

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD XI

Centre d'Orsay

**Mémoire**

présenté pour obtenir le diplôme d'

**Habilitation à diriger des recherches**

en sciences

Spécialité : Mathématiques

par

**Emmanuel TRÉLAT**

Le 25 novembre 2005 devant le jury composé de :

M. Hisham ABOU-KANDIL	Examineur
M. Andrei AGRACHEV	Rapporteur
M. Georges BASTIN	Président
M. Bernard BONNARD	Examineur
M. Jean-Michel CORON	Rapporteur
M. Pierre ROUCHON	Examineur
M. Marius TUCSNAK	Rapporteur



## Remerciements

J'adresse tout d'abord ma plus vive reconnaissance à Bernard Bonnard et Jean-Michel Coron. Bernard, qui a dirigé ma thèse à l'Université de Dijon, m'a fait partager son enthousiasme et son expérience, me communiquant ainsi son goût et sa vision de la recherche. Il est aujourd'hui un ami proche, et j'ai beaucoup de plaisir à collaborer avec lui. C'est en fait Jean-Michel qui m'a initié à la théorie du contrôle, puis suggéré de rencontrer Bernard. Au cours de ces dernières années à Orsay, il m'a témoigné un soutien constant. Ses nombreuses suggestions, toujours pertinentes et fructueuses, ses conseils scientifiques, ont été d'une importance capitale dans mon travail. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude et ma sincère amitié.

Je tiens ensuite à remercier vivement Andrei Agrachev et Marius Tucsnak, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire, et de faire partie de ce jury. Tous deux ont toujours fait preuve à mon égard de beaucoup de disponibilité et d'esprit critique. Leurs conseils avisés me sont précieux.

Mes remerciements vont aussi à Georges Bastin, qui me fait l'honneur de présider le jury, et je lui en suis très reconnaissant. La présence d'Hisham Abou-Kandil et de Pierre Rouchon est à la fois un honneur et un plaisir. Je les remercie chaleureusement d'avoir accepté de faire partie de ce jury. Qu'ils soient tous assurés de ma gratitude et mon amitié. Bien que Enrique Zuazua n'ait malheureusement pas pu participer au jury, je le remercie sincèrement pour nos nombreux échanges qui me sont scientifiquement très profitables.

J'ai eu des discussions très enrichissantes avec les membres du Laboratoire de Mathématique d'Orsay, notamment avec François Alouges, Patrick Gérard, qui n'ont jamais ménagé leur temps, et m'ont donné de nouvelles pistes de recherche. L'ambiance au sein de mon équipe a toujours été très amicale et stimulante. Je renouvelle toute ma sympathie à tous les membres du laboratoire, dont certains sont de très bons amis, comme Stéphane Labbé, et Vincent Rivoirard, qui est aussi mon beau-frère.

J'ai la chance de partager mon bureau avec mon ami Ludovic Rifford. Sa culture mathématique et son esprit curieux et vif en font un collaborateur scientifique exceptionnel. J'ai beaucoup de plaisir à discuter et travailler avec lui, qu'il en soit vivement remercié.

Je ne saurais également trop remercier mes deux proches collaborateurs et amis Yacine Chitour et Frédéric Jean, avec qui nous formons (selon nos épouses) le trio des trois "Inconnus". Nous nous retrouvons chaque semaine pour travailler, ou simplement discuter, parfois autour d'un verre. Nos nombreux échanges m'ont beaucoup apporté autant sur le plan scientifique que sur le plan humain.

Je suis très heureux d'effectuer mon enseignement dans le Master d'Ingénierie Mathématique de l'Université d'Orsay, dans lequel je m'occupe de l'Option Automatique (M2). La gestion de cette option est un travail prenant, mais passionnant, et je remercie vivement les membres du Laboratoire de Mathématique, notamment Jean-Michel Coron et Elisabeth Gassiat, de m'avoir confié cette mission. Le fait de voir nos étudiants réussir sur le marché du travail, et trouver des emplois hautement qualifiés dans le milieu de la recherche industrielle, représente une immense satisfaction.

C'est avec beaucoup de gentillesse et d'efficacité que Danièle Le Meur (maintenant à la retraite), Dominique Girardot, Catherine Poupon, et Antoinette Bardot, m'ont aidé dans diverses tâches administratives. Je leur exprime toute ma reconnaissance.

Enfin, je remercie ma famille pour son constant soutien, et en particulier ma femme pour son infinie patience et sa compréhension, et j'adresse toute ma tendresse paternelle à mes deux enfants, Vincent et Opale.



