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \quad (4.64)$$

#### Schémas de renormalisation

Le choix du contre-terme pour compenser la divergence définit le schéma de renormalisation:

- schéma  $MS$ : "minimal subtraction scheme" ('t Hooft, Veltman)

$$Z_3 - 1|_{MS} = -\frac{\alpha}{3\pi\varepsilon} \Rightarrow \Pi^{MS}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi}(\ln 4\pi - \gamma) - 2\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \quad (4.65)$$

- schéma  $\overline{MS}$ : (Buras, Bardeen, ...)

$$Z_3 - 1|_{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) \Rightarrow \Pi^{\overline{MS}}(q^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{\mu^2} \quad (4.66)$$

Il permet de se débarrasser d'inutiles facteurs  $\ln 4\pi - \gamma$  dans les quantités renormalisées.

- schéma ON (schéma physique ou sur couche de masse) : c'est le schéma adopté dans la discussion de  $\lambda\phi^4$ . On soustrait le contre-terme à  $q^2 = 0$  (condition "on shell") en imposant la contrainte

$$\Pi(q^2 = 0)|_{ON} = 0, \quad (4.67)$$

d'où

$$Z_3 - 1|_{ON} = -\frac{\alpha}{3\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{m^2}{\mu^2}$$

et donc

$$\begin{aligned} \Pi(q^2)|_{ON} &= -\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{m^2 - q^2 x(1-x)}{m^2} \\ &\simeq -\frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{-q^2}{m^2} \quad \text{quand } q^2 \rightarrow \infty, \quad (-q^2 \gg m^2) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ce genre de conditions est souvent utilisé en QED.

On voit que les différents schémas de renormalisation diffèrent par des termes constants.

### 4.3.2 Conséquence et application

Le propagateur du photon est modifié par l'insertion de boucles et contre-terme. Pour le diffusion  $e\mu$ , par exemple, on peut calculer la série complète

L'amplitude de diffusion s'obtient après sommation de la série géométrique et on a :

$$\bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \frac{-i}{q^2} (g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}) \bar{u}_2 \gamma_\nu u_2 \frac{e_R^2}{1 + \Pi_R(q^2)} = \frac{e_R^2}{1 + \Pi_R(q^2)} \bar{u}_1 \gamma_\mu u_1 \frac{-i}{q^2} \bar{u}_2 \gamma^\mu u_2 \quad (4.69)$$

On choisit de travailler dans le schéma de renormalisation  $ON$  (physique). Dans ce schéma la charge est, par définition, la valeur de la constante  $\frac{e_{ON}^2}{1+\Pi_{ON}(0)} = e_{ON}^2$  à  $q^2 = 0$  (voir éq. (4.67)). On trouve par une mesure expérimentale que

$$\alpha_{ON} = \frac{e_{ON}^2}{4\pi} = \frac{1}{137,0359895}, \quad (4.70)$$

valeur que l'on dénote habituellement par  $\alpha$ . A une valeur  $q^2$ , la charge effective sera

$$e_{ON}^2(q^2) = \frac{e_{ON}^2}{1 + \Pi_{ON}(q^2)} = \frac{e_{ON}^2}{1 - \frac{e_{ON}^2}{12\pi^2} \ln \frac{-q^2}{m^2}}, \quad -q^2 \gg m^2$$

soit

$$\alpha_{ON}(q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{|q^2|}{m^2}}, \quad |q^2| \gg m^2 \quad (4.71)$$

Au LEP, par exemple,  $q^2 = M_Z^2 = (90 \text{ GeV})^2$ , on aura

$$\alpha_{ON}(M_Z^2) = \frac{1/137}{1 - \frac{1}{137} \frac{1}{3\pi} \ln \frac{M_Z^2}{m^2}} \simeq \frac{1}{128}$$

qui est la valeur utilisée pour l'analyse des résultats expérimentaux. La prise en compte des termes d'ordre supérieur de la théorie des perturbations implique donc que la charge électrique effective dépend des conditions cinématiques de l'observation.

Remarque : Attention! On n'a considéré dans la discussion qu'une partie des diagrammes à une boucle ce qui est justifié pour QED comme on le verra plus bas. Le calcul correct et complet doit prendre en considération tous les diagrammes du même ordre en  $\alpha$  que ceux considérés ici.

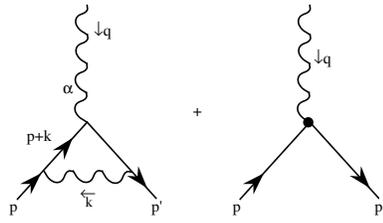
### 4.3.3 Self-énergie du fermion (calcul de $Z_0$ , $Z_2$ ) et du vertex ( $Z_1$ )

On considère maintenant le diagramme à deux fermions externes supposant, pour le moment, le fermion légèrement hors couche ( $p^2 \neq m^2$ ). Il y a trois diagrammes à prendre en compte:

$$-i\Sigma^{\text{boucle}}(p) + \underset{\substack{\text{contre-terme} \\ \text{de fn. d'onde}}}{i \not{p}(Z_2 - 1)} + \underset{\substack{\text{contre-terme} \\ \text{de masse}}}{(-im)(Z_0 - 1)} = -i\Sigma(p) \quad (4.72)$$

La renormalisation s'obtient dans le schéma  $\overline{MS}$  par le choix des contre-terms :

$$\begin{aligned} Z_0 - 1|_{\overline{MS}} &= -\frac{\alpha}{\pi}(4\pi)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} = -\frac{\alpha}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) \\ Z_2 - 1|_{\overline{MS}} &= -\frac{\alpha}{4\pi}(4\pi)^\epsilon \frac{\Gamma(1+\epsilon)}{\epsilon} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right), \end{aligned} \quad (4.73)$$



et la forme du propagateur renormalisé dans ce schéma sera donc

$$\tilde{S}_F(p)|_{\overline{MS}} = \frac{i}{\not{p} - m - \Sigma(p)|_{\overline{MS}} + i\epsilon} \quad (4.74)$$

Pour le vertex, les diagrammes à considérer sont :

Il suffira, pour déterminer la partie divergente, de choisir une cinématique particulière simple, par exemple  $q = 0 \Rightarrow p = p'$ . On a alors

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha(p, p) &= \Lambda_\alpha^{\text{boucle}}(p, p) + (Z_1 - 1)\gamma_\alpha \\ &= (Z_1 - 1)\gamma_\alpha - i(e\mu^\epsilon)^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma_\rho \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma_\alpha \frac{1}{\not{p} + \not{k} - m + i\epsilon} \gamma^\rho \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

Le choix

$$Z_1 - 1|_{\overline{MS}} = Z_2 - 1|_{\overline{MS}} = -\frac{\alpha}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - \gamma \right) \quad (4.75)$$

rendra le vertex renormalisé fini dans le schéma  $\overline{MS}$ .

Remarque : La relation  $Z_1 = Z_2$  + éventuellement des termes finis est une relation générale, valable à tous les ordres de la théorie des perturbations, conséquence de l'invariance de jauge de la théorie. C'est un cas particulier des identités de Ward-Takahashi.

En résumé, nous avons calculé dans les sections précédentes les contre-termes  $Z_i$  qui rendent l'électrodynamique quantique finie dans l'approximation à une boucle de la théorie des perturbations. C'est à dire que tout processus physique calculé dans cette approximation n'aura pas de divergences ultraviolettes et le résultat du calcul devra être fini. Dans le schéma  $\overline{MS}$  les contre-termes dans les équations (4.66), (4.73), (4.75) sont respectivement:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Diagram 1} \rightarrow Z_3 = 1 + c_3 \frac{\Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon e^2}{\epsilon}, \quad c_3 = -\frac{1}{12\pi^2} \\ \text{Diagram 2} \rightarrow Z_2 = 1 + c_2 \frac{\Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon e^2}{\epsilon}, \quad c_2 = -\frac{1}{16\pi^2} \\ \text{Diagram 3} \rightarrow Z_1 = 1 + c_1 \frac{\Gamma(1+\epsilon)(4\pi)^\epsilon e^2}{\epsilon}, \quad c_1 = c_2 \end{array} \right\} \text{ en } \overline{MS}$$

Le calcul d'un processus physique quelconque à l'ordre d'une boucle nécessitera évidemment le calcul complet de tous les diagrammes et non seulement celui de la partie divergente dans l'ultraviolet. On pourra alors obtenir les corrections d'ordre  $\alpha$  par rapport au terme de Born. C'est ainsi que l'on peut calculer le moment magnétique anormal de l'électron ou du muon.

### 4.3.4 Conséquence : la fonction $\beta(\alpha)$ et le couplage mobile.

Nous avons montré de façon intuitive comment les corrections d'ordre supérieur modifiaient la constante de couplage et comment il était naturel d'introduire un couplage mobile (dépendant de la variable d'énergie du problème considéré). On va introduire maintenant de façon plus formelle et générale le couplage mobile.

Le point de départ est la relation éq. (4.59) entre couplage nu, couplage renormalisé et les fonctions  $Z_i$

$$e_B = e\mu^\varepsilon \frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}} \quad (4.76)$$

avec, dans le schéma  $\overline{MS}$ , des  $Z_i$  de la forme

$$Z_i = 1 + c_i e^2 \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \quad (4.77)$$

Dans le cadre de l'approximation à une boucle (approximation d'ordre  $e^2$ ) on peut toujours ré-écrire

$$\frac{Z_1}{Z_2 Z_3^{\frac{1}{2}}} \equiv Z_e = 1 + C_e \frac{e^2}{\varepsilon} \quad (4.78)$$

où la constante  $C_e$  est connue dès que les  $Z_i$  le sont, puisque

$$C_e = \left( c_1 - c_2 - \frac{c_3}{2} \right) \Gamma(1 + \varepsilon) (4\pi)^\varepsilon \quad (4.79)$$

Dans nos notations simplifiées on a donc  $e_B = e\mu^\varepsilon Z_e(e)$  où  $e(\mu)$ , le couplage renormalisé, est une fonction de  $\mu$ . On introduit de façon traditionnelle la fonction  $\beta(e)$ , dite fonction  $\beta$  de Gell-Mann/Low,

$$\beta(e) \equiv \mu \frac{de}{d\mu} = \frac{de}{d \ln \mu} . \quad (4.80)$$

Le couplage  $e_B$  est évidemment indépendant de  $\mu$  : en effet, la masse  $\mu$  et le couplage renormalisé ne sont introduits que lorsqu'on sépare la densité lagrangienne entre une partie "renormalisée" et les contre-terms. On a donc

$$\mu \frac{de_B}{d\mu} \equiv 0 \Rightarrow \mu \frac{d}{d\mu} (e\mu^\varepsilon Z_e(e)) \equiv \beta(e)\mu^\varepsilon Z_e(e) + \varepsilon e\mu^\varepsilon Z_e(e) + e\mu^\varepsilon \mu \frac{dZ_e(e)}{d\mu} = 0. \quad (4.81)$$

Après un calcul un peu subtil, on voit que les termes en  $1/\varepsilon$  disparaissent et que

$$\beta(e) \simeq 2C_e e^3 \quad (4.82)$$

où  $C_e$  est connu, via l'équation (4.79). Il est traditionnel de définir, plutôt que  $\beta(e)$  dans l'équation (4.80), la fonction

$$\beta(\alpha) = \frac{d\alpha}{d \ln \mu^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{de^2}{d \ln \mu^2} \Rightarrow \beta(\alpha) = \frac{e}{4\pi} \beta(e). \quad (4.83)$$

D'où par l'éq. (4.82),  $\beta(\alpha) = 8\pi C_e \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{3\pi}$ , qui montre que la constante de couplage  $\alpha$  croît quand  $\mu$  croît. Intégrant cette équation différentielle, on obtient le couplage mobile sous sa forme usuelle,

$$\alpha(\mu^2) = \frac{\alpha(\mu_0^2)}{1 - \frac{\alpha(\mu_0^2)}{3\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \quad (4.84)$$

On remarque par comparaison avec l'équation (4.71) que l'évolution en masse ( $q^2 \equiv \mu^2$ ) des fonctions  $\alpha_{ON}(q^2)$  et  $\alpha(q^2) \equiv \alpha_{\overline{MS}}(q^2)$  est identique. Les deux fonctions diffèrent par les conditions aux limites ce qui est normal puisque les fonctions sont définies dans des schémas de renormalisation différents.

