

# SUR LA CONJECTURE ABC, VERSION CORPS DE FONCTIONS D'OESTERLÉ

Frédéric Campana

July 20, 2006

**Résumé:** Nous démontrons une forme faible de la version corps de fonctions complexe, due à Oesterle, de sa conjecture abc: soit  $B$  une courbe projective complexe, et  $D$  un diviseur réduit de degré  $d > 0$  sur  $B$  de la surface  $S := B \times \mathbb{P}^1$ . Alors le nombre de points d'intersection comptés *sans multiplicités* de  $D$  et du graphe  $H$  d'une section de la projection  $q : S \rightarrow B$ , est au moins  $(d - 2[\sqrt{d}]).n$ , à une constante additive près ne dépendant que de  $(D, B)$ , si  $H$  est de degré  $n > 0$  sur  $\mathbb{P}^1$ . (La conjecture affirme l'existence d' au moins  $(d - 2 - \epsilon).n$  points).

**Abstract:** We show a weak form of Oesterlé's complex function field version of his abc conjecture: let  $B$  be a complex projective curve, and  $D$  a divisor on the surface  $S := B \times \mathbb{P}^1$ ,  $D$  of degree  $d > 0$  over  $B$ . For any map  $h : B \rightarrow \mathbb{P}^1$  of any geometric degree  $n > 0$ , the number of intersection points, counted *without multiplicities*, of  $D$  with the graph of  $h$  is then at least  $(d - 2[\sqrt{d}]).n$ , up to an additive constant depending only on  $(B, D)$ . (The conjecture asserts the existence of  $(d - 2 - \epsilon).n$  intersection points at least, instead).

**Remerciements:** Je remercie vivement J. Oesterlé et le rapporteur, le premier pour m'avoir communiqué sa conjecture et signalé une lacune dans une version antérieure; le rapporteur pour sa lecture attentive, repérant une erreur résiduelle.

## 1 Introduction

L'énoncé suivant est une forme très affaiblie de la conjecture *abc* pour les corps de fonctions, due à J. Oesterle ([Oe 05]), qui est l'énoncé ci-dessous, mais avec  $[\sqrt{d}]$  remplacé par  $1 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$  arbitraire; sous forme optimiste l'inégalité subsisterait avec  $\epsilon = 0$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $B$  une courbe complexe lisse et connexe de genre  $g$ . Soit  $S := B \times \mathbb{P}^1$ , munie des projections  $p : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  et  $q : S \rightarrow B$ . Soit  $D \subset S$  une courbe projective réduite de degré géométrique  $d > 0$  sur  $B$ .*

*Il existe alors une constante  $C := C(D, B)$  telle que:*

Pour tout  $n > 0$ , et pour toute application holomorphe surjective  $h : B \rightarrow \mathbb{P}^1$ , de degré géométrique  $n$ , de graphe  $H \subset S$ , non contenu dans  $D$ , le nombre  $N_H$  de points d'intersection (deux à deux distincts) de  $D$  et  $H$  vérifie:  $N_H \geq n.(d - 2\lfloor\sqrt{d}\rfloor) - C$ .

**Remarques:** 1. Lorsque  $D$  est un diviseur *constant* constitué de la réunion des graphes de  $d$  sections constantes distinctes de  $q$ , la conjecture est une conséquence immédiate de la formule de Riemann-Hurwitz, qui fournit:  $N \geq (d - 2)n - (2g - 2)$ .

2. La conjecture est invariante par transformation birationnelle de  $S = B \times \mathbb{P}^1$  au-dessus de  $B$ , remplaçant  $D, H$  par leurs transformées strictes. En effet, le nouvel  $n$  diffère alors de l'ancien par une constante *additive*, égale à la différence cohomologique entre une section constante de  $q$  et sa transformée stricte, divisée par la classe d'une  $q$ -fibre.

3. Si  $d \leq 3$ , on peut transformer birationnellement  $D$  en un diviseur constant à l'aide du birapport. La conjecture est donc vraie pour  $d \leq 3$  (mais ouverte déjà pour  $d = 4$ ). On peut en déduire aisément que  $N_H \geq n.(d/3) - C'(D, B)$ .

