SUR LA DIMENSION DE L'ESPACE DES ORBITES D'UNE GRASSMANNIENNE SOUS L'ACTION D'UN GROUPE ALGÉBRIQUE.

MICHAEL MAGEN

Résumé. On s'intéresse aux actions d'un groupe algébrique G sur les grassmanniennes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie V ($\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos) déduites d'une action de G sur V. On montre que $\dim_G G(j,V) \leq \dim_G G(k,V)$ si et seulement si $\dim G(j,V) \leq \dim G(k,V)$ où $\dim_G G(r,V)$ désigne la dimension de l'espace des orbites de $G(r,V)$ sous l'action de G (ce qui généralise un résultat de Pyasetskii [3]). On étend ensuite ce résultat aux variétés de drapeaux. Des méthodes différentes nous permettent d'obtenir des résultats sur les nombres d'orbites , quand le corps de base $\mathbb{K}$ est fini.
2000 Mathematics Subject Classification: 20G15, 20G40, 14L30.

Table des matières

1. Introduction

L'objet de cet article est de généraliser le résultat suivant dû à Pyasetskii [3] :

Théorème 1.1.
Soit G un groupe algébrique agissant sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie n. Soit $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V^*)$ les espaces projectifs paramétrant respectivement les droites et les hyperplans de V, tous deux naturellement munis d'une action de G. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Le groupe G agit avec un nombre fini d'orbites sur $\mathbb{P}(V)$,
(ii) Le groupe G agit avec un nombre fini d'orbites sur $\mathbb{P}(V^*)$.

Désormais, sauf dans les sections 3.1 et 3.2, on suppose le corps de base $\mathbb{K}$ algébriquement clos.

L'assertion de Pyasetskii suggère une assertion analogue pour les grassmanniennes de taille k et $n-k$ mais on n'en trouve aucune démonstration (à notre connaissance) dans la littérature. Nous allons montrer en particulier qu'une telle assertion est vraie (corollaire 1.5).

Définition 1.2.
Soit G un groupe algébrique agissant sur une variété algébrique X. D'après le théorème de Rosenlicht [4]*, on peut trouver une partition de X : $X = \coprod_{i=1}^{r} X_i$ tel que les X_i sont des sous-ensembles constructibles G-invariants de X admettant tous un quotient géométrique. On note $\dim_G X$ le maximum des dimensions de ces quotients (ce nombre est bien défini, i.e. indépendant de la partition ad hoc utilisée).*

Pour V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et pour k dans $\{1, \ldots, n-1\}$, on note $G(k, V)$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension k de V.

Soit G un groupe algébrique agissant sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie n. Pour tout j dans $\{1, \ldots, n-1\}$, la grassmannienne $G(j, V)$ est naturellement munie d'une action de G. Le résultat principal de l'article est le suivant :

Théorème 1.3.
On a :

$$\dim_G G(j, V) \leq \dim_G G(k, V) \text{ pour tout couple } (j, k) \text{ tel que } \dim G(j, V) \leq \dim G(k, V).$$

On a en particulier les deux résultats suivants :

Corollaire 1.4.
Pour tout k dans $\{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$\dim_G G(k, V) = \dim_G G(n-k, V).$$

Corollaire 1.5.
Pour tout k dans $\{1, \ldots, n-1\}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) *Le groupe G agit avec un nombre fini d'orbites sur $G(k, V)$*
(*ii*) *Le groupe G agit avec un nombre fini d'orbites sur $G(j, V)$ pour tout j tel que $\dim G(j, V) \leq \dim G(k, V)$.*

Pour démontrer le théorème 1.3, on utilise une généralisation géométrique de la formule de Burnside (théorème 2.4). On démontre un résultat analogue pour les variétés de drapeaux dans la section 2.5 et dans la section 3, ces résultats sont adaptés au contexte d'un corps de base fini.

2. Grassmanniennes, variétés de drapeaux et variétés de Burnside

Pour toutes les notions concernant les partitions et les compositions d'un entier utilisées dans cet article (conjugaison, "raising operators",...), l'ouvrage de référence est celui de Macdonald [2].

2.1. **Variétés de drapeaux.**
Soit n un entier strictement positif.

Définition 2.1.
Soit k un entier strictement positif. On dit que $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k) \in (\mathbb{N})^k$ est une composition de n de longueur k si $a_1 + \cdots + a_k = n$.
Les nombres $a_1, \dots, a_k$ sont appelés les termes de $\underline{a}$.

