The Ramanujan Journal **9** (2005), 111–121.

Constantes d'Erdős–Turán

J. Rivat & G. Tenenbaum

À Jean-Louis Nicolas, avec toute notre amitié

Résumé. L'inégalité d'Erdős-Turán mesure l'écart à l'équirépartition d'une suite quelconque du tore en fonction d'un paramètre arbitraire et de deux constantes absolues, c_1 et c_2. Nous montrons que $c_1 \geqslant 1$ et $c_2 \geqslant 2/\pi$, et nous fournissons un ensemble de couples admissibles $(c_1; c_2)$ numériquement proches de l'optimum hypothétique $(1; 2/\pi)$, notamment $(1; 0,653)$ et $(1,1435; 2/\pi)$.

The Erdős-Turán inequality measures the distance from uniform distribution of any given sequence on the torus as a function of an arbitrary parameter and two constants, c_1 and c_2. We show that $c_1 \geqslant 1$ and $c_2 \geqslant 2/\pi$, and we provide a set of admissible pairs $(c_1; c_2)$ that are numerically close to the hypothetical optimum $(1; 2/\pi)$, including $(1; 0.653)$ and $(1.1435; 2/\pi)$.

2000 Mathematics Subject Classification :
Primary 11K38, 11K06 ; secondary 11L03, 42A05.

1. Introduction

La théorie de l'équirépartition sur le tore $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est qualitativement sous-tendue par le critère d'Hermann Weyl (1916), qui énonce, avec la notation traditionnelle $\mathrm{e}(u) := \exp(2i\pi u)$ $(u \in \mathbb{R})$, qu'une suite réelle $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est équirépartie modulo 1 si, et seulement si, les moyennes d'exponentielles

$$\sigma_N(h) := \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{e}(hx_n)$$

tendent vers 0, pour tout entier h non nul fixé, lorsque $N \to \infty$.

Une mesure effective de la tendance à l'équirépartition modulo 1 d'une suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est reflétée par le comportement asymptotique de la discrépance

$$D_N := D_N(x_1, \dots, x_N) = \sup_I \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{I+\mathbb{Z}}(x_n) - |I| \right| \qquad (N \geqslant 1) \tag{1·1}$$

où la borne supérieure porte sur l'ensemble des intervalles réels I de longueur $|I| < 1$. En 1948, Erdős et Turán [1] ont donné une version quantitative du critère de Weyl sous la forme d'une inégalité universelle

$$D_N \leqslant \frac{c_1}{H+1} + c_2 \sum_{1 \leqslant h \leqslant H} \frac{|\sigma_N(h)|}{h} \tag{1·2}$$

où H est un entier positif arbitraire, et c_1 et c_2 sont des constantes absolues convenables.

Des valeurs admissibles du couple $(c_1;c_2)$ ont été consécutivement précisées dans la littérature. Dans [2], Kuipers et Niederreiter ont obtenu $(c_1;c_2) = (6;4/\pi)$; ce résultat a ensuite été amélioré, notamment par Montgomery [4], qui donne $(c_1;c_2) = (1;3)$, et, plus récemment, par Mauduit, Rivat et Sárközy [3], qui établissent que l'on peut choisir $(c_1;c_2) = (1;1)$.

Nous nous proposons dans ce travail d'aborder la question naturelle du choix optimal de $(c_1;c_2)$. Commençons par une minoration.

Théorème 1.1. *Soit $(c_1;c_2)$ un couple de constantes satisfaisant à (1·2). Alors $c_1 \geqslant 1$ et $c_2 \geqslant 2/\pi$.*

Le résultat suivant montre que chacune des deux valeurs limites peut être atteinte séparément. La question de savoir si elles peuvent l'être simultanément, autrement dit si $(c_1;c_2) = (1;2/\pi)$ est un choix admissible, reste ouverte.