4. La conjecture est vraie pour  $(D, B)$  si elle l'est pour  $(D', B')$  déduit par changement de base fini  $B' \rightarrow B$ . On supposera donc dans la suite que  $D$  est la réunion des graphes  $D_j$  de  $d$  sections distinctes  $s_j : B \rightarrow S$  de  $q$ , pour  $j \in J := \{1, \dots, d\}$ .

5. La méthode suivie est, en plus simple, celle de [Ca 04], issue des considérations orbifoldes de [Ca 01].

**Notations et conventions:** On supposera que la section à l'infini  $B_\infty := B \times \{\infty\}$  diffère de  $H$ , et coupe  $D$  transversalement en  $\delta$  points,  $\delta$  étant le degré de  $D$  sur  $\mathbb{P}^1$ . On notera  $\delta_j \geq 0$  les degrés des sections  $s_j$ , et  $\delta$  est donc la somme des  $\delta_j$ .

On notera  $x$  (resp.  $y$ ) une coordonnée locale sur  $B$  (resp. une coordonnée linéaire sur  $\mathbb{C} := \mathbb{P}^1 - \{\infty\}$ ), et  $dx$  (resp.  $dy$ ) les formes différentielles déduites de ces fonctions par dérivation. On notera aussi  $p \in B$  un point fixé de  $B$  (choisi en fonction de  $h$ ), et  $P := q^{-1}(p)$  sa  $q$ -fibre réduite.

**Definition 1.2** Soit  $m, \nu$  deux entiers, et  $w \in H^0(S, \text{Sym}^m(\Omega_S^1)(2mB_\infty + \nu.P))$ ,  $m > 0$ . On dit que  $w$  est **tangente à  $D$**  si  $s_j^*(w) = 0$ , pour tout  $j \in J$ . On note  $W_{m, \nu, p}$  le sous-espace vectoriel complexe de  $H^0(S, \text{Sym}^m(\Omega_S^1)(2mB_\infty + \nu.P))$  constitué des formes pluridifférentielles tangentes à  $D$ .

**Lemme 1.3** Si  $m \geq \lfloor\sqrt{d}\rfloor$ , il existe  $\nu(m)$  tel que si  $\nu \geq \nu(m)$ , alors  $W_{m, \nu, p}$  est de dimension au moins 1, ceci pour tout  $p \in B$ .

**Démonstration:** Ecrivons  $w = \sum_{h=0}^{h=m} (dy)^{\otimes(m-h)} \otimes w_h$ , avec  $w_h \in q^*(H^0(B, hK_B + \nu.p)) \otimes \pi^*(H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(2h)))$ ,  $\pi : S \rightarrow \mathbb{P}^1$  étant la seconde projection. Notons  $V := V_{m, \nu, p}$  l'espace vectoriel complexe des formes pluridifférentielles méromorphes sur  $S$  de cette forme. Alors, pour tout  $j \in J$ , on a une restriction linéaire naturelle  $s_j^*(w) \in H^0(B, mK_B + 2m\{\delta_j\} + \nu.p)$  dont le noyau est de codimension au plus:  $((2m - 1)(g - 1) + 2m\delta_j + \nu)$  dans  $V$ , avec  $\{\delta_j\} := s_j^*(B_\infty)$ . La codimension dans  $V$  de  $W_{m, \nu, p}$  est donc au plus  $(2md(g - 1) + 2m\delta + d.\nu)$ .

Supposons (pour simplifier l'écriture) que  $g \geq 1$ , et que  $\nu \geq (2g-1)$ . Alors  $V$  est de dimension  $(\sum_{h=0}^{h=m} (2h+1) \cdot \nu) = ((m+1)^2 \cdot \nu)$ . Si  $(m+1)^2 > d$ , et si  $\nu \geq \nu(m, d, \delta)$ , avec  $\nu(m, d, \delta) := 1 + [(2m/(m+1)^2 - d) \cdot (d(g-1) + \delta)]$ , alors  $W_{m, \nu, p}$  n'est donc pas réduit à  $\{0\}$ , et ceci pour tout choix de  $p \in B_\bullet$

**Conventions:** Soit maintenant  $h : B \rightarrow S$  une section de  $q$  de degré  $n$ . On fixe  $m, \nu$  satisfaisant les inégalités du lemme précédent. On supposera, quitte à choisir  $p$  générique, et à modifier un peu  $B_\infty$ , que:  $s(p) \notin (B_\infty \cup D)$ , et que  $B_\infty$  coupe  $D$  transversalement (en  $\delta$  points distincts, donc). On choisit alors  $0 \neq w \in W_{m, \nu, p}$ .