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

Définition 2.2.
Pour toute composition $(a_1, \dots, a_r)$ de n, on définit la variété de drapeaux :

$$\mathrm{Fl}_{(a_1,\dots,a_r)}(V) = \left\{ \begin{array}{c} 0 = V_0 \subset V_1 \subset \dots V_r = V, \\ \textit{les } V_i \textit{ sont des sous-espaces vectoriels de } V \textit{ et} \\ \textit{pour tout } i, \ \dim V_i/V_{i-1} = a_i \end{array} \right\}.$$

Si G est un groupe algébrique agissant sur V, $\mathrm{Fl}_{(a_1,\dots,a_r)}(V)$ hérite naturellement d'une action de G.

Remarque 2.3.
Pour tout k dans $\{1, \dots, n-1\}$, on a $G(k, V) = \mathrm{Fl}_{(k,n-k)}(V)$.

2.2. **La variété de Burnside d'une G-variété algébrique.**

Soit G un groupe algébrique et X une G-variété.

On définit Σ, la variété de Burnside de X sous l'action de G, de la manière suivante :

$$\Sigma = \{(g, x) \in G \times X \ / \ g.x = x\}.$$

On a $\dim \Sigma \geq \dim G$.

Théorème 2.4.
On a l'égalité suivante :

$$\dim_G X = \dim \Sigma - \dim G.$$

Démonstration :
On peut supposer que le quotient X/G est géométrique et qu'il existe un entier positif k tel que pour tout x dans X, $\dim G.x = k$. On considère le morphisme de projection de Σ dans X, la fibre d'un élément de x est isomorphe à $\{g \in G \ , \ g.x = x\}$ et est donc de dimension constante $\dim G - k$. On a donc $\dim \Sigma = \dim X + \dim G - k$. Par ailleurs, d'après le théorème de Rosenlicht, on a $\dim(X/G) = \dim X - k$ d'où le résultat.$\square$

Remarque 2.5.
Le théorème 2.4 fournit une nouvelle démonstration du fait que le nombre $\dim_G X$ *est bien défini.*

Soit g dans G, on note X_g l'ensemble des points de X fixés par g.

Remarque 2.6.
Soit $q : \Sigma \to G$ le morphisme de projection. Pour tout g dans G, la fibre $q^{-1}(\{g\})$ est isomorphe à X_g.

D'après le théorème 2.4, le calcul de la dimension de l'espace des orbites de l'action de G sur X se ramène au calcul de la dimension de la variété de Burnside. Le calcul de cette dernière dimension peut se faire en étudiant le morphisme de projection de Σ dans G, en utilisant une partition finie de G en constructibles sur lesquels la dimension de la fibre est constante.

Dans la section suivante, on construit une telle partition pour $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ quand X est une variété de drapeaux.

2.3. **Partitions d'un entier, classes de conjugaison unipotentes et squelettes dans** GL.

Soit n un entier strictement positif.

Définition 2.7.
Soit k un entier strictement positif. On dit que $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in (\mathbb{N})^k$ est une partition de n de longueur k si $\lambda_1+\cdots+\lambda_k = n$ et $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$.
Les nombres $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ sont appelés les termes de λ.

On note $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n. Rappelons la définition de l'ordre de dominance sur $\mathcal{P}(n)$.

Définition 2.8.
Soit $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_r)$ dans $\mathcal{P}(n)$. On note $\lambda \geq \mu$ si pour tout i dans $\{1,\dots,r\}$, $\lambda_1+\cdots+\lambda_i \geq \mu_1+\cdots+\mu_i$.

Définition 2.9.
Soit m un entier strictement positif et z un élément de $\mathbb{K}$. On pose :

$$J_m(z) = \begin{pmatrix} z & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z \end{pmatrix}.$$

Soit $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_r)$ une partition de n dont tous les termes sont strictement positifs et z un élément de $\mathbb{K}$. On pose :

$$J_\lambda(z) = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1}(z) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2}(z) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_{\lambda_r}(z) \end{pmatrix}.$$

On rappelle la proposition suivante :

Proposition 2.10.
Soit u un unipotent dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, il existe une unique partition λ de n dont tous les termes sont strictement positifs telle que u soit conjugué à $J_\lambda(1)$. On dit alors que u est un unipotent de type λ.

