



# De l'opérateur de trace dans les jeux de Conway

MÉMOIRE DE MASTER II

présenté par **Nicolas Tabareau**

sous la direction de Paul-André Melliès

Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

1	Carnet de bord	1
2	Jeu de Conway à Gain	13
3	Construction du comonoïde commutatif libre	21
4	Un modèle de logique linéaire intuitionniste	31
5	Extension à un modèle de référence utilisant la trace	35
	Conclusion et travaux futurs	41
	Bibliographie	43
	Annexes	45



# Résumé

La compréhension sémantique des langages avec références est encore assez partielle et l'on est loin d'une extension de l'isomorphisme de Curry-Howard aux langages de programmation impératifs. Néanmoins, dans un article récent Samson Abramsky, Kohei Honda et Guy McCusker définissent une sémantique des jeux complètement adéquate (fully abstract) pour un langage impératif en appel par valeur, avec variables muables et types références [Abramsky et al., 1998]. Le modèle est défini au moyen de jeux d'arènes de Hyland et Ong, et de stratégies filaires et bien parenthésées. Dans une note de recherche un peu plus ancienne [Milner, 1994], Robin Milner interprète l'opérateur "new" du pi-calcul au moyen d'un opérateur de trace (ou de "feedback"). Notre travail a pour but initial de comprendre ensemble ces deux articles. Mais une autre motivation doit s'ajouter à ce travail, motivation qui s'inscrit dans un vaste projet de refonte de l'informatique et de sa théorie dans un cadre totalement algébrique.

Dans un premier temps, nous avons construit un modèle de sémantique des jeux parenthésés de logique linéaire intuitionniste disposant de plus d'un opérateur de trace. Pour cela, nous avons utilisé le modèle des jeux de Conway, augmenté avec une notion de gain définie de manière axiomatique. Cette politique de définition algébrique nous permet de rapprocher cette notion de gain d'une forme de distance ou de norme sur l'espace des positions du jeu. Cela participe d'une géométrisation du problème qui pourrait déboucher vers un lien futur avec la Géométrie des Interactions.

Ensuite, nous avons montré l'existence d'un comonoïde commutatif libre sur les jeux de Conway à gain. Cette façon de voir permet de lever le voile qui masque bien souvent les différentes définitions de l'exponentielle dans un même cadre sémantique. Cette modalité acquiert ainsi un rôle plus intrinsèque et ne fait plus l'objet de controverse.

Enfin, nous avons utilisé notre nouveau cadre pour décrire un modèle d'un langage de type Algol avec fonctionnelle d'ordre supérieur. Pour cela, nous avons allié le pouvoir de la logique linéaire pour décrire l'aspect fonctionnel du langage ainsi que le pouvoir des traces pour décrire l'aspect mémoriel du langage.



# Chapitre 1

## Carnet de bord

Dans cette introduction en forme de journal de voyage, nous allons retracer les grandes lignes de notre réflexion sur la modélisation des références dans un cadre algébrique.

### Prologue

**Algèbre et sémantique.** Le projet global qui nous anime est de rattacher algèbre et sémantique, le plus souvent grâce à des intermédiaires catégoriques. Ceci permettra d'utiliser le formidable éventail de concept développé depuis plus de deux siècles dans ce champ mathématique. C'est d'ailleurs un vaste projet qui anime nombre de mathématiciens, logiciens ou informaticiens actuels comme Girard, Abramsky ou Hyland pour ne citer qu'eux. Il est en effet inévitable que le séisme qui s'est produit dans la physique du début du vingtième siècle se renouvelle en informatique sous l'impulsion d'une vraie jonction avec l'algèbre. Si l'informatique peut être vue comme la mathématique du discret, reste à donner un sens précis à cette intuition. Déjà bon nombre de concepts catégoriques ont pris du sens dans le cadre sémantique mais ce n'est pas suffisant pour considérer qu'un pont solide a été établi. C'est par exemple pour le renforcer que l'avant-garde de la communauté concurrente a introduit le concept d'homotopie pour décrire les phénomènes d'interférences entre deux processus s'exécutant en parallèle [Goubault, 2000]. Le concept d'homotopie a aussi été le moyen de décrire des notions techniques comme l'innocence en sémantique des jeux [Melliès, 2004a]. Nous ne reviendrons pas ici sur ces notions mais nous nous efforcerons de donner d'autres pistes algébriques. Nous nous intéresserons au lien entre la notion catégorique d'un opérateur de trace et le concept de référence dans les langages de programmation ; nous introduisons une notion positionnelle de gain sous la forme d'une distance entre deux positions ; et décrivons différentes méthodes algébriques pour construire le monoïde commutatif libre dans une catégorie.

**Trace et référence : lorsque  $entrée = sortie$  fait sens.** Nous pensons que les traces qui formalise essentiellement le concept sémantique de *feedback* (lorsque l'entrée peut être "branchée" sur la sortie) forment un cadre intéressant pour décrire les références ou les variables locales. En effet, une variable locale peut être vue à la fois comme une entrée (l'écriture) et une sortie (la lecture) qui vivent ensemble grâce à la trace. Mais

il nous faut donner vie à cette idée. La démarche adoptée est la suivante ; regarder un modèle sémantique des jeux de logique linéaire pour lequel on peut définir une trace. En effet, l’aspect sémantique des jeux permet de décrire fidèlement la partie fonctionnelle du langage (beaucoup de résultats récents de “full abstraction” passent par ce chemin) et l’existence d’une trace permet d’ajouter la couche mémorielle nécessaire à la description des références.

La tâche semble malaisée tant la logique linéaire représente un moyen de comprendre le séquentiel, ie. l’absence de boucle tandis que l’existence de feedback est précisément un moyen d’en créer à loisir ! Pourtant, cela ne semble pas absurde d’essayer de faire vivre ensemble ces deux notions car cela s’inscrit dans un processus de rapprochement de la logique linéaire et de la théorie des noeuds initié par des gens comme Paul-André Melliès via la notion d’homotopie.

Dans cette optique, nous avons dans un premier temps étudié les jeux asynchrones [Melliès, 2005] pour nous rendre compte que l’existence de traces était condamnée par la notion de gain donnée originellement. En effet, ce gain n’étant pas autodual, il brise la symétrie au cœur de l’opérateur de trace (en empêchant la possibilité d’avoir une simplification à gauche). Il nous a donc fallu faire un lourd travail pour isoler la notion de gain de la distinction  $\otimes/\Gamma$  en logique linéaire, distinction à l’origine de cette asymétrie.

Méthodologiquement, nous nous sommes tournés vers un modèle de sémantique des jeux où la trace était déjà présente, les jeux de Conway. Ce modèle admet une trace de manière canonique car il est compact fermé, ie. que le tenseur  $y$  est autodual. Malheureusement, ce modèle a été un peu délaissé par la communauté sémantique, et des notions cruciales comme le parenthésage  $y$  sont absentes. Nous avons donc voulu les introduire sans pour autant briser la structure compacte close. À terme, nous envisageons des jeux asynchrones avec un opérateur de trace comme synthèse entre les jeux de Conway et les jeux asynchrones.

**Distance et gain : une formalisation du contrôle.** La notion de gain a été pour nous une façon de recomprendre le parenthésage et, par ce biais, un moyen d’augmenter notre catégorie de Conway avec du contrôle. Le contrôle représente en particulier le fait de pouvoir forcer un programme à regarder systématiquement un, deux ou tous les arguments de la fonction qu’il calcule. Toujours dans cette optique algèbre et sémantique, nous en donnons ici une version axiomatique qui permet de rapprocher le gain au concept de distance entre deux positions. La distance exprimant ici le nombre de questions Joueur et Opposant ouvertes et non répondues (appelées *questions pendantes*) entre ces deux positions.

Cette approche singulière nous a permis à la fois de préserver la structure compacte fermée des jeux de Conway mais aussi de rapprocher ces derniers d’une autre tentative d’articulation entre algèbre et sémantique, à savoir la Géométrie des Interactions.

Plus précisément, l’axiomatique proposée permet de considérer que le gain d’un chemin  $s$  calcule le nombre de questions posées par Joueur et Opposant dans  $s$ . En particulier, un seul coup peut poser plusieurs questions, ce qui n’arrive pas dans une approche par justification avec pointeurs.

Il est important de noter que notre définition est axiomatique et ainsi capture diverses notions de gain qui permettent de formaliser en particulier divers comportements du jeu

booléen. On peut dans cette optique définir plusieurs jeux booléens donnant différentes interprétations au jeu

$$\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2 \longrightarrow \mathbb{B}_3$$

Une dans laquelle le premier coup d'Opposant dans  $\mathbb{B}_3$  force à interroger à la fois  $\mathbb{B}_1$  et  $\mathbb{B}_2$ , ou alors l'un des deux, ou bien même aucun.

On peut rapprocher cette définition (orientée distance) à la notion de norme dans un espace de Hilbert et ainsi voir se dessiner un pont entre jeux asynchrones tracés avec gain et Géométrie de l'Interaction, même si ce lien reste malheureusement fantasmatique.

### **Comonoïde libre et exponentielle : le phénomène de duplication.**

Voici en quelques lignes les motivations amenant au problème du calcul du comonoïde libre.

- La logique linéaire est la voie qui nous ouvre à l'algèbre
- Dans ce cadre, le comonoïde commutatif  $1 \leftarrow !A \rightarrow !A \otimes !A$  décrit la copie
- Un état est un objet copiable dans notre catégorie
- Comment calculer  $!A$  librement

Nous avons ensuite défini un cadre dans lequel on peut calculer l'exponentielle comme un comonoïde commutatif libre. Ici encore, cette approche permet de donner un statut algébrique à une modalité de logique linéaire. Nous donnons dans un premier temps un cadre agréable dans lequel l'exponentielle se calcule simplement comme une extension de Kan. Ensuite nous mentionnons un résultat de Dubuc pour construire le comonoïde libre dans un cadre plus général où certaines propriétés de commutation aux limites sont relâchées. Et enfin, nous étendons ce résultat au cas du comonoïde commutatif libre, cas qui nous intéresse ici.

Comme cette construction est beaucoup moins lisse que celle par extension de Kan, nous espérons dans un avenir proche pouvoir la réinterpréter elle aussi en terme d'extensions de Kan. Cette optique ouvre d'ailleurs la voie au développement d'une théorie monoïdale s'appuyant sur la théorie des opérades de May mais ce champ est encore à explorer plus en détail.

Pour passer d'un modèle de MELL à un modèle de logique linéaire intuitionniste, il nous manque la construction d'un produit cartésien. Cette construction étant impossible pour des jeux Conway généraux [Melliès, 2004b], nous avons restreint la catégorie étudiée à celle des jeux de Conway négatifs, où nous avons alors défini le produit comme la simple union des deux jeux.

On est alors essentiellement en présence d'un modèle de logique linéaire tracé et il nous faut maintenant trouver un langage pour exprimer notre idée première qui est que les références se modélisent avec des traces.

**Un modèle de langage avec trace.** Toutes ces investigations nous permettent de construire un langage de type Algol avec des références (sans aliasing) à la fois globale et locale. Les références  $y$  sont interprétées comme des variables présentes à la fois en entrée et en sortie, et la localité est obtenue en traçant sur cette entrée/sortie.

Ceci constitue l'aboutissement de la première étape dans notre programme d'algébraïsation de la sémantique des langages de programmation. Nous espérons même déboucher

à une extension de l'isomorphisme de Curry-Howard pour des langages évolués.

Revenons maintenant un peu plus en détail sur la réflexion qui nous a fait aboutir à ce travail.

## Sur la trace des références.

**De la Trace ...** Les catégories monoïdales tracées [Joyal et al., 1996] ont été introduites par Joyal, Street et Verity afin de fournir une description uniforme de diverses constructions mathématiques ayant un comportement cyclique. Parmi les constructions les plus notables, nous citerons la fermeture des tresses en théorie des nœuds et l'opérateur de trace en algèbre linéaire. Elles devinrent rapidement populaires dans la communauté informatique comme un moyen élégant pour exprimer la notion de boucles dans un cadre catégorique. Elles ont été extrêmement fructueuses dans ce champ, que ce soit pour formaliser la formule d'exécution de la Géométrie des Interactions [Abramsky, 1996, Abramsky et al., 2002], pour analyser l'opérateur de point fixe en théorie des domaines [Hasegawa, 2002], ou pour offrir un modèle catégorique en concurrence et plus récemment en physique quantique [Abramsky and Coecke, 2004].

Formellement, une catégorie monoïdale tracée est une catégorie monoïdale balancée (catégorie monoïdale avec tressage [braiding] et twist) munie d'un *opérateur de trace*

$$Tr_X : \frac{X \otimes A \longrightarrow X \otimes B}{A \longrightarrow B} \quad (1.1)$$

qui associe à chaque morphisme  $f : X \otimes A \longrightarrow X \otimes B$  un morphisme  $Tr_X(f) : A \longrightarrow B$ , soumis à une série d'axiomes de cohérence rappelée en section 5.

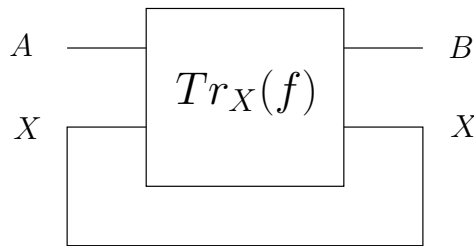


FIG. 1 – Diagramme représentant l'action de la trace comme une redirection de la sortie vers l'entrée (essence du feedback)

### ...aux références.

L'une des premières apparitions de l'opérateur de trace pour modéliser le feedback dans un cadre sémantique est due à Milner [Milner, 1994]. Dans ce papier, il présente une façon abstraite de modéliser le feedback dans les *action calculi* qu'il nomme *réflexion* (le terme trace n'était pas encore à l'ordre du jour). La réflexion lui permet de décrire des opérations compliquées comme le célèbre opérateur de restriction  $\nu : \epsilon \rightarrow p$  qui devient simplement la trace de la diagonale  $(x)\langle xx \rangle : p \rightarrow p \otimes p$ . Rappelons que cet opérateur modélise le fait qu'un canal de communication public peut être soudain restreint pour

devenir un canal de communication privée entre les processus qui communiquaient déjà dessus. On peut recomprendre ce mécanisme comme le passage d'une mémoire globale à une mémoire locale via un phénomène de localisation. Il est à noter que bien que Milner n'avait pas connaissance des travaux récents sur les traces à l'époque où il a défini les réflexions, tous les axiomes qu'il donne pour que son opérateur de restriction conserve les propriétés habituelles (comme le fameux "scope extrusion") coïncident exactement avec l'axiomatique de l'opérateur de trace. Ceci fait de la trace un objet canonique qui semble destiné à interpréter les références.

Ici, nous nous intéressons à la trace comme moyen de description des variables locales dans les langages de programmation. Traditionnellement en sémantique, on interprète un langage de programmation dans une catégorie en distinguant les objets  $A$  décrivant les valeurs, des objets  $TA$  décrivant les calculs de type  $A$ , où  $T$  est une monade. Dans le cas des références, la monade considérée est la monade d'état  $S \multimap (S \otimes \_)$  qui permet d'interpréter un programme de type  $A \rightarrow B$  comme un programme prenant une valeur  $A$  et renvoyant un calcul  $S \multimap (S \otimes B)$ , ce qui, via la clôture monoïdale, correspond à un morphisme de  $S \otimes A \rightarrow S \otimes B$ .

Il faut penser cette interprétation comme la description d'un système avec entrée/sortie et mémoire accessible à l'utilisateur vu comme un morphisme  $f : S \otimes A \rightarrow S \otimes B$ . Dès lors, si on est capable de prendre la trace sur  $S$  de  $f$ , on obtient la description avec mémoire interne à savoir les morphismes usuels de type  $A \rightarrow B$ . C'est l'analogue de la restriction (ou localisation) chez Milner pour un langage où les canaux sont remplacés par des adresses mémoires.

Par la suite, cette approche va être utilisée pour décrire un modèle d'un langage de type Algol avec fonctionnelle d'ordre supérieur. Pour cela, il nous faut allier le pouvoir de la logique linéaire pour décrire l'aspect fonctionnel du langage ainsi que le pouvoir des traces pour décrire l'aspect mémoriel du langage.

## Les jeux asynchrones ou la face nord de l'Éverest.

Nous sommes partis des jeux asynchrones [Melliès, 2005] car c'est un modèle de logique linéaire où des concepts de théorie des nœuds sont déjà intégrés via la notion de chemins homotopes.