# Table des matières

Résumé . . . . .	iv
<b>I Contrôle en dimension finie</b>	<b>1</b>
<b>1 Contrôle optimal, trajectoires singulières, et applications</b>	<b>2</b>
1.1 Définitions et préliminaires . . . . .	2
1.2 Propriétés des trajectoires singulières . . . . .	4
1.2.1 Optimalité des trajectoires singulières . . . . .	4
1.2.2 Résultats de type Morse-Sard en géométrie sous-Riemannienne . . . . .	5
1.2.3 Résultats de genericité pour les trajectoires singulières . . . . .	7
1.3 Régularité de la fonction valeur en contrôle optimal . . . . .	9
1.3.1 Sous-analyticité de la fonction valeur en l'absence de singulière minimisante . . . . .	9
1.3.2 Etude asymptotique en présence de singulières minimisantes . . . . .	10
1.4 Applications . . . . .	11
1.4.1 Régularité des solutions de viscosité d'équations d'Hamilton-Jacobi . . . . .	11
1.4.2 Stabilisation hybride semi-globale de systèmes de contrôle affines sans dérive . . . . .	15
<b>2 Méthodes numériques en contrôle optimal</b>	<b>16</b>
2.1 Préliminaires : méthodes numériques directes et indirectes . . . . .	16
2.2 Théorie des points conjugués, et algorithmes de calcul . . . . .	18
2.3 Applications en aéronautique . . . . .	20
2.3.1 Rentrée atmosphérique d'une navette spatiale . . . . .	20
2.3.2 Transfert orbital d'un satellite à poussée faible . . . . .	23
<b>3 Extensions et projets de recherche</b>	<b>25</b>
<b>II Contrôle en dimension infinie</b>	<b>27</b>
<b>4 Contrôlabilité et stabilisation de quelques équations aux dérivées partielles</b>	<b>28</b>
4.1 Equations de la chaleur semi-linéaires . . . . .	29
4.2 Equations des ondes semi-linéaires . . . . .	31
4.3 Equations de Navier-Stokes : flots de Couette . . . . .	34
<b>5 Analyse numérique des EDP contrôlées</b>	<b>35</b>
5.1 Le cadre abstrait . . . . .	36
5.2 Uniforme contrôlabilité des systèmes paraboliques contrôlés semi-discrétisés . . . . .	36
5.3 Exemple d'application : contrôle de type Neumann pour l'équation de la chaleur . . . . .	38
<b>6 Extensions et projets de recherche</b>	<b>41</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

## Résumé

Ce mémoire présente les travaux que j'ai effectués, tout d'abord, à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Dijon, pendant ma thèse de 1998 à 2000, puis dans l'équipe d'Analyse Numérique et Equations aux Dérivées Partielles du Département de Mathématiques de l'Université d'Orsay, depuis 2001. Ces travaux sont regroupés en deux parties, la première traitant de problèmes de contrôle en dimension finie, et la seconde, en dimension infinie. Ces deux parties sont elles-mêmes séparées en deux sous-parties : les résultats théoriques, et les résultats numériques. A la fin de chaque partie, des projets de recherche sont présentés.

Dans la première partie, on s'intéresse à la régularité de la fonction valeur associée à un problème de contrôle optimal non linéaire en dimension finie. Il s'avère que cette régularité est liée à l'existence de *trajectoires singulières minimisantes*. Rappelons qu'une trajectoire *singulière* est une singularité de l'ensemble des solutions du système de contrôle. Selon le principe du maximum de Pontryagin, les trajectoires singulières sont projections d'*extrémales anormales*, par opposition aux *extrémales normales* qui constituent le cadre classique du calcul des variations. Pour des systèmes affines à coût quadratique, on montre que, s'il n'existe aucune trajectoire singulière minimisante, alors la fonction valeur associée est *sous-analytique* (cela s'étend à des situations plus générales).

Ces résultats ont des conséquences dans les théories d'Hamilton-Jacobi et de stabilisation. Tout d'abord, on montre que la *solution de viscosité* de certaines classes d'*équations d'Hamilton-Jacobi* est sous-analytique, ce qui implique en particulier que l'ensemble de ses singularités est une sous-variété stratifiée de codimension au moins un. Ensuite, on montre un résultat de *stabilisation hybride semi-globale* pour des systèmes de contrôle affines sans dérive.

S'il existe des trajectoires singulières minimisantes, la fonction valeur n'est pas sous-analytique en général. Une étude asymptotique est faite sur le cas modèle sous-Riemannien de Martinet. Dans le cas intégrable, on montre que la fonction valeur appartient à la classe *log-exp*, qui est une extension de la classe sous-analytique avec des fonctions logarithme et exponentielle.

Ces résultats motivent donc l'étude des propriétés des trajectoires singulières.

Tout d'abord, concernant leur optimalité, ces trajectoires ont, sous des conditions génériques, la propriété de *rigidité*, c'est-à-dire qu'elles sont localement isolées parmi toutes les solutions du système ayant les mêmes extrémités, et donc, elles sont localement optimales, jusqu'à un premier temps dit *conjugué* que l'on peut caractériser.

On s'intéresse alors à l'occurrence des trajectoires singulières minimisantes. Des résultats de type *Morse-Sard* sont présentés dans le cadre de la géométrie sous-Riemannienne, qui montrent qu'elles ne remplissent que peu d'espace. En particulier, on montre que l'image de l'application exponentielle (qui paramétrise les extrémales normales) est partout dense, et même de mesure de Lebesgue pleine dans le cas de corang un.