La relation du type  $\frac{d\epsilon_B}{d\mu} \equiv 0$  (éq. (4.59)) n'est qu'un cas particulier des équations du groupe de renormalisation qui jouent un rôle fondamental en théorie des champs. Elles expriment que les prédictions physiques (observables) ne doivent pas dépendre du choix de la procédure de régularisation ni du schéma de renormalisation. En particulier, l'éq. (4.84) exprime comment le couplage  $\alpha(\mu)$  doit varier en fonction de  $\mu$  pour que, quand le "point de renormalisation"  $\mu$  varie, les prédictions physiques soient indépendantes de  $\mu$ .

## 4.4 Renormalisation de QCD à une boucle

On rappelle les règles de Feynman de QCD (voir chap. 3). Pour renormaliser la théorie on doit procéder comme pour QED, c'est-à-dire, partir de  $\mathcal{L}_{QCD}(\psi_{iB}, A_{\mu B}^a, g_B, \dots)$  et exprimer cette densité lagrangienne en fonction des quantités renormalisées et des contre-terme. Notre but ici étant seulement le calcul du couplage mobile on se contentera de partir de la relation

$$g_B = \frac{Z_1}{Z_2 \sqrt{Z_3}} g \mu^\epsilon \quad (4.85)$$

concernant le couplage gluon-fermion-fermion. Les  $Z_i$  ont la même signification qu'en QED :  $Z_1$  contre-terme du vertex,  $Z_2$  contre-terme de la fonction d'onde du quark (on supposera les quarks de masse nulle donc pas de  $Z_0$ ),  $Z_3$  contre-terme de la fonction d'onde du gluon. Le calcul est effectué en jauge covariante, le propagateur du gluon étant choisi de la forme :

$$\delta_{ab} \frac{i}{q^2 + i\epsilon} \left( -g_{\mu\nu} + (1-a) \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + i\epsilon} \right)$$

avec  $a = 0$  en jauge de Landau utilisée ci-dessous. Nous allons maintenant calculer successivement  $Z_2, Z_3$  et  $Z_1$ .

### 4.4.1 Calcul de $Z_2$

C'est le contre-terme de la fonction d'onde du quark. Il n'y pas lieu de calculer le contre-terme de masse  $\delta Z_0$  puisque les quarks sont supposés de masse nulle ( $m_B = m = 0$ ). Les diagrammes à considérer sont similaires à ceux de QED avec essentiellement le facteur de couleur en plus :

$$i \text{---} \text{---} j \text{ (with gluon loop)} + i \text{---} \text{---} j \text{ (with cross)} = -i \Sigma^{\text{boucle}}(p) + (Z_2 - 1) i \not{p}$$

Le diagramme en boucle s'écrit :

$$-i \Sigma^{\text{boucle}} = (-ig\mu^\epsilon)^2 \langle T_{ik}^a T_{kj}^a \rangle \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} + \not{l})}{(p+l)^2 + i\epsilon} \gamma_\nu \frac{i}{l^2 + i\epsilon} (-g^{\mu\nu} + (1-a) \frac{l^\mu l^\nu}{l^2})$$

où la seule différence avec QED est le calcul du facteur de couleur (voir le vertex fermion-fermion-gluon en sec. 3.2) :

$$g^2 \sum_a (T^a T^a)_{ij} = g^2 \langle c_F \rangle \delta_{ij} = \frac{4}{3} g^2 \delta_{ij}$$

après avoir sommé sur l'indice de couleur du gluon et du quark interne. Le résultat est :

$$\Sigma^{\text{boucle}}(p) = -a \langle c_F \rangle \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-p^2} \right)^\varepsilon \frac{g^2}{16\pi^2} (1 + \varepsilon) \not{p}$$

Comme on travaille en jauge de Landau on a alors trivialement,

$$\Sigma^{\text{boucle}}(p) = 0$$

et donc nécessairement  $Z_2|_{\overline{MS}} = 1$  puisqu'il n'y a pas de divergence à compenser! On peut remarquer que ce résultat est différent de celui en jauge de Feynman,  $a = 1$ , comme on peut s'en rendre compte si on le compare avec le calcul de la self-énergie de l'électron décrit plus haut. Ceci illustre le fait que les diagrammes de Feynman ne sont pas individuellement indépendants de jauge alors que les observables physiques le sont.

#### 4.4.2 Calcul de $Z_3$

Le calcul de ce contre-terme est bien plus compliqué et il met en jeu des diagrammes typiques d'une théorie non abélienne puisqu'ils contiennent des couplages à trois ou quatre bosons de jauge. Il faut évaluer :

$$i\pi^{\mu\nu}(q) = \text{diagramme 1} + \text{diagramme 2} + \text{diagramme 3} + \text{diagramme 4} + \text{diagramme 5}$$

Dans une notation évidente on décompose le diagramme de polarisation du gluon en une série de termes :

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = \Pi_F^{\mu\nu}(q) + \Pi_g^{\mu\nu}(q) + \Pi_{gh}^{\mu\nu}(q) + \Pi_{4g}^{\mu\nu}(q) + (Z_3 - 1)(q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}).$$

-  $\Pi_F^{\mu\nu}(q)$  : ce diagramme contient une boucle fermionique et du point de vue structure de Lorentz il est similaire au diagramme de polarisation du vide en QED. Aucun nouveau calcul n'est nécessaire pour évaluer l'intégrale sur l'impulsion interne. Quant à la partie de couleur, elle est simplement :

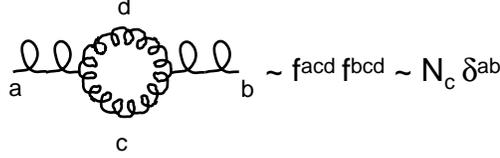
$$T_{ij}^a T_{ji}^b = \text{Tr} T^a T^b = \frac{\delta^{ab}}{2}.$$

Cependant puisque chaque espèce de quark léger contribue à part égale (quarks de masse nulle) il faudra multiplier le résultat par  $N_F$ , le nombre de saveurs considérées. Ainsi

$$\begin{aligned} \Pi_F^{\mu\nu}(q) &= \langle N_F \frac{\delta^{ab}}{2} \rangle \Pi^{\mu\nu}(q)|_{\text{QED}} \\ &= \langle N_F \frac{\delta^{ab}}{2} \rangle \frac{g^2}{12\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \left( 1 + \frac{\varepsilon}{6} \right) (q^\mu q^\nu - q^2) g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

-  $\Pi_{4g}^{\mu\nu}(q)$  : c'est le diagramme de type "tadpole", le seul qui fasse intervenir le couplage à quatre gluons. Il se trouve être égal à 0 en régularisation dimensionnelle.

-  $\Pi_g^{\mu\nu}(q)$  : c'est le diagramme avec la boucle de gluons; le calcul de l'intégrale sur l'impulsion est très long mais ne présente aucune difficulté majeure et nous nous bornerons à citer le résultat. Quant au facteur de couleur c'est simplement :

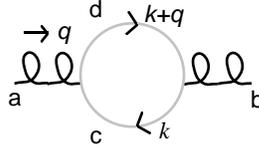


On trouve finalement :

$$\Pi_g^{\mu\nu}(q) = - \langle N_c \delta^{ab} \rangle \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{7}{3} q^\mu q^\nu - \frac{25}{12} q^2 g^{\mu\nu} \right)$$

On constate aisément que le calcul n'est pas complet car la condition de transversalité n'est pas satisfaite :  $q_\mu \Pi_g^{\mu\nu} \neq 0$ , ce qui est une manifestation de la non-invariance de jauge de ce diagramme. En effet, il faut calculer la contribution de la boucle avec fantômes.

-  $\Pi_{gh}^{\mu\nu}(q)$  : l'application des règles de Feynman permet d'écrire facilement avec les conventions de la figure (attention aux signes!) :



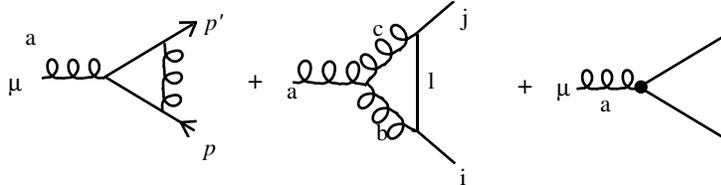
$$i\Pi_{gh}^{\mu\nu}(q) = \langle N_c \delta^{ab} \rangle \frac{g^2}{16\pi^2} \left( \frac{4\pi\mu^2}{-q^2} \right)^\varepsilon \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \left( \frac{1}{6} q^\mu q^\nu + \frac{1}{12} q^2 g^{\mu\nu} \right)$$

En combinant tous les termes, on arrive finalement à déterminer le contre-terme de la fonction d'onde du gluon, dans le schéma  $\overline{MS}$ ,

$$(Z_3 - 1)|_{\overline{MS}} = \left\langle \frac{13}{6} N_c - \frac{4}{6} N_F \right\rangle \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \quad (4.86)$$

#### 4.4.3 Calcul de $Z_1$

Il y a trois diagrammes :



$$-ig\mu^\varepsilon \Lambda^\mu(p, p')|_{\text{boucle}} + (-ig\mu^\varepsilon) (Z_1 - 1) T_{ij}^a \gamma^\mu$$

- La première boucle (avec 2 fermions internes) est de la même forme qu'en QED sauf pour les facteurs de couleur. La partie divergente est en relation avec la partie divergente de la "self-energie" du fermion et nous avons trouvé que  $Z_1 = Z_2$ . Cette relation est vraie en jauge de Landau et ce diagramme n'a donc pas de divergence ultraviolette.