**Lemme 1.4** *Soit  $b \in B$  tel que  $h(b) \in D$ . Soit  $t_j := t_j(b)$  l'ordre de contact en  $h(b)$  de  $H$  avec  $D_j, j \in J$ , et  $t := \sum_{j \in J} t_j$ . Soit  $t' = t'(b)$  l'ordre d'annulation en  $b$  de  $h^*(w) \in H^0(B, mK_B + 2mB_{\infty|H} + \nu p)$ . Si  $h(b) \notin B_\infty$ , alors:*

1.  $t' \geq (t-1)$  si  $h(b)$  est un point lisse de  $D$ .
2.  $t' \geq (t-1 - T(r) - d)$ , si  $r := h(b)$  est un point singulier de  $D$ , et si  $T(r) := \sum_{j < k \in J_r} \delta_{j,k}$ , où  $J_r \subset \{1, \dots, d\}$  est l'ensemble des  $j$  tels que  $r \in D_j$ , et  $\delta_{j,k}$  est l'ordre de contact en  $r$  des branches  $D_j$  et  $D_k$  de  $D$ .
3. Si  $h(b) \in B_\infty$ ,  $h^*(w)$  a en  $b$  un pôle d'ordre au plus  $(2m - t + 1)$ .

**Démonstration:** Assertion 1: Soit  $D_j$  une composante irréductible locale de  $D$  contenant  $a := h(b)$ , et  $y = s_j(x)$  l'expression locale de la section  $s_j$  dans des coordonnées locales  $(x, y)$  près de  $a$ . On peut donc écrire, sur un voisinage analytique de  $a$  dans  $S$ :  $w(x, y) = (dy - s'_j(x)dx) \otimes w_1(x) + (y - s_j(x)) \cdot w_2(x, y)$ , avec  $w_1$  (resp.  $w_2$ ) une section locale de  $Sym^{m-1}(\Omega_S^1)$  (resp. de  $Sym^m(\Omega_S^1)$ ).

Puisque  $D_j$  et  $H$  ont en  $a$  un contact d'ordre  $t$ , on a:  $h(x) = s_j(x) + x^t \cdot u(x)$ , et  $h^*(dy) = s'_j(x)dx + x^{(t-1)}v(x)$ , avec  $u, v$  des 1-formes holomorphes non nulles en  $b$ .

Donc  $h^*(w) = x^{(t-1)}v(x)dx \otimes w_1(x) + x^t \cdot u(x)w_2(x, s(x))$ . D'où l'assertion.

Assertion 2: soit  $t_+ := \max\{t_j, j \in J_r\} = t_{j_0}$ . On a donc:  $t' \geq (t_+ - 1)$ , par l'argument précédent. Il suffit donc de voir que  $t_+ \geq t - T(r) - d$ . Or,  $t := \sum_{j \in J_r} t_j \leq \sum_{j \in J_r'} t_j + d$ , si  $J_r' \subset J_r$  est l'ensemble des  $j \in J_r$  tels que  $H$  soit tangente à  $D_j$ . Pour chaque  $j_0 \neq j \in J_r'$ , on a:  $t_j = \delta_{j, j_0}$ , puisque l'ordre de contact avec  $H$  est une valuation sur l'ensemble des germes de courbes lisses de  $S$  passant par  $r$ . Donc  $t \leq t_+ + \sum_{j \in J_r'} \delta_{j, j_0} + d \leq t_+ + T(r) + d$ . D'où l'assertion.

Assertion 3: elle se déduit de l'assertion 1 en exprimant  $w$  dans les coordonnées locales  $(x, z := 1/y)$  près de  $h(b)$  •

**Démonstration du théorème 1.1:** Considérons  $h, m, \nu, p, w$  comme ci-dessus. Si  $h^*(w) \neq 0$ , soit  $Z$  (resp.  $P$ ) le nombre de ses zéros (resp. pôles) comptés avec multiplicités. Alors  $Z - P = 2m(g-1)$ . Les seuls pôles de  $h^*(w)$  sont en  $p$  (d'ordre au plus  $\nu$ ), et en les  $b$  où  $h(b) \in B_\infty$  (d'ordres  $(2m - t + 1)$  au plus).