On prend ensuite le point de vue inverse, en s'intéressant aux propriétés de généricité des trajectoires singulières, pour des systèmes de contrôle affines. On montre que, génériquement au sens de Whitney, elles sont *d'ordre minimal* et *de corang un*, ce qui a des corollaires en contrôle optimal. Par exemple, pour des systèmes de contrôle affines génériques ayant plus de trois champs de vecteurs, avec coût quadratique, il n'existe aucune trajectoire singulière minimisante ; en particulier, la fonction valeur associée est donc sous-analytique.

Dans le deuxième chapitre de la première partie, on s'intéresse aux méthodes numériques en contrôle optimal. Il existe deux types principaux de méthodes : les *méthodes directes* d'une part, qui reposent sur une discrétisation totale du problème de contrôle optimal, et conduisent à des problèmes de programmation non linéaire ; les *méthodes indirectes* d'autre part, basées sur le principe du maximum, qui réduisent le problème à un problème aux valeurs limites se résolvant numériquement par une *méthode de tir*. Ces dernières sont particulièrement adaptées aux applications en aéronautique présentées ici. Le principe du maximum étant une condition nécessaire d'optimalité, il convient de s'assurer a posteriori que les extrémales calculées par la méthode de tir sont bien optimales. Pour cela, on rappelle le concept de *temps conjugué*, c'est-à-dire le temps au-delà duquel une extrémale n'est plus localement optimale, et on décrit des algorithmes de calcul, basés sur des développements théoriques récents en théorie du contrôle optimal géométrique, qui couvrent le cas normal et le cas anormal. Ces algorithmes, ainsi que la méthode de tir, sont implémentés dans le logiciel *COTCOT* (Conditions of Order Two and COnjugate times), disponible sur le web.

Des applications en aéronautique sont ensuite présentées : le problème de rentrée atmosphérique d'une navette spatiale tout d'abord, où le but est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, le contrôle étant l'angle de gîte, et le coût étant le flux thermique total (facteur d'usure). La navette est de plus soumise à des contraintes sur l'état : flux thermique, accélération normale, et pression dynamique. Ces contraintes rendent le problème de contrôle optimal difficile, et nécessitent une étude préliminaire théorique et géométrique sur les synthèses optimales locales avec contraintes. Ensuite, on présente le problème de transfert orbital d'un satellite à poussée faible, où le but est de transférer l'engin d'une orbite basse à une orbite géostationnaire, en temps minimal, sachant que la force de propulsion est très faible. Le problème de temps optimal est important lorsque la poussée est faible (par exemple, une propulsion ionique), car le transfert orbital peut prendre plusieurs mois. Pour ces deux problèmes, des simulations numériques, utilisant les méthodes précédentes, sont présentées.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à des problèmes de contrôle des équations aux dérivées partielles. On présente tout d'abord une méthode de contrôlabilité et de stabilisation, qui consiste à stabiliser un système de contrôle le long d'un chemin d'états stationnaires. Pour mettre en évidence l'idée principale, cette méthode est présentée en dimension finie. Elle permet de construire un contrôle feedback sous forme explicite, ainsi qu'une fonction de Lyapunov, et par ailleurs, elle est facilement implémentable. Cette méthode de déformation quasi-statique permet d'établir des résultats de contrôlabilité exacte et de stabilisation pour des équations de la chaleur et des ondes semi-linéaires en dimension un, où la non-linéarité est quelconque. Notons que l'existence de fonctions barrières et/ou de phénomènes d'explosion limitent les résultats de contrôlabilité. Pour ces deux équations, on montre que l'on peut passer, avec un contrôle frontière, en temps éventuellement grand, d'un état stationnaire à tout autre, pourvu qu'ils appartiennent à une même composante connexe de l'ensemble des états stationnaires (cette condition étant vérifiée dans un grand nombre de cas). La procédure consiste en fait à stabiliser un système de contrôle linéaire instationnaire de dimension finie, et on peut construire un contrôle sous forme de boucle fermée, en calculant un nombre fini de composantes de la solution, dans une décomposition sur une base Hilbertienne (pour l'équation de la chaleur) ou sur une base de Riesz (pour l'équation des ondes). Des simulations numériques sont effectuées.

On présente ensuite un résultat de contrôlabilité exacte sur les flots de Couette, qui sont des solutions stationnaires particulières des équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible entre deux cylindres concentriques infinis en rotation. On montre qu'il est possible de passer d'un flot de Couette à tout autre, en agissant juste sur la rotation du cylindre extérieur.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à la semi-discrétisation (en espace) des équations aux dérivées partielles linéaires contrôlées. La discrétisation d'une EDP contrôlable, en utilisant par exemple une méthode de Galerkin, conduit à une famille de systèmes de contrôle linéaires, et on se pose la question de savoir si on peut déterminer des contrôles pour ces systèmes semi-discrétisés, convergeant, lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro, vers un contrôle pour le modèle continu, permettant d'atteindre un certain point. Pour des EDP linéaires contrôlables, il existe de nombreuses méthodes pour réaliser la contrôlabilité ; parmi elles, la méthode HUM (*Hilbert Uniqueness Method*) consiste à minimiser la norme  $L^2$  du contrôle pour atteindre une cible fixée. Pour des systèmes paraboliques exactement contrôlables à zéro, sous des conditions standards sur le procédé de semi-discrétisation (vérifiées pour la plupart des méthodes habituelles), lorsque l'opérateur de contrôle n'est que faiblement non borné, on montre un résultat de *contrôlabilité uniforme* des systèmes de contrôles discrétisés. De plus, on donne un procédé de minimisation pour calculer des contrôles sur les modèles approchés, qui convergent vers le contrôle HUM du modèle continu permettant d'atteindre une certaine cible. La condition sur l'opérateur de contrôle est vérifiée, par exemple, pour l'équation de la chaleur avec contrôle frontière de type Neumann, et des simulations numériques sont présentées dans ce cadre.