Malheureusement, l'espoir d'y trouver une trace de manière directe a été vite vain car il y a quelques problèmes difficiles à surmonter. Ceci découle en particulier de la remarque suivante.

**Catégorie ponctuée.** Supposons qu'il existe un objet initial  $0$  et un objet terminal  $\top$  au sein d'une catégorie symétrique monoïdale fermée. Le foncteur

$$A \mapsto A \otimes B$$

a un adjoint à droite et préserve donc les colimites pour tout objet  $B$  de la catégorie.

On en déduit qu'il existe un unique isomorphisme :

$$0 \otimes B \cong 0$$

et plus généralement un unique isomorphisme

$$0 \otimes A \cong 0 \otimes B$$

pour tout objet  $A$  et  $B$  de la catégorie.

En particulier, en instanciant avec  $A = \top$  et  $B = 0$ , il y a un unique isomorphisme :

$$f : 0 \otimes \top \longrightarrow 0 \otimes 0.$$

Maintenant, supposons que la catégorie est tracée. On peut calculer la trace sur 0 de  $f$

$$Tr_0(f) : \top \longrightarrow 0.$$

Il suit la coïncidence de l'objet initial et terminal dans la catégorie, modulo un unique isomorphisme. Une telle catégorie est souvent appelé *ponctuée*.

**Vers des jeux asynchrones tracés.** La catégorie des jeux asynchrones formulée dans [Melliès, 2004b] n'est *pas* ponctuée car il n'existe pas de stratégie du jeu  $\top$  dans le jeu 0. On en déduit qu'elle n'est pas tracée.

On va donc sortir pour le moment du cadre des jeux asynchrones pour construire étape par étape un modèle possédant toutes les propriétés annoncées plus haut. L'idée est ensuite de pouvoir revenir au cadre des jeux asynchrones mais comme le souci d'algébrisation des outils utilisés dans la construction a amené un lourd travail, nous ne pouvons présenter ce cadre ici.

## La piste compacte close.

L'origine de la notion de trace vient de son existence automatique pour les catégories compactes closes. Si l'on voit la notion de trace comme la généralisation d'un monoïde simplifiable (à gauche), la notion de catégorie compacte close est alors la généralisation d'un groupe.

Pour illustrer ce concept dans l'univers mathématique, citons comme exemple frappant la catégorie des espaces vectoriels avec le produit tensoriel usuel. Dans cette catégorie symétrique monoïdale close, l'opérateur de clôture possède la propriété remarquable d'avoir lui aussi une structure tensorielle. Un autre exemple naturel nous est donné par les catégories linéaires dans lesquelles  $\otimes = \Gamma$ . Dans ces catégories, on sait directement que le tenseur est autodual car

$$(A \otimes B)^* = A^* \Gamma B^* = A^* \otimes B^*$$

Plus généralement, les catégories compactes fermées sont symétriques monoïdales closes avec un tenseur auto-dual. En d'autres termes, la clôture est donnée par

$$A \multimap B \equiv A^* \otimes B$$

Ainsi, tout morphisme  $f : (X \otimes A)^* \otimes X \otimes B$  peut être transformé en  $\widehat{f} : (X^* \otimes X)^* \otimes A^* \otimes B$  par commutativité et associativité du tenseur, et par composition avec l'identité, on obtient

$$Tr_X(f) = \widehat{f}(id_X)$$

On voit donc que toute catégorie compacte close est tracée. Mais n'oublions pas que nous voulons utiliser l'opérateur de trace pour modéliser les références et l'on doit se demander si se restreindre n'est pas trop fort au sens où l'on oublierait au passage certaines catégories primordiales pour la description des références.

Une première réponse à cette question est la construction  $Int$  due à [Joyal et al., 1996] de la catégorie compacte libre engendrée par une catégorie tracée. Cela dit que l'on peut toujours voir une catégorie tracée comme une version laxiste d'une catégorie compacte fermée. Cette construction est à la base de la notion de polarité en logique.

**Définition 1** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie tracée. On définit  $Int(\mathcal{C})$  comme la catégorie compacte fermée ayant pour objet les couples  $(A^+, A^-)$  d'objets de  $\mathcal{C}$  et pour morphismes entre  $(A^+, A^-)$  et  $(B^+, B^-)$  les flèches  $A^+ \otimes B^- \rightarrow A^- \otimes B^+$  dans  $\mathcal{C}$ . La composition est définie à l'aide de la trace (cf diagramme 2). Le dual est juste l'inversion de la polarité  $(A^+, A^-)^* = (A^-, A^+)$  et le produit tensoriel est défini point à point

$$(A^+, A^-) \otimes (B^+, B^-) = (A^+ \otimes B^+, A^- \otimes B^-)$$

Du point des groupes et des monoïdes simplifiables, cette construction correspond simplement au groupe libre sur un monoïde, l'objet  $(x, 1)$  représentant  $x$  et l'objet  $(1, x)$  représentant son inverse  $x^{-1}$ .

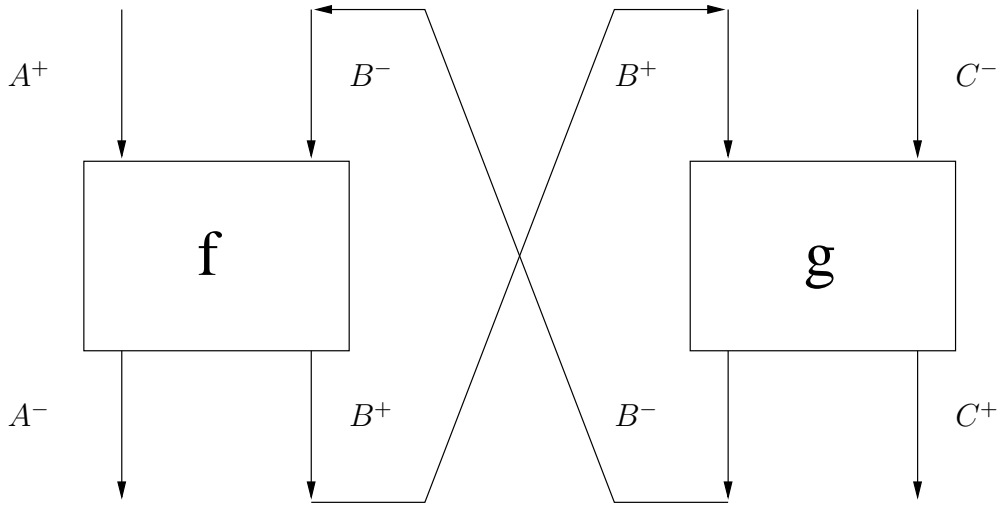


FIG. 2 – Composition dans la catégorie  $Int(\mathcal{C})$

Remarquons que cette construction est au cœur de la catégorisation des modèles de GoI donnée par Abramsky [Abramsky et al., 2002]. La composition dans la catégorie  $Int(\mathcal{C})$  représentant la formule d'exécution.

Nous voulons pour nos travaux que le tenseur possède un adjoint à droite donnant lieu à une clôture monoïdale, clôture qui n'est pas reliée a priori à la clôture automatique des catégories compactes fermées. C'est en cherchant dans cette voie que nous avons été amenés à regarder comment une catégorie peut hériter de la clôture d'une catégorie qui la contient à isomorphisme près.

**Proposition 1** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, -\circ_{\mathcal{C}})$  une catégorie symétrique monoïdale fermée et  $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}})$  une catégorie symétrique monoïdale. Supposons qu'il existe un foncteur monoïdal fort  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  qui est à la fois plein et fidèle et qui possède un adjoint à droite  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  formant l'adjonction  $U \dashv F$ .

Alors, on peut exporter la fermeture sur  $\mathcal{C}$  en une fermeture sur  $\mathcal{D}$  en définissant pour  $A, B$  dans  $\mathcal{D}$  :

$$A -\circ_{\mathcal{D}} B = F(U(A) -\circ_{\mathcal{C}} U(B))$$

Ce résultat stipule donc qu'une catégorie tracée  $\mathcal{C}$  étroitement liée à la catégorie  $Int(\mathcal{C})$  (via une adjonction) possède automatiquement une structure close. C'est un premier résultat en faveur de l'étude des catégories compactes closes, mais il manque une sorte de réciproque à cette propriété, qui assurerait que si une catégorie tracée  $\mathcal{C}$  est close, alors elle est étroitement liée à  $Int(\mathcal{C})$ . De façon réjouissante, nos discussions avec Masahito Hasegawa (Juillet 2005) sur les relations qu'entretiennent la catégorie des jeux de Conway négatifs  $\mathcal{N}$  et sa "compactifiée"  $Int(\mathcal{N})$  l'ont amené à préciser la situation dans le cadre des catégories tracées.

**Proposition 2** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie tracée. On peut définir un foncteur monoïdal fort plein et fidèle  $J : \mathcal{C} \rightarrow Int(\mathcal{C})$  par  $A \mapsto (A, I)$ . On a alors :

$\mathcal{C}$  est close ssi  $J$  admet un adjoint à droite

Il est donc clair que si une catégorie tracée est close, ça clôture vient directement de la clôture de  $Int(\mathcal{C})$ , ie. de la catégorie compacte fermée sous-jacente. Dès lors, il n'y plus de raison de s'empêcher de travailler avec une catégorie compacte close, quitte à se restreindre légèrement à posteriori.

## La route du bagnard (Conway Game).

Il semble à présent naturel de se pencher sur l'une des seules catégories de sémantique des jeux ayant une structure compacte close : *les jeux de Conway*. Cette catégorie a de plus le bon goût de ressembler d'assez près aux jeux asynchrones et on peut donc espérer rejouer le même scénario pour trouver une catégorie \*-autonome.

En effet, les jeux de Conway ne sont pas beaucoup plus que des graphes pour lesquels les idées d'*innocence via classes d'homotopie* et de structure de *gain* pour permettre de retrouver une notion de bon parenthésage semble pouvoir marcher.

**Remarque.** Nous avons étudié le cas des jeux de Conway asynchrones, en ajoutant une notion d'homotopie sur les chemins pour donner une définition algébrique de l'innocence. Nous avons aussi regardé la notion de stratégie positionnelle (ie. qui se décrit par une relation sur les positions) en montrant que toute stratégie innocente était positionnelle. Dans ce cadre, nous voulons retrouver la trace des stratégies positionnelles par la trace définie sur la catégorie des relations. Malheureusement, il faut savoir sélectionner ce dont on parle et donc ces résultats seront exprimés dans de futurs papiers.

Étudions plutôt ici la notion de gain, pilier de l'algébrisation du contrôle, car celle-ci peut facilement briser la structure tracée, comme le montre la définition du gain pour les jeux asynchrones.

## Le péage à double sens.

Comme nous l'avons vu plus haut, la notion de catégorie monoïdale tracée catégorise (et ainsi généralise) la notion habituelle de monoïde simplifiable à gauche  $(M, \cdot, e)$ . De ce point de vue, l'opérateur de trace remplace l'implication :

$$\forall(x, a, b) \in M \times M \times M, \quad x \cdot a = x \cdot b \Rightarrow a = b. \quad (1.2)$$

Afin d'interpréter la logique linéaire propositionnelle et de généraliser la condition de bon parenthésage, Paul-André Melliès a assigné un gain  $\kappa_A(x) \in \mathbb{Z}$  à chaque position  $x$  d'un jeu tout en demandant à ce que toute stratégie  $\sigma$  ne joue que des positions  $x$  avec un gain positif :  $\kappa_A(x) \geq 0$ .

Malheureusement, le gain défini dans [Melliès, 2004b] ne satisfait pas de propriété comme (1.2). Plus précisément, étant donné trois jeux  $X$ ,  $A$  et  $B$  et trois positions  $x$  de  $X$ ,  $a$  de  $A$  et  $b$  de  $B$ , le gain  $\kappa$  ne vérifie pas :

$$\Downarrow \quad \frac{\kappa_{X \otimes A \multimap X \otimes B}(x \otimes a \multimap x \otimes b) \geq 0}{\kappa_{A \multimap B}(a \multimap b) \geq 0}$$

où  $x \otimes a \multimap x \otimes b$  et  $a \multimap b$  représente, comme on s'attend, les positions dans les jeux  $X \otimes A \multimap X \otimes B$  et  $A \multimap B$  respectivement.

Ceci est embêtant car toute définition raisonnable d'un opérateur de trace  $Tr$  doit demander que la stratégie

$$Tr_X(\sigma) : A \longrightarrow B$$

joue la position

$$a \multimap b$$

à chaque fois que

$$\sigma : X \otimes A \longrightarrow X \otimes B$$

joue la position

$$x \otimes a \multimap x \otimes b$$

à partir d'une position  $x$  du jeu  $X$  sur lequel la trace est calculée.

Voilà pourquoi nous devons retoucher la notion de gain pour ne pas briser la trace existant dans les jeux de Conway. En un sens, le gain doit être complètement symétrique en Joueur et Opposant pour préserver la structure compacte fermée. Nous définissons le gain  $\kappa_A$  sur les chemins  $s$  par une paire d'entiers naturels  $\kappa_A(s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  représentant intuitivement le nombre de questions posées par Joueur (première composante) et par Opposant (deuxième composante).

La condition habituelle de bon parenthésage est alors reformulée (et généralisée) en demandant à ce que chaque chemin joué par une stratégie satisfasse

$$\kappa_A^+(s) = 0 \Rightarrow \kappa_A^-(s) = 0$$

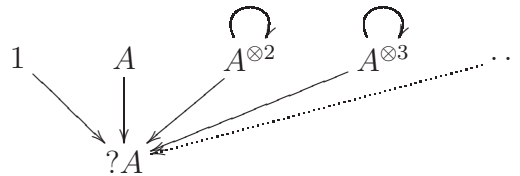
c'est-à-dire que si le Joueur est interrogé, il doit réagir en répondant on en interrogeant à son tour.

## L'ascension de la tour Exponentielle.

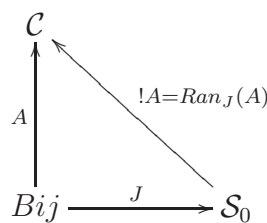
Fort de ces premiers pas, il nous faut maintenant définir les opérateurs de logique linéaire qui manquent à notre modèle intuition. Regardons d'abord l'exponentielle et essayons de voir quels liens elle entretient avec les structures algébriques.

A l'examen d'exemples tels que les espaces de cohérence ou les catégories linéaires de Lafont, il semble que la bonne façon de relier l'exponentielle à l'algèbre est de donner une construction comonoïde commutatif libre. Nous nous sommes donc intéressés à un objet d'étude courant en catégorie, la construction du monoïde libre.

Une construction du monoïde commutatif libre existe lorsqu'on a la chance que le tenseur commute avec la somme. On doit simplement calculer la limite



Malheureusement, ce n'est pas le cas dans les jeux de Conway car la somme n'existe même pas en général et il faut trouver mieux. Nous avons d'abord voulu recomprendre la construction susmentionnée avec des extensions de Kan dans le but de pouvoir ensuite généraliser. Il s'avère qu'on obtient ce monoïde en calculant l'extension de Kan sur  $\mathcal{S}_0$  (la catégorie des ensembles fins et fonctions ensemblistes) du jeu  $A$  vu comme un foncteur monoïdal de  $Bij$  (la catégorie des ensembles fins et fonctions bijectives) dans la catégorie  $\mathcal{C}$  des jeux de Conway.



Pour généraliser ce premier résultat, nous nous sommes tournés vers une construction du monoïde libre due à Dubuc qui dit essentiellement si le tenseur commute uniquement aux colimites filtrées, on doit calculer la même sorte de limite mais au lieu de prendre la catégorie discrète, il faut prendre la catégorie filtrée simpliciale étendue aux ordinaux.

Ceci convient très bien à notre catégorie de Conway car elle est compacte close et le tenseur commute donc à toutes les limites et colimites existantes (il possède un adjoint à droite et à gauche). Mais nous voulons un comonoïde commutatif. Nous devons donc étendre le résultat de Dubuc à la construction du monoïde commutatif libre.

Pour cela, nous nous sommes restreints aux catégories dont le tenseur commute aux limites  $\omega$ -filtrées (cette restriction vient d'un souci de simplicité mais la même idée semble

s'appliquer à n'importe quel type de limites  $\varphi$ -filtrées) et nous avons revisité la construction de Dubuc avec des outils plus simples et modernes. Nous sommes passés de la catégorie simpliciale à la catégorie des injections pour récupérer les permutations. Ensuite, nous avons montré que la colimite sur cette nouvelle catégorie était la monoïde commutatif libre via une factorisation par le résultat de Dubuc.