Donc:  $P \leq \nu + 2mn - \sum_{(h(b) \in B_\infty \cap D)} (t-1)$ .

Soit maintenant  $T := \sum_{r \in R} T(r)$ , où  $R$  est l'ensemble des points singuliers de  $D$ . on a donc:  $T \leq \sum_{(j < k \in J)} D_j \cdot D_k = \sum_{(j < k \in J)} (\delta_j + \delta_k) \leq d\delta/2$ , et le lemme 1.4 montre que:  $Z \geq \sum_{(h(b) \in D - R - B_\infty)} (t(b) - 1) + \sum_{(r := h(b) \in R)} (t(b) - 1 - T(r) - d) = \sum_{D - B_\infty} (t-1) - T - d \cdot |R|$ .

Pour tout  $t \geq 1$ , soit  $N_t$  le nombre des  $b \in B$  tels que  $t(b) = t$ . On a donc:  $N := N_H := \sum_{t \geq 1} N_t$ , et aussi:  $(\sum_{b \in B} t.N_t) = H.D = dn + \delta$ . Des deux inégalités précédentes résulte que:  $2m(g-1) = Z - P \geq (\sum_{b \in B} (t(b)-1) - T - d.|R| - \nu - 2mn) = \sum_{t \geq 1} (t-1)N_t - T - d.|R| - \nu - 2mn = (dn + \delta) - N_H - T - d.|R| - \nu - 2mn$ . Donc:  $N_H \geq n(d-2m) - C$ , si  $C := T + d.|R| + \nu - 2m(g-1)$ . Choisisant  $m = \lceil \sqrt{d} \rceil$  fournit l'assertion dans ce cas.

L'estimation obtenue ne dépend pas de  $w$ , générique dans  $W_{m,\nu,p}$ , mais seulement de  $m, \nu, g, D$ , fixés. Si  $h^*(w) = 0$ , pour  $h$  fixée et  $w$  générique dans  $W_{m,\nu,p}$ ,  $p \in B$  générique, on a alors  $h^*(w) = 0$  pour toute  $w \in W_{m,\nu,p}$ . On peut donc fixer  $0 \neq w \in W_{m,\nu,p}$  désormais. Puisque  $h^*(w) = 0$ , La section  $w$  définit une hypersurface  $Y_w \subset \mathbb{P}(\Omega_S^1)$  génériquement finie sur  $S$ . Les sections  $h$  telles que  $h^*(w) = 0$  sont des courbes de  $S$  dont les relèvements canoniques à  $\mathbb{P}(\Omega_S^1)$  sont contenues dans  $Y_w$  et sont des courbes intégrales algébriques du feuilletage algébrique (singulier) défini par  $w$  sur  $Y_w$  (ou sur l'une de ses désingularisées). Le théorème de Jouanolou ([J]) affirme alors que ces courbes intégrales algébriques forment une famille bornée (plus précisément: soit finie, soit fibres d'un pinceau) sur  $Y_w$  et donc sur  $S$ . Pour  $n \geq n_0$  assez grand,  $H$  n'est donc pas contenue dans cette famille, et le résultat précédent s'applique. Il existe donc bien une constante  $C_0$  (non effective, dépendant de  $n_0$ )  $N \geq n(d - 2\lceil \sqrt{d} \rceil) - C_0$ , pour toute  $H \bullet$

## References

- [Ca 01] F.Campana. Special Varieties, Orbifolds, and Classification Theory. Ann. Inst. Fourier 54 (2004), 499-665. (Aussi sur math. AG/0110051).
- [Ca 04] F.Campana. Fibres multiples sur les surfaces: aspects géométriques, arithmétiques et hyperboliques. Man. Math. 117 (2005), 429-461. (Aussi sur math. AG/0410469).
- [J78] J.P. Jouanolou. Hypersurfaces solutions d'une équation de Pfaff analytique. Math. Ann. 232 (1978), 239-248.
- [Oe 05] J. Oesterlé. Communication orale. Juin 2005.

Adresse: Frédéric Campana.  
 Université Nancy 1. Département de Mathématiques  
 BP239. F-54506-Vandoeuvre-les-nancy.  
 E-mail: campana@iecn.u-nancy.fr