Posons

$$\varphi(t) := \pi t(1-t)\cot \pi t + t \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

On peut établir facilement que φ décroît de 1 à 0 sur $[0,1]$. Nous notons encore

$$\kappa(t) := t(1-t), \quad \gamma(t) := \sqrt{\varphi(t)^2 + \pi^2\kappa(t)^2} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$\gamma^* := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \gamma(t) \approx 1,0251.$$

et

$$\vartheta_y(t) := \gamma(t)\{1 - 3y^2 + 3y^2|\cos(\pi t/3y)|\} \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1/\sqrt{3},\ 0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{1·3}$$

Nous désignons par y_0 la borne inférieure de l'ensemble des $y \in [0, 1/\sqrt{3}]$ tels que $\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} \vartheta_y(t) \leqslant 1$. On peut montrer numériquement que $0,14348 < y_0 < 0,14349$.

Théorème 1.2. *Pour tout $y \in [0, y_0]$, l'inégalité (1·2) est satisfaite avec*

$$(c_1;c_2) = \Big(1+y; \frac{2}{\pi}\{1 + (\gamma^* - 1)(1 - y/y_0)\}\Big).$$

En choisissant $y = 0$ et $y = y_0$, nous déduisons immédiatement de cet énoncé le résultat suivant.

Corollaire 1.3. *L'inégalité (1·2) est satisfaite avec $(c_1;c_2) = (1;2\gamma^*/\pi)$ et avec $(c_1;c_2) = (1+y_0;2/\pi)$.*

Nous notons les valeurs numériques

$$2/\pi \approx 0,636619, \quad 2\gamma^*/\pi \leqslant 0,6528 < 2/3, \quad y_0 \leqslant \frac{32}{223} \approx 0,14349.$$

2. Preuve du Théorème 1.1

Montrons d'abord que $c_1 \geqslant 1$ indépendamment de la valeur de c_2. À cette fin, considérons, pour $N \geqslant 2$, le choix $x_n = n/N$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$. Nous avons alors

$$\sigma_N(h) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}(hn/N) = 0 \qquad (1 \leqslant h < N).$$

De plus, puisque l'intervalle $I =]0, 1/N[$ ne contient aucun x_n, nous obtenons certainement

$$D_N \geqslant 1/N.$$

Il s'ensuit que pour tout entier H, $1 \leqslant H \leqslant N-1$,

$$\frac{1}{N} \leqslant D_N \leqslant \frac{c_1}{H+1} + c_2\sum_{h=1}^{H}\frac{|\sigma_N(h)|}{h} = \frac{c_1}{H+1}.$$

Le résultat annoncé en découle en choisissant $H = N-1$.

Pour montrer que $c_2 \geqslant 2/\pi$ indépendamment de la valeur de c_1, nous choisissons $x_n = n/2N$ $(N \geqslant 2,\ 1 \leqslant n \leqslant N)$. L'intervalle $I =]1/2, 1[$ ne contient aucun x_n, donc

$$D_N \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Il s'ensuit, pour $1 \leqslant H < 2N$,

$$\tfrac{1}{2} \leqslant \frac{c_1}{H+1} + c_2\sum_{h=1}^{H}\frac{|\sigma_N(h)|}{h} = \frac{c_1}{H+1} + \frac{c_2}{N}\sum_{h=1}^{H}\frac{1}{h}\left|\frac{\sin(\pi h/2)}{\sin(\pi h/2N)}\right|$$

Dans la dernière somme, seuls les entiers h impairs produisent une contribution non nulle. Par passage à la limite lorsque N tend vers l'infini, il vient

$$\tfrac{1}{2} \leqslant \frac{c_1}{H+1} + \frac{2c_2}{\pi}\sum_{0\leqslant k\leqslant(H-1)/2}\frac{1}{(2k+1)^2}.$$

En faisant à présent tendre H vers l'infini, nous obtenons

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{2c_2}{\pi}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi c_2}{4}$$

et donc $c_2 \geqslant 2/\pi$. □

3. Preuve du Théorème 1.2

3·1. Application d'un théorème de Vaaler

Nous commençons par établir un résultat intermédiaire qui est une conséquence relativement simple du travail fondamental de Vaaler [5].

Lemme 3.1. *Pour tous $H \geqslant 1$, $\lambda \geqslant 0$, on a*

$$D_N \leqslant \frac{1+\lambda}{H+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leqslant h \leqslant H} |\gamma(t_h)\cos(\pi\lambda t_h)| \frac{|\sigma_N(h)|}{h}, \tag{3·1}$$

où l'on a posé $t_h := h/(H+1)$.