Ceci nous permet de présenter la construction du monoïde et du comonoïde commutatif libre dans la catégorie des jeux de Conway à gain via un cadre entièrement algébrique.

Nous avons ensuite voulu recomprendre ce résultat assez technique en terme d'extensions de Kan mais cette partie de notre travail n'est pas encore arrivée à son terme. Cette dernière option semble néanmoins ouvrir la voie au développement d'une théorie monoïdale à l'instar des théories algébriques de Lawvere. Peut-être faut-il regarder du côté des opérades pour résoudre ce joli problème.

Toujours est-il que nous avons pu utiliser la construction de Dubuc pour construire notre exponentielle et ainsi obtenir un modèle de MELL avec un forte assise algébrique.

## Accommoding the additives

Reste maintenant à définir les additifs. Ces derniers ne peuvent pas s'obtenir sur la catégorie entière des jeux de Conway comme il a été montré dans [Melliès, 2004b]. Il faut alors se restreindre à la catégorie des jeux négatifs pour pouvoir définir sereinement un produit cartésien, produit qui se définit comme la juxtaposition des deux jeux. Le problème qui se pose alors est l'existence de l'adjoint à droite du produit tensoriel. En effet, on ne peut plus utiliser la construction du dual (qui donnerait un jeu positif) et on perd donc la structure compact close. Heureusement, il existe un moyen d'exporter automatiquement la fermeture via la proposition 1.

Il est à noter que même si cette propriété semble être folklorique en catégorie (du moins était-elle connue par Martin Hyland), nous n'avons pas pu trouver de références pour le moment. Cela semble indiquer que ce fait remarquable reste méconnu dans le milieu sémantique.

Ici, l'adjonction servant de base à l'extension de la clôture est entre le foncteur d'inclusion et le foncteur *Neg* qui prend un jeu quelconque et oublie les parties commençant par des coups joueurs.

Ainsi, il n'y a pas d'angoisse et on peut tout à fait travailler avec la sous-catégorie des jeux négatifs tout en conservant la fermeture et l'opérateur de trace.

## Vers le Graal mémoriel

Toutes ces considérations nous ont amené à l'élaboration d'un langage de type Algol qui comporte de la mémoire à la fois locale et globale. L'intérêt majeur de l'interprétation que nous en donnons réside en deux points :

- *sa simplicité*. Le cadre développé permet d'interpréter le langage sans ajouts byzantins venant rendre peu intuitif le résultat obtenu

- *son caractère algébrique.* La construction du modèle repose essentiellement sur des considérations catégoriques et donne ainsi à notre interprétation une portée plus générale. En effet, le schéma introduit peut s'appliquer à d'autres types de sémantique qui peuvent donner lieu à des interprétations inattendues et venant renforcer notre compréhension des langages de programmation.

## Travaux à suivre

Dans les mois qui viennent, nous étudierons en autres les points suivants :

- **Jeux de Conway asynchrones.** Comme mentionné ci-dessus, nous voulons enrichir notre catégorie pour retrouver le cadre des jeux asynchrones. Cela participe d'une recompréhension des divers travaux en sémantique des jeux dans le cadre unifié des jeux positionnels.
- **Référence avec aliasing.** Nous présentons ici un langage avec référence où les variables de type  $ref(ref(-))$  sont interdites. Cela est commode et suffisant pour avoir un grand pouvoir d'expression mais nous ne pouvons malheureusement pas parler de *tas*. Ainsi, pour décrire cette structure usuelle en informatique, il nous faudra lors de prochains travaux relâcher cette contrainte d'anti-aliasing.
- **Langages de bas niveau.** Une partie de notre projet est de pouvoir donner une sémantique uniforme lors du processus de compilation décrivant aussi bien le langage haut niveau de l'utilisateur que l'assembleur ou le langage machine en bout de chaîne. Ainsi, la sémantique pourra dépasser le cadre usuel de test d'équivalence de deux programmes écrits dans le même langage, et donnera par cette occasion le moyen de vérifier jusqu'au bout la correction d'un compilateur réel.

# Chapitre 2

## Jeu de Conway à Gain

Comme nous l'avons annoncé dans le chapitre précédent, nous allons maintenant construire une catégorie de jeux compacte fermée avec une notion de parenthésage intégrée.

### Jeux de Conway.

Avant de présenter notre modèle à gain, il paraît nécessaire de rappeler la définition des jeux de Conway tant ce formalisme a été boudé par les sémanticiens des jeux. Il reste pourtant un des modèles de jeux les plus naturels, et permet de rapprocher la sémantique de notions algorithmiques en utilisant explicitement la structure de graphes.

Un jeu de Conway [Joyal, 1977]  $A = (V_A, E_A, \lambda_A)$  est la donnée :

- d'un graphe orienté enraciné  $(V_A, E_A)$  de racine  $\star_A$
- d'une fonction  $\lambda_A : E_A \rightarrow \{-1, +1\}$  donnant la polarité d'un coup.

Comme d'habitude  $-1$  signifie opposant et  $+1$  joueur.

Il faut maintenant mentionner le vocabulaire usuel concernant les parties d'un jeu.

**Chemins.** Comme d'habitude en théorie des jeux, on note  $x \rightarrow y$  lorsque  $(x, y) \in E_A$  et appelle chemin tout suite de coups  $x_0 \xrightarrow{m_1} x_1 \xrightarrow{m_2} \dots \xrightarrow{m_{k-1}} x_{k-1} \xrightarrow{m_k} x_k$ . Dans ce cas, on note  $m_1 \dots m_k : x_0 \twoheadrightarrow x_k$  pour indiquer la position initiale et finale du chemin.

**Coup initial.** On appelle *coup initial* d'un jeu de Conway  $A$  toute flèche de  $E_A$  partant de la racine  $\star_A$ .

**Parties.** Une *partie* est un chemin partant de la racine  $\star_A$

$$\star_A \xrightarrow{m_1} x_1 \xrightarrow{m_2} \dots \xrightarrow{m_{k-1}} x_{k-1} \xrightarrow{m_k} x_k$$

L'ensemble des parties est noté  $P_A$ .

**Parties alternées.** Une partie  $m_1 \dots m_k : \star_A \twoheadrightarrow x$  est dite *alternée* lorsque :

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\} \quad \lambda_A(m_{i+1}) = -\lambda_A(m_i)$$

Nous avons défini les objets de la catégorie des jeux de Conway mais il reste maintenant à exprimer les morphismes entre de tels objets. Ceci est réalisé en ajoutant une notion de stratégie sur un jeu  $A$  et en donnant un peu de structure pour décrire ce qu'est une stratégie de  $A$  vers  $B$  (et ceci de manière auto-duale pour avoir la structure compacte close).

**Stratégies.** Une stratégie  $\sigma$  est un ensemble de parties alternées de longueur paire tel que :

- la stratégie  $\sigma$  contient la partie vide  $\epsilon$
- toute partie non-vide commence par opposant
- $\sigma$  est close par préfixe paire

$$\forall s \in P_A \forall m, n \in E_A \quad s \cdot m \cdot n \in \sigma \Rightarrow s \in \sigma$$

- $\sigma$  est déterministe :  $\forall s \in P_A \forall m, n, n' \in E_A$

$$s \cdot m \cdot n \in \sigma \text{ et } s \cdot m \cdot n' \in \sigma \Rightarrow n = n'$$

On note  $\sigma : A$  lorsque  $\sigma$  est une stratégie de  $A$ .

La plus petite stratégie est la stratégie  $\{\epsilon\}$ , qui ne répond jamais. On l'appelle la *stratégie vide*, notée  $\perp$ .

**Un peu de structure.** Le dual d'un jeu de Conway  $A$  est le jeu

$$A^* = (V_A, E_A, -\lambda_A)$$

Le produit tensoriel de deux jeux  $A$  et  $B$ , noté  $A \otimes B$  :

- $V_{A \otimes B} = V_A \times V_B$
- $x \otimes y \rightarrow \begin{cases} x' \otimes y & \text{if } (x, x') \in E_A \\ x \otimes y' & \text{if } (y, y') \in E_B \end{cases}$
- $\lambda_{A \otimes B}((x \otimes y) \rightarrow (x' \otimes y)) = \lambda_A(x \rightarrow x')$
- $\lambda_{A \otimes B}((x \otimes y) \rightarrow (x \otimes y')) = \lambda_B(y \rightarrow y')$

Il est notable que le tenseur réalise essentiellement le produit des deux graphes sous-jacents. Ainsi, toute partie du produit tensoriel peut être vue comme l'entrelacement de deux parties dans  $A$  et dans  $B$ . Le jeu de Conway  $1 = (\{\star\}, \emptyset, \lambda)$  est évidemment l'élément neutre de cette loi monoïdale.

Du point de vue logique linéaire, on devrait définir la loi monoïdale  $\Gamma$ , duale du tenseur, afin d'avoir l'implication linéaire  $\multimap$  et de définir les morphismes entre deux jeux. Mais comme nous voulons une catégorie compacte close, le tenseur est ici auto-dual, ce qui implique que  $\otimes = \Gamma$ .

On veut maintenant définir un morphisme de  $A$  vers  $B$  comme un stratégie de  $A^* \otimes B$ . Pour cela, il faut avoir une notion d'identité et de composition de deux telles stratégies.

**Identité.** Classiquement, on considère la stratégie d'imitation (*copycat strategy*) de type  $A^* \otimes A$  comme la stratégie identité de  $A$  dans  $A$ . Dans ce qui suit, on note  $A_1$  et  $A_2$  pour distinguer entre les deux copies de  $A$ .

$$id_A = \{s \in P_{A \multimap A} \mid \forall s' \sqsubseteq^{even} s \quad s'_{|A_1} = s'_{|A_2}\}$$

**Interactions.** On dit que  $u$  est une interaction de  $A, B, C$ , notée  $u \in \text{int}(A, B, C)$  si la projection de  $u$  sur chaque jeu  $A^* \otimes B, B^* \otimes C$  et  $A^* \otimes C$  est une partie.

Nous mettons maintenant en place le cadre pour notre définition de stratégie gagnante. La condition de gain pour une stratégie est locale car elle porte non seulement sur les parties jouées mais encore sur les chemins apparaissant dans l'interaction. C'est ainsi que la notion de contrôle s'initie dans notre cadre car un programme peut maintenant être contraint à chacun de ses coups et non plus uniquement dans une interaction globale.

**Chemin joué par une stratégie.** Un stratégie  $\sigma$  joue un chemin  $t : x \rightarrow y$  lorsqu'il existe une partie  $s : \star \rightarrow x$  dans  $\sigma$  telle que la composition  $s; t : \star \rightarrow y$  est aussi dans  $\sigma$ . On dit aussi dans ce cas que le chemin  $t$  est dans  $\sigma$ .

**Composition.** On définit de manière standard la composition en laissant les deux stratégies interagir puis en cachant l'interaction dans  $B$  (parallel composition and hiding). Étant donné deux stratégies  $\sigma : A^* \otimes B, \tau : B^* \otimes C$ , on définit la composée

$$\sigma; \tau = \{u_{|A,C} \mid u \in \text{int}(A, B, C) \wedge u_{|A,B} \in \sigma \wedge u_{|B,C} \in \tau\}$$

De manière classique, on peut montrer la bonne définition de cette composition en utilisant le lemme fondamental suivant :

**Lemme 1 (Témoin unique)** *Si  $\sigma$  et  $\tau$  sont des stratégies de  $A^* \otimes B$  et  $B^* \otimes C$  respectivement, alors pour tout  $s \in \sigma; \tau$ , il existe un unique  $u \in \text{int}(A, B, C)$  tel que  $s = u_{|A,C}$ ,  $u_{|A,B} \in \sigma$  et  $u_{|B,C} \in \tau$ .*

*De plus, si  $s \in \sigma; \tau$  est un préfixe de  $t \in \sigma; \tau$ , alors le témoin unique de  $s$  est préfixe du témoin unique de  $t$ . Ainsi, le lemme du témoin unique s'étend (de manière non unique) aux chemins joués par une stratégie.*

**La catégorie des jeux de Conway.** Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour définir une catégorie compacte close.

**Proposition 3** *La catégorie  $\mathcal{C}$ , avec pour objets les jeux de Conway et pour morphismes les stratégies de  $A^* \otimes B$ , est compacte close*

*En particulier, on a*

$$\frac{(A \otimes B) \rightarrow C}{B \rightarrow A^* \otimes C}$$

**Trace.** Conséquemment, la catégorie des jeux de Conway est automatiquement équipée d'une notion de trace. Tout morphisme  $f : (X \otimes A)^* \otimes X \otimes B$  peut être transformé en  $\hat{f} : (X^* \otimes X)^* \otimes A^* \otimes B$  par commutativité et associativité du tenseur, et on obtient

$$\text{Tr}_X(f) = \hat{f}(\text{id}_X)$$

**Bool ou Le point du géomètre.**

L'exemple 3 montre une interaction typique dans le jeu  $(\mathbb{B} \multimap \mathbb{B}) \multimap \mathbb{B}$  que l'on souhaiterait rejeter. En effet, ici, le Joueur court-circuite la séquence de questions pour finalement répondre à la première. Une telle action viole la condition de bon parenthésage, mais nous n'avons pas pour le moment le vocabulaire pour interdire un tel comportement.

Il faut donc augmenter le modèle avec une notion de gain qui incorpore le parenthésage tout en conservant cette belle structure compacte close.

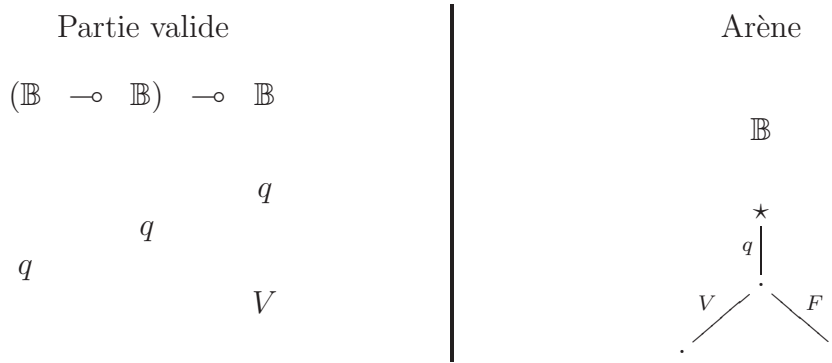


FIG. 3 – Un exemple de partie valide sans condition de gain

## Jeux de Conway à gain

Un jeu de Conway à gain  $A$  est un  $n$ -uplet  $(V_A, E_A, \lambda_A, \kappa_A)$  constitué d'un jeu de Conway  $(V_A, E_A, \lambda_A)$  et d'une fonction de gain dont la structure est définie ci-dessous.

**La structure du gain.** On définit  $\kappa_A = (\kappa_A^+, \kappa_A^-) : \text{Path}_A \rightarrow \mathbb{N}^2$  comme un couple de fonction de  $\text{Path}_A$  dans  $\mathbb{N}$ , une pour le gain de Joueur ( $\kappa_A^+$ ), une pour le gain d'Opposant ( $\kappa_A^-$ ). Il est notable que le gain soit défini pour tout chemin. On ne peut pas se restreindre aux chemins alternants car on veut définir le gain d'un jeu tensorisé comme la somme des gains des projections, qui ne sont pas forcément alternées. On ne peut pas non plus se restreindre aux parties car on a besoin d'une condition de gain local pour garantir que toute interaction entre stratégies gagnantes forment un partie "bien parenthésée".

Nous demandons au gain de vérifier quatre propriétés similaires à celle demandée à une norme pour un espace vectoriel.

**compatibilité**  $\forall m \in E_A \quad \begin{cases} \lambda_A(m) = -1 \Rightarrow \kappa_A^+(m) = 0 \\ \lambda_A(m) = +1 \Rightarrow \kappa_A^-(m) = 0 \end{cases}$

Ceci garantit que la distinction Joueur/Opposant a bien un sens.

**suffixe dominé**  $s : x \twoheadrightarrow y, t : y \twoheadrightarrow z$

$$\kappa_A(t) \leq \kappa_A(s; t)$$

Cet axiome exprime qu'une question ne peut pas être répondu dans le passé.

