FIBRES MULTIPLES SUR LES SURFACES:ASPECTS GEOMÉTRIQUES, HYPERBOLIQUES ET ARITHMÉTIQUES

Frédéric Campana

April 25, 2005

Abstract

We show the hyperbolic and complex function field versions of Lang's conjecture for smooth projective surfaces S having a fibration $f : S \to C$ with *orbifold base* an orbifold curve of general type. The fibre multiplicities defining the orbifold base are *non-classical*, and simply-connected surfaces S can occur. Also, it is not possible in general to reduce to the easy case where C itself is a curve of general type by a finite étale cover $c : S' \to S$. We leave open the arithmetic version of Lang's conjecture, which rests on an orbifold version of Mordell's Conjecture, consequence of the ABC-conjecture, but apparently not of the proofs of Falting's result.

Introduction

On se propose d'illustrer, sur l'exemple des conjectures de S. Lang, dans le cas des surfaces, les similarités et différences entre les deux notions de fibre multiple: la notion classique (basée sur *pgcd*), et la notion introduite dans [Ca 01] (basée sur inf).

La conjecture de Lang pour les surfaces S de type général peut être formulée en trois versions au moins: hyperbolique, corps de fonctions (complexe) et arithmétique. La version hyperbolique, par exemple, affirme l'existence d'une courbe projective $D \subset S$ contenant l'image de toute application holomorphe non-constante de $\mathbb{C}$ dans S.

Cette conjecture peut-être réduite très simplement au cas des courbes, et donc démontrée dans ses trois versions lorsqu'il existe une fibration $f : S \to C$ sur une courbe C de type général (ie: $g(C) \geq 2$), ou plus généralement, lorsqu'un revêtement étale fini S' de S possède cette propriété (purement topologique, par un théorème de Siu ([Siu80]): le groupe fondamental de S a un sous-groupe d'indice fini admettant pour quotient un groupe de surface). Cette observation est utilisée dans [C-S-S97] et [D97]).

Cette dernière propriété peut être cependant aussi formulée comme suit: il existe une fibration $f : S \to C$ dont la *base orbifolde* pour les multiplicités *classiques* (voir définition en 1.2 ci-dessous) est une courbe orbifolde de type général. La multiplicité *classique* d'une fibre $F = \sum_{j\in J} m_j.F_j$ est définie par $m^*(F) := pgcd\{m_j, j \in J\}$.

On se propose ici d'étendre cette solution de la conjecture de Lang au cas où les multiplicités classiques des fibres de f sont remplacées par les multiplicités *non classiques* $m(F) := inf\{m_j, j \in J\}$, introduites naturellement dans [Ca01] (voir 1.1 ci-dessous pour une justification).

Ce changement de définition soulève des problèmes nouveaux: les fibres multiples ne peuvent en effet plus être éliminées par un revêtement étale de S, et les solutions de la conjecture de Mordell pour les courbes de type général (dans ses trois versions) ne peuvent donc plus être invoquées.

Ce fait est illustré par l'exemple donné au §5 d'une fibration $f : S \to \mathbb{P}^1$ dans laquelle la surface projective S est lisse et simplement connexe, et la base orbifolde (nécessairement *non classique*) est de type général. De tels exemples peuvent être définis sur des corps de nombres, ou même sur $\mathbb{Q}$.

La solution de la conjecture de Lang dans cette nouvelle situation peut néanmmoins encore être réduite, après définition adéquate de la notion de point k-rationnel d'une courbe orbifolde, à la solution d'une version orbifolde de la conjecture de Mordell. Nous établissons ici les deux premières versions (hyperbolique et corps de fonctions, cette dernière sous une forme un peu affaiblie, voir remarque 3.21), mais pas la version arithmétique. On ne dispose pas, en effet, dans le contexte orbifolde, du plongement Jacobien, qui joue un rôle essentiel dans les solutions existantes de la conjecture de Mordell.

Cette version orbifolde de la conjecture de Mordell arithmétique (voir 4.2 pour l'énoncé précis), bien que conséquence de la conjecture *abc* est cependant d'un intérêt indépendant, et permettrait par exemple de montrer que les surfaces lisses et simplement connexes construites au §5 ne sont pas potentiellement denses.

Des discussions avec P. Eyssidieux et E. Peyre sont à l'origine de la version corps de fonctions considérée ici. Je les en remercie, ainsi que J.L. Colliot-Thélène pour l'observation 4.8, et L.Gruson et T. Peternell, pour leur relecture de la §.5.

Contents

1 Base orbifolde d'une fibration

On rappelle ici un certain nombre de notions introduites dans [Ca01] auquel on renvoit pour plus de détails.

1.1 Orbifoldes, fibré canonique et dimension de Kodaira

Une orbifolde (Y/Δ) est la donnée d'une variété projective complexe normale et connexe Y et d'un $\mathbb{Q}$-diviseur *orbifolde* $\Delta := \sum_{j\in J}(1-1/m_j).\Delta_j$ sur Y, dans lequel J est un ensemble fini, les $m_j > 1$ sont des entiers, et les Δ_j des diviseurs (de Weil) irréductibles distincts de Y tels que le diviseur $K_Y + \Delta$ soit $\mathbb{Q}$-Cartier. (Cette condition sera toujours vérifiée dans la suite où Y sera lisse). On dira que l'orbifolde (Y/Δ) est *supportée* par Y.

Le $\mathbb{Q}$-diviseur $K_Y + \Delta := K_{(Y/\Delta)}$ est appelé le *diviseur canonique* de (Y/Δ), et $\kappa(Y/\Delta) := \kappa(Y, K_Y + \Delta)$ est appelé sa dimension de Kodaira. On a donc toujours: $\kappa(Y/\Delta) \geq \kappa(Y)$ si Y est lisse (ou si K_Y est $\mathbb{Q}$-Cartier).

On dira que (Y/Δ) est *de type général* si $\kappa(Y/\Delta) = dim(Y) > 0$.

On pourrait, dans cette situation, définir aussi le groupe fondamental de cette orbifolde. Voir [Ca01].

1.2 Base orbifolde d'une fibration

1.2.1 Multiplicités

Soit $F := \sum_{k\in K} m_k.F_k$ un cycle analytique de dimension pure $p \geq 0$ d'un espace analytique Z. Ceci signifie que les F_k sont des sous-ensembles analytiques compacts irréductibles distincts de Z de dimension complexe p, K un ensemble fini, et les $m_k > 0$ des entiers. La *multiplicité* $m(F)$ (resp. la *multiplicité classique*) $m^*(F)$) est le plus petit (resp. le plus grand commun diviseur) des $m_k, k \in K$. Donc $m^*(F)$ divise $m(F)$.

Remarque 1.1 L'introduction de la notion non classique de multiplicité provient de ce qu'on a une bijection naturelle entre les fibrations de type général au sens non classique $f : X \to Y$ et les faisceaux de Bogomolov L sur X (qui sont les sous-faisceaux cohérents saturés de rang 1 de $\Omega^p_X, p > 0$ arbitraire pour lesquels $\kappa(X, L) = p$ est maximum). Cette correspondance est très simple dans un sens: elle envoit f ci-dessus sur le saturé de $f^*(K_Y)$ dans Ω^p_X, si $p := dim(Y) > 0$.

De plus, cette notion non classique est mieux adaptée à l'etude de la pseudométrique de Kobayashi (et probablement aussi à la géométrie arithmétique): par exemple, une application holomorphe $h : \mathbb{C} \to Y$ se relève localement à X si $\Delta(f) = 1$, mais pas si $\Delta^*(f) = 1$, définis ci-dessous, en général. Voir [Ca01] (et la section 2.2) pour une justification plus détaillée.

1.2.2 Base orbifolde d'une fibration

Une *fibration* désigne dans le présent texte une application holomorphe surjective et à fibres connexes $f : X \to Y$ entre variétés projectives complexes lisses et connexes.

Si $f : X \to Y$ est une fibration, et si D est un diviseur irréductible de Y, on notera $f^*(D) = F + R$, où F (resp. R) est la réunion des composantes irréductibles de $f^*(D)$ dont l'image par f est D (resp. est de codimension au moins 2 dans Y). On écrit $F := \sum_{k\in K} m_k.F_k$, et on définit alors la multiplicité (resp. la *multiplicité classique* de la fibre générique de f au-dessus de D comme étant: $m(f, D) := m(F)$ (resp. $m^*(f, D) := m^*(F)$).

Donc $m(f, D)$ et $m^*(f, D)$ sont égaux à 1 sauf pour un nombre fini de D, contenus dans le lieu au-dessus duquel f n'est pas lisse.

On définit alors la *base orbifolde* (resp. la *base orbifolde classique*) de f comme étant le couple $(Y/\Delta(f))$ (resp. $(Y/\Delta^*(f))$), avec:

$\Delta(f) := \sum_{D\subset Y}(1-(1/m(f, D))).D$ (resp. $\Delta^*(f) := \sum_{D\subset Y}(1-(1/m^*(f, D)).D)$.

On notera que ces sommes sont bien finies, puisque $m(f, D)$ (et a fortiori $m^*(f, D)$) sont égales à 1 sauf pour un nombre fini de D.

On a alors aussi: $\kappa(Y) \leq \kappa(Y/\Delta^*(f)) \leq \kappa(Y/\Delta(f))$.

On dira que f est *de type général* (resp. *de type général au sens classique*) si Y est une courbe[1] et si la base orbifolde $(Y/\Delta(f))$ (resp. la base orbifolde classique $(Y/\Delta^*(f))$ de f est de type général (ie: de dimension de Kodaira 1).

Remarque 1.2 Dans les situations considérées ici, X sera une surface, et Y une courbe. Dans ce cas, les diviseurs D de Y sont des points. De plus, il résulte alors de [B-P-V,V. 7. p.150] que si f est une fibration elliptique, alors $m^*(f,D) = m(f,D)$ pour tout $D \subset Y$. Si la fibre générique de f est rationnelle, alors $m(f,D) = m^*(f,D) = 1$ pour tout $D \subset Y$. La distinction entre $\Delta(f)$ et $\Delta^*(f)$ n'apparait donc que si les fibres lisses de f sont des courbes de type général, condition satisfaite si X est elle-même de type général.

Remarque 1.3 Plus généralement, si $f : X \to C$ est une fibration sur une courbe, dont X_c est une fibre lisse, alors $\Delta(f) = \Delta^*(f)$ dans les deux cas suivants:

• : X_c est rationnellement connexe ([G-H-S01]). On a même $\Delta(f) = \Delta^*(f) = \emptyset$ dans ce cas (c'est la partie la plus difficile de leur démonstration).

• X_c est une variété Abélienne (ou un tore complexe si X Kähler). En effet, la question est locale sur $0 \in C := \mathbb{D}$. On se ramène par changement de base fini au cas où $m^*(f,0) = 1$. Soit $X_0 = f^*(0) = \sum_J m_j.F_j$. Pour tout $j \in J$, soit $s_j : \mathbb{D} \to X$ une application holomorphe telle que $f \circ s_j(z) = z^{m_j}$, avec $s_j(0) \in F_j$. Soit $q_j \in \mathbb{Z}, j \in J$ tels que $\sum_J m_j.q_j = 1$ (Bezout arithmétique). Pour $c \neq 0, c \in C$, soit $s(c) := (\sum_J q_j.(\sum_{x \in (X_c \cap (s_j(\mathbb{D})))} x) \in X_c$. La somme est prise dans la variété Abélienne X_c, munie arbitrairement d'une origine. On vérifie immédiatement que cette somme est, en fait, indépendante de l'origine choisie. On a ainsi défini une section holomorphe (algébrique) de f sur $C - \{0\}$, qui se prolonge à C.

Ceci suggère la question suivante:

Question 1.4 *A-t'on: $\Delta(f) = \Delta^*(f)$ si X_c est une variété spéciale (au sens de [Ca01]), et donc en particulier si $\kappa(X_c) = 0$?*

Les premiers cas intéressants sont ceux dans lesquels X_c est une surface $K3$ ou une variété de Calabi-Yau (le second cas étant probablement beaucoup plus difficile que le premier).

1.3 Courbes orbifoldes, morphismes d'orbifoldes

On va considérer ici une orbifolde (C/Δ), dans laquelle C est une courbe projective lisse et connexe de genre $g(C)$, et $\Delta := \sum_{k=1}^{k=N}(1 - 1/m_k).p_k$, où les p_k sont des points (donc des diviseurs irréductibles) de C.

[1] Si Y est de dimension 2 ou plus (cas non utilisé ici), la définition est plus compliquée. Voir [Ca01].

On notera parfois, lorsque la connaissance des points p_k est superflue, $(C/(m_1, ..., m_N))$ une telle orbifolde, les m_k étant ordonnés de telle sorte que $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq ... \leq m_N$.

Par exemple, $(\mathbb{P}^1/(2,3,7))$ désigne une orbifolde $(\mathbb{P}^1/\Delta)$, avec $\Delta = (1/2).p_1 + (2/3).p_2 + (6/7).p_3$, où les $p_j \in \mathbb{P}^1, j = 1, 2, 3$ sont distincts.

Si (C/Δ) et (C'/Δ') sont des orbifoldes dont les supports sont des courbes, un *morphisme d'orbifoldes* $g : (C/\Delta) \to (C'\Delta')$ est la donnée d'une application holomorphe surjective $g : C \to C'$ telle que $g^*(K_{C'/\Delta'}) \subset K_{C/\Delta}$. On dit que g est *étale* si l'on a l'égalité $g^*(K_{C'/\Delta'}) = K_{C/\Delta}$. Alors $\kappa(C/\Delta) \geq \kappa(C'\Delta')$, avec égalité si g est étale.

Donc $g : (C/\Delta) \to (C'/\Delta')$ est un morphisme d'orbifoldes si et seulement si, pour tout $x \in C$, on a: $r(g,x).\Delta(x) \geq \Delta(g(x))$, où $r(g,x)$ est l'indice de ramification de g en x, $\Delta(x)$ est la multiplicité de Δ en x, égale à 1 si x n'est pas l'un des p_k, et égale à m_k si $x = p_k$. On définit $\Delta'(x')$ de manière similaire si $x' \in C'$. Et g est étale exactement lorsque toutes ces inégalités sont des égalités.

Exemple 1.5

1. Soit $g : C := E \to \mathbb{P}^1 := C'$ un revêtement double ramifié en 4 points $a_k \in \mathbb{P}^1, k = 1, 2, 3, 4$, avec E une courbe elliptique. Soit Δ le diviseur vide sur E et $\Delta' := \sum_{k=1}^{k=4}(1/2).a_k$. Alors $g : (E/\emptyset) \to (\mathbb{P}^1/\Delta')$ est un morphisme d'orbifoldes étale de degré 2, ainsi que $g : (E/((1/2).\bar{a}_1)) \to (\mathbb{P}^1/\Delta")$, si $\bar{a}_1$ est l'unique point de E dont l'image par g est a_1, et si $\Delta" := (3/4).a_1 + \sum_{k=2}^{k=4}(1/2).a_k$.