Définition 2.11.
Soit u et v dans $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, on note $u\ \mathcal{R}\ v$ s'il existe un entier r, deux r-uplets

$(a_1, \ldots, a_r)$ et $(b_1, \ldots, b_r)$ d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et r partitions $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(r)}$ tels que :

$$u \text{ est conjugué à } \begin{pmatrix} J_{\lambda^{(1)}}(a_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda^{(2)}}(a_2) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda^{(r)}}(a_r) \end{pmatrix},$$

$$\text{et } v \text{ est conjugué à } \begin{pmatrix} J_{\lambda^{(1)}}(b_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{\lambda^{(2)}}(b_2) & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J_{\lambda^{(r)}}(b_r) \end{pmatrix}.$$

Clairement, la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$. On note $\mathcal{S}(n)$ l'ensemble de ses classes d'équivalence ($\mathcal{S}(n)$ est fini). Pour s dans $\mathcal{S}(n)$, on note $\mathrm{GL}^{(s)}(n, \mathbb{K})$ l'ensemble des éléments de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ dans la classe d'équivalence s.

Définition 2.12.
Les éléments de $\mathcal{S}(n)$ sont appelés squelettes de taille n.

Définition 2.13.
Un élément s de $\mathcal{S}(n)$ est dit unipotent (respectivement semisimple) s'il existe un élément unipotent (respectivement semisimple) dans $\mathrm{GL}^{(s)}(n, \mathbb{K})$.

Proposition 2.14.
Pour tout s dans $\mathcal{S}(n)$, $\mathrm{GL}^{(s)}(n, \mathbb{K})$ est constructible. Ainsi, on a la partition suivante de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ en constructibles :

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \coprod_{s \in \mathcal{S}(n)} \mathrm{GL}^{(s)}(n, \mathbb{K}).$$

Nous donnons à titre d'exemple cette partition pour $n = 3$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(3,\mathbb{K}) \quad = \quad & \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{K}^*. \right\} \\
\cup \quad & \left\{ h \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} h^{-1}, \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{K}^*, \\ h \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{K}). \end{array} \right. \right\} \\
\cup \quad & \left\{ h \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} h^{-1}, \left\{ \begin{array}{l} a \in \mathbb{K}^*, \\ h \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{K}). \end{array} \right. \right\} \\
\cup \quad & \left\{ h \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} h^{-1}, \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in (\mathbb{K}^*)^2, \\ a \neq b, \\ h \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{K}). \end{array} \right. \right\} \\
\cup \quad & \left\{ h \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} h^{-1}, \left\{ \begin{array}{l} (a,b) \in (\mathbb{K}^*)^2, \\ a \neq b, \\ h \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{K}). \end{array} \right. \right\} \\
\cup \quad & \left\{ h \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} h^{-1}, \left\{ \begin{array}{l} (a,b,c) \in (\mathbb{K}^*)^3, \\ a \neq b \neq c \neq a, \\ h \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{K}). \end{array} \right. \right\}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant énoncer certaines propriétés remarquables de cette partition, propriétés dont nous allons nous servir de manière essentielle dans la démonstration du résultat principal.

Proposition 2.15.
Soit $\underline{a}$ une composition de n. La fonction :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{N} \\ g & \mapsto & \dim(\mathrm{Fl}_{\underline{a}}(V))_g \end{array} \right.$$

est constante sur les $\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K})$.

Proposition 2.16.
Soit g un élément de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, il existe un squelette t semisimple tel que pour tout v dans $\mathrm{GL}^{(t)}(n,\mathbb{K})$ et pour toute composition $\underline{a}$ de n :

$$\dim(\mathrm{Fl}_{\underline{a}}(V))_g = \dim(\mathrm{Fl}\,\underline{a}(V))_v.$$

Proposition 2.17.
Soit g un élément de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, on a :

$\dim G(j,V)_g \leq G(k,V)_g$ *pour tout couple (j,k) tel que* $\dim G(j,V) \leq \dim G(k,V)$.

Cette dernière assertion donne les deux résultats suivants dans le cadre des variétés de drapeaux :

Corollaire 2.18.
Soit g un élément de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, et $(a_1,\ldots,a_r)$ une composition de n. On a :

$$\dim(\mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_r)}(V))_g = \dim(\mathrm{Fl}_{(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(r)})}(V))_g \text{ pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_r,$$

où $\mathfrak{S}_r$ désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1,\dots,r\}$.