**sous-additivité**  $s : x \twoheadrightarrow y, t : y \twoheadrightarrow z$

$$\kappa_A(s; t) \leq \kappa_A(s) + \kappa_A(t)$$

Cet axiome, qui est une sorte d'inégalité de Cauchy-Schwarz, stipule qu'un coup ne peut pas poser plus ou moins de questions suivant son passé. Ainsi, la composition de deux chemins ne peut que faire diminuer le nombre de questions.

**norme**  $\epsilon_x : x \twoheadrightarrow x \quad \kappa_A(\epsilon_x) = (0, 0)$

C'est la propriété usuelle d'une norme. Dans notre cadre, elle exprime qu'en l'absence d'interaction, aucune question ne peut avoir été ouverte.

Tous ces axiomes sont assez naturels et ils nous permettent maintenant de définir une notion de stratégie gagnante dont on va montrer (avec des arguments algébriques) qu'elle est stable par composition.

**Stratégie gagnante.** Une stratégie est *gagnante* lorsque tout chemin  $s$  qu'elle joue satisfait la condition suivante sur le gain :

$$\kappa_A^+(s) = 0 \Rightarrow \kappa_A^-(s) = 0 \quad (2.1)$$

Intuitivement, cette condition exprime qu'une stratégie qui a été interrogée localement doit ou bien poser une autre question, ou bien répondre à cette question. Ceci généralise la condition habituelle de "bon parenthésage".

**Extension de la structure.** Étant donnés deux jeux  $A$  et  $B$ , on étend les connecteurs logiques définis sur les jeux de Conway de la manière suivante.

**Dual** Le dual d'un jeu de Conway à gain  $A$  est le jeu  $A^* = (V_A, E_A, -\lambda_A, (\kappa_A^-, \kappa_A^+))$ . Le nouveau gain satisfait trivialement les conditions imposées plus haut.

**Multiplicatif** Le produit tensoriel de deux jeux  $A$  et  $B$  est le produit tensoriel des jeux de Conway sous-jacents, avec comme gain

$$\forall s \in \text{Path}_{A \otimes B} \quad \kappa_{A \otimes B}(s) = \kappa_A(s|_A) + \kappa_B(s|_B)$$

Pour s'assurer que ce nouveau gain satisfait aux conditions demandées, nous avons besoin de remarquer les propriétés suivantes :

1. Comme tout coup de  $A \otimes B$  appartient soit à  $A$ , soit à  $B$ , la propriété de compatibilité s'étend naturellement.
2. Étant donnés deux chemins  $s : x \rightarrow y$  et  $t : y \rightarrow z$ , on a

$$\begin{aligned} \kappa_{A \otimes B}(t) &= \kappa_A(t|_A) + \kappa_B(t|_B) \\ &\leq \kappa_A((s; t)|_A) + \kappa_B((s; t)|_B) \\ &\leq \kappa_{A \otimes B}(s; t) \end{aligned}$$

3. Étant donnés deux chemins  $s : x \rightarrow y$  et  $t : y \rightarrow z$ , on a

$$\begin{aligned} \kappa_{A \otimes B}(s; t) &= \kappa_A((s; t)|_A) + \kappa_B((s; t)|_B) \\ &\leq (\kappa_A(s|_A) + \kappa_A(t|_A)) + (\kappa_B(s|_B) + \kappa_B(t|_B)) \\ &\leq \kappa_{A \otimes B}(s) + \kappa_{A \otimes B}(t) \end{aligned}$$

4.  $\forall x, y \quad \kappa_A(\epsilon_{x \otimes y}) = \kappa_A(\epsilon_x) + \kappa_A(\epsilon_y) = (0, 0)$

Il est urgent de vérifier que la condition de gain sur stratégie est préservée par composition. C'est toujours un point délicat en sémantique des jeux, et nous espérons que la formulation du gain sous forme d'axiomes permet de rendre la démonstration suivante un peu moins indigeste pour le lecteur.

**Proposition 4** Soit deux stratégies gagnantes  $\sigma : A^* \otimes B$  and  $\tau : B^* \otimes C$ . La stratégie  $\sigma; \tau : A^* \otimes C$  est aussi gagnante.

**Preuve** Nous procédons par l'absurde en supposant qu'il existe un chemin  $s$  (présupposé le plus petit) joué par la stratégie  $\sigma; \tau$  tel que  $\kappa_{A^* \otimes C}(s) \in 0 \times \mathbb{N}^*$ . On montre alors que soit  $\sigma$ , soit  $\tau$  a triché.

Dans un premier temps, en utilisant le lemme du témoin unique sur  $s$ , on obtient un  $u$  tel que  $u|_{A,B}$  est joué par  $\sigma$ ,  $u|_{B,C}$  est joué par  $\tau$  et  $u$  est dans  $\text{int}(A, B, C)$ .

Alors, en utilisant la *domination par suffixe*, on a pour tout  $u'$  préfixe de  $u$ ,  $\kappa_{A^* \otimes C}^+(u') = 0$ , ce qui entraîne en utilisant la définitions du produit tensoriel

$$\kappa_{A^*}^+(u'|_A) = \kappa_C^+(u'|_C) = 0$$

À ce moment, deux cas doivent être considérés

1.  $\kappa_B(u|_B) = (0, 0)$ .

Alors  $\kappa_{A^* \otimes B}(u) = \kappa_{A^*}(u)$  et  $\kappa_{B^* \otimes C}(u) = \kappa_C(u)$ . Mais comme  $\kappa_{A^* \otimes C}(u)^- = \kappa_{A^*}^-(u) + \kappa_C(u)^- > 0$  par hypothèse, on a que ou bien  $\kappa_{A^*}^-(u) > 0$ , ou bien  $\kappa_C^-(u) > 0$ .

Ainsi, soit  $\kappa_{A^* \otimes B}(u) \in 0 \times \mathbb{N}^*$ , soit  $\kappa_{B^* \otimes C}(u) \in 0 \times \mathbb{N}^*$ , ce qui implique qu'au moins une des deux stratégies a triché.

2.  $\kappa_B(u|_B) \neq (0, 0)$ .

Considérons maintenant  $v$ , le plus petit suffixe de  $u$  tel que  $\kappa_B(v|_B) \neq (0, 0)$ .

Soit  $v = m; v'$ . Comme  $v$  est le plus suffixe à gain non nul, nécessairement  $\kappa_B(v|_B) = (0, 0)$  et alors  $\kappa_B(v|_B) \leq \kappa_B(m)$  (par *sous-additivité*). Mais comme  $u$  est la plus petite interaction donnant lieu à un mauvais gain dans  $A^* \otimes C$ ,  $m$  est nécessairement dans  $E_B$ . Par la condition de *compatibilité*, on sait que soit  $\kappa_B^+(m) = 0$ , soit  $\kappa_B^-(m) = 0$ , ce qui implique que ou bien  $\kappa_B^+(v|_B) = 0$ , ou bien  $\kappa_B^-(v|_B) = \kappa_{B^*}^-(v|_B) = 0$ .

Traitons le cas  $\kappa_{B^*}^-(v|_B) = 0$  (l'autre étant identique si on remplace  $\tau$  par  $\sigma$ ) ce qui entraîne que  $\kappa_{B^*}^-(v|_B) > 0$ . Dans ce cas, considérons le chemin parcouru par  $\tau$ . Des considérations ultérieures montrent que  $\kappa_{B^* \otimes C}^+(v|_{B^* \otimes C}) = 0$ . Mais  $\kappa_{B^*}^-(v|_B) > 0 \Rightarrow \kappa_{B^* \otimes C}^-(v|_{B^* \otimes C}) > 0$  par définition du gain sur le produit tensoriel. Alors la stratégie  $\tau$  à joué un chemin interdit. □

**La catégorie  $\mathcal{C}_G$  des jeux de Conway à gain.** La catégorie  $\mathcal{C}_G$ , qui a pour objets les jeux de Conway à gain et pour morphismes les stratégies gagnantes entre ces jeux, est une catégorie compacte close. En effet, la notion de gain surajoutée n'a pas perturbé la structure auto-duale du tenseur (car la somme est commutative dans  $\mathbb{N}$ ).

### Bool ou Le point du géomètre (2).

Revenons sur l'exemple 4. On peut maintenant exprimer que le premier coup Opposant du jeu booléen est une question et que Joueur y répond par Vrai ou Faux. Ainsi, l'interaction précédente est maintenant non valide (voire figure 4). Le Joueur est maintenant obligé de respecter la séquence de questions ouvertes dans l'interaction (voire figure 5).

C'est la condition de bon parenthésage.

**Une revisite du parenthésage.** Nous décrivons maintenant la notion de parenthésage induite par le gain :

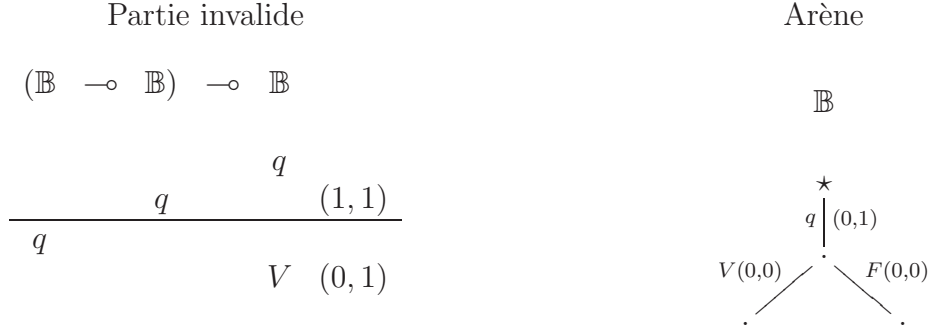


FIG. 4 – L'exemple 3 est maintenant interdit par la condition de gain

- Une partie  $s$  est bien parenthésée pour Joueur lorsque tout chemin de longueur paire  $t$  dans  $s$  qui se termine par un coup Joueur vérifie  $\kappa_A^+(t) = 0 \Rightarrow \kappa_A^-(t) = 0$
- Une partie  $s$  est bien parenthésée pour Opposant lorsque tout chemin de longueur paire  $t$  dans  $s$  qui se termine par un coup Opposant vérifie  $\kappa_A^-(t) = 0 \Rightarrow \kappa_A^+(t) = 0$
- On dit qu'une partie  $s$  est *bien parenthésée* lorsque qu'elle est bien parenthésée à la fois pour Joueur et pour Opposant

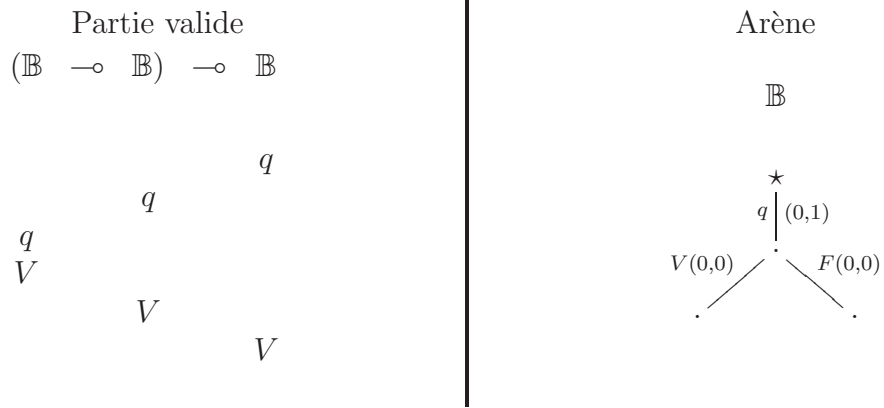


FIG. 5 – Exemple d'une interaction totale

Nous voulons montrer que l'interaction entre deux stratégies gagnantes fournit toujours une partie bien parenthésée. Pour cela, il nous faut d'abord donner un sens aux mots interaction entre stratégies. Nous avons besoin du jeu  $\mathbb{2}$  qui correspond au graphe  $\bullet \xrightarrow{o} \bullet$  qui contient un unique coup Opposant de gain nul (on note  $\mathbb{2}$  par analogie avec la catégorie  $\mathbb{2}$  définie par Lawvere).

**Définition 2 (interaction entre stratégies)** Soit  $\sigma : A$  et  $\tau : A^* \otimes \mathbb{2}$ .

Intuitivement, on définit  $\sigma \bowtie \tau$  comme la partie où le premier coup est la réponse de  $\tau$  au coup Opposant dans  $\mathbb{2}$  et où le reste est déduit des réponses respectives de  $\sigma$  et  $\tau$ .

Formellement, l'interaction est définie par

$$\sigma \bowtie \tau = \{\epsilon\} \cup \{s \cdot m \mid s \cdot m \in \sigma \wedge o \cdot s \in \tau\}$$

où  $s$  est une partie,  $m$  un coup joueur et  $o$  l'unique coup de  $\mathbb{2}$ .

On déduit de ces définitions deux propriétés évidentes sur les stratégies gagnantes.

**Proposition 5 (Bon parenthésage)**

1. *Toute stratégie gagnante joue des parties bien parenthésées pour Joueur.*
2. *Toute interaction entre deux stratégies gagnantes  $\sigma : A$  and  $\tau : A^* \otimes 2$  produit une partie bien parenthésée.*

**Preuve** 1. La première propriété est une conséquence directe de la définition de stratégie gagnante. Ceci n'est pas surprenant car c'est la notion de parenthésage qui à motiver notre définition du gain est stratégie gagnante dans les jeux de Conway.

2. Cette deuxième propriété mérite plus d'attention. Considérons un chemin de longueur paire  $s \cdot m$  dans l'interaction  $\sigma \bowtie \tau$ .

**Premier cas :  $m$  est un coup joueur.** Alors  $s \cdot m \in \sigma$ , ce qui implique par la propriété ci dessus que  $\kappa_A^+(s \cdot m) = 0 \Rightarrow \kappa_A^-(s \cdot m) = 0$ .

**Deuxième cas :  $m$  est un coup opposant.** Alors  $o \cdot s \cdot m \in \tau$ , ce qui implique par la propriété ci dessus que  $\kappa_{A^* \otimes 2}^+(o \cdot s \cdot m) = 0 \Rightarrow \kappa_{A^* \otimes 2}^-(o \cdot s \cdot m) = 0$ . Or, en utilisant la définition du gain sur le tenseur et le dual (et aussi que le gain dans 2 est nul), on obtient la propriété :  $\kappa_A^-(s \cdot m) = 0 \Rightarrow \kappa_A^+(s \cdot m) \stackrel{\square}{=} 0$

**Bilan.** Nous avons à présent à notre disposition une catégorie compacte close avec une notion de contrôle induite par un gain algébrique. Cette catégorie possède de plus le bon goût de rester dans notre cadre asynchrone et nous pouvons ainsi espérer, dans un futur proche, y introduire la notion d'homotopie.

Fort de ce premier pas encourageant, il nous faut maintenant nous tourner vers la construction algébrique de l'exponentielle.

## Chapitre 3

# La construction du comonoïde commutatif libre dans les jeux de Conway

La modalité exponentielle est à priori le point faible de la logique linéaire du point de vue structurelle. En effet, c'est la seule construction qui, étant donné un modèle, n'apparaît pas comme unique. En effet, contrairement aux autres connecteurs, pas moyen de prouver l'équivalence (en terme de théorie de la preuve) de deux modalités satisfaisant aux règles de l'exponentielle. Pourtant du point de vue logique, elle est au cœur de la magie linéaire et de sa capacité à décortiquer à peu près n'importe quel formalisme logique. Il paraît donc important de comprendre comment réconcilier structure catégorique et règles logiques en ce point. Dans ce qui suit, nous motivons la recherche du comonoïde commutatif libre même si nous présentons par la suite la construction du monoïde commutatif libre. Cette construction duale plus canonique en catégorie a eu nos faveurs pour une présentation générale. Le lecteur n'aura qu'à inverser quelques flèches pour retrouver la construction de l'exponentielle.

### Le chemin de la liberté

Dans un premier temps, regardons ce qui se passe dans un modèle où l'on peut définir plusieurs modalités exponentielles, les fameux espaces de cohérence.

**Le modèle relationnel.** Plus besoin de rappeler cette catégorie *tarte à la crème* (le lecteur peut se reporter à [Girard, 1987] s'il n'est pas familier avec ce mets), tant ce modèle est à la base de nombreuses intuitions sémantiques. Ici encore, il va nous permettre de comprendre les différences que peuvent présenter deux modalités exponentielles au sein d'un même modèle. Historiquement, la première modalité due à Girard est définie comme l'ensemble des cliques finies, alors que la modalité la plus usitée maintenant est celle des multicliques finies. Pourquoi cette préférence envers les multi-ensembles? Il s'avère que ces derniers donnent lieu à une construction libre alors que la modalité avec cliques finies ne donne lieu qu'à un comonoïde vérifiant les propriétés demandées par la logique linéaire.