Remarque. Le cas $\lambda = 0$ de (3·1) fournit une forme pondérée intéressante de l'inégalité d'Erdős-Turán. Comme l'atteste la courbe de $\gamma(t)$ présentée à la Figure 1, les termes $|\sigma_N(h)|/h$ sont affectés d'un poids sensiblement inférieur à $2/\pi$ lorsque, disons, $h > H/2$. Il est peut-être possible d'exploiter cette propriété pour établir que $(c_1; c_2) = (1; 2/\pi)$ est admissible.

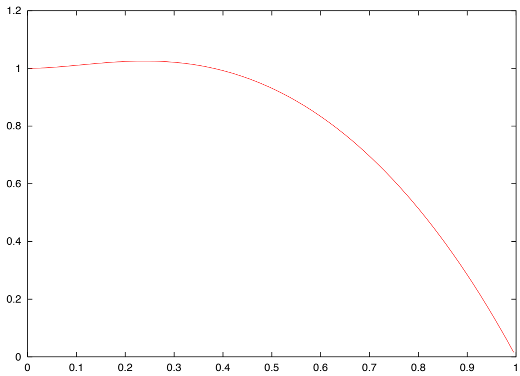

Figure 1. — $t \mapsto \gamma(t)$.

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\lambda \leqslant \frac{1}{2}(H+1)$: le résultat est trivialement vérifié lorsque $\lambda \geqslant H$, et il découle de (3·1) appliqué à $\lambda' := H + 1 - \lambda$ lorsque $\frac{1}{2}(H+1) < \lambda < H$.

Soit

$$f(x) := \sum_{h \in \mathbb{Z}} a_h \mathrm{e}(hx)$$

une fonction réelle, équilibrée, à variation bornée sur le tore $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. D'après le théorème 19 de [5], nous avons

$$|f(x) - f * j_H(x)| \leqslant \frac{(\mathrm{d}V_f) * k_H(x)}{2H+2} \qquad (x \in \mathbb{T}) \tag{3·2}$$

avec

$$j_H(x) := \sum_{|h|\leqslant H} \varphi(t_{|h|})\mathrm{e}(hx),$$

$$k_H(x) := \sum_{|h|\leqslant H} \big(1 - t_{|h|}\big)\mathrm{e}(hx) = (H+1)\Big(\frac{\sin(\pi(H+1)x)}{(H+1)\sin \pi x}\Big)^2,$$

et où $V_f(x)$ désigne la variation totale de f sur $]-\frac{1}{2}, x]$.

Nous pourrions appliquer directement (3·2) à la fonction équilibrée la plus proche de l'indicatrice $\mathbf{1}_{I+\mathbb{Z}}$ apparaissant dans la définition (1·1). Cependant, nous gagnons de la précision[1] en remarquant que, quitte à remplacer x_n par $x_n - \frac{1}{2}(\min I + \max I)$, ce qui n'altère pas la valeur de $|\sigma_N(h)|$, nous pouvons nous limiter aux intervalles symétriques par rapport à l'origine. Un argument évident de continuité permet alors de restreindre l'étude aux fonctions χ_α définies sur $\mathbb{T}$, pour $\alpha \in]0, 1[$, par la formule

$$\chi_\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2}\alpha \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \pm\frac{1}{2}\alpha, \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2}\alpha < |x| \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La fonction χ_α est à variation bornée sur $\mathbb{T}$, intégrable sur $\mathbb{T}$, équilibrée, donc

$$\chi_\alpha(x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi\alpha h)}{\pi h}\ \mathrm{e}(hx).$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée, équilibrée, paire, positive ou nulle, d'intégrale 1, à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. La transformée de Fourier de g est donnée par la formule

$$\widehat{g}(t) := \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\mathrm{e}(-xt)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $\varepsilon \in]0, 1[$, nous définissons sur $\mathbb{T}$ une fonction g_ε en posant

$$g_\varepsilon(x) := (1/\varepsilon)g(x/\varepsilon) \qquad (-\tfrac{1}{2} \leqslant x < \tfrac{1}{2}).$$