Première partie

Contrôle en dimension finie

# Chapitre 1

## Contrôle optimal, trajectoires singulières, et applications

La problématique générale du contrôle optimal est la suivante. Soient  $M$  une variété (lisse) de dimension  $n$ , et  $\Omega$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^m$ , où  $m \geq 1$  est un entier. Considérons un système de contrôle général

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad (1.1)$$

avec  $x(t_0) = x_0$ , où  $f$  est une application de classe  $C^1$  définie sur  $I \times M \times U$ ,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  contenant  $\Omega$ , et  $(t_0, x_0) \in I \times V$ . Par ailleurs, on suppose que les contrôles  $u(\cdot)$  appartiennent à  $L_{loc}^\infty(I, \Omega)$ . Ces hypothèses assurent, pour tout contrôle  $u$ , l'existence et l'unicité sur d'une solution maximale  $x_u(\cdot)$  sur un intervalle  $J \subset I$ , du problème de Cauchy (1.1). Par commodité, on suppose que  $t_0 = 0$ . Pour tout contrôle  $u \in L_{loc}^\infty(I, \Omega)$ , la trajectoire associée  $x_u(\cdot)$  est définie sur un intervalle maximal  $[0, t_e(u)[$ , où  $t_e(u) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ . Pour tout  $T > 0$ ,  $T \in I$ , on note  $\mathcal{U}_T$  l'ensemble des contrôles admissibles sur  $[0, T]$ , c'est-à-dire l'ensemble des contrôles  $u \in L_{loc}^\infty([0, T], \Omega)$  tels que la trajectoire associée soit bien définie sur  $[0, T]$  (autrement dit  $T < t_e(u)$ ).

Soient  $f^0$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $I \times M \times U$ , et  $g$  une fonction continue sur  $M$ . Pour tout contrôle  $u \in \mathcal{U}_T$ , on définit le *coût* de la trajectoire associée  $x_u(\cdot)$  sur l'intervalle  $[0, T]$  par

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x_u(t), u(t)) dt + g(T, x_u(T)). \quad (1.2)$$

Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux sous-ensembles de  $M$ . Le problème de contrôle optimal est de déterminer les trajectoires  $x_u(\cdot)$  solutions de  $\dot{x}_u(t) = f(t, x_u(t), u(t))$ , telles que  $x_u(0) \in M_0$ ,  $x_u(T) \in M_1$ , et minimisant le coût  $C(T, u)$ . On dit que le problème de contrôle optimal est à *temps final non fixé* si le temps final  $T$  est libre, sinon on parle de problème à *temps final fixé*.

### 1.1 Définitions et préliminaires

Dans cette section, nous rappelons quelques définitions essentielles, classiques en théorie du contrôle (voir par exemple [1], et toutes les références contenues dans ce livre).

Considérons pour le système (1.1) le problème de *contrôle* suivant : étant donné un point  $x_1 \in M$ , trouver un temps  $T$  et un contrôle admissible  $u$  sur  $[0, T]$  tels que la trajectoire  $x_u$  associée à  $u$ , solution de (1.1), vérifie  $x_u(0) = x_0$  et  $x_u(T) = x_1$ . Ceci motive la définition classique suivante.

**Définition 1.1.1.** Soit  $T > 0$ . L'*application entrée-sortie* en temps  $T$  du système contrôlé (1.1) initialisé à  $x_0$  est l'application

$$\begin{aligned} E_{x_0, T} : \mathcal{U}_T &\longrightarrow M \\ u &\longmapsto x_u(T), \end{aligned} \quad (1.3)$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution de (1.1), associée à  $u$ , telle que  $x_u(0) = x_0$ .

Si  $f$  est de classe  $C^p$ ,  $p \geq 1$ , alors le domaine de définition  $\mathcal{U}_T$  de  $E_{x_0, T}$  est un ouvert de  $L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m)$ , et  $E_{x_0, T}$  est de classe  $C^p$  au sens  $L^\infty$ . Une question importante en théorie du contrôle est d'étudier cette application en décrivant son image, ses singularités, etc. L'ensemble accessible en temps  $T$  depuis le point  $x_0$ , noté  $Acc(x_0, T)$ , est par définition l'image de l'application entrée-sortie  $E_{x_0, T}$ . Il représente l'ensemble des points qui peuvent être atteints au temps  $T$  par des trajectoires solutions du système (1.1) et partant du point  $x_0$ . Le système (1.1) est dit (globalement) *contrôlable* en temps  $T$  depuis  $x_0$  si  $Acc(x_0, T) = M$ . Bien entendu, sauf pour des dynamiques  $f$  très particulières, il n'existe pas en général de condition suffisante de globale contrôlabilité. On étudie donc plutôt des problèmes locaux, d'où la définition suivante.