2. Plus généralement, si $(C' := \mathbb{P}^1/\Delta')$ est une orbifolde telle que $N \geq 3$ dans la notation précédente, il existe un morphisme d'orbifolde étale $g : C \to (\mathbb{P}^1/\Delta')$. (On note C une orbifolde supportée par une courbe et de diviseur vide). Voir, par exemple, [N87, p. 26] pour cette assertion. Donc: $\kappa(\mathbb{P}^1/\Delta) = 1$ (resp. 0) si et seulement s'il existe un morphisme étale $g : C \to (\mathbb{P}^1/\Delta)$, avec $g(C) \geq 2$ (resp. $g(C) = 1$).

Remarque 1.6 S'il existe un morphisme d'orbifolde $g : (C/\Delta) \to (C'/\Delta')$, on note: $(C/\Delta) \geq (C'\Delta')$. On vérifie que $\kappa(\mathbb{P}^1/\Delta) = 0$ exactement dans les cas suivants: $N = 3$ et $\Delta = (3,3,3)$, $\Delta = (2,3,6)$ ou $\Delta = (2,4,4)$; ou bien $N = 4$ et $\Delta = (2,2,2,2)$. De plus: $\kappa(\mathbb{P}^1/\Delta) = -\infty$ si et seulement si l'on est dans l'un des cas suivants: $N \leq 2$, $N = 3$ et Δ est l'une des suivantes: $(2,2,m)$, $(2,3,m')$, avec m arbitraire, $m' \leq 5$.

On en déduit que $\kappa(\mathbb{P}^1/\Delta) = 1$ si et seulement si $(\mathbb{P}^1/\Delta) \geq (\mathbb{P}^1/\Delta')$, où Δ' est l'une des cinq suivantes: $(2,3,7), (2,4,5), (3,3,4), (2,2,2,3), (2,2,2,2,2)$.

1.4 Fibrations de type général sur une surface projective

On considère dans cette section une fibration $f : X \to C$ dans laquelle X est une *surface* (projective complexe). On note F une fibre lisse de f, $g(F)$ son genre, et $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$ la dimension canonique (ou de Kodaira) de X.

Proposition 1.7 *Si f est de type général, alors:*

1. $\kappa(X) \neq 0$*. De plus:*

2. Si $\kappa(X) = -\infty$*, alors:* $g(F) = 0$ *et* $g(C) = q(X) \geq 2$*. De plus,* f *est à la fois le quotient rationnel, le morphisme d'Albanese, et le coeur de* X *(voir [Ca01] pour ce terme).*

3. Si $\kappa(X) = 1$*, alors* $g(F) = 1$*, et* f *est à la fois la fibration d'Iitaka-Moishezon et le coeur de* X*. De plus,* f *est de type général au sens classique, donc il existe un revêtement étale fini* $u : X' \to X$ *tel que* $g(C') \geq 2$ *si* $f' : X' \to C'$ *est la partie connexe de la factorisation de Stein de* $v \circ f' = f \circ u : X' \to C$*, et* $v : C' \to C$ *sa partie finie.*

4. $\kappa(X) = 2$ *si et seulement si* $g(F) \geq 2$*.*

Démonstration de 2.1: Puisque f est une fibration de type général, le théorème d'additivité orbifolde (voir [Ca01], §4) affirme que $\kappa(X) = \kappa(F) + dim_{\mathbb{C}}(C) = \kappa(F) + 1$. Ceci montre donc que $\kappa(F) = -\infty$ si $\kappa(X) = -\infty$, que $\kappa(X) \neq 0$, et que $\kappa(F) = \kappa(X) - 1$ si $\kappa(X) = 1, 2$. Si $\kappa(X) \neq 0, 2$, on voit donc que f est à la fois à fibres *spéciales* (voir [Ca01]) et de type général (comme fibration). C'est donc le *coeur* de X (voir [Ca01] pour la description explicite du coeur dans le cas des surfaces). Cette description donne les autres assertions de l'énoncé.

Remarque 1.8 Le résultat précédent est un cas très particulier de résultats valables en dimension supérieure. Voir [Ca01].

Remarque 1.9 Le fait d'être de type général au sens classique s'interprète géométriquement très simplement (voir [Ca01]): f est de type général au sens classique si et seulement si, après changement de base fini adéquat (ramifié en général) $v : C' \to C$ et normalisation, le morphisme $f' : X' \to C'$ déduit de f n'a pas de fibre multiple au sens classique, et si C' est une courbe de type général. Donc si $f : X \to C$ est une fibration de type général, le groupe fondamental de X admet un sous-groupe d'indice fini dont un quotient est le groupe fondamental d'une courbe de genre 2 ou plus. (La réciproque est d'ailleurs vraie aussi, par un théorème de Siu ([Siu80])).

Nous verrons par contre l'existence de fibrations de type général $f : X \to C$ avec X simplement connexe, et donc $C \cong \mathbb{P}^1$. Une telle f n'est donc pas de type général au sens classique.

Remarque 1.10 Si $f : X \to C$ est une fibration de type général *au sens classique* avec X une surface, les conjectures arithmétiques et hyperboliques de Lang peuvent être réduites aux énoncés analogues pour les courbes, et donc résolues, à l'aide de résultats bien connus.

Expliquons le principe de cette réduction dans le cas arithmétique (les autres cas sont similaires). Elle se fait en les quatre étapes ci-dessous, supposant $u : X' \to X$ étale et définie sur le corps de nombres k, ainsi que $f' : X' \to Y'$, où Y' est une courbe de type général.

0. Par le théorème de Chevalley-Weil, il existe une extension finie de corps k'/k telle que $u(X'(k')) \supset X(k)$. Il suffit donc d'établir le résultat pour X'.

1. $f'(X'(k')) \subset Y'(k')$.

2. $Y'(k')$ est fini (conjecture de Mordell, établie dans [F83]). C'est l'étape cruciale.

3. Si $V' \subset Y'$ est l'ouvert au-dessus duquel f' est lisse, et si $U' := (f')^{-1}(V')$, alors les fibres de $f' : X'(k') \cap U' \to Y'(k') \cap V'$ sont finies, par Mordell encore. Ceci complète la démonstration.

Par contre, lorsque $f : X \to C$ est de type général au sens non classique ci-dessus, des arguments nouveaux sont nécessaires, dûs au fait que l'étape 0. ci-dessus ne peut plus être appliquée. On va établir dans cette situation les versions hyperboliques et corps de fonctions. La version arithmétique conduit à une version orbifolde de la conjecture de Mordell (voir 4.5) pour laquelle les démonstrations connues ne semblent pas s'adapter, car basées de manière essentielle sur l'étude du plongement Jacobien.

2 Version hyperbolique

2.1 Pseudométrique de Kobayashi

On considère dans cette section aussi une fibration $f : X \to C$ dans laquelle X est une *surface projective complexe*. On note encore F une fibre lisse de f, et $\kappa(X) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$ la dimension canonique (dite de Kodaira) de X. On note $d_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ la pseudométrique de Kobayashi (voir [K71]). Si $f : X \to C$ est une application, et δ_C une pseudométrique sur C, on note $f^*(\delta_C)$ la pseudométrique sur X définie par: $f^*(\delta_C) := (\delta_C) \circ (f \times f) : X \times X \to \mathbb{R}^+$. Si d, d' sont deux pseudométriques sur X, on définit l'inégalité $d' \geq d$ de la manière évidente. Une pseudométrique d est une métrique si $d(x, y) > 0$ lorsque $x \neq y$. En général, d_X n'est pas une métrique; par exemple $d_{\mathbb{C}} \equiv 0$.

Rappelons que d_X est la plus grande des pseudométriques sur X telle que $h^*(d_X) \leq d_D$, si d_D est la métrique de Poincaré sur le disque unité D de $\mathbb{C}$, et $h : D \to X$ une application holomorphe arbitraire. (Le lemme d'Ahlfors-Schwartz montre que les deux sens de la notation d_D coincident). Il est évident que si $g : Y \to X$ est une application holomorphe arbitraire, on a: $d_Y \geq g^*(d_X)$. (Propriété de décroissance de la pseudométrique de Kobayashi par applications holomorphes).

Remarque 2.1 Si $f : X \to C$ est de type général au sens classique, après revêtement étale fini adéquat $u : X' \to X$, la *partie connexe* $f' : X' \to C'$ de la factorisation de Stein de $f \circ u$ a pour image C', une courbe de type général. On en déduit aisément que: $d_X \geq f^*(\delta_C)$, pour δ_C une métrique adéquate sur C qui définit la topologie *analytique* de C. En particulier, si X (et donc la fibre générique F de f) est de type général, alors d_X est une métrique sur l'ouvert de Zariski U de X qui est la réunion des fibres lisses de f. (Les arguments sont des conséquences immédiates du théorème de Liouville et du fait (dû à Poincaré) que les courbes de genre 2 ou plus sont uniformisées par le disque unité).

2.2 Pseudométrique de Kobayashi orbifolde

Nous allons, suivant [Ca01], étendre la notion de pseudométrique de Kobayashi au cadre orbifolde:

Definition 2.2 *Soit (C/Δ) une orbifolde, où C est une courbe projective complexe, et $\Delta := \sum_{j\in J}(1 - 1/m_j).p_j$ un $\mathbb{Q}$-diviseur, les p_j étant des points distincts de C et J un ensemble fini. On définit $d_{(C/\Delta)}$ comme étant la plus grande des pseudométriques δ sur C telles que $h^*(\delta) \leq d_D$, ceci pour toutes les $h : D \to C$, applications holomorphes compatibles avec le diviseur orbifolde Δ, c'est-à-dire telles que $h^*(p_j) \geq m_j.h^{-1}(p_j)$, pour tout $j \in J$. (Autrement dit: $h(z)$ ramifie au moins à l'ordre m_j en tout $z \in D$ tel que $h(z) = p_j$).*

Remarque 2.3 Si $\Delta = \emptyset$, on a donc: $d_{(C/\emptyset)} = d_C$. De plus, si $g : C' \to (C/\Delta)$ est une application holomorphe de la courbe C' vers C compatible avec Δ, alors $d_{C'} \geq g^*(d_{(C/\Delta)})$, puisque toute application $h : D \to C'$ fournit par composition avec f une application $f \circ h : D \to C$ compatible avec le diviseur orbifolde Δ. Le même argument fournit, plus généralement le résultat suivant (que l'on pourrait d'ailleurs aussi formuler lorsque X aussi est munie d'un diviseur orbifolde):

Proposition 2.4

1. Soit $f : X \to C$ une fibration sur une courbe. Alors: $d_X \geq f^*(d_{(C/\Delta(f))})$.

2. Soit $g : (C/\Delta) \to (C'/\Delta')$ un morphisme d'orbifoldes supportées par des courbes C et C'. Alors $d_{(C/\Delta)} \geq g^*(d_{(C'/\Delta')})$. En particulier, $d_{(C/\Delta)}$ est une métrique sur C si $d_{(C'/\Delta')}$ est une métrique sur C'.

On établit dans [C-W04] le résultat suivant, comme conséquence d'une version orbifolde du théorème de Brody:

Proposition 2.5 *Soit (C/Δ) une courbe projective complexe connexe munie d'une structure d'orbifolde Δ. Alors $d_{(C/\Delta)}$ est une métrique sur C si et seulement si (C/Δ) est de type général. Sinon, $d_{(C/\Delta)}$ est nulle.*

Remarque 2.6 La définition donnée de la pseudométrique de Kobayashi orbifolde, où l'ordre de ramification de h en z tel que $h(z) = p_j$ est seulement supposé être au moins égal à m_j (mais n'est pas supposé être un multiple de m_j, ce qui est la version *classique*) interdit de démontrer le résultat précédent en choisissant un revêtement ramifié $g : C' \to C$ de C ramifiant à l'ordre m_j en chaque point $p' \in C'$ tel que $g(p') = p_j$, et en relevant à C' les applications holomorphes $h : D \to C$ compatibles avec Δ.

Utilisant les notations introduites dans 1.3 on voit donc que les orbifoldes de type $(2,2,2,2)$, $(3,3,3)$, $(2,3,6)$ sur $\mathbb{P}^1$ ont une pseudométrique de Kobayashi nulle. (Remarquons qu'elles ont d'ailleurs des revêtements cycliques de degrés respectifs $2,3,6$, étales au sens orbifolde qui sont des courbes elliptiques, définies (dans l'espace total des fibrés $\mathcal{O}(4)$,$\mathcal{O}(3)$ et $\mathcal{O}(6)$) par les équations $z^2 = x(x-1)(x-\lambda)$, $z^3 = x(x-1)$, et $z^6 = x^3.(x-1)^2$, z (resp. x) étant la coordonnée de la fibre (resp. de la base du fibré).

2.3 Non dégénérescence de la pseudométrique de Kobayashi

Proposition 2.7 *Soit $f : X \to C$ une fibration de type général de la surface X sur la courbe C.*

1. Si $\kappa(X) = -\infty$, $d_X = f^*(d_C)$.

2. Si $\kappa(X) = 1$, alors $d_X = f^*(\delta_C)$, où δ_C est une pseudométrique sur C telle que $\delta_C \geq f^*(d_{(C/\Delta(f))})$, $d_{(C/\Delta(f))}$ étant la pseudométrique de l'orbifolde $(C/\Delta(f))$, définie ci-dessus, et qui est une métrique dans ce cas.

3. Si $\kappa(X) = 2$, alors d_X est une métrique sur l'ouvert de Zariski U de X constitué de la réunion des fibres lisses de f.

Démonstration: La démonstration de la première assertion peut être faite sans recourir à 2.5 ci-dessus: si $\kappa(X) = -\infty$, alors X est birationnelle à $\mathbb{P}_1 \times C$, d'où la conclusion, puisque la pseudométrique est un invariant birationnel. (On peut aussi se dispenser de 2.5 pour la seconde assertion, en considérant des changements de base fini adéquats).

Démontrons l'assertion 2. Puisque d_X est nulle sur la fibre générale (elliptique) de f, elle est nulle sur toute fibre de f, puisque continue pour la topologie *analytique*. Il existe donc une unique pseudométrique δ_C telle que $d_X = f^*(\delta_C)$. L'inégalité $d_X \geq f^*(d_{(C/\Delta(f))})$ résulte de 2.4, et montre que $\delta_C \geq d_{(C/\Delta(f))}$. D'après 2.5, $d_{(C/\Delta(f))})$ est une métrique sur C. D'où les assertions.

Démontrons l'assertion 3. On a, par 2.4 et 2.5: $d_X \geq f^*(d_{(C/\Delta(f))})$, et $\delta_C := d_{(C/\Delta(f))})$ est une métrique sur C. Soit a un point de U. Si $b \in X$ est tel que $d_X(a,b) < 2.\epsilon$, où $\epsilon > 0$ est donné, il existe une *D-chaine* de X de longueur inférieure à ϵ joignant a et b. C'est-à-dire qu' il existe une suite d'applications holomorphes

$h_i : D \to X$ et de points $a_i, i = 0, 1, ..., n+1$ tels que $a_0 = a, a_{n+1} = b$ et de $z_i \in D$ tels que $h_i(0) = a_i$, $h_i(z_i) = a_{i+1}$ et $\sum_{i=0}^{i=n} |z_i| < \epsilon$. Puisque $d_X \geq f^*(\delta_C)$, tous les a_i sont dans la boule ouverte B_ϵ dans C, de centre $c := f(a)$ et de rayon ϵ pour la distance δ_C. Comme δ_C définit sur C la topologie analytique, B_ϵ est contenue dans un disque analytique B centré en c, et tel que $V := f^{-1}(B) \subset U$, si ϵ est assez petit. Mais alors $d_{X|V} = d_V$ est une métrique, par [K98,3.11.2], puisque $F := f^{-1}(c)$ est hyperbolique.