La fonction g_ε est à variation bornée sur $\mathbb{T}$, intégrable sur $\mathbb{T}$, et équilibrée, donc

$$g_\varepsilon(x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(\varepsilon h)\ \mathrm{e}(hx). \tag{3·3}$$

Pour $\alpha, \varepsilon \in]0, 1[$, nous considérons la fonction $\chi_{\alpha,\varepsilon}$, convolution sur $\mathbb{T}$ de g_ε et χ_α :

$$\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) := g_\varepsilon * \chi_\alpha(x) = \int_{\mathbb{T}} g_\varepsilon(u)\chi_\alpha(x-u)\,\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{T}} g_\varepsilon(x-u)\chi_\alpha(u)\,\mathrm{d}u.$$

1. Voir le corollaire 5.1 de [2].

La fonction $\chi_{\alpha,\varepsilon}$ est à variation bornée sur $\mathbb{T}$ et équilibrée. On a

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_{\alpha,\varepsilon}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{T}} \chi_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \alpha,$$

$$\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \sum_{h\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi\alpha h)}{\pi h}\widehat{g}(\varepsilon h)\mathrm{e}(hx),$$

et, par différentiation terme à terme en tenant compte de (3·3),

$$\mathrm{d}\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) = \{g_\varepsilon(x+\tfrac12\alpha) - g_\varepsilon(x-\tfrac12\alpha)\}\,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\mathrm{d}V_{\chi_{\alpha,\varepsilon}}(x) = |\mathrm{d}\chi_{\alpha,\varepsilon}(x)| = |g_\varepsilon(x+\tfrac12\alpha) - g_\varepsilon(x-\tfrac12\alpha)|\,\mathrm{d}x.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}|g_\varepsilon(x+\tfrac12\alpha) - g_\varepsilon(x-\tfrac12\alpha)| &\leqslant g_\varepsilon(x+\tfrac12\alpha) + g_\varepsilon(x-\tfrac12\alpha)\\ &= 2\sum_{h\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(\varepsilon h)\cos(\pi\alpha h)\mathrm{e}(hx).\end{aligned}$$

On en déduit par (3·2) que pour $\alpha,\varepsilon\in]0,1[$,

$$|\chi_{\alpha,\varepsilon}(x) - v_H(x;\alpha,\varepsilon)| \leqslant r_H(x;\alpha,\varepsilon)$$

avec

$$\begin{aligned}v_H(x;\alpha,\varepsilon) &:= \sum_{|h|\leqslant H} \varphi(t_{|h|})\frac{\sin(\pi\alpha h)}{\pi h}\widehat{g}(\varepsilon h)\mathrm{e}(hx),\\ r_H(x;\alpha,\varepsilon) &:= \frac{1}{H+1} + \sum_{1\leqslant|h|\leqslant H} \kappa(t_{|h|})\frac{\cos(\pi\alpha h)}{|h|}\widehat{g}(\varepsilon h)\mathrm{e}(hx).\end{aligned}$$

À ce stade, nous observons que l'on a $\chi_\alpha \leqslant \chi_{\alpha+\varepsilon,\varepsilon}$ pour tous $\alpha,\varepsilon\in]0,1[$ tels que $0<\alpha+\varepsilon<1$. En effet, il est facile de vérifier que

$$\chi_{\alpha+\varepsilon,\varepsilon}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} g(z)\chi_{\alpha+\varepsilon}(x-\varepsilon z)\,\mathrm{d}z$$

vaut 1 si $|x|\leqslant\alpha/2$.

On en déduit, pour $\alpha\in]0,\tfrac12]$, $\varepsilon\in]0,\tfrac12[$,

$$\frac1N\sum_{n\leqslant N}\chi_\alpha(x_n) - \alpha \leqslant \varepsilon + \frac{1}{H+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{1\leqslant h\leqslant H}|\widehat{g}(\varepsilon h)|\gamma(t_h)\frac{|\sigma_N(h)|}{h}. \tag{3·4}$$

Pour $0<\varepsilon<\alpha\leqslant\tfrac12$, nous avons $\chi_{\alpha-\varepsilon,\varepsilon}\leqslant\chi_\alpha$ et nous obtenons similairement

$$\alpha - \frac1N\sum_{n\leqslant N}\chi_\alpha(x_n) \leqslant \varepsilon + \frac{1}{H+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{1\leqslant h\leqslant H}|\widehat{g}(\varepsilon h)|\gamma(t_h)\frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