**Définition 1.1.2.** Une trajectoire  $x_u(\cdot)$  est dite *singulière* sur  $[0, T]$  si son contrôle  $u$  associé est un point singulier de l'application entrée-sortie  $E_{x_0, T}$ , où  $x_0 = x_u(0)$ . Le contrôle  $u$  est dit *singulier*. Le *corang* de la trajectoire  $x_u(\cdot)$  (ou du contrôle  $u$ ) est égal à la codimension de l'image de  $dE_{x_0, T}(u)$ .

D'après le théorème des fonctions implicites, si un contrôle  $u$  est régulier (i.e., non singulier), alors l'application  $E_{x_0, T}$  est localement ouverte au voisinage du point  $x_1 = E_{x_0, T}(u)$ . En d'autres termes, le système (1.1) est *localement contrôlable* au voisinage du point  $x_1$ . Cette remarque soulève la question du rôle des trajectoires singulières en théorie du contrôle, étudiée dans ce mémoire (voir aussi [64]).

Pour un *système de contrôle affine*, i.e.,

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)), \quad (1.4)$$

où les  $f_i$  sont des champs de vecteurs lisses sur  $M$ , le domaine de définition  $\mathcal{U}_T$  de l'application entrée-sortie  $E_{x_0, T}$  est un ouvert de  $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ , et  $E_{x_0, T}$  est lisse au sens  $L^2$ , et est analytique si les champs de vecteurs sont analytiques. Notons qu'il est très intéressant de considérer  $L^2$  comme espace de contrôles. En effet dans cet espace on bénéficie d'une structure hilbertienne qui permet de faire une théorie spectrale de l'application entrée-sortie (pour étudier notamment l'optimalité des trajectoires singulières, voir [7] et la section suivante), et on bénéficie d'autre part de bonnes propriétés de compacité faible dans cet espace, utiles pour établir des résultats d'existence de trajectoire optimale.

Concernant le problème d'existence de trajectoire optimale pour un problème de contrôle optimal général, des résultats classiques comme le *théorème de Filippov* permettent d'établir l'existence sous des hypothèses de convexité de l'ensemble des vecteurs vitesse (voir [1, Th. 6.2.1 p. 97]).

**Principe du maximum de Pontryagin.** Le principe du maximum de Pontryagin (voir [147]) donne des conditions nécessaires d'optimalité qui permettent de calculer les trajectoires optimales. Selon ce théorème, si le contrôle  $u \in \mathcal{U}_T$  associé à la trajectoire  $x(\cdot)$  est optimal sur  $[0, T]$ , alors il existe une application  $p(\cdot)$  absolument continue sur  $[0, T]$  appelée vecteur adjoint, vérifiant  $p(t) \in T_{x(t)}^* M$ , et un réel  $p^0 \leq 0$ , tels que le couple  $(p(\cdot), p^0)$  soit non trivial, et tels que, pour presque tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad (1.5)$$

où  $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u) \rangle + p^0 f^0(t, x, u)$  est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur  $[0, T]$

$$H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \max_{v \in \Omega} H(t, x(t), p(t), p^0, v). \quad (1.6)$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible  $M_1$  n'est pas fixé, on a la condition, au temps final  $T$ ,

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)). \quad (1.7)$$

Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  (ou juste l'un des deux ensembles) sont des sous-variétés de  $M$  ayant des espaces tangents en  $x(0) \in M_0$  et  $x(T) \in M_1$ , alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions dites de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, \quad \text{et} \quad p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1. \quad (1.8)$$

Dans les conditions du théorème, on a de plus  $\frac{d}{dt}H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = \frac{\partial H}{\partial t}(t, x(t), p(t), p^0, u(t))$ , pour presque tout  $t \in [0, T]$ . En particulier, si le système augmenté est *autonome*, i.e., si  $f$  et  $f^0$  ne dépendent pas de  $t$ , alors  $H$  ne dépend pas de  $t$ , et  $\max_{v \in \Omega} H(x(t), p(t), p^0, v) = \text{Cste}$ , pour tout  $t \in [0, T]$ .

Lorsque  $\Omega$  est ouvert, la condition de maximum (1.6) implique  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ .

**Définition 1.1.3.** Une *extrémale* du problème de contrôle optimal est un quadruplet  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$  solution des équations (1.5) et (1.6). Si  $p_0 = 0$ , on dit que l'extrémale est *anormale*, et si  $p^0 \neq 0$  l'extrémale est dite *normale*.

*Remarque 1.1.1.* Lorsque  $\Omega$  est ouvert (par exemple,  $\Omega = \mathbb{R}^m$  lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle), alors la trajectoire  $x(\cdot)$ , associée au contrôle  $u(\cdot)$ , est une trajectoire singulière du système, si et seulement si elle est projection d'une extrémale anormale  $(x(\cdot), p(\cdot), 0, u(\cdot))$ .