On démontrer l'assertion 3 précédente sans recourir à 2.5, en remplaçant 2.5 par le lemme suivant:

Lemme 2.8 *Soit $f : X \to C$ une fibration de type général sur une courbe C (la variété X est de dimension arbitraire).*

1. $f \circ h : \mathbb{C} \to C$ est constante, pour toute application holomorphe $h : \mathbb{C} \to X$.

2. Soit δ_C la pseudométrique sur C telle que $\delta_C(a', b') = inf\{d_X(a, b) | f(a) = a', f(b) = b'\}, \forall a', b' \in C$. Alors δ_C est une métrique sur C si X est de type général.

Démonstration: La première assertion est le cas particulier $p = 1$ du théorème 8.1 de [Ca01], qui affirme (entre autres) que si $g : X \to Y$ est une fibration de type général avec $dim(Y) = p > 0$, alors $g \circ h : \mathbb{C}^p \to Y$ est dégénérée, pour toute application méromorphe $h : \mathbb{C}^p \to X$.

Pour établir l'assertion 2, on utilise [Ko98, thm 3.5.31,p. 94] qui affirme que $d_X(a, b) = inf_c\{\int_c F_X(c')\}$, si $c : [0, 1] \to X$ est un chemin de classe C^1 par morceaux joignant a et b et de dérivée c', et où $F_X : TX \to [0, +\infty[$ est la pseudométrique de Kobayashi infinitésimale sur le fibré tangent TX de X.

Supposons qu'il existe $a, b \in X$ tels que $d_X(a, b) = 0$ et $f(a) \neq f(b)$. On peut supposer que a et b sont dans l'ouvert U. On va montrer qu'il existe un vecteur tangent $t \in TX$ tel que $f_*(t) \neq 0$, et tel que $F_X(t) = 0$.

En effet, sinon $F_X(t) \geq A.|f_*(t)|$, pour une constante $A > 0$, si $|.|$ est une métrique hermitienne continue sur TC, et si le point base m de $t \in T_mX$ est dans un ouvert connexe $U' := f^{-1}(V')$ de X contenant a et b et relativement compact dans U . Ceci résulte de la continuité de F_X, établie dans [Wr77] pour les variétés de type général.

On en déduit donc que $d_X(a, b) \geq A. \int_{c \cap V} |f_*(c')| \geq A.dist_V(a', b') > 0$, avec: $a' := f(a), b' := f(b)$, pour tout chemin c, si $dist$ est la distance sur C déduite de $|t'|$ sur TC, et si $dist_V(a, b)$ est la somme des distances (au sens de $dist$) de a' à $C - V'$ et de b' à $C - V'$. On en déduit donc une contradiction: il existe bien $t \in TU$ avec les propriétés annoncées.

Le lemme de reparamétrisation de Brody montre alors qu'il existe une application holomorphe $h : \mathbb{C} \to X$ telle que $h'(0) = t$. Ceci contredit l'assertion 1. Donc un tel couple (a, b) n'existe pas, et δ_C est bien une métrique sur C.

Question 2.9 *A-t'on: $\delta_C = d_{(C/\Delta(f))}$ dans l'assertion 2 de la proposition précédente? Peut-on donner une description explicite des métriques de Kobayashi sur les orbifoldes de type (m_1, m_2, m_3) sur $\mathbb{P}^1$? Par exemple, ces métriques coincident-elles avec les images de celles de leurs revêtements orbifoldes étales, qui sont des courbes de genre 2 ou plus sans structure orbifolde?*

Remarque 2.10 On peut, plus généralement, suivant [Ca01], définir la pseudométrique de Kobayashi d'une orbifolde (X/Δ) de dimension arbitraire (où $\Delta := \sum_{j\in J}(1 - 1/m_j).D_j$ est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X , les D_j étant des diviseurs irréductibles réduits de X et J un ensemble fini. On définit $d_{(X/\Delta)}$ comme étant la plus grande des pseudométriques δ sur X telles que $h^*(\delta) \leq d_D$, ceci pour toutes les $h : D \to X$, applications holomorphes *compatibles avec le diviseur orbifolde* Δ, c'est-à-dire telles que $h^*(D_j) \geq m_j.h^{-1}(D_j)$, pour tout $j \in J$. (Autrement dit: $h(z)$ ramifie au moins à l'ordre m_j en tout $z \in D$ tel que $h(z) \in D_j^0$, si D_j^0 est l'ouvert de D_j constitué des points n'appartenant pas à l'une des autres composantes de Δ).

Les propriétés énoncées ci-dessus lorsque X est une courbe restent valables en dimension supérieure, par les mêmes arguments.

3 Version Corps de Fonctions

On traduit en termes géométriques les notions de géométrie algébrique usuelles lorsque le corps de base est le corps k_B des fonctions méromorphes sur une courbe projective complexe lisse et connexe B. On trouvera dans [Ca01] d'autres remarques sur cette situation. Voir [Cap04] pour un panorama des problèmes d'effectivité et d'uniformité.

3.1 Variétés définies sur un corps de fontions complexes

Soit B une courbe projective complexe lisse et connexe, k_B désignant son corps des fonctions méromorphes. On a donc correspondance bijective entre les extensions finies de k_B et les revêtements ramifiés $w : B' \to B$.

Une variété X_B de dimension n sur k_B est une variété projective complexe X de dimension $(n + 1)$ munie d'une fibration $g : X \to B$. (Le *modèle* (X, g) est en fait défini à équivalence birationnelle près, nous ne considérons ici que des propriétés birationnelles, et nous ferons donc des changements de modèle sans le préciser). Une fibration $f_B : X_B \to Y_B$ sera simplement une fibration $f : X \to Y$ telle que $h \circ f = g$, si $Y_B = (Y, h)$, avec $h : Y \to B$ la fibration définissant la k_B-variété Y_B.

Un point k_B-rationnel de X_B est une section $s : B \to X$ à g. On notera $X(k_B)$ l'ensemble de ces sections. La conjecture de Lang affirme que cet ensemble est fini si X_B est de type général (ie: si sa fibre générique $X_b := g^{-1}(b)$ l'est), et si X_B n'est pas isotriviale). Voir [Ca01] pour des références classiques et des observations sur cette question.

Ces notions sont compatibles avec les changements de base finis (ou extensions de corps de base finies) $w : B' \to B$. En particulier, on a une inclusion naturelle $X(k_B) \subset X(k_{B'})$ si $k_B \subset k_{B'}$, et une application naturelle $f_* : X(k_B) \to Y(k_B)$ si $f_B : X_B \to Y_B$ est une fibration de k_B-variétés.

Remarquons que si Y_B est une courbe sur k_B, et si Y'_B est une courbe birationnelle à Y_B (ie: on a une application birationnelle h au-dessus de B entre les surfaces Y et Y'), alors $Y(k_B) = Y'(k_B)$. En dimension supérieure, on a égalité pour les points k_B-rationnels extérieurs aux diviseurs exceptionnels de h.

3.2 Orbifoldes définies sur un corps de fonctions

Une orbifolde (X_B/Δ_B) sur k_B est donc la donnée d'une variété projective $g : X \to B$ sur k_B et d'un diviseur orbifolde $\Delta_B = \sum_{j\in J}(1 - 1/m_j).\Delta_j$ de X_B. Les Δ_j sont des diviseurs irréductibles distincts de X . Par intersection avec la fibre générique $X_b := g^*(b)$ de g, Δ_B induit une orbifolde (X_b/Δ_b) de X_b, ayant posé: $\Delta_b = \sum_{j\in J}(1-1/m_j).\Delta_{j,b}$, et $\Delta_{j,b} := \Delta_j \cap X_b$.

La dimension de Kodaira $\kappa(X_B/\Delta_B)$ n'est autre que $\kappa(X_b/\Delta_b)$, pour $b \in B$ général.

Exemple 3.1 *L'exemple crucial d'orbifolde sur k_B considéré ici est bien sûr la base orbifolde $Y/\Delta(f)$ d'une fibration $f : X \to Y$ entre B-variétés X_B et Y_B définies par des fibrations $g : X \to B$ et $h : Y \to B$. La condition pour que f soit définie sur k_B est que f soit au-dessus de B, c'est-à-dire que $g = f \circ h$.*

L'orbifolde $(Y_b/\Delta(f)_b)$ n'est alors autre que $(Y_b/\Delta(f_b))$, si $f_b : X_b \to Y_b$ est la restriction de f au-dessus du point générique $b \in B$.

A équivalence birationnelle près, les composantes Δ_j de Δ qui sont verticales, c'est-à-dire contenues dans une fibre de g, peuvent donc être omises. Un tel couple (X_B/Δ_B) est donc seulement l'un des *modèles* de cette clase d'équivalence.

3.3 Courbes orbifoldes

On va maintenant considérer le cas dans lequel X_B est une courbe sur k_B (et X est donc une surface). Dans ce cas, Δ_j est une multisection de g (omettant les éventuelles composantes verticales). Après changement de base fini $v : B' \to B$, on peut supposer (et on supposera dans toute la suite) que Δ_j est l'image d'une section $p_j : B \to X$ de g.

On définira l'ensemble $M_0 \subset B$ des *mauvaises places* de (X_B/Δ_B) comme étant l'ensemble fini des $b \in B$ tels que: ou bien X_b n'est pas lisse, ou bien X_b est lisse, mais la restriction de g à Δ_B n'est pas étale au-dessus de b. On choisira aussi arbitrairement un sous-ensemble fini $M \subset B$ qui contient M_0.

Exemple 3.2 *Soit $g : X \to B$ une courbe sur k_B dont la fibre générique est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. A équivalence birationnelle près, $X = \mathbb{P}^1 \times B$, et g est la seconde projection. On notera $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ la première projection.*

Soit $\Delta_B = \sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).\Delta_j$ un diviseur orbifolde sur X_B. On supposera que les Δ_j sont les images de sections $p_j : B \to X$ à g. À équivalence birationnelle près, on peut supposer (et on supposera) que les sections $\bar{p}_j := \pi \circ p_j : B \to \mathbb{P}^1$ sont constantes, et prennent les valeurs $0, 1$ et ∞ respectivement pour $j = 1, 2$ et 3. (On ne suppose pas que les sections p_j soient constantes si $j \geq 4$).

Dans cette situation, on dira que X_B/Δ_B est une orbifolde de type $(\mathbb{P}^1_B/(m_1, m_2, ..., m_N))$ si les m_j sont ordonnés de telle sorte que $2 \leq m_1 \leq ... \leq m_N$. L'ensemble des mauvaises places de $(\mathbb{P}^1_B/(m_1, ..., m_N))$ est donc constitué des points b en lesquels $p_j(b) = p_k(b)$ pour un $k \neq j$. Si $N \leq 3$, cet ensemble est vide.

Definition 3.3 *Soit X_B/Δ_B et X'/Δ'_B des orbifoldes supportées par des courbes X_B et X'_B sur k_B. Un morphisme d'orbifoldes $g : X_B/\Delta_B \to X'_B/\Delta'_B$ est une application méromorphe surjective $g : X_B \to X'_B$ au-dessus de k_B, qui induit un morphisme $g_b : X_b/\Delta_b \to X'_b/\Delta'_b$, pour $b \in B$ générique. Ce morphisme est étale si sa restriction au-dessus de b générique est étale.*

Exemple 3.4 *Soit $g : X \to B$ une k_B-courbe elliptique (ie: telle que les X_b lisses soient des courbes elliptiques), munie d'une section $s : B \to X$ prise pour élément neutre de la loi de groupe dans les fibres lisses de g. Il existe alors un morphisme étale (au sens orbifolde précédent) de degré deux, $u : X_B \to \mathbb{P}^1_B/(2,2,2,2)$ qui ramifie (géométriquement) exactement aux points de 2-torsion de X/B. Ici l'orbifolde X_B est l'orbifolde $(X_B/\emptyset)$. Ce même morphisme induit aussi un morphisme étale $u^+ : X_B/(1/2.s(B)) \to (\mathbb{P}^1_B/(2,2,2,4))$ lorsque X_B est munie du diviseur orbifolde $\Delta := (1/2).s(B)$.*

3.4 Points k_B-rationnels d'une courbe orbifolde

Soit X_B/Δ_B une orbifolde supportée par une courbe X_B définie sur k_B, et $M \subset B$ un ensemble fini contenant les mauvaises places de l'orbifolde X_B/Δ_B. On suppose que les composantes Δ_j de Δ_B sont les images de sections $p_j : B \to X$ à $g : X \to B$.

Definition 3.5 *Soit $(X/\Delta)(k_B, M) \subset X(k_B)$ l'ensemble des $s : B \to X$, sections de $g : X \to B$, telles que, pour tout $b \in B$, si $b \notin M$, et si $s(b) = p_j(b)$, alors s et p_j sont tangentes à l'ordre m_j* **au moins** *en b.*

Remarquons que deux modèles birationnels de (X_B/Δ_B) ont les mêmes points k_B-rationnels (au sens de la définition 3.5 précédente) si M est assez grand. Et aussi que si $u : (X_B/\Delta_B) \to (X'_B/\Delta'_B)$ est un morphisme d'orbifoldes sur k_B, alors $u((X_B/\Delta_B)(k_B, M)) \subset (X'_B/\Delta'_B)(k_B, M)$, pour tout M assez grand.

Cette définition a pour origine la:

Proposition 3.6 *Soit $f : Z_B \to X_B$ une fibration de la k_B-variété Z_B sur la k_B-courbe X_B. Soit $X_B/\Delta(f)$ la base orbifolde de f. Alors $f(Z(k_B)) \subset (X_B/\Delta(f))(k_B, M)$, pour tout $M \subset B$ assez grand.*

Démonstration: Par hypothèse, $f^*(\Delta_j) \geq m_j.f^{-1}(\Delta_j)$. Donc $(f \circ s)^*(\Delta_j) = s^*(f^*(\Delta_j)) \geq m_j(f \circ s)^{-1}(\Delta_j)$, ceci pour tout $j \in J$. (On note $A \geq B$ si le diviseur $A - B$ est effectif). D'où l'assertion si M contient toutes les mauvaises places de $\Delta(f)$ et les points de b au-dessus desquels f n'est pas partout définie.

Remarque 3.7 Si l'on avait considéré $(X_B/\Delta^*(f))$, on aurait obtenu la condition plus forte: $f \circ s$ et p_j sont tangentes en b à un ordre **divisible par** m_j.

3.5 Mordell orbifolde sur un corps de fonctions

Théorème 3.8 *Soit (X_B/Δ_B) une courbe orbifolde définie sur k_B. Si $\kappa(X_B/\Delta_B) = 1$, alors pour tout $M \subset B$, $(X/\Delta)(k_B, M)_{nc}$ est fini.*

On désigne, si $(X_B/\Delta_B) = (F \times B)/(\Delta \times F)$ est triviale, par $(X/\Delta)(k_B, M)_{nc}$ le sous-ensemble de $(X/\Delta)(k_B, M)$ constitué des sections s qui sont non-constantes, c'est-à-dire telles que $\bar{s} := \pi \circ s : B \to F$ ne soit pas constante, $\pi : X \to F$ étant la première projection. On peut vérifier que la finitude de $(X/\Delta)(k_B, M)_{nc}$ est indépendante des modèles birationnels et des trivialisations choisies.