Corollaire 2.19.
Soit g un élément de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, *$\underline{a}=(a_1,\dots,a_r)$ une composition de n, i dans* $\{1,\dots,r-1\}$ *et b et c deux entiers tels que $b+c=a_i+a_{i+1}$ et $bc\le a_ia_{i+1}$ (i.e* $\dim G(b,b+c)\le \dim G(a_i,a_i+a_{i+1})$*). On a :*

$$\dim(\mathrm{Fl}_{(a_1,\dots,a_{i-1},b,c,a_{i+2},\dots a_r)}(V))_g\le \dim(\mathrm{Fl}_{(a_1,\dots,a_r)}(V))_g.$$

La proposition 2.15 est classique, démontrons les quatre autres assertions.

Démonstration de la proposition 2.16 :
On se ramène facilement (par la considération des sous-espaces caractéristiques) au cas où g est unipotent.
Supposons donc que x est unipotent de type λ. Soit y un élément semisimple de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ et $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_s)$ une partition de n. On dit que y est de type μ s'il existe s éléments non nuls de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts $z_1,\dots,z_s$ tels que :

$$y=\begin{pmatrix} z_1Id_{\mu_1} & & \\ & \ddots & \\ & & z_sId_{\mu_s}\end{pmatrix}.$$

On note λ' la partition conjuguée de λ, et soit t le squelette semisimple tel que $\mathrm{GL}^{(t)}(n,\mathbb{K})$ est formé des semisimples de type λ'. Soit v dans $\mathrm{GL}^{(t)}(n,\mathbb{K})$.

On pose $b_i=a_1+\dots+a_i$ pour tout i dans $\{1,\dots,r\}$, $\mathfrak{M}=\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{b_1},\mathbb{K}^{b_2})\oplus\dots\oplus\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^{b_{r-1}},\mathbb{K}^{b_r})$ et $G=\mathrm{GL}(b_1,\mathbb{K})\times\dots\times\mathrm{GL}(b_r,\mathbb{K})$.On se donne une suite d'injections $\mathbb{K}^{b_1}\hookrightarrow\mathbb{K}^{b_2}\hookrightarrow\dots\hookrightarrow\mathbb{K}^{b_r}$ de sorte que l'on a une flèche de restriction $\mathrm{GL}(b_r,\mathbb{K})\to G$. On définit maintenant les deux applications suivantes :

$$\phi:\left\{\begin{array}{ccc}(\mathrm{Fl}_{\underline{a}})_x & \to & \mathcal{P}(b_1)\times\dots\times\mathcal{P}(b_r)\\ (V_0\subset\dots\subset V_r) & \mapsto & (\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(r)})\end{array}\right.,$$

où $\lambda^{(i)}$ est le type de la restriction de x à V_i pour tout i dans $\{1,\dots,r\}$ et

$$\psi:\left\{\begin{array}{ccc}(\mathrm{Fl}_{\underline{a}})_v & \to & \mathcal{P}(b_1)\times\dots\times\mathcal{P}(b_r)\\ (V_0\subset\dots\subset V_r) & \mapsto & (\lambda^{(1)},\dots,\lambda^{(r)})\end{array}\right.,$$

où $\lambda^{(i)}$ est le type de la restriction de v à V_i pour tout i dans $\{1,\dots,r\}$.
On obtient donc les deux partitions (en ensembles constructibles) suivantes des ensembles $(\mathrm{Fl}_{\underline{a}})_x$ et $(\mathrm{Fl}_{\underline{a}})_v$:

$$(\mathrm{Fl}_{\underline{a}})_x=\coprod_{\alpha\in\mathcal{P}(b_1)\times\dots\times\mathcal{P}(b_r)}\phi^{-1}(\{\alpha\}),$$
$$(\mathrm{Fl}_{\underline{a}})_v=\coprod_{\beta\in\mathcal{P}(b_1)\times\dots\times\mathcal{P}(b_r)}\psi^{-1}(\{\beta\}).$$

Nous allons montrer que pour tout α dans $\mathcal{P}(b_1)\times\dots\times\mathcal{P}(b_r)$, $\dim\phi^{-1}(\{\alpha\})=\dim\psi^{-1}(\{\alpha'\})$, où α' est obtenue en prenant les conjuguées des termes de α.