Remarquons que puisque  $p^0 = 0$ , ces trajectoires ne dépendent pas du coût. Elles sont *intrinsèques* au système de contrôle.

**Définition 1.1.4.** Une trajectoire singulière est dite *stricte*, ou *strictement singulière*, si elle n'admet aucun relèvement normal.

Notons qu'une trajectoire singulière est de corang un si elle admet un unique relèvement extrémal anormal. Elle est stricte et de corang un si elle admet un unique relèvement extrémal, qui est anormal.

*Remarque 1.1.2.* Le principe du maximum tel qu'il vient d'être énoncé prend en compte des contraintes sur le contrôle, mais ne prend pas en compte d'éventuelles contraintes sur l'état, ou bien des contraintes mixtes. Il existe plusieurs versions du principe du maximum prenant en compte de telles contraintes (voir à ce sujet [71, 82, 104, 113, 134]). Une différence fondamentale avec le principe du maximum classique est que la présence de contraintes sur l'état peut rendre le vecteur adjoint discontinu. On rajoute alors des conditions de saut, ou de jonction. En fait, lorsqu'il existe des contraintes sur l'état de la forme  $c_i(x) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , où les fonctions  $c_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont de classe  $C^1$ , alors le vecteur adjoint  $p(\cdot)$  est solution de l'équation intégrale  $p(t) = p(T) + \int_t^T \frac{\partial H}{\partial x} dt - \sum_{i=1}^p \int_t^T \frac{\partial c_i}{\partial x} d\mu_i$ , où les  $\mu_i$  sont des mesures positives ou nulles dont le support est contenu dans  $\{t \in [0, T] \mid c_i(x(t)) = 0\}$  (voir [2, Chapitre 7] pour une preuve, et plus de détails).

## 1.2 Propriétés des trajectoires singulières

### 1.2.1 Optimalité des trajectoires singulières

Les trajectoires singulières jouent un rôle important dans la théorie du contrôle optimal. Elles sont des singularités de l'ensemble des solutions du système de contrôle, et ne dépendent donc pas du problème de minimisation. En particulier, l'étude des extrémales anormales dont le Hamiltonien est identiquement nul est cruciale. L'existence de telles trajectoires était déjà connue dans la théorie du calcul des variations classique (voir par exemple [63]), et a posé un problème majeur au cours du développement, dans les années 40, de cette discipline qui est devenue la théorie du contrôle optimal. Leur rôle dans la théorie du contrôle non linéaire est étudié dans [64], et dans ma thèse de doctorat [44]. Pendant longtemps, on a douté de l'existence de trajectoires singulières minimisantes. Pourtant, Carathéodory et Hilbert étaient déjà familiers du phénomène de *rigidité* (voir [172]), et Bismut montre clairement leur existence dans [62]. On a cependant essayé d'ignorer les singulières minimisantes, d'éviter les extrémales anormales en cherchant un autre ensemble de multiplicateurs de Lagrange, ou de les éliminer en prétendant (à tort) qu'elles ne sont jamais optimales. Dans [139], Montgomery donne un exemple d'extrémale anormale stricte minimisante en géométrie sous-Riemannienne, et donne une liste de plusieurs démonstrations fausses (de plusieurs auteurs) du fait qu'une trajectoire anormale ne peut pas être optimale. Ce résultat a activé une série de travaux ayant pour but d'élucider le rôle des extrémales anormales, notamment en géométrie sous-Riemannienne.

Concernant l'optimalité des trajectoires singulières, une avancée majeure a été faite par [65] pour le problème de temps minimal pour des systèmes affines, par [49, 122, 131] dans le cadre de la géométrie sous-Riemannienne (ou, de manière équivalente, le problème de temps minimal pour des systèmes affines

sans dérive), et par [51, 156] en général, où ces singularités sont traitées dans un contexte générique. Ces travaux ont conduit à des résultats de *rigidité* (voir aussi [70]) des trajectoires singulières, c'est-à-dire qu'elles sont localement isolées parmi les trajectoires ayant les mêmes conditions aux limites, et donc localement optimales. De plus, les auteurs ont développé une *théorie de Morse* de l'application entrée-sortie, qui permet de caractériser les points où la trajectoire perd son optimalité.

Les résultats ci-dessous ont été obtenus dans [7] (voir aussi [44]). Le but est de chercher des conditions sous lesquelles une trajectoire singulière est optimale (minimisante ou maximisante), et de calculer son premier *temps conjugué*, c'est-à-dire le temps au-delà duquel elle n'est plus optimale (voir à ce propos la section 2.2 de ce mémoire). Dans [7], on améliore les résultats de [65] en les étendant aux systèmes affines mono-entrée avec contrainte sur le contrôle pour le problème du temps optimal, mais aussi pour un coût quelconque, retrouvant ainsi des résultats de [51]. Par ailleurs, cette théorie s'applique aussi en géométrie sous-Riemannienne, pour des distributions de rang deux, montrant qu'un temps conjugué peut être calculé en utilisant le formalisme introduit dans [65] pour les systèmes affines ; ceci fait le lien entre les travaux de [65] et [49]. Pour résumer, les résultats obtenus sont du type suivant.