Remarque 3.9 La démonstration donnée ici n'est pas effective lorsque X_b est rationnelle. Dans ce cas (où $X_b \cong \mathbb{P}^1$), on peut facilement (tout comme dans le cas classique où $g(X_b) \geq 2$) rendre effective la borne sur la hauteur. Mais la finitude du nombre de points de hauteur donnée n'est pas effective (voir la seconde étape de la démonstration).

Démonstration: Soit $g(X_b)$ le genre d'une fibre générique de $g : X \to B$. Si $g(X_b) \geq 2$, l'assertion résulte de 1.6 et de résultats classiques ([M63], [G65],[P68]). Si $g(X_b) = 1$, il suffit, d'après 1.6 de traiter le cas où $\Delta_B = (1/2).B'$, où B' est l'image d'une section $s : B \to X$. Dans ce cas, il existe un revêtement double étale au sens des orbifoldes $u : (X_B/((1/2).B') \to (\mathbb{P}^1_B/(2,2,2,4))$ (voir exemple 3.4). Par la remarque suivant 3.5, on en déduit la finitude de $(X_B/\Delta_B)(k_B, M)$ si l'on établit celle de $(\mathbb{P}^1_B/(2,2,2,3))(k_B, M)$, ce qui sera fait ci-dessous. Nous sommes donc ramenés à traiter le cas où $X_b \cong \mathbb{P}^1$.

Conventions 3.10 *Lorsque $X_b \cong \mathbb{P}^1$, il suffit, toujours d'après la remarque suivant 3.5 et 1.6, de traiter les cas suivants: $N = 3$, $N = 4$ et $\Delta_B = (2,2,2,3)$, et enfin: $N = 5$ et $\Delta_B = (2,2,2,2,2)$, si N est le nombre de points de Δ_b, pour $b \in B$ générique.*

On supposera donc dans la suite que $X_B = \mathbb{P}^1 \times B$, que $g : X \to B$ (resp. $\pi : X \to \mathbb{P}^1$) est la première (resp. la seconde) projection, que les composantes de Δ_B sont des sections $p_j : B \to X$ pour $j = 1, 2, ..., N$, et que les fonctions $\bar{p}_j := \pi \circ p_j : B \to \mathbb{P}^1$ pour $j = 1, 2, 3$ sont constantes et prennent respectivement les valeurs $0, 1$ et ∞. Pour $j = 1, 2, 3$, on notera alors Δ_0, Δ_1 et Δ_∞ respectivement les images des sections p_j.

Si $N=3$, on a donc: $\Delta_B=(1-1/m_0).\Delta_0+(1-1/m_1).\Delta_1+(1-1/m_\infty).\Delta_\infty$, *avec:* $1/m_0+1/m_1+1/m_\infty<1$.

Si $N=4$, on a donc: $\Delta_B=(1/2).(\Delta_1+\Delta_\infty+\Delta_p)+(2/3).\Delta_0$, *en notant* Δ_p *l'image de* p_4 *(la section non nécessairement constante).*

Si $N=5$, on a donc $\Delta_B=(1/2).(\Delta_0+\Delta_1+\Delta_\infty+\Delta_p+\Delta_q)$, *où* Δ_p *et* Δ_q *désignent les images des sections non nécessairement constantes* p_4 *et* p_5.

Le théorème 3.8 est démontré en deux étapes: la première (lemme 3.11 ci-dessous) est la majoration du degré de $\bar{s}:=\pi\circ s:B\to\mathbb{P}^1$, si $s:B\to X\in(X_B/\Delta_B)(k_B,M)$. La seconde (lemme 3.15 ci-dessous) est la démonstration du fait que les éléments de $(X/\Delta)(k_B,M)_{nc}$ forment, vues dans la variété de Chow de X, un ensemble discret.

Première étape: Majoration du degré.

Lemme 3.11 *Dans la situation décrite dans 3.10 ci-dessus, il existe un entier A tel que pour tout $s:B\to X\in(X/\Delta)(k_B,M)_{nc}$, le degré de l'application $\bar{s}:=\pi\circ s:B\to\mathbb{P}^1$ soit majoré par A.*

Remarque 3.12 L'entier A construit ci-dessous dépend a priori de B, Δ_B et du cardinal de M. Avec un peu plus de travail, on pourrait le faire dépendre de manière effective seulement de $g(B)$, du degré des applications p_j, $j=1,\dots,N$, et du cardinal de M seulement.

Démonstration: On va distinguer les trois cas:
a. $N=3$,
b. $N=4$ et Δ_B de type $(2,2,2,3)$,
c. $N=5$ et Δ_B de type $(2,2,2,2,2)$.

Le premier cas (a) est extêmement simple (mais c'est aussi un cas peu intéressant dans la version corps de fonctions. Ce cas est par contre central dans la version arithmétique, grâce au théorème de Bielyi): soit $y:=u/v$ la coordonnée linéaire globale sur $\mathbb{P}^1$, de coordonnées homogènes $[u:v]$. Soit dy la 1-forme différentielle méromorphe associée sur $\mathbb{P}^1$. On identifiera, pour simplifier les notations, dy et $\pi^*(dy)$, image réciproque sur $X:=\mathbb{P}^1\times B$ de dy par $\pi:X\to\mathbb{P}^1$.

Soit alors $s:B\to X\in(X/\Delta)(k_B,M)_{nc}$. Donc $\bar{s}:B\to\mathbb{P}^1$ est non-constante, et ramifie à l'ordre m_0 au moins en chaque point $b\notin M$ tel que $\bar{s}(b)=0$. On a une hypothèse similaire pour les points $b\notin M$ tels que $\bar{s}(b)=1$ ou ∞. Soit $d>0$ le degré de l'application $\bar{s}:B\to\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire le nombre de points d'une fibre générique.

Par la formule d'Hurwitz, $2g(B)-2=-2d+\sum_{b\in B}(r(b)-1)$, où $r(b)$ est l'ordre de ramification de $\bar{s}$ en $b\in B$. Donc $2g(B)-2\geq-2d+\sum_{b\in B'}(r(b)-1)$, où B' est l'ensemble (fini) des b tels que $\bar{s}(b)=0,1,\infty$. Donc $2g(B)-2\geq-2d+[\sum_{b\in B'}r(b)]-[\sum_{b\in B'}(1)]$. Comme $\sum_{b\in B'}r(b)=3d$, et que $\sum_{b\in B'}1\leq[\sum_{b\in M}1]+[\sum_{b\in B'}(r(b)/m_{\bar{s}(b)})]\leq|M|+d.(1/m_0+1/m_1+1/m_\infty)]$, on obtient: $2g(B)-2\geq-2d+3d-(1/m_0+1/m_1+1/m_\infty).d-|M|$, notant $|M|$ le cardinal de M.

Puisque $1 - (1/m_0 + 1/m_1 + 1/m_\infty) := \epsilon > 0$, on en déduit que: $d \leq (2g(B) - 2 + |M|)/\epsilon \leq 42.(2g(B) - 2 + |M|)$, car $\epsilon \geq 1/42$ pour toute orbifolde de type général de support $\mathbb{P}^1$. Ceci établit donc le lemme lorsque $N = 3$. Remarquons qu'en fait cet argument s'applique sans changement si N est arbitraire, pourvu que les composantes de Δ_B soient des graphes d'applications constantes de B dans $\mathbb{P}^1$.

Nous traitons maintenant le second cas (b) ci-dessus[2], en construisant une pluri-forme différentielle méromorphe $w := (\sum_{k=0}^{k=6} P_k(x,y)dy^{\otimes 6-k} \otimes dx^{\otimes k})/(y^4.(y-1)^3.(y-p(x))^3)$, où dx est l'image réciproque sur X par g d'une 1-forme différentielle méromorphe non-nulle sur B (holomorphe si $g(B) \geq 0$), et où les $P_k(x,y)$ sont des fonctions méromorphes sur X, égales pour $x \in B$ générique à des polynômes en y. On notera $p = p_j : B \to X$ l'une des sections dont l'image est une composante irréductible Δ_j du support de Δ.

On va construire w de telle sorte que pour toute section locale holomorphe $s : U \to X$ de g, définie sur un voisinage ouvert analytique U de $b \in B$, les propriétés suivantes soient satisfaites, si $b \notin M'$, M' un sous-ensemble fini adéquat de B (dépendant de w a priori):

C1. Si $s(b) = 1, \infty$, ou si $s(b) = p(b) := p_4(b)$, et si $s(U)$ est tangente à $\Delta_1, \Delta_\infty, \Delta_4$ respectivement, alors $s^*(w)$ est holomorphe en b.

C2. Si $s(b) = 0$, et si $s(U)$ a en $s(b)$ un contact d'ordre $r \geq 3$ avec Δ_0, alors $s^*(w)$ est holomorphe et s'annule en b à l'ordre $r/3$ au moins.

L'existence d'une telle forme w sera déduite du lemme suivant, qui fournit l'existence au voisinage d'une fibre $\mathbb{P}^1 \times \{b\}$ de g:

Lemme 3.13 *Soit $p : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $\mathbb{D}$ étant le disque unité dans $\mathbb{C}$. Il existe des polynômes non nuls $P_k(y), k = 0, 1, ..., 6$, tels que si $w := (\sum_{k=0}^{k=6} P_k(x,y)dy^{\otimes 6-k} \otimes dx^{\otimes k})/(y^4.(y-1)^3.(y-p(x))^3)$, où les $P_k(x,y)$ sont des fonctions méromorphes sur $Z := \mathbb{D} \times \mathbb{P}^1$ dépendant holomorphiquement de $x \in \mathbb{D}$, et qui sont des polynômes en y pour chaque x fixé, et tels que: $P_k(0,y) = P_k(y)$, alors la propriété suivante est satisfaite: $s^*(w)$ est holomorphe en $x = 0$ si $s : \mathbb{D} \to \mathbb{P}^1$ est holomorphe, dans chacun des 4 cas suivants:*

0. $s(x)$ est tangente en $x = 0$ à la section ∞.

1. $s(x)$ est tangente en $x = 0$ à la section constante de valeur 1.

2. $s(0) = p(0)$ et $s'(0) = p' := p'(0)$.

3. $s^{(h)}(0) = 0$ pour $h = 0, 1, 2$; dans ce cas $s^*(w)$ s'annule en $x = 0$. (On a noté $s^{(h)}$ la dérivée h-ième de s). Plus généralement: si s s'annule en $x = 0$ à l'ordre $r \geq 3$, alors $s^*(w)$ s'annule en $x = 0$ à l'ordre $(r-1)/2 \geq r/3$ au moins.

Démonstration: Il s'agit essentiellement d'un lemme d'algèbre linéaire. La condition 0. est satisfaite si $w(x, u(x)/x^t)$ est holomorphe en $x = 0$ pour $t \geq 2$ et u holomorphe avec $u(0) \neq 0$. Supposons $t = 2$. Soit d_k le degré du polynôme $P_k(y)$ (à déterminer). La condition est satisfaite pour $t = 2$ si, pour chaque

[2] En considérant implicitement $(\Omega^1_{(X/\Delta)})^{\otimes m}$, pour m adéquat. Voir [Ca01] pour cette notion.

k, on a: $x^{2(4+3+3)}/x^{2d_k+3(6-k)}$ est holomorphe. Cette condition est satisfaite si $d_k \leq 1+3k/2$. On obtient donc la condition 0 si $d_k \leq 1,2,4,5,7,8,10$ pour $k=0,1,2,3,4,5,6$ respectivement. L'espace vectoriel complexe engendré par les coefficients des polynômes P_k est donc de dimension $(1+2+4+5+7+8+10+7)=44$. On vérifie facilement que si ces conditions sont satisfaites pour $t=2$, elles le sont aussi pour $t \geq 3$.

La condition 1 est satisfaite si $w(x, 1+x^t.u(x))$ est holomorphe en 0 pour $t \geq 2$. Ici encore, la considération du cas $t=2$ suffit. Il suffit que pour tout k, $(P_k(x, 1+x^2.u(x)).x^{(6-k)})/x^6)$ soit holomorphe en 0. Ceci est vrai pourvu que les dérivées relatives à la variable y satisfassent à: $P_k^{(h)}(1)=0$ si $h<k/2$. Les dérivées (relatives à la variable y) de P_k en $y=1$ doivent donc s'annuler jusqu'à l'ordre a_k inclus, avec $a_k=0,0,1,1,2,2$ si $k=1,2,3,4,5,6$ respectivement. (Il n'y a pas de condition sur P_0).

La condition 2 est entièment similaire à la précédente, mais appliquée au point $y=p(0)$, et aux polynômes $Q_k(y)$ définis comme suit: on doit vérifier cette fois-ci que $w(x, p(x)+x^2.u(x))$ est holomorphe en 0.

Ecrivons: $w=(\sum_{k=0}^{k=6} Q_k(x,y)dz^{\otimes 6-k} \otimes dx^{\otimes k})/(y^4.(y-1)^3.(y-p(x))^3)$, où $dz = dy - p'(x)dx$. Puisque $dy = dz + p'(x)dx$, on obtient:

$Q_k = \sum_{m=0}^{m=k} \binom{6-k+m}{m} P_{k-m}.p'(x)^m$. Par l'argument utilisé pour la condition 1, on voit donc que la condition 2 est satisfaite si $Q_k^{(h)}(p)=0$ pour $h<k/2$, et pour tout $k=1,2,3,4,5,6$.

Le même argument que pour la condition 1 montre que la condition 3 est satisfaite si $P_k^{(h)}(0)=0$ pour $h \leq 2k/3 := b_k$. On a donc: $b_k = 0,0,1,2,2,3,4$ si $k = 0,1,2,3,4,5,6$ respectivement. On vérifie aussi que si s s'annule en $x=0$ à l'ordre $r \geq 3$, alors $s^*(w)$ s'annule en $x=0$ à l'ordre $(b_k-k+3)(r-1)+(b_k-3)$ au moins. Cette quantité est au moins égale à $(r-1)/2$ si $r \geq 3$, par vérification directe.

Les polynômes cherchés sont les solutions dans la somme directe W des espaces vectoriels de polynômes complexes de degrés d_k au plus pour $k=0,...,6$ d'équations linéaires homogènes. Or W est de dimension 44. Les conditions 1 et 2 nécessitent chacune la satisfaction de $\sum_{k=1}^{k=6}(a_k+1)=12$ conditions (linéaires homogènes). La condition 3 necessite la satisfaction de $\sum_{k=0}^{k=6}(b_k+1)=19$ conditions. L'espace vectoriel des solutions est donc de dimension au moins $44-(12+12+19)=1$. D'où le lemme.

La construction d'une pluri-forme méromorphe globale w satisfaisant (entre autres) les conditions **C1.** et **C2.** ci-dessus est maintenant immédiate: On considère sur $X=\mathbb{P}^1 \times B$ le faisceau:

$\mathcal{F} := \bigoplus_{k=0}^{k=6}[(dy^{(6-k)} \otimes (g^*(\Omega_B^1)^{\otimes k})/(y^4.(y-1)^3.(y-p)^3)] \otimes [\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_k)]$.