Soit donc $\alpha=(\alpha^{(1)},\dots,\alpha^{(r)})$ dans $\mathcal{P}(b_1)\times\dots\times\mathcal{P}(b_r)$. On pose $\underline{x}=(x_1,\dots,x_r)$ dans G où x_i est la restriction de x à $\mathbb{K}^{b_i}$ (x_i est un unipotent de type $\alpha^{(i)}$) pour tout i dans $\{1,\dots,r\}$. On pose aussi $\underline{v}=(v_1,\dots,v_r)$ dans G où v_r est conjugué à v et v_i est la restiction de v à $\mathbb{K}^{b_i}$ et est un semisimple de type la conjuguée de $\alpha^{(i)}$

pour tout i dans $\{1,\dots,r\}$.

D'après [1, lemme 3], on a :

$$\dim \mathfrak{M}^{\underline{x}} = \dim \mathfrak{M}^{\underline{v}}.$$

Par ailleurs, on a deux flèches surjectives :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^{\underline{x}} & \rightarrow & \phi^{-1}(\{\alpha\}) \\ (g_1,\dots,g_{r-1}) & \mapsto & (g_1(\mathbb{K}^{b_1}) \subset \cdots \subset g_{r-1}(\mathbb{K}^{b_{r-1}})) \end{array} \right. ,$$

et

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}^{\underline{v}} & \rightarrow & \psi^{-1}(\{\alpha'\}) \\ (g_1,\dots,g_{r-1}) & \mapsto & (g_1(\mathbb{K}^{b_1}) \subset \cdots \subset g_{r-1}(\mathbb{K}^{b_{r-1}})) \end{array} \right. .$$

Pour tout $\underline{V}$ dans $\phi^{-1}(\{\alpha\})$, $f^{-1}(\{\underline{V}\})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}(b_1,\mathbb{K})^{x_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}(b_r-1,\mathbb{K})^{x_{r-1}}$ et pour tout $\underline{W}$ dans $\psi^{-1}(\{\alpha'\})$, $g^{-1}(\{\underline{W}\})$ est isomorphe à $\mathrm{GL}(b_1,\mathbb{K})^{v_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}(b_r-1,\mathbb{K})^{v_{r-1}}$, or ces deux espaces ont même dimension d'où le résultat.$\square$

Démonstration de la proposition 2.17 :
La première assertion est un simple résultat de dualité. Pour démontrer la seconde, on observe que d'après la proposition 2.16 on peut supposer que x est semisimple. Le résultat est alors élémentaire.$\square$

Démonstration du corollaire 2.18 :
Soit i dans $\{1,\dots,r-1\}$, montrons que le résultat est vrai pour pour la transposition $\tau = (i,i+1)$. Notons $X = \mathrm{Fl}_{(a_1,\dots,a_r)}(V)$, $Y = \mathrm{Fl}_{(a_{\tau(1)},\dots,a_{\tau(r)})}(V)$ et $Z = \mathrm{Fl}_{(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+a_{i+1},a_{i+2},\dots,a_r)}(V)$. On définit les flèches suivantes :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} X_g & \rightarrow & Z_g \\ (V_0 \subset \cdots \subset V_r) & \mapsto & (V_0 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_{i+1} \subset V_r) \end{array} \right.$$

et

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} Y_g & \rightarrow & Z_g \\ (V_0 \subset \cdots \subset V_r) & \mapsto & (V_0 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_{i+1} \subset V_r) \end{array} \right. .$$

Soit $\underline{V} = (V_0 \subset \cdots \subset V_{i-1} \subset V_{i+1} \subset V_r)$ dans Z_g, on note $\tilde{g}$ l'élément de $\mathrm{GL}(V_{i+1}/V_{i-1})$ déduit de g. On a $u^{-1}(\{\underline{V}\}) = G(a_i, V_{i+1})_{\tilde{g}}$ et $v^{-1}(\{\underline{V}\}) = G(a_{i+1}, V_{i+1})_{\tilde{g}}$. Donc d'après la proposition 2.17, pour tout $\underline{V}$ dans Z_g, $\dim u^{-1}(\{\underline{V}\}) = \dim v^{-1}(\{\underline{V}\})$, et ϕ et ψ sont surjectives, d'où le résultat.$\square$

Le corollaire 2.19 se montre de la même manière.