- La seconde boucle a le facteur de couleur

$$f^{abc} T_{il}^b T_{lj}^c = f^{abc} (T^b T^c)_{ij} = f^{abc} \frac{1}{2} [T^b, T^c]_{ij} \Rightarrow i < \frac{c_A}{2} > T_{ij}^a = i < \frac{N_c}{2} > T_{ij}^a \quad (4.87)$$

Après avoir évalué la partie de Lorentz (calcul fastidieux), on peut déterminer le contre-terme dans le schéma  $\overline{MS}$  et on trouve :

$$(Z_1 - 1)|_{\overline{MS}} = - \left\langle \frac{N_c}{2} \right\rangle \frac{3}{2} \frac{g^2}{16\pi^2} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon} (4\pi)^\varepsilon \quad (4.88)$$

En résumé, dans la notation de l'éq. (4.77), la valeur des contre-terme  $Z_1, Z_2, Z_3$  est

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= -\frac{3}{4} N_c \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{16\pi^2} \\ c_2 &= 0 \\ c_3 &= \left( \frac{13N_c}{6} - \frac{4}{6} N_F \right) \frac{\Gamma(1+\varepsilon)(4\pi)^\varepsilon}{16\pi^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_g = -\frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_F \right)$$

où l'on a évidemment défini  $C_g = c_1 - c_2 - \frac{c_3}{2}$ .

#### 4.4.4 Le couplage mobile $\alpha_s$ et définition de $\Lambda_{QCD}$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer la fonction  $\beta(\alpha_s)$  de QCD (où  $\alpha_s = g^2/4\pi$  est la "constante de structure fine" de la Chromodynamique Quantique) ainsi que le couplage mobile. Utilisant les résultats ci-dessus dans les eqs. (4.82, 4.83) il vient

$$\beta(\alpha_s) \equiv \frac{d\alpha_s}{d \ln \mu^2} = -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{11}{3} N_c - \frac{2}{3} N_F \right)$$

d'où le couplage mobile

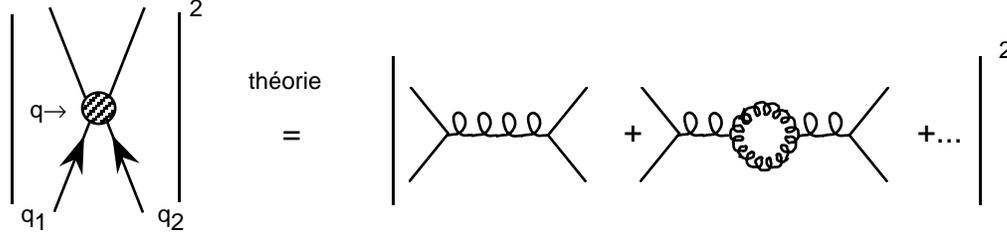
$$\alpha_s(\mu) = \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{(11N_c - 2N_F)}{12\pi} \alpha_s(\mu_0) \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} \quad (4.89)$$

Le couplage décroît donc quand  $\mu$  croît si  $11N_c - 2N_F > 0$  (nombre de saveurs de quarks inférieur à 17) : c'est la propriété de liberté asymptotique [24].

On retrouve le résultat pour QED si  $N_c = 0$  et  $N_F < \frac{1}{2} \Rightarrow 1$  (pour un fermion sans couleur). Le terme proportionnel à  $N_c$  dans l'équation ci-dessus, associé aux termes "non-abéliens" avec couplage à trois gluons, est responsable de la propriété de liberté asymptotique (il est positif) tandis que le terme dépendant de  $N_F$ , qui vient uniquement de la boucle fermionique, est négatif comme en QED. On peut se rappeler le signe relatif entre ces deux types de contributions en se souvenant que les boucles de fermions ont un facteur  $(-1)$  supplémentaire dû à la statistique de Fermi-Dirac.

Pour le calcul de  $\alpha_s$  nous avons considéré le couplage quark-gluon-quark. Nous aurions aussi bien pu choisir le couplage à trois gluons où le couplage fantôme-gluon-fantôme, calculer les facteurs  $Z_i$  correspondants et en déduire les fonctions  $\beta(\alpha_s)$  relatives à ces couplages. L'invariance de jauge de QCD implique certaines relations entre les  $Z_i$  (invariance BRS (Becchi, Rouet, Stora) en QCD) qui sont l'équivalent de la relation  $Z_1 = Z_2$  en QED. Ces relations impliquent que l'on obtient la même fonction  $\beta(\alpha_s)$  quelque soit le couplage étudié.

Comme application on considère la diffusion quark-quark<sup>‡</sup> et on travaille à "l'approximation des logarithmes dominants" c'est à dire que l'on néglige les termes d'ordre  $\alpha_s$  comparés aux termes d'ordre 1 et  $\alpha_s \ln(-q^2/\mu_0^2)$  où  $q$  est l'impulsion de transfert du processus.



L'amplitude de diffusion au carré, c'est à dire à un facteur de proportionnalité près la section efficace différentielle, s'écrit théoriquement (voir l'éq. 4.69):

$$|\mathcal{M}^{q_1 q_2 \rightarrow q_1 q_2}|^2 \equiv \left( \frac{\alpha_s(\mu_0)}{1 + \frac{(11N_c - 2N_F)}{12\pi} \alpha_s(\mu_0) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu_0^2}\right)} \right)^2 |\bar{u}_2 \gamma_\mu u_2 \frac{1}{q^2} \bar{u}_1 \gamma^\mu u_1|^2 \quad (4.90)$$

On choisira une valeur de  $\mu_0$  arbitraire et on déterminera alors la valeur numérique de  $\alpha_s(\mu_0)$  de façon que la normalisation du membre de droite soit en accord avec le résultat expérimental à une impulsion de transfert quelconque. La chromodynamique quantique sera alors capable de prédire la dépendance en  $q^2$  de la diffusion quark-quark et bien d'autres choses d'ailleurs.

On aurait pu effectuer la renormalisation à une autre échelle  $\mu_1 \neq \mu_0$  et obtenir une équation similaire à celle ci-dessus avec  $\mu_0 \rightarrow \mu_1$ . La relation éq. (4.89) exprime que la théorie renormalisée à l'échelle  $\mu_0$  et celle renormalisée à l'échelle  $\mu_1$  donnent les mêmes prédictions physiques. Il est clair, par des arguments généraux que les prédictions théoriques ne dépendent pas du choix du point de renormalisation : en effet, on rappelle que toute la physique est contenue dans  $\mathcal{L}(\psi_{iB}, A_{\mu B}, g_B, \dots)$  et l'éq. (4.89) exprime justement l'indépendance du couplage  $g_B$  par rapport au point de renormalisation (voir l'éq. (4.81)). Les sceptiques peuvent vérifier explicitement ce résultat sur l'exemple ci-dessus. L'analogie de l'éq. (4.90) pour la théorie renormalisée à  $\mu_1$  est :

$$|\mathcal{M}^{q_1 q_2 \rightarrow q_1 q_2}|^2 \equiv \left( \frac{\alpha_s(\mu_1)}{1 + \frac{(11N_c - 2N_F)}{12\pi} \alpha_s(\mu_1) \ln\left(\frac{-q^2}{\mu_1^2}\right)} \right)^2 |\bar{u}_2 \gamma_\mu u_2 \frac{1}{q^2} \bar{u}_1 \gamma^\mu u_1|^2 \quad (4.91)$$

Injectant l'éq. (4.89), avec  $\mu = \mu_1$ , dans cette équation et négligeant tous les termes en  $\alpha_s^2$  on retrouve exactement l'éq. (4.90).

<sup>‡</sup>La diffusion quark-quark est une "expérience de pensée" : il faut utiliser le modèle des partons pour passer de la diffusion parton-parton à diffusion hadron-hadron qui est l'observable.

Le couple de valeurs  $(\mu, \alpha_s(\mu))$  ne correspond pas à deux variables indépendantes mais à une seule puisqu'elles sont contraintes pour pouvoir décrire la même physique quelque soit  $\mu$ . Mathématiquement cela s'exprime par le fait que l'on peut introduire une échelle de masse unique qui déterminera complètement le couplage mobile. En effet, on peut écrire l'équation (4.89):

$$\alpha_s(\mu) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_s(\mu_0)} + \frac{11N_c - 2N_F}{12\pi} \ln \frac{\mu^2}{\mu_0^2}} = \frac{1}{b \ln \mu^2 / \Lambda^2} \quad (4.92)$$

avec

$$\Lambda^2 = \mu_0^2 \exp\left(-\frac{12\pi}{(11N_c - 2N_F)\alpha_s(\mu_0^2)}\right) \quad \text{et} \quad b = \frac{12\pi}{11N_c - 2N_F} \quad (4.93)$$

$\Lambda$  est la constante fondamentale de QCD que l'on détermine expérimentalement. Sur la base d'une compilation des données expérimentales [35] on trouve :

$$\Lambda_{\overline{MS}}^{N_F=5} = 210_{-30}^{+34} \text{ MeV} \quad (4.94)$$

ou, de façon équivalente,

$$\alpha_s(M_Z) = .1182 \pm .0027$$

dans le schéma  $\overline{MS}$ , dans un monde avec 5 saveurs de quarks légers.

On peut comparer la situation en QCD avec celle en QED. La constante de structure fine de QED  $\alpha = 1/137,0359895$  pourrait paraître plus fondamentale que celle de QCD  $\alpha_s(M_Z)|_{\overline{MS}}$  pour laquelle il faut spécifier, le schéma de renormalisation ainsi qu'une valeur de l'énergie. En fait il n'en n'est rien et la situation est identique dans les deux cas (hormis la précision des mesures expérimentales!). En effet, la valeur de  $\alpha$  ci-dessus est donnée, de façon traditionnelle dans le schéma de renormalisation sur couche de masse (schéma ON de la section 4.3) dans la limite où les impulsions  $\rightarrow 0$ . Comme jusqu'à récemment c'était le seul schéma de renormalisation utilisé en QED on "oubliait" de le préciser. Dans le schéma  $\overline{MS}$  la valeur de  $\alpha$  serait différente et elle peut être calculée avec les formules de la section 4.3. La différence avec QCD réside dans le fait qu'il n'est pas possible de définir un schéma ON en Chromodynamique car les quarks et les gluons étant confinés dans les hadrons ils ne sont pas sur leur couche de masse. D'autre part, il n'est pas possible de prendre la limite des impulsions nulles car en théorie perturbative le couplage n'est alors plus défini puisqu'il tend vers l'infini.

Le concept de liberté asymptotique est illustré par la fig. 7 où l'on voit clairement la décroissance du couplage fort en fonction de l'échelle de masse.