**Théorème 1.2.1.** *Considérons le problème de temps optimal pour le système affine  $\dot{x} = f_0(x) + u f_1(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$ , où le contrôle  $u$  vérifie la contrainte  $|u| \leq \eta$  (resp., le système affine sans dérive  $\dot{x} = v f_0(x) + u f_1(x)$ , où  $v^2 + u^2 \leq 1$ ), et où  $f_0$  et  $f_1$  sont des champs de vecteurs lisses de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $x(\cdot)$  une trajectoire singulière, injective et lisse ; on peut alors supposer qu'elle est associée au contrôle  $u = 0$  sur  $[0, T]$ . Par ailleurs, on suppose que, pour tout  $t \in [0, T]$ ,*

- *le premier cône de Pontryagin  $K(t) = \text{Vect} \{ad^k f_0.f_1(x(t)) \mid k \in \mathbb{N}\}$  est de codimension 1, et est engendré par les  $n - 1$  premiers vecteurs ;*
- *$ad^2 f_1.f_0(x(t)) \notin K(t)$  ;*
- *si  $n \geq 3$  alors  $f_0(x(t)) \notin \text{Vect} \{ad^k f_0.f_1(x(t)) \mid k = 0 \dots n - 3\}$ , et si  $n = 2$ , alors  $f_0(x(t))$  et  $f_1(x(t))$  sont indépendants.*

*Sous ces hypothèses, il existe un temps  $t_c$ , appelé temps conjugué, tel que  $x(\cdot)$  est localement optimale sur  $[0, T]$  (en topologie  $C^0$ ) si et seulement si  $T < t_c$ .*

Pour un problème de contrôle optimal avec un coût quelconque  $C(u)$ , le résultat précédent reste vrai sous des conditions génériques (voir [7]).

Par ailleurs, un résumé des conditions générales d'ordre deux (établies principalement par A. Agrachev), assurant l'optimalité d'une trajectoire singulière pour un problème de contrôle optimal non linéaire général, est fait dans [37].

## 1.2.2 Résultats de type Morse-Sard en géométrie sous-Riemannienne

Dans cette section, on expose les résultats obtenus en collaboration avec L. Rifford dans [15].

**Préliminaires sur la géométrie sous-Riemannienne.** On rappelle la définition générale d'une *distance sous-Riemannienne* (appelée aussi *distance de Carnot-Carathéodory*), due à A. Bellaïche [60]. Soit  $M$  une variété lisse connexe de dimension  $n$ , soit  $m$  un entier tel que  $1 \leq m \leq n$ , et soient  $f_1, \dots, f_m$ , des champs de vecteurs lisses sur  $M$ . Pour tout  $x \in M$  et tout  $v \in T_x M$ , posons

$$g(x, v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m u_i^2 \mid u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) = v \right\}.$$

Alors,  $g(x, \cdot)$  est une forme quadratique définie positive sur le sous-espace de  $T_x M$  engendré par  $f_1(x), \dots, f_m(x)$ . En dehors de ce sous-espace, on pose  $g(x, v) = +\infty$ . La forme  $g$  est appelée *métrique sous-Riemannienne* associée au  $m$ -uplet de champs de vecteurs  $(f_1, \dots, f_m)$ . Soit  $\mathcal{AC}([0, 1], M)$  l'ensemble des chemins absolument continus sur  $M$ , définis sur  $[0, 1]$ . La *longueur* de  $\gamma \in \mathcal{AC}([0, 1], M)$  est définie par  $l(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))} dt$ . On dit que la *condition de Chow*, ou *condition de Hörmander*, est vérifiée, si l'algèbre de Lie engendrée par les champs de vecteurs  $f_1, \dots, f_m$ , est égale à l'espace tangent  $T_x M$ , en tout point  $x$  de  $M$ . Il est bien connu que, sous cette condition, deux points quelconques de  $M$  peuvent être reliés par un chemin absolument continu de longueur finie. La *distance sous-Riemannienne* associée au  $m$ -uplet de champs de vecteurs  $(f_1, \dots, f_m)$ , entre deux points  $x_0, x_1$  de  $M$ , est définie par

$$d_{SR}(x_0, x_1) = \inf \{l(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{AC}([0, 1], M), \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1\}.$$

La *sphère sous-Riemannienne*  $S_{SR}(x_0, r)$  de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  est l'ensemble des points  $x \in M$  tels que  $d_{SR}(x_0, x) = r$ . Un chemin  $\gamma \in \mathcal{AC}([0, 1], M)$  est dit *minimisant* s'il réalise la distance sous-Riemannienne entre ses extrémités.

*Remarque 1.2.1.* Sous la condition de Chow,

- la topologie induite par la distance sous-Riemannienne  $d_{SR}$  coïncide avec la topologie de  $M$  ;
- deux points suffisamment proches peuvent être reliés par un chemin minimisant ;
- si la variété  $M$  est de plus un espace métrique complet pour la distance sous-Riemannienne  $d_{SR}$ , alors deux points quelconques de  $M$  peuvent être reliés par un chemin minimisant.