2.4. **Démonstration du théorème 1.3.**

Le groupe G agissant sur V, on peut supposer que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$. Pour tout j dans $\{1,\dots,n\}$, on note Σ_j la variété de Burnside de $G(j,V)$:

$$\Sigma_j = \{(g,P) \in G \times G(j,V) \ / \ g.P = P\}.$$

On note p_j la projection de Σ_j dans G. On a : $G = \coprod_{s\in\mathcal{S}(n)} (\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K}) \cap G)$. Et donc $\Sigma_j = \coprod_{s\in\mathcal{S}(n)} p_j^{-1}(\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K}) \cap G)$. Puis $\dim \Sigma_j = \max\{\dim p_j^{-1}(\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K}) \cap G)\}$.

Pour $g \in G$, $p_j^{-1}(\{g\}) = \{P \in G(j,V) \ / \ g.P = P\}$, par conséquent d'après la proposition 2.15, la dimension de $p_j^{-1}(\{g\})$ est constante sur les $\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K}) \cap G$ pour tout s dans $\mathcal{S}(n)$, notons la $d_j(s)$. On a donc $\dim p_j^{-1}(\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K}) \cap G) = \dim(\mathrm{GL}^{(s)}(n,\mathbb{K}) \cap G) + d_j(s)$.

D'après la proposition 2.17, $d_j(s) \leq d_k(s)$ pour tout $s \in \mathcal{S}(n)$ et tout $j \in E_k$. On obtient donc $\dim \Sigma_j \leq \dim \Sigma_k$ ce qui nous permet de conclure d'après le théorème 2.4.$\square$

2.5. **Un résultat analogue pour les variétés de drapeaux.**

Soit G un groupe algébrique et V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une action de G.

Soit $(a_1, \ldots, a_r)$ une composition de n. Il existe une permutation σ dans $\mathfrak{S}_r$ tel que $(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(r)})$ est une partition de n. On note $P(a_1, \ldots, a_r)$ cette partition.

On démontre comme on l'a fait pour les grassmanniennes les résultats suivants :

Théorème 2.20.
Soit $(a_1, \ldots, a_r)$ une composition de n. On a l'égalité suivante :

$$\dim_G \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_r)}(V) = \dim_G \mathrm{Fl}_{(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(r)})}(V) \ \textit{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_r.$$

Proposition 2.21.
Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ une composition de n, i dans $\{1, \ldots, r-1\}$ et b, c deux entiers tels que $b + c = a_i + a_{i+1}$ et $bc \leq a_i a_{i+1}$, i.e $\dim G(b, b+c) \leq \dim G(a_i, a_i + a_{i+1})$. On a :

$$\dim_G \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_{i-1},b,c,a_{i+2},\ldots a_r)}(V) \leq \dim_G \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_r)}(V).$$

On déduit de ces deux assertions le résultat suivant :

Théorème 2.22.
Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ et $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ deux compositions de n telles que $P(\underline{a}) \geq P(\underline{b})$. On a :

$$\dim_G \mathrm{Fl}_{\underline{a}}(V) \leq \dim_G \mathrm{Fl}_{\underline{b}}(V).$$

Ce théorème se déduit directement des deux résultats précédents et du lemme 4.1 (ce lemme est démontré en annexe et est totalement indépendant du reste de l'article).

3. Grassmaniennes et variétés de drapeaux sur un corps fini

3.1. **Grassmaniennes sur un corps fini.**

Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments. Soit maintenant n un entier naturel non nul et V un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel de dimension finie n.

Soit E un ensemble fini, on note $\#E$ son cardinal. Si E est muni d'une action d'un groupe G, on note $N(G,E)$ le nombre d'orbites de cette action.

Proposition 3.1.
Soit G un groupe agissant sur V. On déduit de cette action une action sur $G(r,V)$ pour tout r dans $\{1,\dots,n-1\}$. On a :

$N(G,G(j,V)) \leq N(G,G(k,V))$*pour tout couple (j,k) tel que $\#G(j,V) \leq \#G(k,V)$.*

Démonstration :
On commence par remarquer que le résultat annoncé est équivalent au résultat suivant : pour tout k dans $\{1,\dots,n/2\}$, on a les deux assertions suivantes :

$$\begin{array}{ll} (i) & N(G,G(k,V)) \geq N(G,G(r,V)) \text{ pour tout } r \text{ dans } \{1,\dots,k\}, \\ (ii) & N(G,G(k,V)) = N(G,G(n-k,V)) \end{array}$$

Démontrons l'assertion (i).