Il semble donc que la construction libre soit une bonne approche à ce problème. En effet, comme tout objet libre, le comonoïde devient alors unique modulo isomorphisme. Il retrouve alors la qualité des constructions structurelles comme le produit tensoriel.

**Les catégories de Lafont.** Dans sa revisite des modèles catégoriques de la logique linéaire [Melliès, 2003], Paul-André Melliès rappelle la définition de Lafont d’une catégorie symétrique monoïdale fermée avec produits finis et comonoïde commutatif libre sur chaque objet de la catégorie. Même si ce formalisme ne capture pas certains modèles comme celui susmentionné des espaces de cohérence avec cliques finies, il présente l’avantage d’être un cas pas si particulier et très simple des catégories linéaires (résultat dû à Bierman). Nous voilà donc avec un deuxième argument pour rechercher des comonoïdes commutatifs libres dans une catégorie sensée capturer la logique linéaire. Reste maintenant à définir un cadre pour en assurer l’existence et le calculer.

## La boîte à outils du catégoricien

**Attention.** Dans un souci de clarté et de simplicité, nous considérons dans tout ce qui suit que toutes les colimites mentionnées existent. Cela évite de supposer la catégorie cocomplète, ce qui est très fort (et faux dans les jeux de Conway), ou de mentionner à chaque fois que l’on suppose que la colimite existe, ce qui est très lourd.

Comme annoncé ci-dessus, nous allons maintenant décrire des pistes de construction du monoïde commutatif libre s’appuyant sur des travaux en théorie des catégories. Dans un premier temps, nous présentons nos travaux pour recomprendre cette construction dans le cas connu où le tenseur commute aux colimites. Nous présentons ensuite un résultat méconnu de Dubuc [Dubuc, 1974] qui permet d’étendre cette construction pour le monoïde libre dans le cas où le tenseur commute aux colimites  $\varphi$ -filtrées (voir annexe). Nous avons donc dû adapter ce résultat pour retrouver le monoïde commutatif libre. Enfin, nous aborderons une possible extension vers une théorie monoïdale à l’instar des théories algébriques de Lawvere.

**La revisite d’un cas classique avec les extensions de Kan.** Dans le cas où le tenseur commute aux colimites, il est bien connu que le monoïde commutatif libre se construit par la formule

$$\Sigma A = \bigoplus_n S^n(A)$$

où  $S^n(A)$  est le symétrisé de  $A^{\otimes n}$ . Pour recomprendre cette formule, considérons l’extension de Kan à gauche (voir annexe) sur  $\mathcal{S}_0$  (la catégorie des ensembles finis et fonctions ensemblistes) du jeu  $A$  vu comme un foncteur monoïdal de  $\mathbb{B}$  (la catégorie des ensembles finis et fonctions bijectives) dans la catégorie  $\mathcal{C}$  des jeux de Conway.

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{C} & \\
& \uparrow A & \swarrow \exists_J(A) \\
\mathbb{B} & \xrightarrow{J} & \mathcal{S}_0
\end{array}$$

Les travaux de Day et Street [Day B., 1995] sur la monoïdalité de l'extension de Kan avec la convolution comme structure monoïdale sur la catégorie des foncteurs (voir annexe) nous donne l'équation suivante :

$$\exists_J(A *_{\mathbb{B}} B) \cong \exists_J(A) *_{\mathcal{S}_0} \exists_J(B)$$

Mais, de manière très agréable, lorsque le tenseur commute avec les colimites, on obtient

**Proposition 6** *Si la catégorie monoïdale  $(\mathcal{C}, \otimes, I)$  à un tenseur qui commute aux colimites, alors*

$$\begin{cases} A *_{\mathbb{B}} B(n) \cong S^n(A \oplus B) \\ A *_{\mathcal{S}_0} B(n) \cong S^n(A) \otimes S^n(B) \end{cases}$$

**Preuve**

$$\begin{aligned}
A *_{\mathbb{B}} B(n) &\equiv \int^{m, m'} \mathbb{B}(m + m', n). (A^m \otimes B^{m'}) \\
&\cong \bigoplus_m S(A^m \otimes B^{n-m}) \\
&\cong S^n(A \oplus B) \\
A *_{\mathcal{S}_0} B(n) &\equiv \int^{m, m'} \mathcal{S}_0(m + m', n). (A^m \otimes B^{m'}) \\
&\cong \int^{m, m'} (\mathcal{S}_0(m, n) \times \mathcal{S}_0(m', n)). (A^m \otimes B^{m'}) \\
&\cong \left( \int^m \mathcal{S}_0(m, n). A^m \right) \otimes \left( \int^m \mathcal{S}_0(m, n). B^m \right) \\
&\cong S^n(A) \otimes S^n(B)
\end{aligned}$$

□

Ce qui donne donc lorsque applique en 1 (si on note  $\exists_J(A)(1) \equiv \Sigma A$ )

$$\Sigma(A \oplus B) \cong \Sigma A \otimes \Sigma B \quad (3.1)$$

On en déduit alors que  $\Sigma A$  est le monoïde commutatif libre sur  $A$ . De plus, la construction canonique des extensions de Kan à gauche nous redonne la formule

$$\Sigma A \equiv \bigoplus_n S^n(A)$$

Regardons maintenant comme illustration, une alternative aux jeux de Conway, les jeux de Conway synchronisés.

**Jeux de Conway synchronisés.** Malheureusement, le tenseur des jeux de Conway ne commute pas avec la somme. Pour arranger cela (momentanément car ce n'est pas le modèle qui nous intéresse pour le moment), il faut définir une version synchronisée du tenseur. Nous restons ici dans le domaine de l'intuition car la formalisation ne nous paraît pas nécessaire à la compréhension.

Lorsque l'on regarde si le tenseur commute avec la somme dans les jeux de Conway positifs, on s'aperçoit que l'on ne peut pas décrire la stratégie

$$A \otimes (B \oplus C) \longrightarrow (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$$

En effet, lorsque Opposant joue (à gauche) son premier coup dans  $A$ , on ne sait pas quel jeu entre  $B$  et  $C$  "sacrifier" (à droite). Pour résoudre ce problème, il faut passer au tenseur synchronisé  $\otimes_s$  qui demande à ce que le premier coup soit joué dans les deux composantes en même temps. Ainsi, on obtient l'équation

$$A \otimes_s (B \oplus C) \cong (A \otimes_s B) \oplus (A \otimes_s C)$$

On en déduit donc dans ce cadre que le monoïde libre se calcule simplement par la formule susmentionnée. Cela exprime que dans le cadre synchronisé, Opposant doit annoncer le nombre de copies qu'il va jouer le reste de la partie. On a donc bien la stratégie

$$\begin{array}{ccc} (\Sigma A & \otimes_s & \Sigma A) \longrightarrow \Sigma A \\ n & & m \\ & & n + m \end{array}$$

On ne peut en revanche pas faire la même chose si le tenseur n'est pas synchronisé car dans ce cas Joueur ne sait pas combien de copies ouvrir (à droite).

C'est donc bien la même raison qui brise la structure de monoïde pour  $\Sigma A$  et qui empêche le tenseur de commuter avec la somme. Voyons comment s'affranchir de ce problème.

**Une revisite de la construction de Dubuc.** Il s'avère que le monoïde libre peut s'obtenir de façon similaire lorsque le tenseur commute uniquement aux colimites  $\varphi$ -filtrées [Dubuc, 1974]. Pour cela, il faut bien évidemment étendre la catégorie sur laquelle on travaille en une catégorie  $\varphi$ -filtrée. Dubuc le réalise en définissant une sorte de catégorie simpliciale étendue aux ordinaux (plus un point particulier  $-1$ )  $\Delta_{ord}$  qui possède l'agréable propriété d'être  $\varphi$ -filtrée pour tout ordinal limite  $\varphi$ .

**Remarque.** Les constructions suivantes s'appliquent uniquement aux objets pointés (ie. avec une flèche  $\mu_A : I \rightarrow A$ ) et au morphisme entre tels objets (ie.  $f : A \rightarrow B$  telle que  $\mu_A; f = \mu_B$ ). On a donc pas le monoïde commutatif libre général, mais une version restreinte aux objets pointés. Cela ne pose pas de problème pour les jeux de Conway car tout monoïde à une unique flèche de  $I$  dans  $A$ .

Cette construction est malheureusement assez technique lorsque l'on regarde les détails et nous donnons ici une revisite simple de cette construction lorsque  $\varphi = \omega$ .

Dans ce cas, il suffit de considérer la catégorie simpliciale usuelle  $\Delta$  des entiers et fonctions croissantes. On procède ensuite comme suit

- On prend un objet  $A$  dans  $\mathcal{C}$  pointé au sens où il y a une flèche  $I \rightarrow A$
- On construit un foncteur monoïdale  $T$  de  $\Delta$  dans  $\mathcal{C}$  envoyant 0 en  $I$ , 1 en  $A$  et l'unique flèche  $0 \rightarrow 1$  dans  $I \rightarrow A$ , vérifiant donc

$$T(m+n) = T(m) \otimes T(n)$$

pour  $m, n$  entiers

- on pose

$$TA = \underline{\text{colim}}(\Delta \xrightarrow{T} \mathcal{C})$$

Définissons maintenant

$$\tilde{T} : \begin{cases} \Delta \times \Delta & \rightarrow \mathcal{C} \\ (m, n) & \mapsto T(m+n) = T(m) \otimes T(n) \end{cases}$$

En utilisant que le tenseur commute aux colimites filtrées, on obtient :

$$TA \otimes TA = \underline{\text{colim}}(\tilde{T})$$

Or, il est clair que le cône de  $TA$  sur  $T$  s'étend en un cône sur  $\tilde{T}$ . L'universalité de  $TA \otimes TA$  dans la catégorie des cônes sur  $\tilde{T}$  nous fournit la flèche

$$TA \otimes TA \rightarrow TA$$

qui, avec la flèche  $1 \rightarrow TA$  venant du cône, font de  $TA$  un monoïde dans  $\mathcal{C}$  (il faut encore vérifier les deux diagrammes d'un monoïde, diagrammes qui passent tous seuls en utilisant qu'une colimite est un objet initial dans la catégorie des cônes).

On peut maintenant statuer sur le théorème suivant.

**Théorème 1** *Le monoïde  $TA$  est le monoïde libre sur l'objet pointé  $A$*

Afin d'obtenir la liberté du monoïde, il nous faut prouver le lemme suivant

**Lemme 2** *Soit  $M$  un monoïde avec une flèche entre objets pointés  $f : A \rightarrow M$ . Alors, on peut construire un cône  $\mathfrak{C}_M$  sur  $T$ .*

**Preuve** Les flèches de 1 et  $A$  dans  $M$  sont déjà données (rappelons que  $M$  est un monoïde). La commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \swarrow \\ & & M \end{array}$$

est précisément la propriété requise pour être une flèche entre objets pointés. Reste à construire les flèches de  $A^n$  dans  $M$ . Rien de plus simple avec la multiplication  $d$

$$A^n \xrightarrow{f^n} M^n \xrightarrow{d^n} M$$

Comme le monoïde n'est pas commutatif, l'ordre d'application de  $d$  importe, et nous choisissons un ordre par la gauche. Il est ensuite évident grâce aux propriétés d'un monoïde que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 A^m & \xrightarrow{\pi} & A^n \\
 f^m \downarrow & & \downarrow f^n \\
 M^m & \xleftarrow{d^{n-m}} & M^n \\
 d^m \downarrow & \swarrow d^n & \\
 M & & 
 \end{array}$$

commute pour tout  $m \leq n$  □

Considérons maintenant un monoïde  $M$  avec une flèche entre objets pointés  $f : A \rightarrow M$ . Il existe donc un cône  $\mathfrak{C}_M$  sur  $T$ . On en déduit qu'il existe une flèche entre  $TA$  et  $M$  qui fait commuter

$$\begin{array}{ccc}
 A & \longrightarrow & TA \\
 \downarrow & \searrow & \\
 M & & 
 \end{array}$$

dont il nous faut montrer qu'elle est monoïdale.

De la même manière que dans le lemme précédent, on construit un cône de  $M$  sur  $\tilde{T}$  et un cône de  $M \otimes M$  sur  $\tilde{T}$ . On en déduit alors que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 1 & \longrightarrow & TA & \longleftarrow & TA \otimes TA \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 1 & \longrightarrow & M & \longleftarrow & M \otimes M
 \end{array}$$

commute, le seul point délicat étant le carré de droite dont on montre que les deux flèches sont égales car elles factorisent toutes les deux le cône de  $M$  sur  $\tilde{T}$ .

La flèche entre  $TA$  et  $M$  venant de la propriété de colimite est donc monoïdale. Reste à montrer qu'elle est unique. Mais étant donné une flèche monoïdale entre  $TA$  et  $M$ , il est facile de montrer que celle-ci factorise  $\mathfrak{C}_M$ , elle est donc unique.

**Extension au monoïde commutatif libre.** Nous devons maintenant adapter le résultat de Dubuc pour pouvoir décrire l'exponentielle. À cette fin, nous changeons de catégorie de base en passant de la catégorie simpliciale à la catégorie des injections. Ainsi, on fait apparaître les permutations de  $n$  dans  $n$  représentant la commutation. On note  $Inj$  cette catégorie. On suppose toujours que notre catégorie  $\mathcal{C}$  commute aux colimites  $\omega$ -filtrées. Dans ce cadre, on peut étendre sans difficultés le foncteur  $T : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$  à un foncteur  $T' : Inj \rightarrow \mathcal{C}$  pour un objet pointé  $A$ .

Définissons par anticipation

$$\Sigma A = \underline{colim}_{\rightarrow} (\Delta_{\omega} \xrightarrow{T'} \mathcal{C})$$

On va maintenant montrer la propriété suivante

**Proposition 7**  $\Sigma A$  est le monoïde commutatif libre sur  $A$

Pour la démonstration, nous avons besoin de pouvoir étendre le cône  $\mathfrak{C}_M$  sur  $T$  en un cône  $\mathfrak{C}'_M$  sur  $T'$  lorsque l'objet sous-jacent est commutatif.

**Lemme 3** *Soit  $M$  un monoïde commutatif une flèche entre objets pointés  $f : A \rightarrow M$ . Alors le cône  $\mathfrak{C}_M$  sur  $T$  peut être étendu en un cône  $\mathfrak{C}'_M$  sur  $T'$ .*

**Preuve** Comme les domaines de  $T$  et  $T'$  sont identiques, il suffit de montrer que les permutations sont préservées par le cône (les autres flèches sont ensuite déduites par composition). Notre objet  $M$  étant un monoïde commutatif, on peut donc montrer qu'étant donné une permutation  $\pi : A^n \rightarrow A^n$ , le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A^n & \xrightarrow{\pi} & A^n \\ f^n \downarrow & & \downarrow f^n \\ M^n & \xrightarrow{\alpha} & M^n \\ d \downarrow & \swarrow d & \\ M & & \end{array}$$

commute, et ainsi  $\mathfrak{C}_M$  s'étend naturellement en un cône  $\mathfrak{C}'_M$  sur  $T'$ .  $\square$

**Preuve de la proposition 7** Soit un monoïde commutatif  $M$  avec une flèche d'objet pointé  $f : A \rightarrow M$ . D'après le lemme ci-dessus,  $M$  possède un cône sur  $T'$ . On en déduit une flèche  $\Sigma f : \Sigma A \rightarrow M$ . Il faut maintenant montrer qu'elle est monoïdale. Comme le tenseur préserve les colimites filtrées, on a les égalités

$$\begin{cases} TA \otimes TA & = \underline{\text{colim}}(\tilde{T}) \\ \Sigma A \otimes \Sigma A & = \underline{\text{colim}}(\tilde{T}') \end{cases}$$

D'après les lemmes précédents, on obtient les cônes  $\mathfrak{C}_M$  et  $\mathfrak{C}'_M$  de  $M$  sur la catégorie simpliciale et injective, ainsi que les cônes de  $M \otimes M$  sur les catégories produits. On peut donc construire le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & TA & \longleftarrow & TA \otimes TA \\ \parallel & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \Sigma A & \longleftarrow & \Sigma A \otimes \Sigma A \\ \parallel & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & M & \longleftarrow & M \otimes M \end{array}$$

dont on déduit la commutativité de l'unicité des flèches. On a montré qu'il y avait une flèche monoïdale entre  $\Sigma A$  et  $M$ . L'unicité vient encore du fait qu'une flèche monoïdale entre ces deux objets factorise le cône sur  $M$ .