## 5 Violations de l'invariance d'échelle dans les fonctions de structure

Dans la discussion précédente nous n'avons étudié que les diagrammes en boucles. Nous avons extrait de ces diagrammes la partie divergente dans l'ultraviolet ( $\sim 1/\varepsilon$ ) et nous avons vu que, par la renormalisation, on pouvait absorber ces singularités et définir un couplage mobile. Par exemple, si on considère les diagrammes suivants de la diffusion  $qq' \rightarrow qq'$  à grande impulsion de transfert [ $Q = \sqrt{-q^2}$ ]

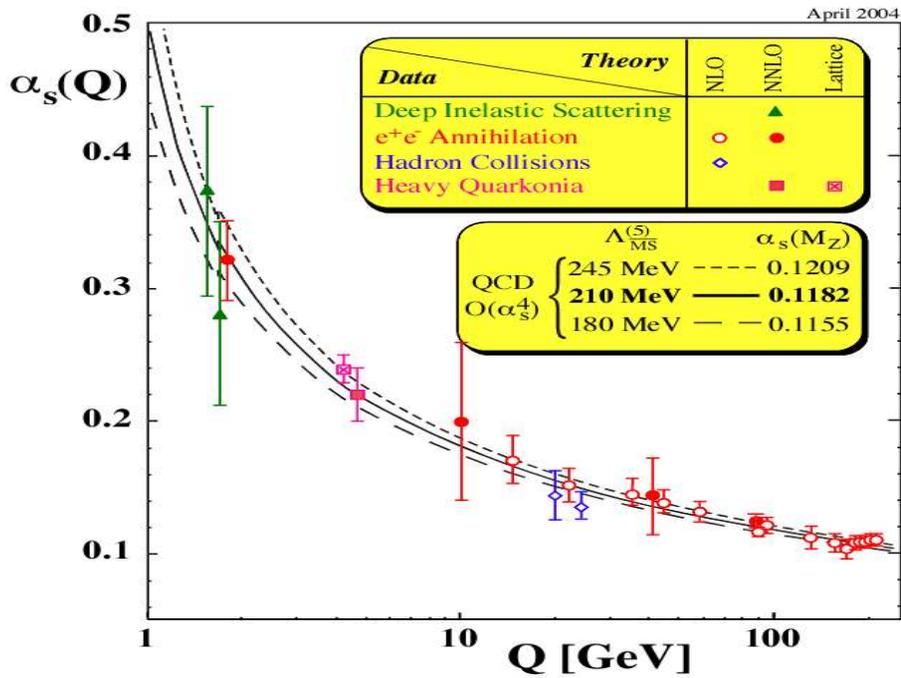


Figure 7: *Compilation des résultats expérimentaux illustrant la liberté asymptotique : décroissance du couplage fort avec l'échelle d'énergie [35].*

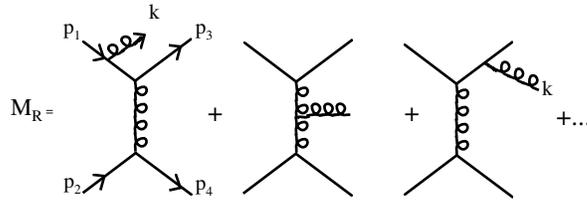
$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_B &= \text{[Diagram: tree-level gluon exchange]} = \alpha_s A_B \alpha_s \\
 \mathcal{M}_V &= \text{[Diagram: tree-level gluon exchange with loop]} + \text{[Diagram: tree-level gluon exchange with vertex correction]} + \text{[Diagram: tree-level gluon exchange with box diagram]} + \dots
 \end{aligned}$$

$-q^2=Q^2$

leur contribution à la section efficace est, après renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$ , de la forme :

$$\begin{aligned}
 \sigma_V &\sim |\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_V|^2 \simeq |\mathcal{M}_B|^2 + 2\text{Re } \mathcal{M}_B \mathcal{M}_V^* \\
 &\sim \alpha_{\overline{MS}}^2(Q) (|A_B|^2 + 2 \alpha_{\overline{MS}}(Q) \text{Re } A_B B_V) .
 \end{aligned}$$

La contribution  $B_V$  des diagrammes en boucle n'a plus de singularité ultraviolette. A ce point, cependant, le calcul de la section efficace n'est pas complet, car au même ordre contribuent aussi les diagrammes "réels" correspondant à la production de quanta sur couche de masse ("réels"). Ce sont les processus du type 2 corps  $\rightarrow$  3 corps tels que



dont la contribution à  $\sigma$  est de la forme  $\sigma_R \sim |\mathcal{M}_R|^2$  qui est d'ordre  $\alpha_{\overline{MS}}^3$ . Ces termes ne peuvent avoir de divergences ultraviolettes puisque l'énergie des partons finals est limitée par l'énergie initiale finie. En revanche, ils possèdent des "divergences colinéaires" ou "singularités de masse" ainsi que des "divergences infrarouges". Ainsi, le premier diagramme correspondant à l'émission d'un gluon par un quark incident conduit, quand on intègre sur l'espace de phase du gluon, à un terme dans  $\sigma_R$  du type

$$I_{\text{div}} = \int \frac{dk d\cos\theta d\varphi}{(p_1 - k)^2 - m^2} = \int_0^{\frac{\sqrt{s}}{2}} dk \int_{-1}^{+1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{-2p_1 \cdot k} \quad (5.95)$$

où  $\sqrt{s}/2$  est l'énergie maximale que peut avoir le gluon dans le repère du centre de masse. Dans ce repère on a (on donne une masse  $m$  fictive au quark) :

$$p_1 = \left( \frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, p \right), \quad p = \frac{1}{2} (s - 4m^2)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{m^2}{\sqrt{s}} \quad \text{quand} \quad \frac{m}{\sqrt{s}} \ll 1.$$

L'intégrale devient donc :

$$\begin{aligned} I_{\text{div}} &= -2\pi \int_{\lambda}^{\frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{dk}{k} \int d\cos\theta \frac{1}{(\sqrt{s} - 2p \cos\theta)} \\ &= +\frac{2\pi}{2p} \int_{\lambda}^{\frac{\sqrt{s}}{2}} \frac{dk}{k} \ln \frac{\sqrt{s} - 2p}{\sqrt{s} + 2p}, \end{aligned} \quad (5.96)$$

où l'on a régularisé l'intégrale dans l'infrarouge par le cut-off  $\lambda$ . Finalement, on trouve

$$I_{\text{div}} \sim -\frac{\pi}{p} \cdot \ln \frac{s}{m^2} \cdot \ln \frac{\sqrt{s}}{\lambda} \quad (5.97)$$

Il apparaît que :

- Le facteur  $\ln \frac{s}{m^2}$ , résulte de l'intégrale sur  $\cos\theta$  : il diverge quand  $m \rightarrow 0$ , et la divergence vient de la configuration où le gluon est colinéaire au quark qui émet ce gluon. On parle alors de "singularité de masse" ou de "singularité colinéaire" ;
- Le facteur  $\ln \frac{\sqrt{s}}{\lambda}$  reflète la divergence infrarouge (IR), c'est-à-dire la singularité de  $|\mathcal{M}_R|^2$  quand le gluon émis devient "mou". Cette singularité est caractéristique de l'émission de boson de jauge et il n'y a pas de singularité infrarouge associée à l'émission de quark d'impulsion nulle.

Il faut noter que les divergences colinéaires ou IR apparaissent aussi dans le calcul des boucles. Ne nous intéressant alors qu'au comportement dans l'ultraviolet, nous n'avons pas cherché à les mettre en évidence.

En résumé, la structure d'un calcul perturbatif aux deux premiers ordres, avant renormalisation, est la suivante, dans le cas où on introduit  $\Lambda_{UV}$  régulateur ultraviolet,  $\lambda$

régulateur IR,  $m$  le régulateur colinéaire ( $F$  symbolise les fonctions de structure,  $\otimes$  la convolution avec les sections partoniques et  $Q$  l'échelle caractéristique du processus étudié),

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \alpha^p F \otimes \hat{\sigma} \\ \sigma_V &= \alpha^{p+1} F \otimes \left( a \ln \frac{\Lambda_{UV}}{Q} + b_1 \ln \frac{Q}{\lambda} \ln \frac{Q}{m} + b_2 \ln \frac{Q}{\lambda} + b_3 \ln \frac{Q}{m} + c \right) \\ \sigma_R &= \alpha^{p+1} F \otimes \left( \phantom{a \ln \frac{\Lambda_{UV}}{Q}} + b'_1 \ln \frac{Q}{\lambda} \ln \frac{Q}{m} + b'_2 \ln \frac{Q}{\lambda} + b'_3 \ln \frac{Q}{m} + c' \right)\end{aligned}$$

où la première ligne est la section efficace dans l'approximation de Born, c'est à dire à l'ordre le plus bas en  $\alpha$  (ici d'ordre  $p$ ), tandis que les deux lignes suivantes symbolisent respectivement la contribution des diagrammes virtuels et réels d'ordre supérieur.

On peut prouver que  $b_1 + b'_1 = b_2 + b'_2 = 0$ . C'est le théorème de Lee-Kinoshita-Nauenberg [36] : les divergences infrarouges se compensent entre diagrammes réels et virtuels. Donc, après renormalisation, et après compensation des singularités IR on a

$$\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(Q) F \otimes \left( \hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(Q)(b_3 + b'_3) \ln \frac{Q}{m} + \alpha_{\overline{MS}}(Q)(c + c') \right)$$

où on a effectué la renormalisation dans le schéma  $\overline{MS}$  et on a choisi  $Q$  comme échelle de renormalisation. De façon similaire à la renormalisation, on peut éliminer de cette expression les divergences colinéaires par une redéfinition des fonctions de structure qui acquièrent alors une dépendance en une variable de masse [25], ici  $Q$  : c'est-à-dire que

$$F \rightarrow F_{\overline{MS}}(Q)$$

de telle sorte que

$$\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(Q) F_{\overline{MS}}(Q) \otimes \left( \hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(Q)(c + c') \right) \quad (5.98)$$

On dit que les fonctions de structure ainsi définies violent l'invariance d'échelle. Comme dans le cas du couplage mobile, on pourra définir  $F(Q)$  de plusieurs façons (par exemple,  $F_{\overline{MS}}(Q)$ ,  $F_{MS}(Q)$ ,  $F_{DIS}(Q)$ , ...) suivant les termes finis que l'on inclut dans la relation entre  $F$  et  $F_i(Q)$ . Cette propriété, qui consiste à définir  $F_i(Q)$  à partir de  $F$  est une illustration du théorème de factorisation : les divergences de masse sont factorisées du sous-processus partonique dur (c'est-à-dire de la série  $\hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(c + c') + \dots$ ) et associées aux pattes externes modifiant ainsi les distributions des partons dans les hadrons.