Le faisceau (sur B) $\mathcal{G} \subset g_*(\mathcal{F})$ egendré par les germes de sections dont les éléments satisfont en chaque point b de B aux conditions décrites précédemmment ($P_k^{(h)}(b,0)=0$ si $h \leq b_k$) pour la condition 3, par exemple; plus les conditions similaires pour $P_k^{(h)}(b,1)$ et $Q_k^{(h)}(b,p(b))$ est un sous-faisceau cohérent de $g_*(\mathcal{F})$ de rang au moins 1 par le lemme 3.13 précédent. Donc $\mathcal{G}$ admet des sections méromorphes globales $\bar{w}$ non nulles. Une telle section fournit une forme w satisfaisant les conditions voulues. Observons que, par cette construction, w possède aussi la propriété additionnelle **C3.** suivante (en considérant l'ordre maximum T des pôles d'une telle section $\bar{w}$ de $\mathcal{G}$):

C3. Si $s : B \to X$ est une section de g, alors $s^*(w)$ a, en b, point arbitraire de B, un pôle d'ordre au plus $(T+4)$ (on se ramène en multipliant w par $(x - x(b))^T$, si x est une coordonnée locale sur B, au cas où les coefficients des P_k sont holomorphes en b; alors c'est évident si $s(b) \neq \infty$; sinon $s(b) = \infty$, et ceci résulte du calcul fait ci-dessus pour la vérification de la condition 0, en prenant $s = 1$). De plus (par le même argument), si s s'annule en b à l'ordre $r \geq 3$, alors la valuation (ordre d'annulation, éventuellement négatif) de $s^*(w)$ en b est au moins égale à $(-T + (r-1)/2) \geq (-T + r/3)$.

Montrons maintenant comment l'existence d'une forme w satisfaisant les conditions ci-dessus entraine le lemme 3.11 dans le cas (b).

Soit $s : B \to X$ une section de g telle que pour tout $b \notin M$, si $s(b) \in \Delta_j$, alors $s(B)$ est tangente à Δ_j à l'ordre m_j au moins, avec $m_0 = 3$, et $m_j = 2$ si $j = 1, p, \infty$.

Donc $s^*(w)$ est holomorphe sur $B - M$, et a des pôles d'ordre au plus $T + 4$ en chaque point de M^+, si M^+ est la réunion de M et de l'ensemble (fini) des $b \in B$ où l'un des coefficients de l'un des P_k a un pôle. De plus, $s^*(w)$ s'annule à l'ordre au moins $(r-1)/2 \geq r/3$ en chacun des $b \in B$ en lesquels $s(b)$ s'annule à l'ordre $r \geq 3$.

Le degré de $s^*(w)$ est égal d'une part à $12.(g(B) - 1)$, d'autre part à $Z - P$, si Z est le nombre de ses zéros, et P celui de ses pôles, multiplicités comprises. On note M^+ la réunion (finie) de M et de l'ensemble des pôles de $\bar{w}$, son cardinal est noté m^+.

Or $Z \geq \sum_{b\in Q'}(r(b)/3) + \sum_{b\in Q''}(-T + (r(b)/3))$, par la propriété **C3.** ci-dessus, si Q' (resp. Q") désigne l'ensemble fini des $b \in B$ tels que $s(b) = 0$ et $b \notin M^+$ (resp. tels que $s(b) = 0$ et $b \in M^+$). Donc $Z \geq d/3 - m^+.T$.

Par ailleurs, $P \leq m^+.(T + 4)$, par la condition **C3.**

On en déduit que $12(g(B) - 1) \geq d/3 - m^+.(T + 4) - m^+.T$, c'est-à-dire:

$d \leq 36(g(B) - 1) + 3m^+.(2T + 4)$, et donc le lemme 3.11 dans le cas (b).

Nous traitons maintenant le cas (c) de la même façon. Cette fois-ci, on cherche une forme $w = (\sum_{k=0}^{k=4} P_k(x, y)dy^{\otimes 4-k} \otimes dx^{\otimes k})/(y^2.(y-1)^2.(y-p(x))^2.(y-q(x))^2)$, les diviseurs orbifoldes $\Delta_4 := \Delta_p$ et $\Delta_5 := \Delta_q$ étant les graphes d'applications notées respectivement $p, q : B \to \mathbb{P}^1$.

Les arguments sont tous exactement les mêmes que dans le cas précédent (et nous ne les répèterons donc pas), lorsque le lemme suivant est établi:

Lemme 3.14 *Soit $p, q : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes.*

Il existe des polynômes non nuls $P_k(y), k = 0, 1, ..., 4$, tels que si $w := (\sum_{k=0}^{k=4} P_k(x, y)dy^{\otimes 4-k} \otimes dx^{\otimes k})/(y^2.(y-1)^2.(y-p(x))^2.(y-q(x))^2)$, où les $P_k(x, y)$ sont des fonctions méromorphes sur $Z := \mathbb{D} \times \mathbb{P}^1$ dépendant holomorphiquement de $x \in \mathbb{D}$, et qui sont des polynômes en y pour chaque x fixé, et tels que: $P_k(0, y) = P_k(y)$, alors *la propriété suivante est satisfaite: $s^*(w)$ est holomorphe en $x=0$ si $s:\mathbb{D}\to\mathbb{P}^1$ est holomorphe, dans les quatre cas suivants:*

0. $s(x)$ est tangente en $x=0$ à la section ∞.

1. $s(x)$ est tangente en $x=0$ à la section constante de valeur 1.

2. $s(0)=p(0)$ et $s'(0)=p'(0):=p'$.

3. $s(0)=q(0)$ et $s'(0)=q'(0):=q'$

3. $s(0)=s'(0)=0$; dans ce cas $s^*(w)$ s'annule en $x=0$. Plus précisément: si s s'annule en $x=0$ à l'ordre $r\geq 2$, alors $s^*(w)$ s'annule en $x=0$ à l'ordre $r/2$ au moins.

Démonstration: Elle est identique à celle de 3.13 dans son principe, en plus simple.

La condition 0 se traduit par les conditions similaires: $d_k\leq 2+3k/2$. Donc $d_k\leq 2,3,5,6,8$ pour $k=0,1,2,3,4$. La condition 1 se traduit par l'annulation des $P_k^{(h)}(1)$ pour $h\leq a_k$, avec $a_k=[(k-1)/2]$. Donc: $a_k=-1,0,0,1,1$ si $k=0,1,2,3,4$.

Les conditions $2,3$ se traduisent par l'annulation des $Q_k^{(h)}(p)$ et des $R_k^{(h)}(q)$ si $h\leq a_k$, où Q_k et R_k sont les polynômes respectivement définis par:

$w=(\sum_{k=0}^{k=4}Q_k(x,y)dz^{\otimes 4-k}\otimes dx^{\otimes k})/(y^2.(y-1)^2.(y-p(x))^2.(y-q(x))^2)$ et:

$w=(\sum_{k=0}^{k=4}R_k(x,y)d\zeta^{\otimes 4-k}\otimes dx^{\otimes k})/(y^2.(y-1)^2.(y-p(x))^2.(y-q(x))^2)$, avec:

$dz:=dy-p'(x)dx$ et $d\zeta=dy-q'(x)dx$.

Enfin, la condition 4 se traduit par l'annulation de $P_k^{(h)}(0)$ pour les $h\leq b_k:=[k/2]$. On a donc: $b_k=0,0,1,1,2$ si $k=0,1,2,3,4$ respectivement.

On voit donc que cette fois-ci, l'espace vectoriel W est de dimension: $2+3+5+6+8+5=29$, tandis que le nombre de conditions (linéaires homogènes) est de $3.\sum_k(a_k+1)+\sum_k(b_k+1)=3.(0+1+1+2+2)+(1+1+2+2+3)=18+9=27$. L'espace vectoriel des solutions est donc de dimension au moins 2.

Ceci achève la démonstration du lemme 3.11.

Seconde étape: Caractère discret.

On aborde maintenant la seconde étape de la démonstration du théorème 3.8.

On peut identifier les éléments $s:B\to X$ de $(X/\Delta)(k_B,M)$ à leurs images (réduites), et donc à des points de $Chow(X)$, la variété de Chow de X. Dans cette identification, $(X/\Delta)(k_B,M)$ est une sous-variété algébrique fermée de $Chow(X)$, puisque les conditions qui la définissent sont algébriques (les ordres de contact aux points d'intersection non au-dessus de M sont au moins égaux aux m_j). Le degré des $\bar{s}$ étant borné, la finitude sera donc établie si l'on montre que les points de $(X/\Delta)(k_B,M)$, dans cette identification, sont isolés.

Il nous suffit, par les arguments usuels du début de la démonstration de 3.8, de démontrer cette propriété dans les cas où $X=\mathbb{P}^1\times B$, et où $\Delta=\sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).\Delta_j$, dans les trois cas suivants, où les Δ_j sont, pour $j=1,2,3$, les graphes d'applications constantes de B dans $\mathbb{P}^1$, de valeurs $0,1,\infty$ respectivement:

a. $N=3$,

b. $N=4$ et Δ_B de type $(2,2,2,3)$,

c. $N = 5$ et Δ_B de type $(2, 2, 2, 2, 2)$.

Lemme 3.15 *Dans les trois situations précédentes, les points de* $(X/\Delta)(k_B, M)_{nc}$ *sont isolés dans* $Chow(X)$ *si* $\kappa(X_B/\Delta_B) = 1$ *(cette condition est satisfaite dans les cas (b) et (c), elle l'est dans le cas (a) si et seulement si* $(1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3) < 1$*).*

Démonstration: Elle est basée de manière essentielle sur le lemme élémentaire suivant:

Lemme 3.16 *Soit* $p = p(z) : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $g = g(t) : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ *et* $h = h(t, z) : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *des fonctions holomorphes telles que:* $g(0) = 0$, $h(0, 0) \neq 0$. *On définit* $u(t, z) := p(z) + h(t, z).(z - g(t))^m$, *où* $m > 0$ *un entier. Soit* U *un voisinage assez petit de* 0 *dans* $\mathbb{D}$. *Alors: pour tout* t *assez proche de* 0, *l'équation:* $u(t, z) = u(0, z)$ *a, dans* U *au moins* $(m - 1)$ *solutions distinctes si la fonction* g *n'est pas constante (égale à zéro, donc), et a au moins* m *solutions (comptées avec multiplicités) si* $g(t) \equiv 0$*).*

Remarque 3.17 L'interprétation géométrique est la suivante: le graphe G_t de l'application $u_t(z) := u(t, z)$ a un contact d'ordre au moins m avec celui de $p(z)$ au point $x(t) := (g(t), p(g(t)))$. La conclusion est que G_t et G_0 ont un nombre d'intersection local (au-dessus de U) au moins égal à $(m - 1)$ si le point de contact $x(t)$ est mobile, et au moins m s'il est fixe.

Démonstration: On peut supposer que $h(t, z) \neq 0$ partout, quitte à restreindre les domaines de définition.

Si $g(t) \equiv 0$, l'équation à résoudre est: $h(t, z).z^m = h(0, z).z^m$. Le résultat est donc évident.

Si $g(t)$ n'est pas la fonction nulle, l'équation est: $h(t, z).(z - g(t))^m = h(0, z).z^m$. Soit $H(t, z)$ la racine m-ième holomorphe de la fonction $h(0, z)/h(t, z)$ qui tend vers 1 quand (t, z) tend vers $(0, 0)$, et ζ une racine m-ième arbitraire de 1. L'équation précédente est satisfaite si et seulement s'il existe ζ telle que $z - g(t) = \zeta.H(t, z).z$, c'est-à-dire si $z(1 - \zeta.H(t, z)) = g(t)$. L'équation a donc bien $(m - 1)$ solutions distinctes qui convergent vers 0 quand t tend vers 0.

On va maintenant, pour démontrer 3.15, procéder par l'absurde, supposant l'existence dans $(X/\Delta)(k_B, M)$ d'une composante irréductible T de dimension strictement positive, ou encore d'une famille algébrique $\bar{s}_t : B \to X$ de sections dont les graphes S_t sont tangents à l'ordre $m \geq m_j$ à Δ_j en chacun des points d'intersection non situés au-dessus de M. On choisit un point $0 \in T$ générique, de telle sorte que l'ordre des points de contact de S_0 avec chacun des Δ_j au-dessus de chacun des points $b \in B$ (y compris ceux de M) soit générique, c'est-à-dire minimum, et reste donc le même pour tous les $t \in T$ voisins de $0 \in T$.

Le lemme 3.16 peut être appliqué au voisinage de chacun des points $b \in B$ tels que $s(b) = p_j(b)$ pour l'un des $j = 1, ..., N$, en prenant $u_t = s_t$ et $p := p_j$. Il montre que le nombre d'intersection local de S_t et de S_0 près de $x(0) = (b, p_j(b))$ est au moins égal à $(m-1)$ (resp. m) si $x(t) \neq x(0)$ (resp. si $x(t) = x(0)$) au voisinage de $0 \in T$.

Soit Q l'ensemble des points de B tels que $s(b) = p_j(b)$ pour un $j = 1, ..., N$ au moins. Soit Q" (resp. Q') l'ensemble des points de Q qui sont (resp. qui ne sont pas) dans M (rappelons que M est l'ensemble des places exclues des conditions de tangence) .

Pour tout $b \in Q$, on note $t_j(b) \geq 0$ l'ordre de contact de S_0 avec Δ_j au-dessus de b. On notera qu'il y a un unique j tel que $t_j(b) > 0$ si $b \in Q'$, mais qu'il peut y avoir plusieurs tels j si $b \in Q$" (à moins que $N = 3$, auquel cas les Δ_j ne s'intersectent pas non-trivialement). On notera aussi $t(b)$ le plus grand des $t_j(b)$, pour $j = 1, ..., N$.

On déduit du lemme précédent 3.16, comptant les nombres d'intersection globaux:

$S_0.S_0 = S_t.S_0 \geq [\sum_{b \in Q'}(t(b)-1)] + [\sum_{b \in Q"} t(b)]$.

Par ailleurs, le nombre d'auto-intersection $S_0.S_0 = (B' + dF)^2 = 2d$, si F (resp. B') est la classe de cohomologie d'une fibre de $g : X \to B$ (resp. de l'image d'une section constante de g).

On en déduit que:

(*) $2d \geq [\sum_{b \in Q'}(t(b)-1)] + [\sum_{b \in Q"} t(b)]$.

On va déduire une contradiction de cette inégalité, dans chacun des trois cas a,b,c ci-dessus.

Dans le cas (a), l'argument est, à nouveau, très simple:

On a: $[\sum_{b \in Q'}(t(b)-1)] + [\sum_{b \in Q"} t(b)] = 3.d - |Q'|$, puisque $\sum_{b \in Q} t(b) = 3d$. Or $|Q'| \leq (1/m_0 + 1/m_1 + 1/m_\infty).d$.

Donc: l'inégalité (*) fournit: $2d \geq 3d - (1/m_0 + 1/m_1 + 1/m_\infty).d$.

Contradiction, puisque $d > 0$ et que $\kappa(X_B/\Delta_B) = 1$, par hypothèse, de sorte que $(1/m_0 + 1/m_1 + 1/m_\infty) < 1$.

Pour démontrer les cas b et c ci-dessus, nous aurons besoin d'un autre lemme.