Cette dernière inégalité est encore trivialement vérifiée lorsque $\alpha \leqslant \varepsilon < \frac{1}{2}$. Ainsi en écrivant $\varepsilon := \lambda/(H+1)$, donc $\varepsilon h = \lambda t_h$, nous obtenons (par continuité en $\lambda = 0$ et en $\lambda = \frac{1}{2}(H+1)$), pour $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}(H+1)$,

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N}\chi_\alpha(x_n) - \alpha\Big| \leqslant \frac{1+\lambda}{H+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{1\leqslant h\leqslant H}|\widehat{g}(\lambda t_h)|\gamma(t_h)\frac{|\sigma_N(h)|}{h}. \tag{3·5}$$

Le membre de droite ne dépend pas de α. On obtient le résultat annoncé en faisant tendre la mesure $g\,\mathrm{d}x$ vers $\frac{1}{2}\{\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\}$. □

3·2. Remarques

Posons

$$\varrho(\lambda; g) := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\widehat{g}(\lambda t)|\gamma(t).$$

Il découle trivialement de (3·5) que, pour tout $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, le couple

$$(c_1; c_2) = \big(1+\lambda; 2\varrho(\lambda; g)/\pi\big)$$

est admissible dans (1·2). On a toujours $\varrho(\lambda; g) \geqslant 1$. Soit $\lambda^*(g)$ la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels λ tels que $\varrho(\lambda; g) = 1$. Le choix limite effectué à la fin de la démonstration précédente pour la fonction g est justifié par le fait que l'*on a* $\lambda^*(g) \geqslant 1/\sqrt{3}$ *pour toute fonction* g *alors que* $\lambda^*(g)$ *tend vers* $1/\sqrt{3}$ *lorsque* $g\,\mathrm{d}x$ *tend vers* $\frac{1}{2}\{\delta_{-1/2} + \delta_{1/2}\}$.

Pour établir cela, nous observons d'une part que

$$\gamma(t) = 1 + \tfrac{1}{6}\pi^2 t^2 - \tfrac{2}{3}\pi^2 t^3 + O(t^4),$$

et d'autre part que

$$\widehat{g}(t) = 1 - a(g)t^2 + O(t^4)$$

avec

$$0 \leqslant a(g) = -\tfrac{1}{2}\,\widehat{g}\,''(0) = 2\pi^2\int_{-1/2}^{1/2} x^2 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \tfrac{1}{2}\pi^2.$$

Cela implique que $\lambda^*(g) \geqslant \pi/\sqrt{6a(g)} > 1/\sqrt{3}$ pour toute fonction g, le minimum étant atteint asymptotiquement lorsque $a(g)$ tend vers $\frac{1}{2}\pi^2$, ce qui détermine la mesure limite.

Il est à noter que, pour le choix naturel $g = 1$, on a

$$\widehat{g}(t) = \sin(\pi t)/\pi t = 1 - \tfrac{1}{6}\pi^2 t^2 + O(t^4)$$

d'où $\lambda^*(1) \geqslant 1$.

Posons $\varrho(\lambda) := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\gamma(t)\cos(\pi\lambda t)|$. On a

$$\varrho(0) \approx 1,0251,\quad \varrho(\tfrac{1}{8}) \approx 1,0210,\quad \varrho(\tfrac{1}{4}) \approx 1,0117,\quad \varrho(\tfrac{1}{3}) \approx 1,0059,\quad \varrho\big(1/\sqrt{3}\big) = 1.$$

3·3. Preuve du Théorème 1.2

Nous observons d'emblée que le résultat énoncé découle trivialement, par interpolation linéaire, des cas $y = 0$ et $y = y_0$. Comme le premier est une conséquence triviale de (3·1), il suffit de considérer le second.