## 5.1 Violations d'invariance d'échelle : approximation des logarithmes dominants.

Cet exemple a été traité en détail, à l'approximation de Born (ordre (0)), en sec. 2.1. On simplifie par rapport à cette étude en ne gardant que le vertex hadronique, c'est-à-dire en ne considérant que le processus  $\gamma^* P \rightarrow$  hadrons au lieu de  $eP \rightarrow$  hadrons. La section hadronique est une superposition de sections efficaces au niveau partonique (voir éq. 2.23) :

$$\sigma_{\mu\nu}^{(0)}(P, q) = \int dz q(z) \hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(0)}(zP, q) \quad (5.99)$$

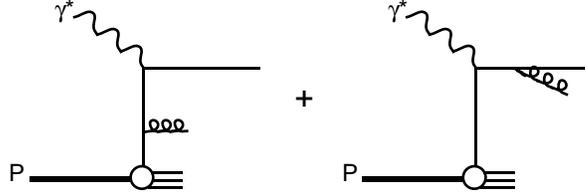
où  $p = zP$  est l'impulsion du quark qui absorbe le photon et  $q(z)$  la densité de quarks dans le hadron. On a la "section efficace"  $\gamma^*q \rightarrow q$  (voir éqs. 2.20, 2.22)

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu}^{(0)} = \frac{1}{4pq} e_q^2 \int \frac{d^3p'}{2E'} (2\pi) \delta^{(4)}(p' - q - p) \hat{W}_{\mu\nu}(zP, q) = \frac{1}{4pq} e_q^2 \frac{x\pi}{Q^2} \delta(z-x) \hat{W}_{\mu\nu} \quad (5.100)$$

La "section efficace" au niveau hadronique s'écrit alors simplement (via l'éq. (5.99))

$$\sigma_{\mu\nu}^{(0)}(P, q) = \frac{1}{4P \cdot q} q(x) e_q^2 \frac{\pi}{Q^2} \hat{W}_{\mu\nu}(xP, q) . \quad (5.101)$$

Au premier ordre des interactions fortes, c'est-à-dire à l'ordre  $\alpha_s$ , il faut considérer l'amplitude



et prendre le carré de cette amplitude. On obtient alors, après un calcul long et compliqué,

$$\sigma_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{4Pq} \int_0^1 \frac{dz}{z} q(z) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F \left( \frac{1 + (x/z)^2}{1 - x/z} \right)_R \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] e_q^2 \frac{\pi}{Q^2} \hat{W}_{\mu\nu} , \quad (5.102)$$

où la section efficace partonique est factorisée hors de l'intégrale en  $z^{\S}$ , ce qui permet d'écrire par analogie avec l'éq. (5.101)

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4Pq} q(x, Q) e_q^2 \frac{\pi}{Q^2} \hat{W}_{\mu\nu}(xP, q) \quad (5.103)$$

avec la nouvelle distribution partonique :

$$\begin{aligned} q(x, Q) &= \int \frac{dz}{z} q(z) \left[ \delta\left(1 - \frac{x}{z}\right) + \frac{\alpha_s}{2\pi} c_F \left( \frac{1 + (x/z)^2}{1 - x/z} \right)_R \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] \\ &= q(x) + \frac{\alpha_s}{2\pi} C_F \int_x^1 \frac{dz}{z} q(z) \left( \frac{1 + (x/z)^2}{1 - x/z} \right)_R \ln \frac{Q^2}{m^2} \end{aligned} \quad (5.104)$$

Dans les équations précédentes, on n'a gardé que les termes contenant les "grands" logarithmes  $\ln(Q^2/m^2)$  (approximation des "logarithmes dominants" [LL]). On voit que de tels termes peuvent naturellement être absorbés dans une redéfinition de la distribution de quarks dans le proton qui acquiert ainsi une dépendance en l'échelle caractéristique du processus considéré, la section partonique dure restant inchangée. Ce phénomène est "naturel" en ce sens que le terme logarithmique reflète la sensibilité de la section efficace à la physique à longue distance [ $m^2$  est "petit"] et il est normal qu'un tel terme soit associé à la patte externe plutôt qu'au processus de diffusion dure [c'est-à-dire à courte distance]. Il faut cependant noter que si on fait un calcul au delà de l'approximation des logarithmes

<sup>§</sup>L'indice  $_R$  signifie que la fonction ainsi indexée est régularisée au pôle  $z = x$ . Ce point, qui correspond à l'émission d'un gluon d'impulsion nulle est un point de divergence IR. Cette dernière est compensée par la contribution des diagrammes virtuels qu'il faut ajouter aux diagrammes réels pour obtenir la section efficace complète.

dominants on doit garder les termes "finis" [ne contenant pas  $\ln(Q^2/m^2)$ ] et la section partonique dure sera alors modifiée par des corrections d'ordre  $\alpha_s$ .

Techniquement, l'éq. (5.104) n'est pas définie quand le régulateur  $m \rightarrow 0$ , cependant la dérivée

$$\frac{dq(x, Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} c_F \int_x^1 \frac{dz}{z} q(z, Q) \left( \frac{1 + (x/z)^2}{1 - x/z} \right)_R \quad (5.105)$$

l'est parfaitement! Dans cette équation on a substitué  $q(z) \rightarrow q(z, Q)$  dans le membre de droite ce qui est justifié à l'ordre  $\alpha_s$  où on fait le calcul. La théorie ne prédit donc pas  $q(x, Q)$  mais seulement l'évolution de la fonction de structure avec l'échelle  $Q$ . L'équation (5.105) a de nombreux pères et elle est maintenant connue sous le nom d'équation d'évolution de Dokshitzer-Gribov-Lipatov-Altarelli-Parisi [37].

### 5.1.1 Solution de l'équation d'évolution par la méthode des moments.

On peut ramener l'équation intégral-différentielle (5.105) à une équation différentielle ordinaire en considérant les moments

$$M_n(\tau) = \int_0^1 dx x^{n-1} q(x, Q) \quad (5.106)$$

où on a introduit la variable naturelle  $\tau = \ln Q^2/\Lambda^2$ . En terme des moments l'équation d'évolution est simplement

$$\frac{dM_n(\tau)}{d\tau} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} M_n(\tau) \cdot d_{qq}^{(n)} \quad (5.107)$$

avec  $d_{qq}^{(n)}$ , appelé  $n$ -ième moment de la dimension anormale, est donnée par

$$d_{qq}^{(n)} = c_F \int_0^1 d \left( \frac{x}{z} \right) \left( \frac{x}{z} \right)^{n-1} \left( \frac{1 + (x/z)^2}{1 - x/z} \right)_R. \quad (5.108)$$

La solution est obtenue par

$$\frac{1}{M_n} \frac{dM_n}{d\tau} = \frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi} \frac{1}{b\tau}$$

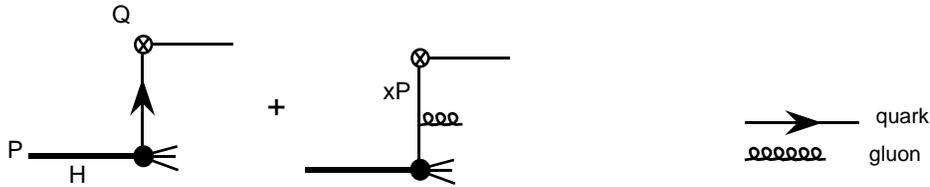
où on a substitué à  $\alpha_s(Q)$  sa dépendance explicite en fonction de l'échelle (voir éq. 4.92). La solution est donnée par

$$\frac{M_n(\tau)}{M_n(\tau_0)} = \left( \frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(Q_0)} \right)^{-\frac{d_{qq}^{(n)}}{2\pi b}}. \quad (5.109)$$

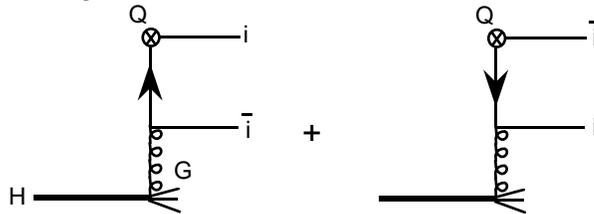
On peut montrer que  $d_{qq}^{(1)} = 0$ ,  $d_{qq}^{(n)} < 0$  pour  $n \geq 2$ . Plus  $n$  est grand, plus le poids de la région à grand  $x$  est important dans l'intégrale (5.106). Donc l'évolution en  $Q$  de  $M_n(\ )$  à grand  $n$  reflète l'évolution en  $Q$  de  $q(x, Q)$  à grand  $x$ . L'éq. (5.109) donne  $M_n(\tau) \sim (\ln Q^2/\Lambda^2)^{d_{qq}^{(n)}/2\pi b}$  qui décroît quand  $Q$  croît pour  $n \geq 2$ . D'où  $q(x, Q)$  décroît à grand  $x$  quand  $Q$  croît. La dépendance en  $Q$  est lente puisque logarithmique. Les conséquences phénoménologiques sont discutées en sec. 5.1.3.

### 5.1.2 Equations d'évolution couplées : cas singulet.

S'affranchissant des détails de la collision dure on peut résumer l'étude précédente par les diagrammes



Le symbole  $\otimes$  indique la collision "dure" du parton : dans le cas précédent ce processus est simplement l'absorption d'un photon virtuel par le quark. Un hadron contient aussi des gluons et le quark de saveur  $i$  qui participe à la collision dure peut être émis, à l'ordre  $\alpha_s$ , par un gluon par les diagrammes suivant :



Ce processus va ajouter un terme à l'équation (5.104) ci-dessus, et il n'est pas étonnant que ce terme ait la structure suivante

$$\delta q_i(x, Q) = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} G(z) P_{qG} \left( \frac{x}{z} \right) \ln \frac{Q^2}{m^2} \quad (5.110)$$

comme on peut s'en convaincre par le calcul. La fonction  $G(z)$  est la densité de gluons dans le hadron et la fonction  $P_{qG}(z) = \frac{1}{2}(z^2 + (1-z)^2)$ , l'analogue de  $P_{qq}(z) = C_F \frac{1+z^2}{1-z}$  du cas précédent, décrit la fragmentation du gluon en une paire quark-antiquark. A noter que cette fonction est indépendante de la saveur  $i$  puisque le gluon n'est pas sensible à la "saveur" des quarks légers. On peut aussi remarquer que ce processus contribue de la même façon à la densité de quarks  $q_i$  ou d'antiquarks  $\bar{q}_i$ . On définit la distribution "singulet"

$$\Sigma(x, Q) = \sum_i (q_i(x, Q) + \bar{q}_i(x, Q)) \quad (5.111)$$

qui est la probabilité de trouver un  $q$  ou un  $\bar{q}$  dans le hadron et, à l'ordre  $\alpha_s$ , il vient par analogie avec l'éq. (5.104)

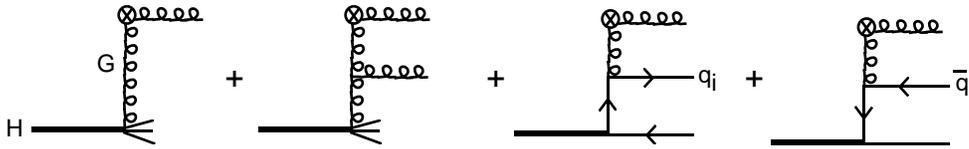
$$\Sigma(x, Q) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ \Sigma \left( \frac{x}{z}, Q \right) \left[ \delta(1-z) + \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} P_{qq}(z) \ln \frac{Q^2}{m^2} \right] + G \left( \frac{x}{z} \right) \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} P_{qG} \ln \frac{Q^2}{m^2} \times \underbrace{2}_{q_i + \bar{q}_i} \times \underbrace{N_F}_{\text{nb. de saveurs}} \right\} \quad (5.112)$$

Sous forme différentielle on trouve

$$\frac{d\Sigma(x, Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \left\{ \Sigma \left( \frac{x}{z}, Q \right) P_{qq}(z) + 2N_F G \left( \frac{x}{z}, Q \right) P_{qG}(z) \right\} \quad (5.113)$$

qui généralise l'éq. (5.105).