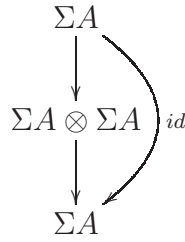
$\Sigma A$  est bien le monoïde commutatif libre.  $\square$

**Remarque.** Il semble que cette construction peut se généraliser aux catégories dont le tenseur ne commute qu'aux colimites  $\varphi$ -filtrées mais la présentation de ce résultat nécessite un cadre trop lourd à mettre en place pour pouvoir apparaître dans ce rapport.

## Le monoïde commutatif libre vu comme une $\Sigma$ -algèbre libre

Nous mentionnons brièvement ici la structure monadique qui découle de la fonction sur les objets  $\Sigma : A \rightarrow \Sigma A$ . En effet, on peut montrer qu'étant donnée une flèche entre deux objets pointés  $f : A \rightarrow B$ , on peut construire une flèche  $\Sigma f : \Sigma A \rightarrow \Sigma B$  qui fait de  $\Sigma$  un endofoncteur dans la catégorie  $\mathcal{C}$ .

On sait déjà qu'il existe une flèche  $\mu : A \rightarrow \Sigma A$ , mais on a aussi le diagramme suivant (grâce à la liberté)



On en déduit que  $\Sigma A \trianglelefteq \Sigma \Sigma A$  (rétraction).

On vérifie alors aisément que  $\Sigma$  est une monade sur  $\mathcal{C}$ , ce qui permet de voir les monoïdes libres comme des  $\Sigma$ -algèbres libres.

## Construction dans les jeux de Conway

**Attention.** Ce qui suit utilise les résultats précédents en prenant à chaque fois les notions duales. Au lieu de construire le monoïde commutatif libre, on construit le comonoïde commutatif libre ; au lieu de regarder les colimites filtrées, on regarde les limites filtrées ; etc ...

**Exponentielle.** Dans un premier temps, résumons ce dont nous avons besoin pour construire le comonoïde (commutatif) libre sur un objet  $A$  à l'aide de la construction de Dubuc. Il faut

- que notre objet  $A$  soit pointé au sens où il possède une flèche  $A \rightarrow I$
- que la catégorie dans laquelle on travaille ait son tenseur qui commute aux limites  $\omega$ -filtrées pour un certain  $\omega$ .
- que toutes les limites considérées existent bien dans la catégorie.

Comme cela est possible, nous allons construire le comonoïde libre pour n'importe quel objet de  $\mathcal{C}$ .

Nous partons d'abord d'un objet  $A \in \mathcal{N}$  de la catégorie des jeux de Conway négatif . Celui-ci est évidemment pointé car l'ensemble des parties commençant par Opposant de  $A \multimap I$  est vide. La stratégie canonique entre  $A$  et  $I$  est donc la stratégie vide. De plus, comme le tenseur à un adjoint à gauche dans  $\mathcal{C}_G$ , il commute aux limites et en particulier aux limites  $\omega$ -filtrées. On sait donc que si la limite du diagramme suivant existe, c'est notre comonoïde commutatif libre

$$1 \longleftarrow A \longleftarrow A^{\otimes 2} \longleftarrow A^{\otimes 3} \longleftarrow \dots$$

Cette limite se calcule et on obtient :

$$!A = S^\infty(A)$$

où  $S^\infty(A)$  signifie le tenseur infini symétrisé de  $A$  que l'on peut décrire comme le jeu  $!A = (V_{!A}, E_{!A}, \lambda_{!A})$

- $V_{!A}$  est l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $V_A$  qui envoient  $i$  premiers entiers sur une position différente de  $\star_A$  et le reste sur  $\star_A$  (pour un certain  $i$ ).
- $\star_{!A}$  est la fonction constante qui envoie tout le monde sur  $\star_A$
- Il existe un coup entre deux positions  $f, g$  de  $!A$  si ces deux fonctions diffèrent en un unique entier  $i$  et si  $(f(i), g(i)) \in E_A$  est un coup de  $A$ .

Dans ce cas, on pose  $\lambda_{!A}(f, g) = \lambda_A(f(i), g(i))$

Maintenant, essayons de calculer le comonoïde commutatif libre sur n'importe quel objet  $A \in \mathcal{C}_G$ . On sait qu'à priori,  $A$  n'a aucune chance d'être pointé dans  $\mathcal{C}_G$ . Il faut donc travailler avec  $Neg(A)$ , qui lui est pointé.

On peut alors définir  $!Neg(A)$  comme ci-dessus. Nous avons besoin maintenant d'un lemme auxiliaire pour montrer que cet objet est le bon candidat au comonoïde.

**Lemme 4** *Soit  $(M, d, e)$  un comonoïde commutatif de  $\mathcal{C}_G$ . Alors  $M$  est un jeu de Conway négatif*

**Preuve** Il suffit de regarder le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{d} & M \otimes M \\ & \searrow d & \downarrow \alpha_{M,M} \\ & & M \otimes M \end{array}$$

qui indique que si  $M$  possède un coup positif, alors la stratégie doit réagir en jouant ou bien à gauche, ou bien à droite. Or le morphisme  $\alpha_{M,M}$  va renverser ce choix, ce qui empêche le diagramme précédant de commuter.  $\square$

**Remarque.** Ce lemme implique que tout comonoïde commutatif à une flèche unique dans  $I$  et donc les morphismes entre objets pointés coïncident avec les morphismes, ce qui fait qu'on a bien construit le comonoïde commutatif libre général.

Reste à démontrer la proposition suivante :

**Proposition 8** *Soit  $A \in \mathcal{C}_G$  quelconque. Alors  $!Neg(A)$  est le comonoïde libre sur  $A$*

**Preuve** Soit un comonoïde commutatif  $M$  tel qu'il existe un morphisme  $f : M \rightarrow A$ . Alors, par l'adjonction entre  $U$  et  $Neg$ , on obtient un morphisme de  $Neg(f) : M \rightarrow Neg(A)$ . On en déduit qu'il existe un unique morphisme de comonoïde  $!f$  qui fait commuter

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{Neg(f)} & Neg(A) \\ !Neg(f) \downarrow & \nearrow d_{!Neg(A)} & \\ !Neg(A) & & \end{array}$$

Mais l'adjonction nous permet de compléter le diagramme par

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\
 M & \xrightarrow{\text{Neg}(f)} & \text{Neg}(A) & \xrightarrow{\mu} & A \\
 \downarrow \text{!Neg}(f) & & \nearrow & \nearrow & \\
 \text{!Neg}(A) & & & d_{!A} & 
 \end{array}$$

On obtient donc l'existence et l'unicité du morphisme de comonoïde entre  $M$  et  $\text{!Neg}(A)$  qui fait commuter le diagramme ci-dessus.  $\square$

**Monoïde commutatif libre.** Comme le tenseur de la catégorie  $\mathcal{C}_G$  possède aussi un adjoint à droite, on peut de manière duale construire le monoïde commutatif libre sur un objet  $A$  en s'appuyant sur la catégorie des jeux positifs. On obtient alors la construction duale de l'exponentielle, à savoir  $?A$ .

## Vers une théorie monoïdale

Nous aimerions maintenant recomprendre ces travaux en termes d'extensions de Kan, comme nous l'avons fait dans le cas où le tenseur commute avec la somme. Il semble alors naturel de changer la catégorie de base en travaillant avec  $\text{Inj}$ . Malheureusement, pour le moment, nous n'arrivons pas à utiliser la monoïdalité de l'extension de Kan par rapport à la convolution pour en déduire que cette extension appliquée en 1 nous donne le monoïde libre. Il faut comprendre comment utiliser la commutation aux colimites filtrées pour pouvoir exprimer la convolution en terme de tenseur comme dans la proposition 6. Il semble néanmoins possible d'établir des encadrements de ces convolutions qui permettraient d'obtenir des propriétés à la limite (car toute sous-catégorie infinie de la catégorie  $\text{Inj}$  voit son foncteur d'inclusion être final).

Cette dernière option semble néanmoins ouvrir la voie au développement d'une théorie monoïdale à l'instar des théories algébriques de Lawvere. En effet, malgré nos investigations, aucune théorie générale telle que les catégories enrichies sur une catégorie monoïdale [Kelly, 1982] ne paraît en mesure de capturer la notion de foncteur monoïdal nécessaire au développement de la théorie susmentionnée. Il faut néanmoins investir nos prochaines recherches vers la théorie des opérades qui semble répondre partiellement à notre problématique.

# Chapitre 4

## Un modèle de logique linéaire intuitionniste

Pour donner lieu à un modèle de logique linéaire intuitionniste, il faut restreindre notre modèle à la partie négative des jeux de Conway. Mais le problème qui se pose alors est de trouver une nouvelle clôture car la catégorie n'est plus compacte close (le dual n'existe plus). Heureusement, comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 1, un résultat nous permet d'exporter automatiquement la fermeture via un adjonction monoïdale.

### Petite construction catégorique

Nous revenons maintenant sur une propriété énoncée au chapitre 1

**Une adjonction monoïdale donnant lieu à une clôture.** Soit  $(\mathcal{C}, \otimes_{\mathcal{C}}, -\circ_{\mathcal{C}})$  une catégorie symétrique monoïdale fermée et  $(\mathcal{D}, \otimes_{\mathcal{D}})$  un catégorie symétrique monoïdale. Supposons qu'il existe un foncteur monoïdal fort  $U : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  qui est à la fois plein et fidèle et qui possède un adjoint à droite  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  formant l'adjonction  $U \dashv F$ .

Alors, on peut exporter la fermeture sur  $\mathcal{C}$  en une fermeture sur  $\mathcal{D}$  en définissant pour  $A, B$  dans  $\mathcal{D}$  :

$$A -\circ_{\mathcal{D}} B = F(U(A) -\circ_{\mathcal{C}} U(B))$$

Notons que la plupart du temps, le foncteur  $U$  sera le foncteur d'inclusion et  $F$  forcera la fermeture de  $\mathcal{C}$  à vivre dans la sous-catégorie  $\mathcal{D}$ .

#### Preuve

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(B, A -\circ_{\mathcal{D}} C) &\cong \mathcal{D}(B, F(U(A) -\circ_{\mathcal{C}} U(C))) \\
 &\cong \mathcal{C}(U(B), U(A) -\circ_{\mathcal{C}} U(C)) && \text{adjonction } U \dashv F \\
 &\cong \mathcal{C}(U(A) \otimes_{\mathcal{C}} U(B), U(C)) && \text{adjonction } \otimes_{\mathcal{C}} \dashv -\circ_{\mathcal{C}} \\
 &\cong \mathcal{C}(U(A \otimes_{\mathcal{D}} B), U(C)) && \text{monoïdalite forte} \\
 &\cong \mathcal{D}(A \otimes_{\mathcal{D}} B, C) && \text{plein et fidèle} \quad \square
 \end{aligned}$$

**Un exemple en logique intuitionniste.** Soit  $\mathcal{C}$  la catégorie des formules de logique linéaire, et  $\mathcal{D}$  le fragment positif (ie. toutes les formules qui sont des tenseurs d'exponentielles). Il est connu que  $!$  est adjoint à droite de l'inclusion et donc la clôture de  $\mathcal{C}$  peut

être exportée en :

$$A \Rightarrow B = ! (A \multimap B)$$

Cela donne lieu à l'un des deux codages de la logique intuitionniste, l'autre étant le fragment négatif avec le flèche de co-Kleisli  $!A \multimap B$ .

## Jeux de Conway négatifs

Un jeu de Conway négatif (à gain) est simplement un jeu de Conway (à gain) dont tous les coups initiaux sont négatifs. On note  $\mathcal{N}$  la sous-catégorie des jeux négatifs. Le produit tensoriel peut être directement exporté car il préserve la polarité des coups initiaux. Nous allons utiliser le résultat ci-dessus pour obtenir une clôture car la clôture de  $\mathcal{C}_G$  n'est évidemment pas préservée, notre catégorie négative n'ayant pas de dual.

Pour cela, observons que l'inclusion, qui est toujours un foncteur monoïdal fort plein et fidèle, admet ici un adjoint à droite en la présence du foncteur  $Neg : \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{N}$  qui oublie les parties commençant par des coups positifs. En effet, il est aisé de vérifier que

$$\frac{UA \rightarrow B}{A \rightarrow Neg(B)}$$

définit bien une adjonction. On a alors directement la clôture donnée par

$$A \multimap B = Neg(A^* \otimes B)$$

Nous pouvons maintenant nous occuper du produit cartésien.

**Produit.** Le produit de deux jeux négatifs  $A$  et  $B$ , noté  $A \& B$  est défini comme :

- l'ensemble de ses positions est l'union disjointe des positions de  $A$  et  $B$  dans laquelle on a identifié les deux racines  $\star_A$  et  $\star_B$  en la nouvelle racine  $\star_{A \& B}$  de  $A \& B$ .
- les coups (nécessairement opposants) partant de la racine sont de deux sortes :

$$\star_{A \& B} \rightarrow \begin{cases} x \text{ if } (\star_A, x) \in E_A \\ y \text{ if } (\star_B, y) \in E_B \end{cases}$$

- les coups partant d'une position  $x$  de la composante  $A$  (resp.  $B$ ) sont exactement les coups partant de  $x$  dans  $A$  (resp.  $B$ ) avec la même polarité
- le gain d'un chemin  $s$  dans la composante  $A$  (resp.  $B$ ) est le gain de ce chemin dans  $A$  (resp.  $B$ )

Il est aisé de vérifier que cette définition satisfait aux propriétés du produit.

**exponentielle.** Nous avons donné au chapitre 3 une construction de l'exponentielle pour les jeux de Conway. Nous allons vérifier ici que la même définition donne toujours le comonoïde commutatif libre lorsqu'on se place dans la catégorie des jeux à gain.

**Proposition 9** *L'objet  $!A = S^n(A)$  est le comonoïde commutatif libre sur  $A$  dans la catégorie de jeux de Conway à gain*

**Preuve** On doit regarder si toutes les étapes de la construction donnent des stratégies gagnantes.

Le seul point délicat à vérifier est que  $!A$  est toujours la limite du diagramme  $\Delta_\omega \xrightarrow{T'} \mathcal{C}_G$ , toutes les autres constructions donnant trivialement lieu à des stratégies gagnantes.

Il faut donc montrer pour tout cône sur  $X$  que l'unique flèche de  $X \rightarrow !A$  faisant commuter les cônes est une stratégie gagnante.

Procédons par l'absurde et supposons que cette stratégie joue un chemin  $t$  dans une partie  $s$  avec  $\kappa^+(t) = 0 \wedge \kappa^-(t) > 0$ . Comme  $s$  est nécessairement fini, il existe  $n$  tel que pour tout  $n' > n$ , toutes les positions de  $s$  (qui sont des fonctions) envoient  $n'$  sur  $\star_A$ . En d'autres termes, on n'a joué que sur le jeu  $X \rightarrow A^{\otimes n}$ . Or, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} !A & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow \\ & & A^{\otimes n} \end{array}$$

On en déduit  $X \rightarrow A^{\otimes n}$  est perdante, et donc que le cône de départ n'était pas pris sur les jeux de Conway à gain.  $\square$

## Catégorie linéaire et modèle de LLI

Nous voulons maintenant montrer que notre catégorie définit un modèle correct de LLI. Pour cela, nous allons passer par la notion de catégorie de Lafont

**Définition 3 (Catégorie de Lafont)** Une catégorie de Lafont consiste en

- une catégorie symétrique monoïdale close avec produits finis  $(\mathcal{C}, \otimes, 1, \&, \top)$
- pour tout objet  $A \in \mathcal{C}$ , l'objet  $!A$  est le comonoïde commutatif libre sur  $A$

Les catégories de Lafont possèdent malgré leur simplicité la propriété que nous recherchons.