Lemme 3.18 *Dans les cas b,c ci-dessus, et avec les notations précédentes, on a:*
$\sum_{b \in Q"} t(b) \geq [\sum_{b \in Q"} \sum_{j=1}^{j=N} (1-1/m_j).t_j(b)] - \sum_{j=1}^{j=N} \delta_j.(1-1/m_j)$,
où δ_j est le degré de l'application $p_j : B \to \mathbb{P}^1$.

Avant de démontrer ce lemme, montrons qu'il entraine 3.15, et achève donc la démonstration du théorème 3.8.

On a, par l'inégalité (*):

$2d \geq [\sum_{b \in Q'}(t(b)-1)] + [\sum_{b \in Q"} t(b)]$

$\geq [\sum_{b \in Q} \sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).t_j(b)] + [\sum_{b \in Q'} \sum_{j=1}^{j=N}(1/m_j).t_j(b)] - |Q'| - \sum_{j=1}^{j=N} \delta_j.(1-1/m_j)$.

Mais:

$[\sum_{b \in Q} \sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).t_j(b)]$

$= \sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).(S_0.\Delta_j)$
$= \sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).(d+\delta_j)$,
par le calcul cohomologique: $(S_0.\Delta_j) = (B'+d.F)(B'+\delta_j.F) = d+\delta_j$.

Donc:
$2d \geq [\sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j).(d+\delta_j)] + [\sum_{b\in Q'}(1/m_j).t(b)] - |Q'| - \sum_{j=1}^{j=N}\delta_j.(1-1/m_j)$.

On a la majoration évidente: $|Q'| \leq [\sum_{b\in Q'}\sum_{j=1}^{j=N}(1/m_j).t_j(b)]$, puisque, si $b \in Q'$, alors $t_j(b) = 0$ pour tous les j, sauf un seul, pour lequel on a: $t_j(b) \geq m_j$.

On en déduit donc que: $2d \geq [\sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j)].d$, et une contradiction, puisque $d > 0$ et que $[\sum_{j=1}^{j=N}(1-1/m_j)] > 2$, ce qui est l'hypothèse $\kappa(X_B/\Delta_B) = 1$.

Démonstration (du lemme 3.18): La démonstration est locale en chaque point $b \in Q$". Supposons que $N = 4$. Alors on a, au plus, deux j tels que $t_j(b) > 0$, et l'un deux est $j = 4$ (correspondant à la section non constante p, puisque les autres ne s'intersectent pas).

S'il y a un seul (ou aucun) j tel que $t_j(b) > 0$, on a: $t(b) \geq \sum_{j=1}^{j=4} t_j(b)$.

Soit $k \neq 4$ le second j tel que $t_j(b) > 0$, s'il y a deux des indices j tels que $t_j(b) > 0$. Rappelons que l'orbifolde est de type $(2,2,2,3)$, et que les sections p_j d'indices $j = 2,3,4$ ont des multiplicités m_j égales à 2, tandis que la section p_1 (constante de valeur 0) a une multiplicité $m_1 := 3$.

On a alors: $t(b) \geq [\sum_{j=1}^{j=4}(1-1/m_j).t_j(b)]$ si $k \neq 1$, et $t(b) \geq [\sum_{j=1}^{j=4}(1-1/m_j).t_j(b) - (1/2).\tau(b)]$, où $\tau(b)$ est l'ordre de contact en $(0,b)$ de Δ_1 et de Δ_4 si $k = 1$.

En effet: si $k \neq 1$, alors $(1-1/m_j) = 1/2$ pour $j = k, 4$, et l'inégalité $t(b) \geq \sum_{j=1}^{j=4}(1-1/m_j).t_j(b)$ résulte de ce que $t(b) = max\{t_j(b), j = 1,\ldots,4\}$, et de ce que $t_j(b) = 0$ si $j \neq k, 4$.

Si $k = 1$, l'inégalité $t(b) \geq [\sum_{j=1}^{j=4}(1-1/m_j).t_j(b) - (1/2).\tau(b)]$, résulte de ce que $t_j(b) = 0$ si $j \neq 1, 4$, et se réduit donc à: $t(b) \geq [(1/2)t_4(b) + (2/3)t_1(b) - (1/2).\tau(b)]$. Mais $\tau(b) \geq inf\{t_1(b), t_4(b)\}$ (puisque l'ordre de contact est une valuation). Si a, b sont deux nombres réels positifs de maximum m et de minimum s, on a toujours: $m + (1/2).s \geq a/2 + 2b/3$, et donc la conclusion.

On obtient alors le lemme lorsque $N = 4$ en faisant la somme des inégalités obtenues sur tous les $b \in Q$", et en remarquant que les contributions $\sum_{b\in Q"}(1/2).\tau(b)$ sont majorées par la moitié du nombre d'intersection de Δ_1 et de Δ_4, qui est égal à δ_4, et que $\delta_j = 0$ si $j \neq 4$.

La démonstration lorsque $N = 5$ est similaire.

Les multiplicités m_j attachées aux 5 composantes Δ_j sont toutes égales à 2.

Si donc $b \in Q$" est tel que au plus deux des indices j sont tels que $t_j(b) > 0$, on a l'inégalité: $t(b) \geq [\sum_{j=1}^{j=5}(1-1/m_j).t_j(b)]$, puisque $(1-1/m_j) = 1/2$ et que $t(b) \geq t_j(b)$ pour tout j.

Il existe au plus trois des indices j en lesquels $t_j(b) > 0$, puisque 4 des Δ_j ne s'intersectent pas. Et s'il y a trois tels indices, deux de ces indices sont $j = 4$ et $j = 5$, puisque les autres Δ_j ne s'intersectent pas. Soit k le troisième indice.

On va montrer que dans ce cas: $t(b) \geq (1/2)(t_k(b) + t_4(b) + t_5(b)) - (1/2).\tau(b)$, où $\tau(b)$ est l'ordre de contact en $p_k(b)$ de Δ_4 et de Δ_5. Ceci résulte immédiatement de ce que $t(b) \geq t_j(b), \forall j$, et de ce que $\tau(b) \geq inf\{t_4(b), t_5(b)\}$ (l'ordre de contact définissant une valuation).

Sommant les inégalités obtenues sur les $b \in Q$", on en déduit que:

$\sum_{b\in Q"} t(b) \geq [\sum_{b\in Q"} \sum_{j=1}^{j=5}(1-1/2).t_j(b)] - [(1/2).\sum_{b\in Q"} \tau(b)] \geq [\sum_{b\in Q"} \sum_{j=1}^{j=5}(1-1/2).t_j(b)] - (1/2).(\delta_4 + \delta_5)$, puisque $(\delta_4 + \delta_5)$ est le nombre d'intersection $(\Delta_4.\Delta_5)$, égal à la somme des $\tau(b)$ pour $b \in B$. Ceci achève la démonstration du lemme, et donc celle du théorème 3.8.

Remarque 3.19 Lorsque X_B est une courbe elliptique sur k_B, donc de genre 1 et munie d'un point k_B-rationnel (ie: une section $p : B \to X$ de la fibration elliptique $g : X \to B$), le résultat précédent implique donc la finitude de l'ensemble des sections $s : B \to X$ dont l'image est tangente à $p(B)$ en chacun de leurs points d'intersection (à l'exclusion eventuelle des points au-dessus de M, fixé). Il serait intéressant d'avoir un démonstration géométrique directe de ce fait, basée sur la finitude du rang (sur $\mathbb{Z}$) du groupe de Mordell-Weil de X_B. Une telle démonstration pourrait peut-être s'adapter au cas arithmétique.

Lorsque le rang du groupe de Mordell-Weil de X_B est 1, il est très facile de démontrer le résultat, car $s(B)$ rencontre $p(B)$ en un point $x = s(b) = p(b)$ non au-dessus de M, ces deux courbes sont tangentes au point d'intersection x. Mais $s(B)$ doit recouper *transversalement*, arbitrairement près de x, les multisections (étales au-dessus d'un voisinage U de b dans B) de N-torsion lorsque N est grand. Ce qui montre justement que $Ns(B)$ n'est pas tangente à $p(B)$ en leurs points d'intersection proches de x. Si $s(B)$ ne rencontre $p(B)$ qu'en des points situés au-dessus de M, $N.s(B)$ rencontrera transversalement $p(B)$ en des points non-situés au-dessus de M, pour N grand, par l'argument précédent. Donc l'ensemble des sections considérées est bien fini.

3.6 Finitude pour les surfaces de type général ayant une fibration de type général sur une courbe

Théorème 3.20 *Soient $g : X \to B$, $h : C \to B$ et $f : X \to C$ des fibrations telles que $g = h \circ f$, dans lesquelles X, C, B sont projectives complexes lisses et connexes de dimensions respectives* 3, 2, 1. *On suppose que:*

1. La fibre générique X_b de g est une surface de type général.

2. g n'est pas birationnellement isotriviale (ie: X_b n'est pas birationnelle à $X_{b'}$ si $b \neq b'$ sont génériques dans B).

3. Pour $b \in B$ générique, la restriction $f_b : X_b \to C_b$ de f au-dessus de b est une fibration de type général.

Alors il existe un sous-ensemble algébrique strict $D \subset X$ tel que l'ensemble des sections $s : B \to X$ de g dont l'image n'est pas contenue dans D soit fini.

Remarque 3.21 L'assertion est plus faible que la conjecture de Lang, puisque l'ouvert U dépend de la courbe base B (et n'est pas déduit par changement de base d'un ouvert fixe).

Démonstration: Dans le langage de 3.1, on a donc une surface de type général X_B sur k_B, et une fibration de type général $f_B : X_B \to C_B$ définie sur k_B. L'assertion est l'existence d'un sous-ensemble algébrique strict $D_B \subset X_B$ tel que l'ensemble $X(k_B)$ des points k_B-rationels de X_B qui ne sont pas contenus dans D_B est fini.

Or, d'après la proposition 3.6, $f(X(k_B)) \subset (C/\Delta(f))(k_B, M))$, si $M \subset B$ est assez grand fini. D'après le théorème 3.8, $(C/\Delta(f))(k_B, M))_{nc}$ est fini. Le théorème 3.20 est donc établi si $(C/\Delta(f))$ n'est pas un produit $(T \times B)/(\Delta \times B)$, où T est une courbe projective connexe, et Δ un diviseur orbifolde (constant) sur T.

On suppose donc désormais que $C = T \times B$, et on note $\pi : C \to T$ la projection sur le premier facteur (la seconde projection étant h). On notera $X_t \subset X$ la fibre de $\pi \circ f : X \to T$ au-dessus de $t \in T$. La restriction de g à X_t définit donc une fibration $g_t : X_t \to B$ dont les fibres sont celles de f au-dessus de $C_t := \{t\} \times B$, et sont donc de genre $g \geq 2$, puique par hypothèse X_b est de type général.

On identifie maintenant $X(k_B)$ au sous-ensemble de $Chow(X)$ paramétrant les courbes réduites et irréductibles Z de X telles que $X_b.Z = 1$. Donc $X(k_B)$ est un ouvert de Zariski de $Chow(X)$, réunion d'un ensemble fini ou dénombrable de composantes irréductibles V_n.

Nous noterons $X_n \subset X$ le *lieu* de V_n, adhérence de Zariski de la réunion X_n^* des $s(B)$, pour $s \in V_n$; de sorte que X_n est un sous-ensemble algébrique fermé irréductible de X, dont X_n^* contient un ouvert de Zariski dense.

Pour chacune des V_n, deux cas se produisent, simultanément pour tous les s de V_n: ou bien $\pi \circ f \circ s : B \to T$ n'est pas constante (ie: $f(s(B) \in (C/\Delta(f))(k_B, M)_{nc})$, ou bien $\pi \circ f \circ s : B \to T$ est constante.

Dans le premier cas, $\pi \circ f \circ s(B)$ est l'une des $(C/\Delta(f))(k_B, M)$, qui sont en nombre fini. Tous les X_n, pour tous les n possédant cette propriété sont donc contenus dans un diviseur D_{nc} de X.

On considère donc désormais uniquement les n pour lesquels le second cas se produit, et on note $X(k_B)_c$ l'ensemble des $s \in X(k_B)$ telles que $\pi \circ f \circ s : B \to T$ est constante.

Nous allons maintenant appliquer la version effective de la conjecture de Mordell sur les corps de fonctions établie dans [E-V90] (la première version effective est [P68]). Elle affirme que si $u : S \to B$ est une fibration non isotriviale d'une surface projective lisse *relativement minimale* S sur une courbe B de genre q, et si la fibre générique de u est une courbe de genre $g \geq 2$, alors toute section $s : B \to S$ de u satisfait: $s(B).K_{S/B} \leq 4.(g-1)^2.(q-1+\sigma)$, où σ est le nombre de fibres singulières de u, et $K_{S/B} := K_S - u^*(K_B)$ est le fibré canonique relatif.

Lorsque la fibration u est isotriviale, on a une borne élémentaire: $s(B).K_{S/B} \leq 2(q-1)$, pour toute section s de u. En effet, u est alors une submersion de fibre F.

Si s n'est pas isolée dans $S(k_B)$, on a: $s(B).K_{S/B} \leq 0$, par la formule d'adjonction. Si s est isolée, et si $S = F \times B$ est un produit au-dessus de B, $K_{S/B}$ est l'image réciproque de K_F, la borne ci-dessus est évidente. On se ramène à ce cas en faisant le changement de base étale $v : B' \to B$, où $B' := Aut_B(F \times B, S)$, le groupe relatif des automorphismes de S au-dessus de B, dont la fibre au-dessus de $b \in B$ est l'ensemble des isomorphismes de F avec S_b. Cette fibre est finie, de cardinal au plus $84(g(F) - 1)$, puisque $g(F) \geq 2$.

Soit $T^* \subset T$ l'ensemble (Zariski ouvert non vide) des $t \in T$ pour lesquels X_t est lisse. Remarquons que si σ_t est le nombre de fibres singulières de $g_t : X_t \to B$, la fonction σ_t est bornée sur T^*, puisqu'elle est égal au nombre d'intersection de $\{t\} \times B$ avec la courbe $\Sigma \subset C$ constituée des points au-dessus desquels la fibre de f n'est pas lisse. On notera σ ce nombre.

La fin de la démonstration utilise malheureusement des résultats dont la profondeur est sans commune mesure avec le reste du texte.

Nous allons maintenant supposer, quitte à faire un changement de base $B' \to B$ fini, que $q := g(B) \geq 2$. Appliquant la théorie des modèles minimaux au-dessus de T ([K-M92]), nous pouvons supposer (sans changer $X(k_B)$) que X est $\mathbb{Q}$-factorielle à singularités terminales et à fibré canonique relatif $K_{X/T}$ nef et *vaste*[3]. Il existe donc un entier $m > 0$ tel que $L := K_X + mg^*(K_B) + m.(\pi \circ f)^*(H)$ soit nef et vaste sur X, si H est ample sur T.

Il existe donc [Kaw84] un morphisme birationnel $\psi : X \to Y$ et un fibré ample L' sur Y tels que $L := K_X + m.(g^*K_B) + (\pi \circ f)^*(H) = \psi^*(L')$. Or, $L.Z \leq 4.(g-1)^2.(q-1+\sigma) + 2mq$, pour tout $s \in X(k_B)_c$ (remarquer que X_t reste lisse pour $t \in T$ générique, puisque X est à singularités terminales, donc isolées).