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que le cas où le quark participe directement à la sous-collision dure [par exemple absorption du photon virtuel] mais on peut imaginer des processus, purement hadroniques, où le gluon peut lui aussi participer à la diffusion dure et on a alors à prendre en compte les diagrammes suivants :



qui mènent à une équation d'évolution pour le gluon similaire à (5.113). Regroupant tout on obtient les équations couplées pour les distributions du singulet et du gluon

$$\frac{d}{d \ln Q^2} \begin{pmatrix} \Sigma(x, Q) \\ G(x, Q) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{qq}(z) & 2N_F P_{qG}(z) \\ P_{Gq}(z) & P_{GG}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma(\frac{x}{z}, Q) \\ G(\frac{x}{z}, Q) \end{pmatrix}, \quad (5.114)$$

tandis que pour l'évolution d'un quark de valence  $V_i = q_i - \bar{q}_i$  on a

$$\frac{dV_i(x, Q)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) V_i(\frac{x}{z}, Q) \quad (5.115)$$

pour chaque saveur  $i$ . Les  $P_{ij}(z)$ , appelés noyaux d'Altarelli-Parisi, sont prédits par la théorie. Dans l'approximation des logarithmes dominants on trouve:

$$\begin{aligned} P_{qq}(z) &= \langle C_F \rangle \left( \frac{1+z^2}{1-z|_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right) \\ P_{qG}(z) &= \langle \frac{1}{2} \rangle (z^2 + (1-z)^2) \\ P_{Gq}(z) &= \langle C_F \rangle \frac{1+(1-z)^2}{z} \\ P_{GG}(z) &= \langle 2N_c \rangle \left( \frac{z}{1-z|_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right) + \left\langle \frac{11N_c - 2N_F}{6} \right\rangle \delta(1-z) \end{aligned} \quad (5.116)$$

où la prescription " + " est la notation habituelle pour la régularisation dénotée " R " des divergences infrarouges et est définie au sens des distributions par

$$\int_0^1 dz \frac{h(z)}{1-z|_+} = \int_0^1 dz \frac{h(z) - h(1)}{1-z}, \quad (5.117)$$

$h(z)$  étant une fonction test<sup>¶</sup>

Dans le modèle des partons naïf on était conduit aux règles de somme suivantes

$$\int_0^1 dx V_i(x) = n_i \Rightarrow \text{nombre de quarks de valence de type } i$$

<sup>¶</sup>Dans les sections précédentes, nous avons introduit, pour des raisons pédagogiques, un cut-off  $m$  pour régulariser la divergence colinéaire. Une approche moderne consiste à travailler en régularisation dimensionnelle dans laquelle les singularités colinéaires et infrarouges apparaissent comme des pôles en  $\varepsilon$ . Ainsi le double logarithme de l'éq. (5.97) devient un terme  $1/\varepsilon^2$ .

$$\int_0^1 dx x (\Sigma(x) + G(x)) = 1 \Rightarrow \text{conservation de l'impulsion.}$$

Ces lois de conservation sont indépendantes de l'échelle  $Q$  de la collision dure. Est-ce vrai après corrections QCD, c'est-à-dire les relations

$$\frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx V_i(x, Q) = 0 ; \quad \frac{d}{d \ln Q^2} \int_0^1 dx x (\Sigma(x, Q) + G(x, Q)) = 0$$

sont-elles vérifiées? On peut voir que c'est le cas à cause des règles de somme suivantes :

$$\int_0^1 dz P_{qq}(z) = 0$$

$$\int_0^1 dz z [P_{qq}(z) + P_{Gq}(z)] = 0 \quad , \quad \int_0^1 dz z [P_{GG}(z) + 2N_G P_{qG}(z)] = 0 . \quad (5.118)$$

### 5.1.3 Phénoménologie

Expérimentalement les violations d'invariance d'échelle sont étudiées dans les réactions de diffusion profondément inélastiques sur le nucléon, où l'on peut mesurer (voir l'éq. (2.25))

$$\frac{\nu W_2(x, Q^2)}{x} \equiv \frac{F_2(x, Q^2)}{x} = \sum_i e_{q_i}^2 q_i(x, Q), \quad (5.119)$$

qui est valable dans l'approximation des logarithmes dominants. La figure 6 montre une compilation des données récentes sur la fonction de structure du proton obtenues dans les collisions  $ep$  et  $\mu p$ . Comme prévu par la théorie (voir la discussion après l'éq. (5.109)), la violation de l'invariance d'échelle a tendance à faire décroître  $F_2(x, Q^2)$  à  $x > 0,25$  quand  $Q^2$  augmente, tandis qu'aux petites valeurs de  $x$  la fonction de structure  $F_2(x, Q^2)$  croît rapidement avec  $Q^2$  pour des valeurs suffisamment grandes : l'évolution en  $Q^2$  dégrade l'énergie des partons à grands  $x$  par l'émission des gluons à petits  $x$ , ces gluons se désintégrant à leur tour en une paire  $q\bar{q}$ , etc. Il est convenu d'appeler ce mécanisme "parton shower" en français.

A partir de ces données, et en utilisant aussi d'autres réactions telles que celles discutées dans la section suivante, il est possible d'extraire la distribution des quarks  $u$ ,  $d$ , ... et du gluon dans le proton. La figure 8 montrent le résultat obtenu, dans l'approximation au delà des logarithmes dominants, pour deux valeurs de  $Q^2$ . A grand  $x$  on voit la dominance des quarks sur le gluon alors que le gluon domine complètement à petit  $x$ . A  $Q^2 = 10000 \text{ GeV}^2$  toutes les distributions tendent à devenir "piquées" aux petites valeurs de  $x$  : en première approximation les distributions décroissent quand  $Q^2$  augmente pour  $x$  grand et croissent aux valeurs de  $x$  petites. C'est une conséquence du mécanisme de "parton shower" d'après lequel les partons "rayonnent" en se cassant en deux partons d'impulsion plus basse. Ceci explique la présence du pic dans la distribution des quarks à  $x = 0$ , pic dû aux quarks matelots produits de désintégration du gluon.

### 5.1.4 Conclusions

Dans l'approximation des logarithmes dominants, il n'y a pas de modifications au modèle des partons, sauf que les fonctions de structure acquièrent une dépendance en l'échelle

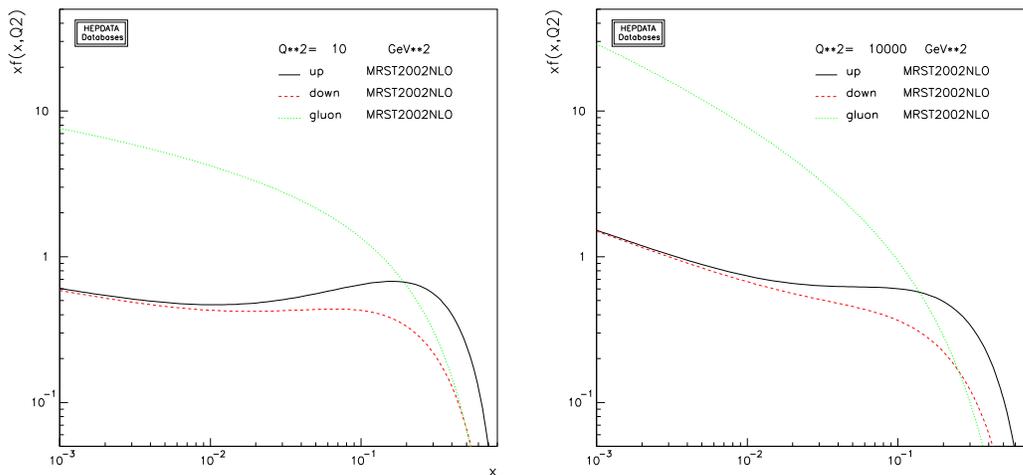


Figure 8: *Distributions pondérées par  $x$  des quarks  $u$ ,  $d$  et du gluon à  $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$  et à  $Q^2 = 10000 \text{ GeV}^2$ . Ces graphes peuvent être obtenus sur le site de Durham HEP Databases : <http://durpdg.dur.ac.uk/hepdata/pdf.html>*

de masse caractéristique du processus considéré : ce sont les violations de l'invariance d'échelle. Cette dépendance des fonctions de structure en fonction de l'échelle de masse est prédite par la théorie et elle est universelle c'est-à-dire qu'elle sera la même quelque soit le processus dur considéré où apparaissent ces fonctions de structure.

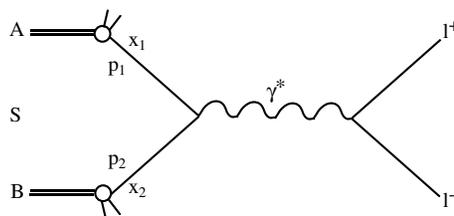
## 6 Le modèle des partons amélioré et applications.

Le modèle des partons amélioré par les corrections QCD s'applique à d'autres processus que le DIS, pourvu qu'ils mettent en jeu des échelles de masse ou des impulsions de transfert importantes. On discute d'abord le cas de la production de paires de leptons dans les collisions hadroniques, ou mécanisme de Drell-Yan, qui a joué un rôle fondamental dans la découverte des bosons de jauge  $W$  et  $Z$  au CERN dans les années 80. On passera ensuite rapidement en revue la production de photons directs à grande impulsion transverse et la production de gerbes hadroniques ("jets") dans les collisions hadroniques. Ces différents processus sont utiles pour déterminer avec précision la distribution des quarks et des gluons dans les hadrons ainsi que la valeur de  $\Lambda$ , la constante fondamentale des interactions fortes. Nous ne considérerons pas ici la production de saveurs lourdes pour laquelle le modèle des partons s'applique aussi ni les réactions de photoproduction qui jouent un rôle très important à HERA.

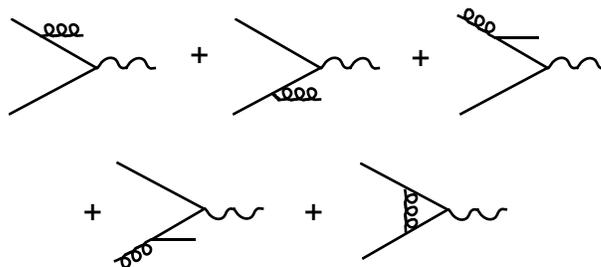
### 6.1 Processus de Drell-Yan

Il est relié à la diffusion profondément inélastique par croisement et, dans l'approximation de Born, le photon virtuel est produit dans l'état final par annihilation d'un quark de l'un

des hadrons initiaux avec un antiquark de l'autre comme indiqué dans la figure.



Le modèle des partons s'applique quand la masse invariante  $Q$  de la paire de leptons produite est grande car, alors, le photon virtuel de genre temps a un haut pouvoir de résolution et il peut "voir" les constituants des hadrons  $A$  et  $B$ . Les diagrammes d'ordre supérieur à l'origine des violations d'invariance d'échelle sont :



On écrit la section efficace de production sous la forme

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \sum_q \int dx_1 dx_2 (F_{q/A}(x_1, Q) F_{\bar{q}/B}(x_2, Q) + F_{\bar{q}/A}(x_1, Q) F_{q/B}(x_2, Q)) \frac{d\hat{\sigma}^{q\bar{q}}}{dQ^2} \quad (6.120)$$

où les  $F_{i/H}$  sont les fonctions de structure et où on doit sommer sur toutes les saveurs de quarks dans les hadrons  $A$  et  $B$ . La section efficace partonique  $q\bar{q} \rightarrow l^+l^-$  est simplement

$$\frac{d\hat{\sigma}^{q\bar{q}}}{dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{3Q^2} \frac{e_q^2}{N_c} \delta(\hat{s} - Q^2), \quad \hat{s} = x_1 x_2 s$$

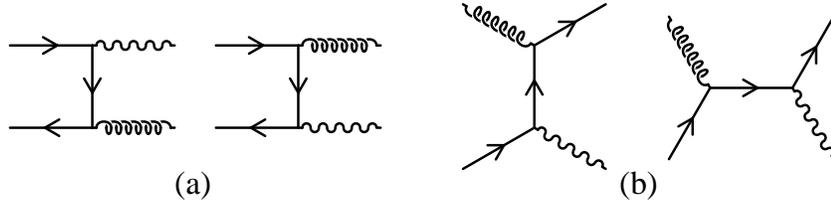
Dans les collisions  $pp$ , la section efficace est proportionnelle à la distribution des antiquarks dans le proton, ce qui permet donc de mesurer cette dernière.