Posons $\gamma_\lambda(t) := |\cos(\pi\lambda t)|\gamma(t)$ et notons que, lorsque $t \to 0$,

$$\gamma_\lambda(t) = 1 + (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2}\lambda^2)\pi^2 t^2 - \tfrac{2}{3}\pi^2 t^3 + O_\lambda(t^4). \tag{3·6}$$

Soient $L > 0$ et μ une mesure de probabilité sur $[0, L]$. Il résulte immédiatement de (3·1) que l'inégalité d'Erdős–Turán (1·2) a lieu avec les constantes

$$c_1 = \int_0^L (1 + \lambda)\,\mathrm{d}\mu(\lambda), \qquad c_2 = \frac{2}{\pi} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^L |\gamma_\lambda(t)|\,\mathrm{d}\mu(\lambda).$$

Or on a, en vertu de (3·6), lorsque $t \to 0$,

$$\int_0^L |\gamma_\lambda(t)|\,\mathrm{d}\mu(\lambda) = 1 + \tfrac{1}{2}\pi^2 t^2 \Big\{ \tfrac{1}{3} - \int_0^L \lambda^2\,\mathrm{d}\mu(\lambda) \Big\} + O(t^3).$$

Pour tout choix de μ tel que $c_2 = 2/\pi$, on a donc nécessairement

$$L \int_0^L \lambda\,\mathrm{d}\mu(\lambda) \geqslant \int_0^L \lambda^2\,\mathrm{d}\mu(\lambda) \geqslant \tfrac{1}{3},$$

d'où

$$c_1 = 1 + \int_0^L \lambda\,\mathrm{d}\mu(\lambda) \geqslant 1 + \frac{1}{L}\int_0^L \lambda^2\,\mathrm{d}\mu(\lambda) \geqslant 1 + \frac{1}{3L}.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que les deux dernières inégalités soient des égalités est que $\mu = a\delta_0 + b\delta_L$ avec $a = 1 - 1/3L^2$, $b = 1/3L^2$, $L \geqslant 1/\sqrt{3}$, où δ_u désigne la mesure de Dirac au point u.

Posons $L := 1/3y$, où y est un paramètre arbitrairement choisi dans l'intervalle $[0, 1/\sqrt{3}]$, et rappelons la définition (1·3). Il résulte de (3·1) que l'on a, pour tous $N \geqslant 1$, $H \geqslant 1$ et toute suite $\{x_n\}_{n=1}^N$,

$$D_N \leqslant \frac{1 + y}{H + 1} + \frac{2}{\pi} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \vartheta_y(t_h)\frac{|\sigma_N(h)|}{h}.$$

De plus, la discussion précédente montre que ϑ_y est la seule combinaison linéaire des fonctions γ_λ satisfaisant aux conditions nécessaires issues du comportement à l'origine pour que

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \vartheta_y(t) = 1, \tag{3·7}$$

et donc $c_2 = 2/\pi$. On a en effet, lorsque $t \to 0$,

$$\vartheta_y(t) = 1 - \tfrac{2}{3}\pi^2 t^3 + O_y(t^4).$$

Il reste à déterminer la plus petite valeur y_0 de y pour laquelle (3·7) est réalisée, ou, à défaut, une approximation acceptable de cette valeur minimale. L'observation numérique

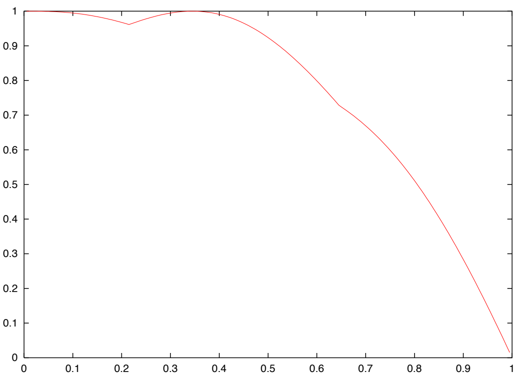

Figure 2. — $t \mapsto \vartheta_{32/223}(t)$.

suggère que $y_0 \leqslant \frac{32}{223}$ et nous pouvons effectivement justifier cette assertion par la technique décrite au paragraphe 4.