On en déduit que la famille $\psi_*(X(k_B))$ est bornée. Pour conclure, il suffit donc de montrer qu'aucun des X_n n'est égal à X entier.

Supposant, par l'absurde que c'est le cas, on obtient une surface projective irréductible $S \subset Chow(X)$ dont l'intersection avec $X(k_B)_c$ est Zariski dense dans S, et dont le lieu est X. Il existe donc une application rationnelle dominante $\varphi : S \times B \to X$ d'evaluation des sections, au-dessus de B. Ceci implique, par [Mae83], que g est birationnellement isotriviale, contrairement à notre hypothèse.

4 Version Arithmétique

On considère dans cette section une fibration $f : X \to C$ dans laquelle X (resp. C) est une surface (resp. une courbe) projective complexe lisse et connexe. On note encore F une fibre lisse de f. On suppose que X, C, f sont définies sur un corps de nombres k.

On a vu que si X et C sont de type général, alors $X(k') \cap U$ est un ensemble fini, si U est l'ouvert de Zariski de X réunion des fibres lisses de f. On voudrait étendre

[3]traduction de "big"

cet énoncé au cas où X est de type général, et où f est une fibration de type général (ie: $\kappa(C/\Delta(f)) = 1$), avec $g(C) \leq 1$.

Nous allons montrer que cet énoncé se ramène à une version orbifolde de la conjecture de Mordell. Cette réduction est exactement analogue à celle utilisée dans le cas des corps de fonctions.

4.1 Points rationnels orbifolde

Soit $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k, et (C/Δ) une orbifolde supportée par C et définie sur k, ce qui signifie que C et les points de C formant le support du diviseur Δ sont définis sur k[4]. On suppose choisi un modèle de (C/Δ) défini sur l'anneau $\mathcal{O}_{k,M}$ des M-entiers de k, si $M \subset B$ est un sous-ensemble fini contenant l'ensemble des points de mauvaise réduction de C/Δ, notant B l'ensemble des valuations de k. Pour chaque valuation finie $v \in B$, on note p_v l'idéal premier de cette valuation.

Soit $\Delta := \sum_{j=1}^{j=N}(1 - 1/m_j).p_j$, où les $p_j \in C$ sont dans $C(k)$.

Pour tout $x \in C(k)$, pour toute $v \in B$ finie, et pour tout j, on définit un nombre d'intersection arithmétique $(x.p_j)_v$ de x et p_j en v par: $(x.p_j)_v := max_{E_v}\{m \geq 0\}$, où m décrit l'ensemble E_v des entiers tels que x et p_j aient même image dans la réduction de C modulo p_v^m. (Voir [D97]).

Definition 4.1 *Soit $(C/\Delta)(k, M)$ l'ensemble des $x \in C(k)$ tels que pour tout $j = 1, ..., N$, et tout $v \in B$, finie, $v \notin M$, on ait: $(x.p_j)_v \geq m_j$ si $(x.p_j)_v \neq 0$.*

Remarque 4.2 Soit $g : (C/\Delta) \to (C'\Delta')$ un morphisme d'orbifoldes défini sur k. Si l'on a des modèles de $g, (C/\Delta)$, et $(C'\Delta')$ définis sur $\mathcal{O}_{k,M}$, il est immédiat de vérifier que $g((C/\Delta)(k, M)) \subset (C'/\Delta')(k, M)$ pour M assez grand.

L'origine de cette définition est la:

Proposition 4.3 *Soit $f : X \to C$ une fibration, définie sur k, d'une surface X sur une courbe C, toutes deux projectives et lisses. Soit $(C/\Delta(f))$ la base orbifolde de f, supposée définie sur k. Si l'on a des modèles de $f, S, C, \Delta(f)$ définis sur $\mathcal{O}_{k,M}$, M assez grand, alors $f(X(k)) \subset (C/\Delta(f))(k, M)$.*

Démonstration: Dans des modèles adéquats, $f : X \to C$ est définie par des polynômes homogènes à coefficients dans $\mathcal{O}_{k,M}$. Soit $s \in S(k)$, $v \in B$, $v \notin M$. Supposons que les coordonnées de $f(s)$ et de p_j sont égales modulo p_v. Par hypothèse $f^*(p_j) = \sum_k m_k.F_k$, où $m_k \geq m_j, \forall k$. On peut donc choisir une carte affine de C et une coordonnée z centrée en p_j telles que $z \circ f = (\Pi_k G_k^{m_k})/G_0$, dans un ouvert affine de X contenant s, les G_k étant des polynômes à coefficients dans $\mathcal{O}_{k,M}$, et G_0 un polynôme tel que $G_0(p_j)$ ne soit pas divisible par p_v. Modulo p_v, l'un au moins des polynômes G_k s'annule en s. D'où l'assertion.

[4]Une définition plus précise, suggérée par P. Eyssidieux, est la suivante: C est definie sur k, et pour tout n entier le diviseur de Cartier $\sum_{m_j=n} p_j$est défini sur k (ie: l'ensemble des p_j pour lesquels $m_j = n$ est invariant par le groupe de Galois de $\overline{k}/k$)

Remarque 4.4 Dans [D97], qui considère (implicitement) les multiplicités classiques, la notion de point entier de $(C/\Delta(f))$ est similaire, mais différente. C'est, en conformité avec le problème traité, dans la situation de 4.1: m_j divise $(x.p_j)_v$, et non: $(x.p_j)_v \geq m_j$, ceci pour tout $v \notin M$.

4.2 Conjecture de Mordell Orbifolde

C'est la suivante:

Conjecture 4.5 *Soit (C/Δ) l'une des 5 orbifoldes suivantes, définie sur un corps de nombres k. Alors $(C/\Delta)(k, M)$ est un ensemble fini, pour tout M.*

1. $\mathbb{P}^1/(2, 3, 7)$
2. $\mathbb{P}^1/(2, 4, 5)$
3. $\mathbb{P}^1/(3, 3, 4)$
4. $\mathbb{P}^1/(2, 2, 2, 3)$
5. $\mathbb{P}^1/(2, 2, 2, 2, 2)$

Remarque 4.6 On peut déduire de cette conjecture et de [F83] que pour toute orbifolde de courbe (C/Δ) définie sur un corps de nombres k, $(C/\Delta)(k, M)$ est fini, pour tout M si $\kappa(C/\Delta) = 1$. Ceci résulte immédiatemment de [F83] et de 4.2 si $g(C) \geq 2$. Si $g = 0$, c'est une conséquence de 4.5, et de 1.6. Si $g(C) = 1$, ceci résulte de 4.5, de 1.6, et de 1.5.

Donnons une conséquence immédiate de la conjecture précédente:

Corollaire 4.7 *Soit $f : S \to C$ une fibration de type général, définie sur un corps de nombres k, dans laquelle S et C sont projectives complexes lisses et connexes, S une surface de type général, et C une courbe. Si l'on admet la conjecture 4.5, alors $S(k) \cap U$ est fini, si U est la réunion des fibres lisses de S.*

En particulier, il existe, si 4.5 est vraie, des surfaces projectives complexes lisses et simplement connexes définies sur des corps de nombres et non potentiellement denses.

Démonstration: $f(S(k)) \subset (C/\Delta(f))(k, M)$ si M est assez grand, d'après 4.3. Comme $\kappa(C/\Delta(f)) = 1$, par hypothèse, $(C/\Delta(f))(k, M)$ est fini, par la conjecture 4.5. Par [F83], la restriction de f à $S(k) \cap U$ est finie. Donc $S(k) \cap U$ est finie. D'où la première assertion.

La seconde assertion est obtenue en appliquant la première aux surfaces construites dans 5. (On pourrait d'ailleurs en déduire aussi des exemples potentiellement denses simplement connexes lisses en toutes dimension (en prenant des produits, par exemple, puis des sections hyperplanes)).

Remarque 4.8 La conjecture 4.5 est, du moins lorsque $N = 3$, une conséquence immédiate de la conjecture *abc* (voir aussi [E97], par exemple). Cette observation m'a été communiquée par J.L. Colliot-Thélène (et P. Colmez). Vérifions ceci dans le cas particulier où $k = \mathbb{Q}$, $N = 3$ et $M = \emptyset$. Le cas d'un corps de nombres et d'un ensemble M arbitraires est entièrement similaire.

On peut supposer que $\Delta = (1 - 1/u).0 + (1 - 1/v).1 + (1 - 1/w).\infty$, où u, v, w sont des entiers au moins égaux à 2 et tels que $\epsilon := 1 - (1/u + 1/v + 1/w) > 0$. Les points de $(\mathbb{P}^1/\Delta)(\mathbb{Q})$ sont alors les points $x := a/c \in \mathbb{P}^1$ tels que $a, c \in \mathbb{Z}$ sont premiers entre eux et tels que: $rad(a)^u$ divise a, $rad(c)^w$ divise c et $rad(b)^v$ divise b, si $b := c - a$. On a noté $rad(a)$ le produit des nombres premiers qui divisent a.

La condition $rad(a)^u$ divise a signifie donc que chacun de ces nombres premiers apparait dans la décomposition de a en produit de facteurs premiers avec un exposant au moins égal à u. C'est le cas si, par exemple, a est au signe près une puissance u-ième d'entier, cas traité dans [D97], où les points considérés sont les points entiers de la surface affine $x^u + y^v = z^w$.

La conjecture *abc* affirme que $rad(abc) = rad(a).rad(b).rad(c) \geq C_t.M^t$, pour tout $0 < t < 1$, avec une constante $C_t > 0$, si $M := max\{|a|, |b|, |c|\}$, pour tous a, b, c tels que $a + b = c$. On a donc, si $x = a/c$ est comme ci-dessus: $M^{(1/u+1/v+1/w)} \geq |a|^{1/u}.|b|^{1/v}.|c|^{1/w} \geq rad(abc) \geq C_t.M^t$, pour tout $t < 1$. Donc $1 \geq C_t.M^{t-(1/u+1/v+1/w)}$. Choisissant $1 > t > 1/u + 1/v + 1/w$, on obtient donc 4.5 dans ce cas.

5 Une fibration de type général sur une surface simplement connexe

On va maintenant construire une surface projective lisse et connexe X de type général *simplement connexe* admettant une fibration de type général sur la droite projective complexe. Ceci montre que, contrairement au cas des multiplicités classiques, il n'y a pas d'obstruction topologique (au niveau du groupe fondamental du moins) à l'existence de fibrations de type général au sens non classique.

La difficulté est de construire des fibrations de base $\mathbb{P}_1$ ayant une fibre multiple simplement connexe au sens non classique. Bien que l'existence de telles fibres quasiment arbitraires soit établie dans [W74] [5] , l'approche suivie dans [W74] (géométrie formelle et théorème d'algébrisation de Grothendieck) ne permet pas de contrôler la base .

Nous donnons ici une construction explicite mais très spéciale de telles fibres. Il serait intéressant d'avoir des méthodes de construction plus générales que celle proposée ici de telles surfaces simplement connexes ayant une fibration de type général sur $\mathbb{P}_1$, ou même seulement une démonstration constructive des résultats de [W74][6] .

[5] Référence [W74] communiquée par E. Amerik

[6] Une construction très simple de fibre multiple par revêtement ramifié m'a été indiquée par X. Gang. Cette construction fournit une fibre double avec trois composantes, deux triples et une

Théorème 5.1 *Il existe des fibrations de type général, mais sans fibre multiple au sens classique, $f : X \to \mathbb{P}_1$, avec X une surface projective lisse simplement connexe de type général. On peut choisir X et f définies sur un corps de nombres k.*

Remarque 5.2 Les surfaces construites ci-dessous sont minimales, ont un fibré canonique ample et pour nombres de Chern: $c_1^2 = m[(m-1).96 - 17]$ et $c_2 = m[(m-1).48 + 29]$, où $m \geq 5$ est un entier. Donc $1,66.. < (c_1^2/c_2) < 2$ (une région banale de la "géographie" des surfaces de type général).

La construction des surfaces du théorème précédent est basée sur la:

Proposition 5.3 *Soit $D, L, T \subset \mathbb{P}_2$ trois droites projectives distinctes et concourantes en un point $a \in \mathbb{P}_2$. Il existe alors une sextique $S \subset \mathbb{P}_2$ telle que:*

1. *S est irréductible et ne passe pas par a.*
2. *S rencontre D en 3 points distincts en lesquels elle est lisse et tangente à D.*
3. *S rencontre L en 3 points distincts qui sont des points doubles de S.*
4. *S rencontre T en 2 points distincts qui sont des points triples de S.*

Si les droites D, L, T sont définies sur $\mathbb{Q}$, les 8 points précédents peuvent être choisis sur $\mathbb{Q}$, et S peut être définie sur un corps de nombres.

Démonstration: On suppose $\mathbb{P}_2$ rapporté aux coordonnées homogènes $(U : V : W)$ dans lesquelles les équations de L (resp. T; resp. D) sont: $(U = 0)$ (resp. $(V = 0)$; resp. $(U - 2V = 0)$). On note C la cubique $C := (D + L + T)$ d'équation: $U.V.(U - 2V) = 0$.

On a donc (par annulation de $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3))$) une suite exacte naturelle d'espaces vectoriels complexes:
$0 \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(6)) \to H^0(\mathcal{O}_C(6)) \to 0.$

L'espace vectoriel $H^0(\mathcal{O}_C(6))$ s'identifie (par restriction à T, L, D respectivement sur l'ouvert affine $W \neq 0$ rapporté aux coordonnées $(u := U/W, v := V/W)$) aux triplets de polynômes $(\bar{g}(u); \bar{h}(v); \bar{k}(v))$ de degrés au plus 6 tels que: $(\bar{g}(0) = \bar{h}(0) = \bar{k}(0))$, et: $(\bar{k}'(0) = 2.\bar{g}'(0) + \bar{k}'(0))$.

On peut donc trouver des polynômes (g, h, k) de degrés respectifs $(2, 3, 3)$ tels que les polynômes $(\bar{g}; \bar{h}; \bar{k}) := (g^3; h^2; k^2)$ satisfont les conditions précédentes, et tels que, de plus: $g(0) = h(0) = k(0) = 1$, les zéros de chacun des trois polynômes $g^3; h^2; k^2$ étant deux-à-deux distincts.

Soit alors $S_1(u, v)$ un polynôme de degré 6 tel que ses restrictions à T, L, D soient respectivement $g^3; h^2; k^2$. Ceci exprime que la sextique S_1 (définie par l'équation $S_1 = 0$) coupe T (resp. L; resp. D) en 2 (resp. 3; resp. 3) points distincts t_1, t_2 (resp. l_1, l_2, l_3; resp. d_1, d_2, d_3) en lesquels elle a un contact d'ordre 3 (resp. 2; resp. 2).

On cherche donc S sous la forme: $S = S_1 + E.F$, où $E := uv(u - 2v)$ et $F(u, v)$ est un polynôme (non homogène) de degré au plus 3.

double. Mais les fibres obtenues ne sont pas simplement connexes.