**Proposition 10** Toute catégorie de Lafont induit un modèle correct de logique linéaire intuitionniste.

Or, tout marche bien dans notre cadre. En effet, la catégorie  $\mathcal{N}$  est symétrique monoïdale close avec produits finis. Elle possède de plus un comonoïde commutatif libre sur chacun de ses objets. On en déduit la proposition suivante

**Proposition 11** La catégorie des jeux de Conway négatifs à gain  $\mathcal{N}$  est une catégorie de Lafont.

On en déduit alors le théorème qui a motivé tout ce chapitre

**Théorème 2** La catégorie des jeux de Conway négatifs à gain  $\mathcal{N}$  fournit un modèle correct de la logique linéaire intuitionniste.

**Remarque.**

La catégorie  $\mathcal{N}$  ne nécessite pas de notion de gain pour être une catégorie de Lafont. Néanmoins, c'est l'opportunité offerte par cette notion dans la modélisation du contrôle

qui a motivé une bonne partie de notre travail. Il ne faut donc pas perdre à l'esprit que même si le gain n'apparaît pas dans le prochain chapitre, il reste fondamental dans notre approche de la sémantique des langages de programmation.

Nous avons maintenant tous les outils prérequis à la construction du modèle de références globales et locales qui nous avons en tête. Nous allons laisser de côté la notion de gain car le contrôle n'apparaît pas encore dans notre langage.

# Chapitre 5

## Extension à un modèle de référence utilisant la trace

Comme nous nous sommes concentrés sur la catégorie des jeux négatifs, il est naturel de concevoir un langage en appel par nom. En effet, une partie jouée par une stratégie entre deux jeux négatifs commence toujours à droite; on peut donc composer une stratégie perdante  $\sigma : 1 \rightarrow A$  avec une stratégie gagnante  $\tau : A \rightarrow B$  et obtenir une stratégie gagnante  $\sigma; \tau$ . Ceci vient du fait que  $\tau$  peut se désintéresser de son argument, et ainsi lui donner un mauvais argument en entrée ne la dérange pas. C'est typiquement le genre d'interaction qui a lieu dans un langage en appel par nom.

Il est à noter que nous pourrions aussi bien décrire un langage type PCF en appel par valeur en nous tournant vers la catégorie des jeux positifs. À terme, nous voulons d'ailleurs décrire un cadre où appel par nom et appel par valeur vivent dans la même catégorie et où passer de l'un à l'autre est transparent. Il nous semble en effet que la distinction appel par valeur/nom n'est pas fondamentale et que les mêmes outils algébriques peuvent expliquer ces deux cadres de manière naturelle.

### TracedAlgol : un langage avec références globales et locales

Comme nous l'avons déjà indiqué, nous donnons ici un langage avec références mais sans aliasing. Nous devons donc avoir deux notions de types, les types valeurs  $A, B$  et les types références  $\alpha, \beta$ , pour pouvoir distinguer une valeur et référence grâce au typage.

$$A, B ::= \text{Unit} \mid \text{Bool} \mid \text{Nat} \mid A \rightarrow B \mid A \times B \qquad \alpha, \beta ::= A \mid \text{ref}[A]$$

**Remarque.** Cette restriction des références (qui ne peuvent pas pointer sur d'autres références) permet tout de même de typer des programmes d'ordre supérieur arbitraire. En revanche, on ne rentre pas dans le cadre de l'aliasing, ce qui ferait entrer le langage dans une classe de complexité bien plus grande.

Les termes du langage sont inspirés d'Algol :

$$M, N ::= \text{skip} \mid b \mid n \mid x \mid \lambda x.M \mid MN \mid x := M \mid !x \mid \text{new } x := M \text{ in } N \\ \mid \text{zero}(M) \mid \text{if } M \text{ then } M_1 \text{ else } M_2 \mid \langle M, N \rangle \mid \pi_1(M) \mid \pi_2(M) \mid M; N$$

où  $b$  vaut pour les booléens  $T$  et  $F$ ,  $n$  représente un entier et  $x$  est une variable.

**Remarque :** **new** ou **let**. Nous notons ici le traditionnel terme  $\text{let } x := M \text{ in } N$  par  $\text{new } x := M \text{ in } N$  pour rappeler que cette interprétation des variables locales nous vient du travail de Milner sur la sémantique du  $\nu$  [Milner, 1994].

Nous divisons le contexte d'interprétation en un contexte de variables  $\Gamma$  qui associe à chaque variable un type et un contexte de référence  $\Delta$  qui associe à chaque référence un type référence. Nous supposons toujours que  $\text{dom}(\Gamma) \cap \text{dom}(\Delta) = \emptyset$ .

Les règles de typage sont données en figure 6

$$\begin{array}{c} [Var] \frac{}{\Gamma, x : A; \vdash x : A} \quad [Bool] \frac{}{\Gamma; \vdash b : \text{Bool}} \quad [Nat] \frac{}{\Gamma; \vdash n : \text{Nat}} \quad [Unit] \frac{}{\Gamma; \vdash \text{skip} : \text{Unit}} \\ \\ [Abs] \frac{\Gamma, x : \alpha; \Delta \vdash M : \beta}{\Gamma; \Delta \vdash \lambda x.M : \alpha \rightarrow \beta} (x \notin \Gamma) \quad [App] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \alpha \rightarrow \beta \quad \Gamma; \Delta \vdash N : \alpha}{\Gamma; \Delta \vdash MN : \beta} \\ \\ [Trace] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : A \quad \Gamma; \Delta, x : \text{ref}[A] \vdash N : \beta}{\Gamma; \Delta \vdash \text{new } x := M \text{ in } N : \beta} (x \notin \Delta) \quad [Weak] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \alpha}{\Gamma; \Delta, x : \text{ref}[A] \vdash M : \alpha} \\ \\ [Seq] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \text{Unit} \quad \Gamma; \Delta \vdash N : \text{Unit}}{\Gamma; \Delta \vdash M; N : \text{Unit}} \quad [Zero] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \text{Nat}}{\Gamma; \Delta \vdash \text{zero}(M) : \text{Bool}} \\ \\ [If] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \text{Bool} \quad \Gamma; \Delta \vdash M_i : \alpha (i = 1, 2)}{\Gamma; \Delta \vdash \text{if } M \text{ then } M_1 \text{ else } M_2 : \alpha} \\ \\ [Pair] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M_i : \alpha_i (i = 1, 2)}{\Gamma; \Delta \vdash \langle M_1, M_2 \rangle : \alpha_1 \times \alpha_2} \quad [Proj] \frac{\Gamma; \Delta \vdash M : \alpha_1 \times \alpha_2}{\Gamma; \Delta \vdash \pi_i(M) : \alpha_i (i = 1, 2)} \\ \\ [Assign] \frac{\Gamma; \Delta, x : \text{ref}[A] \vdash M : A}{\Gamma; x : \text{ref}[A], \Delta \vdash x := M : \text{Unit}} \quad [Deref] \frac{}{\Gamma; x : \text{ref}[A], \Delta \vdash !x : A}$$

FIG. 6 – Règles de typage dans TracedAlgol

Nous allons maintenant donner la sémantique opérationnelle de notre langage. Celle-ci sera donnée pour des couples  $(M, \sigma)$  appelés configurations, où  $M$  est un programme et  $\sigma$  est une fonction qui va des références dans les valeurs, que nous appellerons état de la mémoire. Nous faisons le choix de présenter une sémantique *big step* car elle forme un cadre plus agréable pour l'appel par nom.

Pour cela, il faut une notion de forme canonique, qui sont les termes de la forme :

$$V ::= n \mid b \mid x \mid \text{skip} \mid \lambda x.V \mid \langle V_1, V_2 \rangle$$

Lorsque qu'une configuration  $(M, \sigma)$  se réduit en une configuration canonique  $(V, \sigma')$ , nous notons

$$(M, \sigma) \Downarrow (V, \sigma')$$

La figure 7 décrit inductivement la sémantique opérationnelle de notre langage.

$$\begin{array}{c}
[Value] \frac{}{(V, \sigma) \Downarrow (V, \sigma)} \quad [Lambda] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (\lambda x.V', \sigma') \quad (V'[N/x], \sigma') \Downarrow (V, \sigma'')}{(MN, \sigma) \Downarrow (V, \sigma'')} \\
[Cond_T] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (T, \sigma') \quad (M_1, \sigma') \Downarrow (V, \sigma'')}{(\text{if } M \text{ then } M_1 \text{ else } M_2, \sigma) \Downarrow (V, \sigma'')} \quad [Cond_F] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (F, \sigma') \quad (M_2, \sigma') \Downarrow (V, \sigma'')}{(\text{if } M \text{ then } M_1 \text{ else } M_2, \sigma) \Downarrow (V, \sigma'')} \\
[Seq] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (\text{skip}, \sigma') \quad (N, \sigma') \Downarrow (\text{skip}, \sigma'')}{(M; N, \sigma) \Downarrow (\text{skip}, \sigma'')} \quad [Zero_F] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (n+1, \sigma')}{(\text{zero}(M), \sigma) \Downarrow (F, \sigma'')} \\
[Zero_T] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (0, \sigma')}{(\text{zero}(M), \sigma) \Downarrow (T, \sigma'')} \quad [Trace] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (V', \sigma') \quad (N, \sigma' \cup (x \mapsto V')) \Downarrow (V, \sigma'')}{(\text{new } x := M \text{ in } N, \sigma) \Downarrow (V, \sigma'' \setminus x)} \\
[Assign] \frac{(M, \sigma) \Downarrow (V, \sigma')}{(x := M, \sigma) \Downarrow (\text{skip}, \sigma' \cup (x \mapsto V))} \quad [Deref] \frac{\sigma(x) = V}{(!x, \sigma) \Downarrow (V, \sigma)}
\end{array}$$

FIG. 7 – Sémantique opérationnelle de TracedAlgol

## Interprétation dans la catégorie des jeux de Conway négatifs

Nous devons maintenant montrer comment nous interprétons ce langage dans la catégorie de jeux de Conway négatifs à gain  $\mathcal{N}$ .

Chaque type valeur est interprété par un objet  $\llbracket A \rrbracket \in \mathcal{N}$  comme suit :

- $\llbracket \text{Bool} \rrbracket = \mathbb{B}ool$
- $\llbracket \text{Nat} \rrbracket = \mathbb{N}at$
- $\llbracket \text{Unit} \rrbracket = 1$
- $\llbracket A \times B \rrbracket = \llbracket A \rrbracket \& \llbracket B \rrbracket$
- $\llbracket A \rightarrow B \rrbracket = !\llbracket A \rrbracket \multimap \llbracket B \rrbracket$

Le statut d'un type référence est un peu différent car il doit pouvoir à la fois se situer dans le co-domaine et le domaine du programme, on en déduit l'interprétation du jugement de type

$$\llbracket x_1 : A_1, \dots, x_n : A_n; y_1 : \text{ref}[B_1], \dots, y_m : \text{ref}[B_m] \vdash M : \alpha \rrbracket$$

comme un stratégie

$$\llbracket M \rrbracket :! \llbracket A_1 \rrbracket \otimes \dots \otimes ! \llbracket A_n \rrbracket \otimes ! \llbracket B_1 \rrbracket \otimes \dots \otimes ! \llbracket B_n \rrbracket \rightarrow ! \llbracket B_1 \rrbracket \otimes \dots \otimes ! \llbracket B_n \rrbracket \otimes \llbracket M \rrbracket$$

Donnons maintenant l'interprétation des règles de typage.

- Les règles pour les constantes sont évidentes
- *Var* correspond à l'identité (la stratégie *copycat*)
- *Abs* vient juste de la clôture de notre catégorie

$$\llbracket \Gamma; \Delta \vdash \lambda x. M : \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \Lambda \llbracket \Gamma, x : \alpha; \Delta \vdash M : \beta \rrbracket : \llbracket \Gamma \rrbracket \rightarrow ! \llbracket A \rrbracket \multimap \llbracket B \rrbracket$$

- *App* vient de l'évaluation (la co-unité de la clôture) et de la co-multiplication de l'exponentielle

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \xrightarrow{d} (\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket) \otimes (\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket) \rightarrow (\llbracket \alpha \rrbracket \multimap \llbracket \beta \rrbracket) \otimes \llbracket \alpha \rrbracket \xrightarrow{eval} \llbracket \beta \rrbracket$$

- *Seq* : le terme  $M; N$  correspond juste à du sucre syntaxique pour  $\text{new } x := M \text{ in } N$  où  $x$  n'apparaît pas dans  $N$
- *Weak* correspond à l'identité car lorsqu'on ajoute une référence, elle apparaît des deux côtés du séquent
- *Pair* et *Proj* sont décrites par les morphismes liés au produit cartésien
- *If* est donnée par la stratégie qui interroge son argument, exécute le premier programme si  $V$  et le deuxième si  $F$
- *Zero* est interprétée par la stratégie évidente
- *Assign* va être interprétée en deux temps :

1. d'abord effacer la valeur courante de la cellule,
2. ensuite remplacer cette valeur par l'interprétation de  $M$

Plus précisément, le terme  $M$  est interprété par un morphisme

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes ! \llbracket A \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \rightarrow ! \llbracket A' \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \otimes \llbracket A'' \rrbracket$$

(Notons que  $A, A'$  et  $A''$  coïncident dans le modèle, nous les distinguons uniquement pour faciliter la lecture de la construction)

Comme tous les objets autres que  $\llbracket A'' \rrbracket$  sont des !-coalgèbre, on peut alors appliquer le foncteur ! et la co-multiplication de ! vue comme une comonade. On obtient

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes ! \llbracket A \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \rightarrow ! \llbracket A' \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \otimes ! \llbracket A'' \rrbracket$$

(on vient juste d'exprimer la règle de promotion en logique linéaire)

On interprète  $x := M$  en post-composant avec la co-unité en  $A'$  puis la permutation de  $\Delta$  et  $A''$

$$! \llbracket A' \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \otimes ! \llbracket A'' \rrbracket \rightarrow \llbracket \Delta \rrbracket \otimes ! \llbracket A'' \rrbracket \rightarrow ! \llbracket A'' \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket$$

On obtient ainsi le morphisme

$$\llbracket \Gamma \rrbracket \otimes ! \llbracket A \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket \rightarrow ! \llbracket A'' \rrbracket \otimes \llbracket \Delta \rrbracket$$

qui interprète le séquent

$$\Gamma; x : \text{ref}[A], \Delta \vdash x := M : \text{Unit}$$

- *Deref* correspond juste à la duplication de la référence par la co-multiplication puis une permutation (encore une fois, nous distinguons artificiellement les trois copies  $A$  par souci de clarté)

$$[[\Gamma]] \otimes ![[A]] \otimes [[\Delta]] \rightarrow ![[A']] \otimes [[\Delta]] \xrightarrow{d_{[[A']]}} ![[A']] \otimes ![[A'']] \otimes [[\Delta]] \xrightarrow{\alpha_{[[A'']], [[\Delta]]}} ![[A']] \otimes [[\Delta]] \otimes ![[A'']]$$

- *Trace* : c'est là que réside l'originalité de notre interprétation. Comme pour l'assignation, on construit, à partir de l'interprétation de  $M$ , le terme

$$[[\Gamma]] \otimes [[\Delta]] \rightarrow [[\Delta]] \otimes ![[A'']]$$

que l'on "tensorise" avec l'identité  $![[A]] \rightarrow ![[A']]$  (plus un peu de commutation)

$$[[\Gamma]] \otimes ![[A]] \otimes [[\Delta]] \rightarrow ![[A']] \otimes [[\Delta]] \otimes ![[A'']]$$

À nouveau, on applique la même technique que pour l'assignation en post-composant avec la co-unité en  $A'$  puis la permutation de  $\Delta$  et  $A''$ , et on obtient ainsi une interprétation de la création de la référence  $x$  stockant la valeur  $M$

$$[[\Gamma]] \otimes ![[A]] \otimes [[\Delta]] \rightarrow ![[A'']] \otimes [[\Delta]]$$

On compose ensuite avec l'interprétation de  $N$ , et on a

$$[[\Gamma]] \otimes ![[A]] \otimes [[\Delta]] \rightarrow ![[A'']] \otimes [[\Delta]] \otimes [[\beta]]$$

Il ne reste plus qu'à tracer sur  $![[A]]$  (après permutation) et on obtient l'interprétation souhaitée du terme

$$\text{new } x := M \text{ in } N : [[\Gamma]] \otimes [[\Delta]] \rightarrow [[\Delta]] \otimes [[\beta]]$$

**Remarque.** Il est évident que l'interprétation donnée est stable par contexte.

## Correction Équationnelle

Nous décrivons d'abord la notion usuelle d'équivalence observationnelle pour laquelle nous voulons un résultat de correction du modèle.