A des énergies élevées il est possible de produire les bosons de jauge chargés  $W^+$  (resp.  $W^-$ ) par annihilation d'une paire quark-antiquark  $u\bar{d}$  (resp.  $d\bar{u}$ ) ou le boson neutre  $Z^0$  par annihilation  $u\bar{u}$  ou  $d\bar{d}$ . C'est par ce mécanisme que les bosons électrofaibles ont été découverts au collisionneur du CERN dans les années 1970 [38], [39]. On espère bientôt mettre en évidence le fameux boson de Higgs au LHC dans un processus similaire mais impliquant l'annihilation de deux gluons.

## 6.2 Production de photons directs à grands transferts

Le processus considéré ici est la réaction  $AB \rightarrow \gamma X$ , où  $X$  représente les hadrons produits non observés. Au niveau partonique, il faut calculer la diffusion  $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$  (annihilation)

et  $qg \rightarrow \gamma q$  ou  $\bar{q}g \rightarrow \gamma \bar{q}$  (diffusion de type Compton) qui ont la représentation diagrammatique suivante,



On considère le cas où le photon est produit à grande impulsion transverse  $k_T$ . La section hadronique inclusive est donnée par

$$\frac{k^0 d\sigma}{dk^3} = \frac{d\sigma}{d\vec{k}_T dy} = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 F_{i/A}(x_1, k_T) F_{j/B}(x_2, k_T) k^0 \frac{d\hat{\sigma}^{ij}}{dk^3}, \quad (6.121)$$

où l'on a incli les corrections QCD à l'approximation des logarithmes dominants et on a choisi  $k_T$  comme échelle de factorisation dans les fonctions de structure. Symboliquement, la section efficace s'écrit

$$d\sigma = q \otimes \bar{q} d\sigma^{q\bar{q}} + G \otimes q d\sigma^{Gq}$$

où  $q$ ,  $\bar{q}$  et  $G$  dénotent respectivement la distribution des quarks, antiquarks et gluons dans les hadrons. Dans le cas de la diffusion  $pp$ ,  $q \otimes \bar{q} \ll G \otimes q$  et le deuxième terme domine complètement la section efficace. La réaction  $pp \rightarrow \gamma X$  est donc idéale pour mesurer directement la distribution du gluon dans le proton. Notre discussion de la production de photons directs est très simplifiée et nous n'avons parlé que du mécanisme où le photon participe au processus dur comme indiqué par les diagrammes de Feynman ci-dessus. Il existe un autre mécanisme où le photon est rayonné par un quark produit à grande impulsion transverse. Ce processus n'est pas important dans les expériences de type cible fixe mais il joue un rôle prédominant aux collisionneurs où la valeur de la variable  $k_T/\sqrt{S}$  est petite. Une compilation récente des données expérimentales et de leur comparaison avec la théorie, au delà des logarithmes dominants [40], est montrée en fig. 9. On peut noter le remarquable accord sur 9 ordres de grandeur, pour des expériences couvrant 2 ordres de grandeur en énergie (à l'exception toutefois des données de la collaboration E706).

### 6.3 Production de jets dans les collisions hadroniques

Dans l'approximation des logarithmes dominants la gerbe hadronique ou "jet" est identifié à un parton final (quark ou gluon) produit à grande impulsion transverse  $k_T$ . Aucun effet de fragmentation du parton en hadrons n'est pris en compte. La cinématique est donc la même que pour la production d'un photon mais on doit sommer sur tous les types de partons de l'état final

$$k^0 \frac{d\sigma^3}{dk} = \frac{1}{st} \sum_{i,j,k,l} \int_{x_i^{\min}}^1 \frac{dx_1}{x_1^2} F_{i/A}(x, k_T) F_{j/B}(x_2, k_T) \frac{1}{(4\pi)^2} | \mathcal{M} |_{ij \rightarrow kl}^2$$

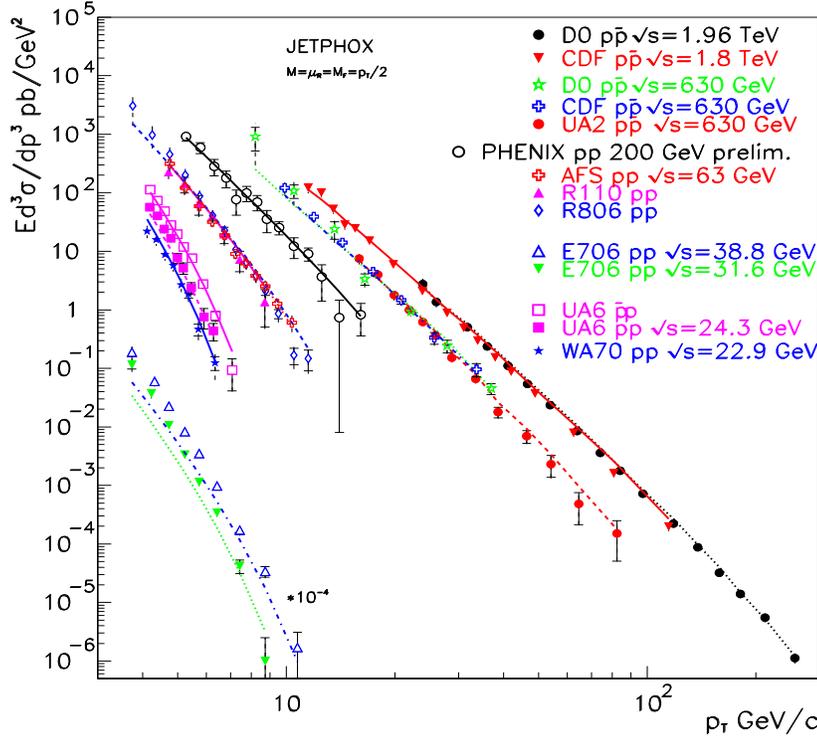


Figure 9: *Compilation de la section efficace inclusive de production d'un photon en fonction de l'énergie transverse du photon dans les collisions pp ou p̄p de  $\sqrt{s} = 22,9$  GeV à 1,96 TeV. Les prédictions théoriques sont calculées au-delà de l'ordre dominant.*

La dynamique au niveau partonique est assez compliquée car il y a un grand nombre de processus en jeu:  $qq \rightarrow qq$ ,  $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ ,  $\bar{q}\bar{q} \rightarrow \bar{q}\bar{q}$ ,  $q\bar{q} \rightarrow gg$ ,  $gg \rightarrow q\bar{q}$ ,  $gq \rightarrow gq$ ,  $gg \rightarrow gg$ . A l'énergie des collisionneurs  $p\bar{p}$  actuels les processus dominants sont  $qq \rightarrow qq$  aux valeurs élevées de  $k_T$  et  $gq \rightarrow gq$  à  $k_T$  plus faible quand les valeurs effectives des  $x_i$  des partons dans les hadrons incidents sont petites. Il faut aussi signaler que la section efficace de production de jets est proportionnelle à  $\alpha_s^2$  et elle est donc très sensible à la valeur de  $\Lambda$ . On compare dans la figure 10 les données sur la production inclusive d'un jet, en fonction de l'énergie transverse du jet, au Tevatron (Fermilab) ( $\sqrt{s} = 1,96$  TeV) [41] avec les prédictions théoriques dans l'approximation au delà des logarithmes dominants: l'accord entre théorie et expérience sur 8 ordres de grandeurs est remarquable.

## 6.4 Au delà de l'approximation des logarithmes dominants

Le modèle des partons amélioré (QCD en LLA) donne une image simple des processus hadroniques durs. En combinant notre étude sur la renormalisation et celle sur la factorisation, on a vu qu'une section efficace a la forme

$$d\sigma^{AB} = \alpha_s^p(Q) \int dx_1 dx_2 F_{i/A}(x_1, Q) F_{j/B}(x_2, Q) d\hat{\sigma}^{ij}$$

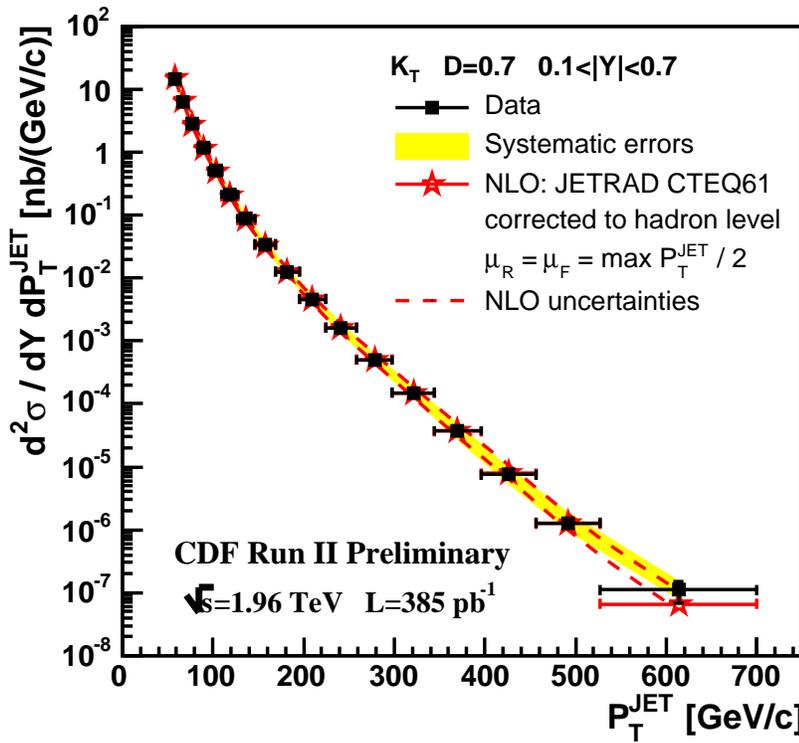


Figure 10: *Production de jets au Tevatron : comparaison entre les prédictions théoriques "au delà des logarithmes dominants" et les données de la collaboration CDF.*

où  $Q$  est l'échelle caractéristique du processus dur :  $Q \sim M_{\gamma^*} = M_{l+l-}$  pour la production d'une paire de leptons ou,  $Q \sim \sqrt{k_T^2}$ , pour les processus à grande impulsion de transfert  $k_T$ . Sa valeur n'est pas déterminée précisément par la théorie; on peut prendre, par exemple,  $Q = aM_{\gamma^*}$  avec  $a$  arbitraire car, dans l'approximation des logarithmes dominants,  $\ln Q \sim \ln aQ$ . Ceci pose un problème si l'on veut faire des prédictions quantitatives : en effet, tout changement d'échelle affecte les prédictions théoriques. Ainsi, si on prend  $aQ$  comme échelle, la prédiction théorique devient

$$d\sigma^{AB} = \alpha_s^p(aQ) \int dx_1 dx_2 F_{i/A}(x_1, aQ) F_{j/B}(x_2, aQ) d\hat{\sigma}^{ij}.$$

Mais on sait que :

- le couplage  $\alpha_s$  décroît quand  $a$  croît (éq. 4.89),
- les fonctions de structure  $F_{i/H}(x, aQ)$  varient de façon monotone avec l'échelle à  $x$  fixé (éq. 5.114).