Remarque. Il est à noter que la méthode employée ne peut fournir simultanément $c_1 = 1$ et $c_2 = 2/\pi$. En effet, si c_1 tend vers 1, $\int_0^L \lambda \, \mathrm{d}\mu(\lambda)$ tend vers 0, donc pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_0^\varepsilon \mathrm{d}\mu(\lambda)$ tend vers 1. Cela implique

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \gamma(t) \int_0^\varepsilon |\cos(\pi\lambda t)| \, \mathrm{d}\mu(\lambda) \geqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \gamma(t) |\cos(\pi\varepsilon)| \mu([0,\varepsilon]) > 1.$$

4. Calculs numériques

Si f est continûment dérivable sur $[0,1]$, et $|f'(x)| \leqslant M$ sur $[0,1]$, on a, pour toute subdivision $t_0 = 0,\ t_1, \ldots,\ t_k = 1$ de pas δ,

$$f(t) \leqslant f(t_j) + M\delta \qquad (|t - t_j| \leqslant \delta).$$

En choisissant, par exemple, $\delta = 1/(10^6 M)$, nous pouvons évaluer la borne supérieure de f avec une précision de l'ordre de 10^{-6}, en ne calculant qu'un nombre fini et raisonnable de valeurs numériques. Pour montrer que $f(t) \leqslant 1$ pour tout t, il suffit ainsi de vérifier que $f(t_j) \leqslant 1 - 10^{-6}$ pour tout j de $[0,k]$.

Cette technique peut, le cas échéant, être complétée par une étude locale de type développement limité avec majoration explicite du reste au voisinage des racines de l'équation $f(t) = 1$. Comme il n'y a pas d'accumulation des erreurs, même une valeur relativement grossière de M est suffisante.

Pour les fonctions étudiées dans cet article, la valeur de M dépend essentiellement de l'encadrement suivant, qui est d'un intérêt indépendant.

Lemme 4.1. *On a*

$$1 - \pi^2/4 = \varphi'(\tfrac{1}{2}) \leqslant \varphi'(t) \leqslant 0, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Démonstration. D'après la formule d'Euler pour la cotangente, on a

$$\varphi(t) = 1+\sum_{n\geqslant 1} \frac{2t^2(1-t)}{t^2-n^2} = -2t+3-\frac{2}{(t+1)}+\sum_{n\geqslant 2}\Big\{2(1-t)+\frac{n(n-1)}{n-t}-\frac{n(n+1)}{n+t}\Big\}.$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -2+\frac{2}{(t+1)^2}+\sum_{n\geqslant 2}\Big\{-2+\frac{n(n-1)}{(n-t)^2}+\frac{n(n+1)}{(n+t)^2}\Big\},\\
\varphi''(t) &= \frac{-4}{(t+1)^3}+2\sum_{n\geqslant 2}\Big\{\frac{n(n-1)}{(n-t)^3}-\frac{n(n+1)}{(n+t)^3}\Big\},\\
\varphi'''(t) &= \frac{12}{(t+1)^4}+6\sum_{n\geqslant 2}\Big\{\frac{n(n-1)}{(n-t)^4}+\frac{n(n+1)}{(n+t)^4}\Big\}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi'''(t) > 0$, donc φ'' est croissante sur $[0,1]$. Or, pour $t = \frac{1}{2}$, la série de φ'' est télescopique, d'où

$$\varphi''(\tfrac{1}{2}) = \frac{-32}{27}+\frac{4}{(3/2)^3} = 0.$$

Cela montre que φ' atteint bien son minimum en $t = \frac{1}{2}$. □

Bibliographie

[1] P. Erdős and P. Turán, On a problem in the theory of uniform distribution I, II, *Indag. Math.* **10** (1948), pp. 370–378 ; *ibid.* 406–413.

[2] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, Wiley-Interscience, 1974.

[3] C. Mauduit, J. Rivat, & A. Sárközy, On the pseudorandom properties of n^c, *Illinois J. Math.* **46** (2002), no. 1, 185–197.

[4] H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*, CBMS regional conferences series in mathematics, no. 84, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1994), 220 pp.

[5] J. Vaaler, Some extremal functions in Fourier analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985), pp. 183–216.

Joël Rivat

Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France

`rivat@iecn.u-nancy.fr`

Gérald Tenenbaum
Institut Élie Cartan
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France

`tenenb@ciril.fr`