Pour r dans $\{1,\dots,n-1\}$, on note F_r le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $\#G(r,V)$ des fonctions de $G(r,V)$ dans $\mathbb{K}$. Le sous-espace vectoriel de F_r formé par les fonctions G-invariantes est noté F_r^G. On a l'égalité :

$$N(G,G(r,V)) = \dim F_r^G.$$

Soit donc k dans $\{1,\dots,n/2\}$, et r dans $\{1,\dots,k\}$
On définit l'application suivante :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} F_r & \rightarrow & F_k \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array} \right. ,$$

où $\hat{f}$ est définie par :

$$\hat{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} G(k,V) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ H & \mapsto & \displaystyle\sum_{P \subset H} f(P) \end{array} \right. .$$

Cette application est G-équivariante, nous allons montrer qu'elle est injective, la première partie du résultat sera alors démontré.

Pour cela, on va construire une application $\pi : F_k \rightarrow F_r$ telle que $\pi \circ \phi = Id_{F_r}$. On pose :

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} F_k & \rightarrow & F_r \\ g & \mapsto & \check{g} \end{array} \right. ,$$

où $\check{g}$ est définie par :

$$\check{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} G(r,V) & \rightarrow & \mathbb{C} \\ P & \mapsto & \displaystyle\sum_{H} \epsilon_P(H) g(H) \end{array} \right. ,$$

et les $\epsilon_P(H)$ sont des nombres complexes. L'exercice consiste à montrer que l'on peut définir ces coefficients de manière à obtenir l'égalité $\pi \circ \phi = Id_{F_k}$.

Soit $P_0 \in G(r,V)$, on définit $f_{P_0} \in F_r$ par :

$$f_{P_0}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P = P_0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall H \in G(k,V) \quad \hat{f}_{P_0}(H) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \subset H \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis :

$$\begin{aligned} \forall P \in G(r,V) \quad \check{\hat{f}}_{P_0}(P) &= \sum_H \epsilon_P(H) \hat{f}_{P_0}(H) \\ &= \sum_{H \supset P_0} \epsilon_P(H). \end{aligned}$$

On veut donc :

$$\sum_{H \supset P_0} \epsilon_P(H) = \begin{cases} 0 & si \quad P \neq P_0, \\ 1 & si \quad P = P_0. \end{cases}$$

Pour ce faire, on va supposer que $\epsilon_P(H)$ ne dépend que de la dimension de l'intersection de P et H. On pose donc $\epsilon_P(H) = \epsilon_{\dim P \cap H}$. Il nous faut donc définir les ϵ_j pour $j \in \{0,\ldots,r\}$ de manière convenable.

Soit $i \in \{0,\ldots,r\}$ et soit P et P_0 dans $G(r,V)$ tels que $\dim(P \cap P_0) = i$. On pose pour $j \in \{0,\ldots,r\}$, $a_{i,j} = \#\{H \in G(k,V)/P_0 \subset H\,,\, \dim(P \cap H) = j\}$. Ces nombres ne dépendent pas des choix de P et P_0. Soit A la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$. Montrons que A est inversible. On a $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$ (car $P \cap P_0 \subset P \cap H$) i.e. A est triangulaire supérieure.

Montrons maintenant que pour tout $i \in \{0,\ldots,r\}$, $a_{i,i}$ est non nul. Soit donc $i \in \{0,\ldots,r\}$, on doit trouver un H dans $G(k,V)$ tel que $P_0 \subset H$ et $\dim P \cap H = i$. Nous allons en construire un. On choisit une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de V telle que $P_0 = \text{vect}(e_1,\ldots,e_r)$ et $P_1 = \text{vect}(e_1,\ldots,e_i,e_{r+1},\ldots,e_{2r-i})$. La famille $(e_{2r-i+1},\ldots,e_n)$ comporte $n-2r+i$ éléments et on a l'inégalité suivante : $k-r \leq n-2r+i$. Par conséquent, on peut poser

$$H = \text{vect}(e_1,\ldots,e_r,e_{2r-i+1},\ldots,e_{k+r-i}) \in G(k,V).$$

Ce H convient.

A est donc inversible.