Pour que les $8 = 2 + 3 + 3$ points d'intersection correspondants aient les multiplicités voulues sur la sextique S (d'équation $S = 0$), il faut et il suffit donc que, notant $F_u, F_{uu}, F_{uv}, etc...$ les dérivées partielles de la fonction $F(u, v)$, on ait:

1. $S_u(t_i) = S_{uv}(t_i) = S_{vv}(t_i) = 0$ pour $i = 1, 2$.
2. $S_u(l_j) = 0$ pour $j = 1, 2, 3$.

Compte-tenu du fait que $E(t_i) = E(l_j) = E_u(t_i) = 0$ pour tous i, j, et de la formule de Leibnitz pour les dérivées partielles d'un produit (ici $E.F$)), ces conditions peuvent être réalisées si les 9 formes linéaires suivantes:

$F(t_i); F_u(t_i); F_v(t_i); F(l_j)$, pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2, 3$

sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel (de dimension 10) $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3))$:

Or l'espace vectoriel annulateur de ces formes est constitué des équations de cubiques planes ayant un point double en chacun des deux points t_1, t_2, et passant par les 3 points l_j. Un argument géométrique immédiat montre que ces équations sont de la forme: $\zeta.uv^2$, où $\zeta \in \mathbb{C}$.

Si S_2 est une sextique satisfaisant à toutes les conditions précédentes, et si $\zeta \in \mathbb{C}$ est générique adéquat, la sextique d'équation $S := S_2 + \zeta.uv^2$ satisfera aussi ces mêmes conditions, et sera, de plus, lisse aux points d_1, d_2, d_3, car $[uv^2]_u(d_j) \neq 0$, pour $j = 1, 2, 3$.

Pour achever la démonstration de la proposition, il faut encore montrer que le membre générique S_t du système linéaire Λ' de sextiques engendré par S et $S_0 := D + 2L + 3T$ est irréductible.

Sinon, S_t est somme de 6 droites, de 3 coniques lisses, ou de 2 cubiques.

Le premier cas est exclu, car une telle droite doit passer par l'un des t_i, et par l'un des l_j. C'est impossible, puisque Λ' n'a pas de composante fixe. Le deuxième cas est aussi exclu, car une conique composante de S_t devrait être tangente à D en l'un des d_j, et passer par 2 des t_i et deux des l_j (avec tangence à T ou L si deux de ces points sont confondus). Ceci contredit à nouveau le fait que Λ' n'a pas de composante fixe. Le cas où S_t serait réunion de deux cubiques est aussi exclu, car S_t ne serait pas lisse en l'un des points d_j au moins, où les deux cubiques devraient s'intersecter, alors que ce point devrait être un point de tangence de D et de S_t.

Les assertions de nature arithmétique sont immédiates sur la construction.

Corollaire 5.4 *Soit $g : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ le morphisme de degré 4 défini par: $g(X : Y : Z) := (U : V : W)$, avec $U := X^2 + Y^2; v := XY; W := Z^2$. Soit D (resp. L; resp. T) les droites d'équations: $U = 2V$ (resp. $U = 0$; resp. $V = 0$), et $a := (0 : 0 : 1)$. Soit S une sextique d'équation $S(U : V : W) = 0$ satisfaisant les conditions de la proposition précédente relatives aux droites D, L, T. Alors $H = g^*(S)$ est une courbe de degré 12 telle que:*

1. H ne passe pas par $a' := (X = 0; Y = 0; Z = 1)$.

2. H rencontre chacune des trois droites $L', L", D'$ d'équations respectives $(Y = i.X); (Y = -i.X); (Y = X)$ en 6 points distincts qui sont des points doubles de H.

3. H rencontre chacune des deux droites $T', T"$ d'équations $(Y = 0); (X = 0)$ en 4 points distincts qui sont des points triples de H.

4. Le membre générique H_t du système linéaire Λ de courbes de degré 12 engendré par H et $H' := 2.(L' + L" + D') + 3(T' + T")$ est irréductible.

Démonstration: Le revêtement g est Galoisien de goupe $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, engendré par $\alpha : (X : Y : Z) \to (-X; -Y; Z)$ et $\sigma : (X : Y : Z) \to (Y; X; Z)$. De plus, on a:

1. $g(D') = D$ et $g^*(D) = 2D'$.
2. $g(L') = g(L") = L$, et $g^*(L) = L' + L"$.
3. $g(T') = g(T") = T$, et $g^*(T) = T' + T"$.
4. g est étale sur l'ouvert $Z \neq 0; X^2 \neq Y^2$, et ramifie à l'ordre 2 le long de la doite D' privée de ses deux points $(0 : 0 : 1)$ et $(1 : 1 : 0)$.

Ces propriétés permettent de déduire immédiatement le corollaire de la proposition, à l'exception de l'irréductibilité de $H_t := g^*(S_t)$.

Si H_t n'est pas irréductible, il est donc réunion soit de 4 cubiques, soit de 2 sextiques irréductibles, qui forment une seule orbite sous l'action de G.

Le premier cas (de 4 cubiques) n'est pas possible, car S_t a un point triple en chaque point t_i, et g est étale au-dessus de ces points. Donc une cubique Γ composante de H_t devrait passer par $m = 2$ (avec une singularité) ou $m = 3$ des 4 points de $g^{-1}(t_i)$, et aussi par 7 des autres points de $g^{-1}(R)$, si R est l'ensemble des 8 points d'intersection de S_t et de $C = L + D + T$, avec les notations de la proposition. Ceci entrainerait que Γ est une composante fixe de Λ, et une contradiction.

Le cas dans lequel H_t serait réunion de 2 sextiques S'_t et $g.S'_t$, pour $g \in G$ d'ordre 2 (indépendant de t) est également impossible. Ceci sera établi au cours de la démonstration du corollaire 5.5 ci-dessous.

Corollaire 5.5 *Soit H et H' les deux courbes planes de degré 12 décrites dans la proposition précédente, Λ le système linéaire qu'elles engendrent, et $\psi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ l'application méromorphe associée définie par le quotient (des équations) H/H'. Soit $b : \mathbb{P} \to \mathbb{P}_2$ l'éclatement de $\mathbb{P}_2$ en les 26 points-base du système linéaire Λ. L'application $\varphi := \psi \circ b : \mathbb{P} \to \mathbb{P}_1$ est holomorphe, à fibres connexes. Elle a une unique fibre multiple $\Phi_\infty := \varphi^*(\infty)$, de multiplicité 2, qui est la transformée stricte de H' par b. Cette fibre Φ_∞ est simplement connexe. De plus, φ n'a aucune fibre qui soit multiple au sens classique (ie: $m^*(\varphi, y) = 1$, pour tout $y \in \mathbb{P}_1$, avec la notation de 1.2.1).*

Démonstration: Seules les assertions: φ est holomorphe et n'admet pas de fibre multiple au sens classique ne sont pas des conséquences immédiates de ce qui précède.

On va démontrer la première au voisinage de l'un des points d'intersection t' de T' et de H, dans des coordonnées locales analytiques (s, t) centrées en ce point, et choisies telles que T' a pour équation locale: $t = 0$.

Alors $\psi(s,t) := (a.s^3 + b.s^2t + c.st^2 + d.t^3 + R(s,t))/t^3$, où $R(s,t)$ est une fonction analytique nulle à l'ordre 3 en $(0,0)$, pour des coefficients complexes a, b, c, d adéquats.

Le point crucial est: $a \neq 0$. Ceci résulte de ce que le nombre d'intersection de H et de T' est 12, et est la somme des ordres de contact de H avec T' en chacun des 4 points t'_i. Comme chacun de ces ordres de contact vaut au moins 3, chacun vaut exactement 3, et donc $a \neq 0$.

Maintenant le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\mathbb{P}_2$ en t' est recouvert par les deux ouverts de cartes U_1 et U_2, munis de coordonnées respectives $(\sigma := s/t, t)$, et $(s, \tau := t/s)$.

Dans U_1, $\psi(s,t) = a\sigma^3 + b.\sigma^2 + c.\sigma + d + R_1(\sigma, t)$, avec R_1 analytique.

Dans U_2, $(\psi(s,t))^{-1} = [\tau^3/(a + b.\tau + c.\tau^2 + d.\tau^3 + s.R_2(s,\tau))]$, avec R_2 analytique.

Puisque $a \neq 0$, on en déduit que φ est analytique (à valeurs dans $\mathbb{P}_1$) au voisinage de t'.

Le cas des points d'intersection de H et T" est identique. Celui des points d'intersection de H avec $L' + L" + D'$ est similaire (en plus simple, car seuls des termes quadratiques interviennent).

Il reste à montrer que φ n'a pas de fibre multiple au sens classique. Sinon, on aurait pour une valeur adéquate de $t \in \mathbb{P}_1, t \neq \infty$: $H_t = (12/d).\Gamma$, pour $d \neq 12$ un diviseur de 12, et Γ une courbe de degré d.

On ne peut pas avoir $d = 1, 2, 3$, car Γ doit passser par les 26 points d'intersection de H et de H'. On ne peut pas non plus avoir $d = 6$, car la sextique Γ devrait passer triplement par chacun des 4 points d'intersection de T' avec H.

Nous pouvons maintenant montrer que les fibres de ϕ sont connexes. Sinon, par l'assertion 4 du corollaire 5.4 précédent, démontré sauf dans le cas où H_t serait réunion de 2 sextiques, ϕ devrait se Stein-factoriser sous la forme: $\phi = \rho \circ \eta$, avec $\eta : P \to \mathbb{P}_1$ connexe et $\eta : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_1$ de degré 2. Alors η aurait deux points de ramification double et en ces points, H_t serait une sextique double. Ceci contredit l'argument précédent, et achève la démonstration du corollaire.

On peut maintenant conclure la démonstration du théorème 4.1:

Corollaire 5.6 *Soit $\varphi : \mathbb{P} \to Q := \mathbb{P}_1$ la fibration précédente. Soit $g : P := \mathbb{P}_1 \to Q = \mathbb{P}_1$ un morphisme fini de degré $m \geq 1$, étale au-dessus des points (en nombre fini) de Q au-dessus desquels la fibre de φ n'est pas lisse. Soit X la normalisée de $\mathbb{P} \times_Q P$, et $f : X \to P$ le morphisme déduit de φ par le changement de base g. Soit enfin $u : X \to \mathbb{P}$ le morphisme fini naturel. Alors:*

1. X est une surface lisse, et f est une fibration de type général si $m \geq 5$.

2. X est simplement connexe (et de type général si $m \geq 5$).

3. Si la sextique S est définie sur un corps de nombres, ainsi que g, alors X et f sont aussi définies sur un corps de nombres.

Remarque 5.7 Si F est une fibre lisse de φ, on a: $g(F) = 13$. En effet, si E (resp. G) est le diviseur exceptionnel de b au-dessus des 18 points doubles (resp. 8 points triples) de H considérés, alors $K_P = b^*(K_{\mathbb{P}_2}) + E + G$. De plus, si F est une fibre lisse de φ, on a: $F.E = 2.18$, et $F.G = 3.8$ (car chaque composante de E (resp. G) se projette doublement (resp. triplement) sur $\mathbb{P}_1$ par φ). Donc $K_P.F = 2(g(F) - 1) = (b^*(K_{\mathbb{P}_2}) + E + G).F = -3.12 + 2.18 + 3.8 = 24$.

Démonstration de 5.6: Toutes les assertions sont immédiates, sauf peut-être le fait que f soit une fibration de type général, et que X est simplement connexe.

Le fait que f soit de type général si $m \geq 5$ résulte de ce que f a maintenant m fibres multiples (au sens de 1.1) de multiplicité 2 (qui est la multiplicité de Φ_∞). On conclut à l'aide de la remarque 1.4.

La simple connexité de X résulte du lemme standard suivant:

Lemme 5.8 *Soit $f : X \to C$ une fibration holomorphe propre et surjective sur une courbe. Supposons que f n'ait pas de fibre multiple au sens classique (voir 1.2), et que f ait une fibre simplement connexe F_0. Alors: $f_* : \pi_1(X) \to \pi_1(C)$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration: Puisque f n'a pas de fibre multiple au sens classique, le noyau de f_* est l'image de $\pi_1(F)$ dans $\pi_1(X)$ par j_*, déduite de l'injection naturelle de F dans X, si F est une fibre lisse de f. Mais j se factorise par l'injection de U dans X, si U est un voisinage ouvert de F_0 qui se rétracte sur F_0, et qui contient F, choisie assez proche de F_0. Puisque F_0 est simplement connexe, il en est de même de U. D'où la conclusion.

6 Bibliographie

[B-P-V84] W.Barth-C.Peters-A.Van de Ven. Compact Complex Surfaces. Springer Verlag.

[B72] T. Barth. The Kobayashi distance induces the standard topology. Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), 439-441.

[Ca01] F. Campana. Special varieties, Orbifolds and Classification theory. math. AG/0110051. et Ann. Inst. Fourier 54 (2004), 499-665. Pour un exposé introductif: math. AG/0402243.

[C-W04] F.Campana-J. Winkelmann. Brody orbifolde. En préparation.

[Cap 04] L. Caporaso. Moduli theory and Arithmetic of Algebraic Varieties. math. AG/0311465.

[C-S-S 97] J.L. Colliot-Thélène- A. Skorobogatov- P. Swinnerton-Dwyer. Double fibres and double covers: paucity in rational points. Acta Arithm. 79 (1997), 113-135.

[D97] H. Darmon. Faltings plus epsilon, Wiles plus epsilon, and the generalised Fermat equation. C.R. Math. de l'Acad. des Sciences de la république du Canada. 19 (1997), 3-14.

[E97] N. Elkies. ABC implies Mordell. Int. Math. Res. Notes. 7 (1991),99-109.

[E-V90] H. Esnault-E. Viehweg. Effective bounds for semipositive sheaves and the height of points on curves over complex function fields. Comp. Math. 76 (1990), 69-85.

[F83] G. Faltings. Endlichkeitssätze für Abelsche Varietäten über Zahlkörpern. Inv. Math. 73 (1983), 349-366.

[G65] H. Grauert. Mordells Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper. Publ. Math. IHES 25 (1965), 131-149.

[Kaw84] Y. Kawamata. The cone of curves of algebraic varieties. Ann. Math. 119 (1984), 95-110.

[K98] S. Kobayashi. Hyperbolic complex spaces. Springer Verlag (1998).

[K-M92] J.Kollár-S. Mori. Classification of three-dimensional flips. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992),533-703.

[Mae83] K. Maehara. A finiteness property of varieties of general type. Math. Ann. 262, 101-123.

[M63] Y. Manin. Rational points of algebraic curves over function fields. Iz. akad. Nauk. SSSR (1963), 1395-1440.

[N87] M. Namba. Branched coverings and algebraic functions. Pitman research notes in Math. Sc. 161. Longman Sc. and Technical. (1987).

[P68] A.N. Parshin. Algebraic curves over function fields I. Math. USSR Izvestija (1968), 1145-1170.

[Siu80] Y.T. Siu. The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds. Ann. Math. 112 (1980), 73-111.

[W74] G.Winters. On the existence of certain families of curves. Amer. J. Math. 96 (1974), 215-228.

[Wr77] M. Wright. The Kobayashi pseudometric on manifolds of general type. Trans. AMS. 232 (1977), 357-370.

Adresse
Frédéric Campana
Université Nancy 1.
Département de Mathématiques
BP 239
F-54506. Vandoeuvre. Cédex.
(campana@iecn.u-nancy.fr)