Dans l'approximation des logarithmes dominants les prédictions théoriques ne sont donc pas stables car elles dépendent de  $a$  mais la théorie ne dit pas quelle valeur de  $a$  il faut choisir ! De façon plus générale le résultat théorique a la structure :

$$d\sigma = \alpha_s^p(\mu) \int dx_1 dx_2 F_{i/A}(x_1, M) F_{j/B}(x_2, M) d\hat{\sigma}^{ij} \quad (6.122)$$

où  $\mu$ ,  $M$  sont des échelles de masse du "même ordre de grandeur" que celles mises en jeu dans le sous-processus  $d\hat{\sigma}$ .  $\mu$  est la masse qui intervient lors de l'élimination des divergences ultraviolettes et la définition du couplage renormalisé  $\alpha_s(\mu)$ , et  $M$  est celle qui intervient lors de la régularisation des divergences colinéaires et la redéfinition des fonctions de structure  $F_{i/H}(x) \rightarrow F_{i/H}(x, M)$ .

Si l'on se reporte à l'éq. (4.90) on voit qu'une section efficace hadronique typique peut être écrite symboliquement sous la forme

$$d\sigma = \alpha_{\overline{MS}}^p(\mu) \left( d\hat{\sigma} + \alpha_{\overline{MS}}(\mu) \left( p b \ln \frac{\mu^2}{Q^2} d\hat{\sigma} + k(\dots) \right) \right) \quad (6.123)$$

où  $d\hat{\sigma}$  représente la section efficace à l'ordre le plus bas dont on a extrait la dépendance en la constante de couplage  $\alpha_{\overline{MS}}^p$  et où  $b$  est défini dans l'éq. (4.93). Par rapport à l'éq. (4.90) on a développé l'expression en puissance de  $\alpha_{\overline{MS}}$  ne gardant que les deux premiers termes. La fonction  $k(\dots)$  contient les "corrections d'ordre supérieur" à l'exclusion des termes en  $\ln(\mu^2/q^2)$  que l'on a explicitement écrits. Utilisant l'éq. (4.89) on trouve que la variation de l'éq. (6.123) par rapport à  $\mu$  est

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d \ln \mu^2} &= -p b \alpha_{\overline{MS}}^{p+1}(\mu) \left( d\sigma_0 + \alpha_{\overline{MS}}(\mu) (p b \ln \frac{\mu^2}{-q^2} d\sigma_0 + k(\dots)) \right) + p b \alpha_{\overline{MS}}^{p+1}(\mu) d\sigma_0 + \mathcal{O}(\alpha_{\overline{MS}}^{p+2}) \\ &\sim \mathcal{O}(\alpha_{\overline{MS}}^{p+2}) \end{aligned} \quad (6.124)$$

Il faut bien remarquer que, pour obtenir ce résultat, il est crucial de garder le facteur en  $\ln(\mu^2/q^2)$  du terme d'ordre supérieur qui compense la variation en  $\mu$  du terme dominant. Ceci est cohérent car si on fait un calcul à l'ordre  $\alpha_{\overline{MS}}^{p+1}$  l'ambiguïté de la prédiction théorique est d'ordre  $\alpha_{\overline{MS}}^{p+2}$ .

Le même mécanisme est à l'œuvre concernant l'échelle de factorisation  $M$  de telle sorte que l'ambiguïté d'un calcul "au delà des logarithmes dominants" est d'un ordre supérieur à celui auquel le calcul est conduit.

En QCD perturbative, les seuls calculs qui peuvent prétendre être quantitatifs sont donc ceux qui sont faits à l'approximation "au delà des logarithmes dominants"

## 6.5 Conclusions

Un nombre considérable d'observables dépendent des fonctions de structure des partons dans les hadrons et de la valeur de  $\Lambda$ . Pour que QCD soit validée en tant que théorie il faut que les prédictions soient en accord avec toutes les observables. Les données devenant de plus en plus précises et couvrant un domaine cinématique de plus en plus étendu les tests de QCD deviennent de plus en plus contraignants. Jusqu'à maintenant la QCD perturbative a passé avec succès tous les tests expérimentaux.

## Remerciements

Je remercie E. Pilon pour une lecture attentive du manuscrit et de nombreuses suggestions.

# References

- [1] Yu. L. Dokshitzer, D. I. Dyakonov, S.I. Troyan, Phys. Rept. **58** (1980) 269 ;  
G. Altarelli, Phys. Rept. **81** (1982) 1.
- [2] T. Muta, Foundations of QCD: an Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories, World Scientific, Singapour, 1998 ;  
G. Sterman, An introduction to quantum field theory, Cambridge University Press, 1993 ;  
S. Pokorski, Gauge Field Theories, Cambridge Monographs in Mathematical Physics, 2000 ;  
R.K. Ellis, J.D. Stirling, B.R. Webber, QCD and Collider Physics, Cambridge Monographs on Particle Physics Nuclear Physics and Cosmology, 1996 ;  
M. Jacob éditeur, Perturbative Quantum Chromodynamics, Physics Reports Reprint Book Series, v. 5, North-Holland, 1982.
- [3] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26** (1961) 222.
- [4] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125** (1962) 1067.
- [5] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8** (1964) 214.
- [6] G. Zweig, pré tirage CERN-TH-412 (1964).
- [7] G.F. Chew, S-matrix theory of strong interactions, Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, New-York.
- [8] S.C. Frautshi, Regge poles and S-matrix theory, Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, New-York, 1963.
- [9] V. Barger, D.B. Cline, Phenomenological theory of high energy scattering, Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, New-York, 1969.
- [10] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179** (1969) 1547.
- [11] R.P. Feynman, Photon-hadron interactions, Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, Reading, Massachusetts, 1972.
- [12] E. D. Bloom *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 930 ;  
M. Breidenbach *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 935.
- [13] Pour une revue ancienne du modèle des quarks voir J. J. J. Kokkedee, The quark model, Frontiers in Physics, W.A. Benjamin, New-York, 1969.
- [14] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 598 ;  
le nombre quantique de couleur avait été proposé auparavant par les physiciens soviétiques N. N. Bogoliubov, B. Struminsky et A.H. Tavcheliidze.
- [15] J. E. Augustin *et al.* [SLAC-SP-017 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1406.
- [16] J. J. Aubert *et al.* [E598 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **33** (1974) 1404.

- [17] S. W. Herb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39** (1977) 252.
- [18] F. Abe *et al.* [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 225 [arXiv:hep-ex/9405005] ; Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 2626 [arXiv:hep-ex/9503002].
- [19] Pour des revues récentes voir, par exemple, F. E. Close, Eur. Phys. J. A **24S1** (2005) 9 ; Nature **435** (2005) 287.
- [20] G. Veneziano, Nuovo Cimento **57 A** (1968) 190.
- [21] Y. Nambu, Proc. Conf. on Symmetries and Quark Models, Detroit (1969), (Gordon and Breach, 1970) p. 269.
- [22] Pour des revues sur le sujet voir G. Veneziano, Phys. Rept. **9** (1974) 199 ; C. Rebbi, Phys. Rept. **12** (1974) 1 ; S. Mandelstam, Phys. Rept. **13** (1974) 259 ; J. Scherk, Rev. Mod. Phys. **47** (1975) 123.
- [23] J. Scherk, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B **81** (1974) 118.
- [24] H.D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346 ;  
D.J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343 ;  
La propriété de liberté asymptotique était déjà connue des physiciens soviétiques, B. Kriplovich, M. Terentiev, Vanjashin, et de G. 't Hooft qui l'avait exposée lors d'un colloque à Marseille en septembre 1972.
- [25] H. Georgi, H. D. Politzer, Phys. Rev. D **9** (1974) 416 ;  
D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. D **9** (1974) 980.
- [26] E.A. Kuraev, L.N. Lipatov, V.S. Fadin, Phys. Lett. B **60** (1975) 50 ; JETP **44** (1976) 433 ; **45** (1977) 199 ;  
Ya.Ya. Balitsky, L.N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. **28** (1978) 822.
- [27] M. Y. Han, Y. Nambu, Phys. Rev. **139** (1965) B1006.
- [28] K. Wilson, Phys. Rev. **179** (1969) 1499.
- [29] H. Fritsch, M. Gell-Mann, 16th Int. Conf. on High Energy Physics Chicago-Batavia (1972) vol. 2, p.135 ;  
H. Fritsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler Phys. Lett. **47B** (1973) 365 ;  
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 494 ; Phys. Rev. D **8** (1973) 4482.
- [30] L. S. Fadeev, U. N. Popov, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.
- [31] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **33** (1971) 173 ; Nucl. Phys. B **35** (1971) 167 ;  
B.W. Lee, J. Zinn-Justin, Phys. Rev. **D5** (1972) 3121,3137.
- [32] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, Comm. Math. Phys. **42** (1975) 127 ; Ann. Phys. **98** (1976) 287.
- [33] I.V. Tyutin, pré tirage de l'Institut Lebedev, 1975 ; M.Z. Iofa, I.V. Tyutin, Theor. Math. Phys. **27** (1976) 316.

- [34] C. G. Bollini, J. J. Gianbiagi, Nuovo Cimento B **12** (1970) 20 ;  
G. 't Hooft, M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189.
- [35] S. Bethke, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **135** (2004) 345 [arXiv:hep-ex/0407021].
- [36] T. D. Lee, M. Nauenberg, Phys. Rev. **133** (1964) B1549 ;  
T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.
- [37] Les équations d'évolution ont d'abord été obtenues en électrodynamique quantique par V. N. Gribov, L. N. Lipatov, Sov. Jour. Nucl. Phys. **15** (1972) 438, 675.  
En QCD elles ont été dérivées par G. Parisi, 11<sup>ème</sup> Rencontre de Moriond, J. Tran Thanh Van éd. ; G. Altarelli, G. Parisi Nuc. Phys. B **126** (1977) 298 ;  
Yu. L. Dokshitzer Sov. Phys. JETP **46** (1977) 641.
- [38] Découverte du boson  $W$  : G. Arnison *et al.* [UA1 Collaboration], Phys. Lett. B **122** (1983) 103 ; M. Banner *et al.* [UA2 Collaboration], Phys. Lett. B **122** (1983) 476.
- [39] Découverte du boson  $Z$  : G. Arnison *et al.* [UA1 Collaboration], Phys. Lett. B **126** (1983) 398 ; P. Bagnaia *et al.* [UA2 Collaboration], Phys. Lett. B **129** (1983) 130.
- [40] P. Aurenche, M. Fontannaz, J. P. Guillet, E. Pilon, M. Werlen, Phys. Rev. **D73** (2006) 094007, [arXiv:hep-ph/0602133].
- [41] A. Abulencia *et al.* [CDF Collaboration] [arXiv: hep-ex/0512020] ;  
The  $D\bar{0}$  Collaboration,  $D\bar{0}$  note 4751-CONF, <http://www.do.fnal.gov>