On pose $C = A^{-1}M$ où M est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On pose enfin pour $j \in \{0,\ldots,r\}$, $\epsilon_j = C_{j+1,1}$.
On a maintenant:

$$\forall P \in G(r,V) \quad \check{\check{f}}_{P_0}(P) = \sum_{r=0}^{k} b_{dim(P\cap P_0),r}\epsilon_r \quad ,$$

et donc

$$\check{\check{f}}_{P_0}(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } P = P_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

i.e. $\check{\check{f}}_{P_0} = f_{P_0}$. Le morphisme ϕ est donc bien injectif.

L'assertion (ii) se démontre exactement de la même manière.□

3.2. **Variétés de drapeaux sur un corps fini.**
On conserve les notations de la section précédente.

On commence par rappeler la proposition suivante :

Proposition 3.2.
Soit G un groupe, E et F deux G-ensembles finis et $\pi : E \to F$ une application G-équivariante. On note r est le nombre d'orbites de G sur F et $y_1, \ldots, y_r$ des représentants de chacune de ces orbites. Alors :

$$N(G,E) = \sum_{i=1}^{r} N(Stab_G(y_i), \pi^{-1}(\{y_i\})).$$

On peut maintenant énoncer les deux résultats du paragraphe :

Théorème 3.3.
Soit $(a_1, \ldots, a_r)$ une composition de n. On a l'égalité suivante :

$$N(G, \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_r)}(V)) = N(G, \mathrm{Fl}_{(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(r)})}(V)) \text{ pour tout } \sigma \text{ dans } \mathfrak{S}_r.$$

Théorème 3.4.
Soit $\underline{a} = (a_1, \ldots, a_r)$ et $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ deux compositions de n telles que $P(\underline{a}) \geq P(\underline{b})$, on a :

$$N(G, \mathrm{Fl}_{\underline{a}}(V)) \leq N(G, \mathrm{Fl}_{\underline{b}}(V)).$$

Démonstration du théorème 3.3:
Il suffit de démontrer le résultat pour $\sigma = (i, i+1)$ avec i dans $\{1, \ldots, r-1\}$. Dans ce cas on applique la proposition 3.2 aux flèches naturelles

$$\mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_r)}(V) \to \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,(a_i+a_{i+1}),\ldots,a_r)}(V)$$

et

$$\mathrm{Fl}_{(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(r)})}(V) \to \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,(a_i+a_{i+1}),\ldots,a_r)}(V)$$

pour calculer les nombres $N(G, \mathrm{Fl}_{(a_1,\ldots,a_r)}(V))$ et $N(G, \mathrm{Fl}_{(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(r)})}(V))$, le résultat découle alors de la proposition 3.1.□

On démontre un résultat analogue à la proposition 2.21 en utilisant la même technique, et on en déduit toujours d'après le lemme 4.1 le théorème 3.4.

4. Annexe : un lemme combinatoire

Cette section purement technique est une variation sur l'idée des "raising operators" du livre de Macdonald.

Soit n un entier positif. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ dans $\mathcal{P}(n)$, et soit i dans $\{1, \dots, r-1\}$, on pose $R_i(\lambda) = P(\lambda_1, \dots, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1} - 1, \dots, \lambda_r)$. On a le résultat suivant :

Lemme 4.1.
Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ dans $\mathcal{P}(n)$. On a $\lambda \geq \mu$ si et seulement s'il existe des entiers positifs $a_1, \dots, a_{r-1}$ tels que $\lambda = R_{r-1}^{a_{r-1}} \circ \cdots \circ R_1^{a_1}(\mu)$.

Références

[1] Kac, V.G. *Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory ,II.* Journal of Algebra **78** (1982) 141-162.

[2] Macdonald, I.G. *Symmetric functions and Hall polynomials.* Oxford Mathematical monographs, 1979.

[3] Pyasetskii, V. *Linear Lie groups acting with finitely many orbits.* Functional Anal. Appl. **9** (1975) 351-353.

[4] Rosenlicht, M. *A remark on quotient spaces.* An.Acad.Brasil.Ci. **35**. (1963) 487-489.

Laboratoire de Mathématiques de Versailles, 45 avenue des Etats-Unis , Bat. Fermat, 78035 VERSAILLES, FRANCE

E-mail address: `magen@math.math.uvsq.fr`

URL: `http://www.math.uvsq.fr/~magen`