Soit  $M$  un terme clos et sans emplacement mémoire libre de TracedAlgo. On note  $M \Downarrow$  si  $M$  est typable et  $(M, \emptyset) \Downarrow (V, \sigma)$  pour un certain terme  $V$ .

**Définition 4 (équivalence observationnelle)** *Soit  $M$  et  $N$  deux termes. Alors  $M$  et  $N$  sont équivalents observationnellement, noté  $M \simeq N$ , ssi pour tout contexte  $C[-]$  tel que  $C[M]$  et  $C[N]$  sont clos et sans emplacement mémoire libre, on a  $C[M] \Downarrow$  ssi  $C[N] \Downarrow$*

Il est notable que la condition  $C[M] \Downarrow$  ssi  $C[N] \Downarrow$  suffise à s'assurer que, si  $M$  et  $N$  se réduisent en des valeurs, celles-ci sont identiques (grâce au test en zéro et au *if*).

Pour alléger la notation dans ce qui suit, nous noterons  $\text{new } x := V_1, y := V_2 \text{ in } M$  pour  $\text{new } x := V_1 \text{ in } (\text{new } y := V_2 \text{ in } M)$ . De la même manière, étant donné un état de la mémoire  $\sigma$ , on note  $\text{new } \sigma \text{ in } M$  le terme  $\text{new } x_1 := \sigma(x_1), \dots, x_n := \sigma(x_n) \text{ in } M$  où les  $x_i$  parcourent les états interprétés par  $\sigma$ .

Dans la lignée des preuves de correction en sémantique des jeux [Abramsky et al., 1998], nous décomposons la preuve de correction équationnelle en deux étapes : correction et adéquation.

**Lemme 5 (correction)** *Soit  $M$  un terme. Si  $(M, \sigma) \Downarrow (V, \sigma')$ , alors  $\llbracket \text{new } \sigma \text{ in } M \rrbracket = \llbracket \text{new } \sigma' \text{ in } V \rrbracket$*

**Preuve** On opère par une induction standard sur la dérivation de  $(M, \sigma) \Downarrow (V, \sigma')$  en utilisant les équations de la figure 8 et la relation

$$\llbracket \Gamma; \Delta \vdash \text{new } x := V \text{ in } (\lambda y.M)(!x) \rrbracket = \llbracket \Gamma; \Delta \vdash \text{new } x := V \text{ in } (\lambda y.M)V \rrbracket$$

dont la validité est assurée en étudiant précisément le comportement de la stratégie d'évaluation vis-à-vis des références.  $\square$

$$\begin{aligned} \llbracket \Gamma; \Delta \vdash \text{new } x := V_1, y := V_2 \text{ in } M \rrbracket &= \llbracket \Gamma; \Delta \vdash \text{new } y := V_2, x := V_1 \text{ in } M \rrbracket \\ \llbracket \Gamma; x : \text{ref}[A], \Delta \vdash \text{new } y := V_2 \text{ in } x := V_1; M \rrbracket &= \llbracket \Gamma; x : \text{ref}[A], \Delta \vdash x := V_1; \text{new } y := V_2 \text{ in } M \rrbracket \\ \llbracket \Gamma; \Delta \vdash \text{new } x := V_1, x := V_2 \text{ in } M \rrbracket &= \llbracket \Gamma; \Delta \vdash \text{new } x := V_2 \text{ in } M \rrbracket \end{aligned}$$

FIG. 8 – Équations concernant les références locales

Nous avons besoin d'une sorte de réciproque appelé adéquation

**Lemme 6 (Adéquation)** *Pour tout terme clos  $M$ , si  $\llbracket M \rrbracket \neq \perp$  alors  $M \Downarrow$*

La preuve s'appuie sur une longue étude des parties d'une stratégie non vide. De telles parties proviennent de l'interaction de plusieurs parties provenant des sous termes de  $M$ . La taille de cette interaction forme le limon d'une récurrence.

Il nous est maintenant possible de statuer sur la correction de notre modèle

**Théorème 3 (Correction Équationnelle)** *Si  $M$  et  $N$  sont des termes du même type et  $\llbracket M \rrbracket = \llbracket N \rrbracket$ , alors  $M \simeq N$*

**Preuve** Soit  $C[-]$  tel que  $C[M]$  et  $C[N]$  sont clos et sans emplacement mémoire libre. Par symétrie, il nous suffit de montrer que  $(C[M] \Downarrow) \Rightarrow (C[N] \Downarrow)$ .

$C[M] \Downarrow$  signifie qu'il existe  $\sigma, V$  tel que  $(C[M], \emptyset) \Downarrow (V, \sigma)$ . On déduit de la correction que  $\llbracket C[M] \rrbracket = \llbracket \text{new } \sigma \text{ in } V \rrbracket$ . Comme l'interprétation est stable par contexte, on a nécessairement  $\llbracket C[N] \rrbracket = \llbracket \text{new } \sigma \text{ in } V \rrbracket$ .

Ceci donne une interprétation non vide pour  $C[N]$ , de laquelle on déduit via l'adéquation  $C[N] \Downarrow$   $\square$

# Conclusion et travaux futurs

Lors de ce stage de DEA (qui dura de manière inhabituelle un peu plus d'un an), nous nous sommes fixé pour but la compréhension sémantique des langages avec références à travers un cadre algébrique. Ceci dans l'espoir d'étendre l'isomorphisme de Curry-Howard aux langages de programmation impératifs.

Bien évidemment, ce programme ambitieux n'est pas encore abouti, mais nous avons tout de même développé plusieurs outils importants nous permettant de nous en approcher.

1. Nous avons construit un modèle de sémantique des jeux parenthésés de logique linéaire intuitionniste disposant de plus d'un opérateur de trace. Pour cela, nous avons utilisé le modèle des jeux de Conway, augmenté avec une notion de gain définie de manière axiomatique, rapprochant le gain à la notion de distance dans un espace géométrique. Ce modèle très riche peut être à la base de nombreux travaux sémantiques car les intuitions usuelles en matière d'opérateurs logiques ou catégoriques s'y expriment fort bien.
2. Nous avons donné un cadre catégorique pour la construction du comonoïde commutatif libre, que nous avons utilisé pour obtenir l'exponentielle sur les jeux de Conway à gain. Cette technique devrait ouvrir la porte à de multiples constructions de l'exponentielle dans des cadres où sa définition "à la main" n'est pas toujours accessibles. On pourra aussi s'en servir pour mieux comprendre son existence et sa définition dans certains cadres sémantiques.
3. Nous avons utilisé notre nouveau cadre pour décrire un modèle d'un langage de type Algol avec fonctionnelle d'ordre supérieur. Le modèle défini dépend plus des propriétés catégoriques qu'il vérifie, que de ses propriétés intrinsèques. Nous pouvons donc considérer que nous avons décrit un modèle catégorique de notre langage avec référence.

Dans un futur proche, nous voulons recomprendre notre construction de l'exponentielle en terme d'extension de Kan dans une théorie monoïdale. Nous avons aussi pour projet de fusionner notre modèle avec celui des jeux asynchrones afin d'avoir en notre possession toute la puissance de ce cadre. Enfin, nous espérons utiliser notre travail pour obtenir un modèle de langage impératif avec aliasing, et même avoir un cadre sémantique unifié capturant aussi bien langages de haut que de bas niveau.



# Bibliographie

- [Abramsky, 1996] Abramsky, S. (1996). Retracting some paths in process algebra. In Montanari, U. and Sassone, V., editors, *CONCUR*, volume 1119 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–17. Springer.
- [Abramsky and Coecke, 2004] Abramsky, S. and Coecke, B. (2004). A categorical semantics of quantum protocols. In *19th IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2004), July 2004, Turku, Finland*, pages 415–425. IEEE Computer Society.
- [Abramsky et al., 2002] Abramsky, S., Haghverdi, E., and Scott, P. (2002). Geometry of interaction and linear combinatory algebras. *Mathematical Structures in Computer Science*, 12(5) :625–665.
- [Abramsky et al., 1998] Abramsky, S., Honda, K., and McCusker, G. (1998). A fully abstract game semantics for general reference. In *13th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science*. IEEE Computer Society Press.
- [Day B., 1995] Day B., S. R. (1995). Kan extensions along promonoidal functors. *Theory and applications of categories*, 1(4) :72–77.
- [Dubuc, 1974] Dubuc, E. J. (1974). Free monoids. *Journal of Algebra*, 29 :208–228.
- [Girard, 1987] Girard, J.-Y. (1987). Linear logic. *TCS*, 50 :1–102.
- [Goubault, 2000] Goubault, E. (2000). Geometry and concurrency : A user’s guide. *Mathematical Structures in Computer Science*, 10(4).
- [Hasegawa, 2002] Hasegawa, M. (2002). The uniformity principle on traced monoidal categories. *Electr. Notes Theor. Comput. Sci.*, 69.
- [Joyal, 1977] Joyal, A. (1977). Remarques sur la théorie des jeux à deux personnes. *Gazette des Sciences Mathématiques du Québec*, 1(4) :46–52.
- [Joyal et al., 1996] Joyal, A., Street, R., and Verity, D. (1996). Traced monoidal categories. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (119(3)) :447–468.
- [Kelly, 1982] Kelly, G. (1982). *Basic Concepts of Enriched Category Theory*, volume 64 of *Lecture Notes in Mathematics*. Cambridge University Press.
- [Mac Lane, 1971] Mac Lane, S. (1971). *Categories for the working mathematician*. Springer.
- [Melliès, 2003] Melliès, P.-A. (2003). Categorical models of linear logic revisited. Prépublication électronique PPS//03/09//n°22 (pp), Laboratoire Preuves, Programmes et Systèmes. To appear in *Theoretical Computer Science*.

- [Melliès, 2004a] Melliès, P.-A. (2004a). Asynchronous games 2 : the true concurrency of innocence. In Gardner, P. and Yoshida, N., editors, *Proceedings of the 15th International Conference on Concurrency Theory (CONCUR 2004)*, number 3170 in LNCS. Springer Verlag.
- [Melliès, 2004b] Melliès, P.-A. (2004b). Asynchronous games 3 : an innocent model of linear logic. In Birkedal, L., editor, *Category Theory in Computer Science*. Electronic Notes in Theoretical Computer Science.
- [Melliès, 2005] Melliès, P.-A. (2005). Asynchronous games 4 : a fully complete model of propositional linear logic. Available at <http://www.pps.jussieu.fr/~mellies/papers.html>.
- [Milner, 1994] Milner, R. (1994). Action calculi v : reflexive molecular forms. Unpublished, third draf.

# Annexes

Les lecteurs n'étant pas familié avec la théorie des catégories sont rapportés à l'incontournable référence [Mac Lane, 1971] pour la découverte de ce magnifique champ mathématique. Nous présentons ici les notions les moins usuelles abordées dans cette recherche.

## Catégorie monoïdale tracée

Une catégorie symétrique monoïdale tracée [Joyal et al., 1996] est une SMC  $(\mathbb{C}, \otimes, I, s)$  munie d'une famille de fonction

$$Tr_X : \frac{X \otimes A \longrightarrow X \otimes B}{A \longrightarrow B}$$

vérifiant les axiomes suivants :

- **Naturality** :  $Tr_X(id_X \otimes g; f; id_X \otimes h) = g; Tr_X f; h$
- **Strength** :  $Tr_X(f \otimes g) = Tr_X f \otimes g$
- **Symmetry sliding** :  $Tr_X(Tr_Y(f; c_{XY} \otimes id_B)) = Tr_Y(Tr_X(c_{XY} \otimes id_A; f))$
- **Yanking** :  $Tr_X(c_{XX}) = 1_X$

## Un exemple de catégorie monoïdale tracée

Nous mentionnons un exemple important de catégorie symétrique monoïdale tracée. En effet, cette catégorie donne un opérateur de trace pour la sémantique statique associée à la dynamique des jeux de Conway.

Soit la catégorie **Rel** des ensembles avec relations, munie du produit tensoriel défini sur les objets comme le produit cartésien des ensembles et sur les relations par  $\langle x, y \rangle (R \times R') \langle x', y' \rangle$  ssi  $xRy$  et  $x'R'y'$ . Remarquons que ceci ne définit pas un produit au sens catégorique. Pour  $R : X \times A \rightarrow X \times B$ , on définit  $Tr_X R : A \rightarrow B$  via :

$$a(Tr_X R)b \Leftrightarrow \exists x \in X. \langle x, a \rangle R \langle x, b \rangle$$

On en déduit que  $\langle \mathbf{Rel}, \times, Tr \rangle$  est une catégorie tracée.

## Extension de Kan

Si  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{B}$ , une fonction  $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  vers un ensemble non vide  $\mathcal{C}$  peut être étendue sur  $\mathcal{B}$  de beaucoup de manières, mais il n'y a pas de façon canonique

de le faire. Cependant, si  $\mathcal{A}$  est une sous catégorie de  $\mathcal{B}$ , tout foncteur  $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  possède en principe deux extensions canoniques (ou extrêmes) de  $\mathcal{A}$  vers des foncteurs  $L, R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ . Ces extensions sont caractérisées par l'universalité de transformations naturelles appropriées; elles n'existent pas toujours mais on peut les calculer lorsque la catégorie  $\mathcal{A}$  est "petite" et lorsque  $\mathcal{C}$  est bi-complète. Nous ne présentons ici que la définition de l'extension de Kan à gauche.

On part d'un foncteur  $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  qui fait intuitivement de la catégorie  $\mathcal{A}$  une catégorie "incluse" dans  $\mathcal{B}$ . Le problème est alors étant donné un foncteur  $K : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  de trouver l'extension naturelle  $\exists_J A : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  munie d'une transformation naturelle  $\epsilon : A \rightarrow (\exists_J A) \circ J$  universelle au sens où pour tout autre couple  $S, \alpha : A \rightarrow S \circ J$ , il existe une unique transformation naturelle  $\sigma : \exists_J A \rightarrow S$  tel que  $\alpha = \sigma J \cdot \epsilon$

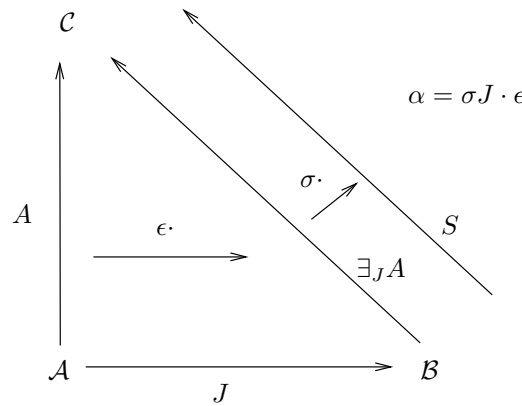


FIG. A.1 – Extension de Kan à gauche

## Convolution entre deux foncteurs d'une catégorie monoïdale dans un catégorie cocomplète

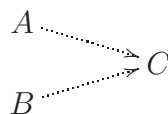
Si  $\mathcal{C}$  est une catégorie monoïdale cocomplète et  $\mathcal{A}$  est un catégorie monoïdale "petite", alors on peut munir la catégorie des foncteurs  $[\mathcal{A}, \mathcal{C}]$  d'une convolution monoïdale donnée par

$$F * G = \int^{A, A'} \mathcal{A}(A \otimes A', -) \otimes (FA \otimes GA')$$

## Catégories $\omega$ -filtrées et colimites

Une catégorie  $\mathcal{C}$  est  $\omega$ -filtrée si

- Pour tous objets  $A, B$ , il existe  $C$  tel que



- Pour toutes flèches  $f, g : A \rightarrow B$ , il existe une flèche  $h : B \rightarrow C$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & \rightarrow & B & \cdots & h & \rightarrow & C \\
 & & & & & & & & \\
 A & & & & & & & & \\
 & & g & \rightarrow & B & \cdots & h & \rightarrow & C
 \end{array}$$

commute.

Une colimite est dite *filtrée* si elle est calculée sur une catégorie  $\omega$ -filtrée.

Traditionnellement, les colimites n'étaient calculées que sur de préordres dirigés, qui ont ensuite été étendus à la notion de catégories filtrées. Cette restriction s'est avérée finalement inutile, mais le concept de colimites filtrées à garder son intérêt par la formule d'inversion de l'ordre d'application entre colimites filtrées et limites finies. Dans notre travail, nous avons regardé des catégories monoïdales dont le tenseur commute aux colimites filtrées.