Considérons par ailleurs le système de contrôle sur  $M$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)) \quad \text{p.p. sur } [0, 1], \quad (1.9)$$

où le contrôle  $u(\cdot) = (u_1(\cdot), \dots, u_m(\cdot))$  appartient à  $L^2([0, 1], \mathbb{R}^m)$ .

*Remarque 1.2.2.* Une variété sous-Riemannienne est souvent définie comme un triplet  $(M, D, g)$ , où  $M$  est une variété de dimension  $n$ ,  $D$  est une distribution de rang  $m \leq n$  sur  $M$ , et  $g$  est une métrique Riemannienne sur  $D$ . Si les champs de vecteurs  $(f_1, \dots, f_m)$  sont partout linéairement indépendants, alors les solutions du système de contrôle (1.9) coïncident avec les chemins absolument continus tangents à la distribution  $D$ , où  $D(x) = \text{Vect} \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ , pour  $x \in M$ . Ces chemins sont dits *D-horizontaux*.

D'autre part, pour  $x_0 \in M$ , soit  $\Omega(x_0, D)$  l'ensemble des chemins  $D$ -horizontaux partant de  $x_0$  et dont la dérivée est de carré intégrable pour la métrique  $g$  (et donc pour toute métrique Riemannienne sur  $D$ ). Muni de la topologie  $H^1$ , l'ensemble  $\Omega(x_0, D)$  a une structure de variété Hilbertienne (voir [62]). Pour  $(x_0, x_1) \in M \times M$ , soit  $\Omega(x_0, x_1)$  le sous-ensemble des chemins  $x(\cdot) \in \Omega(x_0)$  tels que  $x(1) = x_1$ . L'ensemble  $\Omega(x_0, x_1)$  est une sous-variété de  $\Omega(x_0)$  dans un voisinage de tout chemin *non singulier*, mais peut ne pas être une variété (globalement) s'il existe des chemins singuliers.

Soient  $x_0$  et  $x_1$  dans  $M$ . On montre facilement, à l'aide d'une reparamétrisation et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que le problème sous-Riemannien de déterminer une trajectoire minimisante reliant  $x_0$  à  $x_1$  est équivalent au *problème de contrôle optimal* de trouver un contrôle  $u(\cdot) \in \mathcal{U}$  tel que la solution du système de contrôle (1.9) relie  $x_0$  à  $x_1$  en temps 1, et minimise le coût quadratique  $C(u(\cdot)) = \int_0^1 \sum_{i=1}^m u_i(t)^2 dt$ . Par conséquent, selon le principe du maximum, toute trajectoire optimale  $x(\cdot)$  telle que  $x(0) = x_0$ , associée à un contrôle  $u$ , est la projection d'une *extrémale*  $(x(\cdot), p(\cdot), p^0, u(\cdot))$ , solution du système Hamiltonien

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), p^0, u(t)), \quad \frac{\partial H}{\partial u}(x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0,$$

presque partout sur  $[0, 1]$ , où le Hamiltonien s'écrit  $H(x, p, p^0, u) = \left\langle p, \sum_{i=1}^m u_i f_i(x) \right\rangle + p^0 \sum_{i=1}^m u_i^2$ . Pour les extrémales normales (i.e.,  $p^0 \neq 0$ ), on normalise  $p^0 = -1/2$ . Rappelons que, puisqu'on n'a pas de contrainte sur le contrôle, toute trajectoire singulière est projection d'une extrémale anormale (i.e.,  $p^0 = 0$ ). Avec cette normalisation, les contrôles normaux s'écrivent  $u_i(t) = \langle p(t), f_i(x(t)) \rangle$ , pour  $i = 1, \dots, m$ . Par conséquent, les extrémales normales sont solutions du système Hamiltonien

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H_1}{\partial p}(x(t), p(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H_1}{\partial x}(x(t), p(t)), \quad \text{où } H_1(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \langle p, f_i(x) \rangle^2. \quad (1.10)$$

Fixons un point  $x_0$  de  $M$ . Le système différentiel (1.10) a une solution lisse bien définie sur  $[0, 1]$  telle que  $x(0) = x_0$  et  $p(0) = p_0$ , pour  $p_0 \in U$ , où  $U$  est un ouvert connexe de  $T_{x_0}^* M$ . L'application (lisse)

$$\begin{aligned} \exp_{x_0} : U &\longrightarrow M \\ p_0 &\longmapsto x(1) \end{aligned}$$

où  $(x(\cdot), p(\cdot))$  est la solution du système (1.10) telle que  $x(0) = x_0$  et  $p(0) = p_0$ , est appelée *application exponentielle* au point  $x_0$ . Cette application paramétrise les extrémales normales. Notons que toute trajectoire minimisante reliant  $x_0$  à un point de  $M \setminus \exp_{x_0}(U)$  est forcément strictement singulière.

Un point  $x \in \exp_{x_0}(U)$  est dit *conjugué* à  $x_0$  si c'est une valeur critique de l'application  $\exp_{x_0}$ , i.e., s'il existe  $p_0 \in U$  tel que  $x = \exp_{x_0}(p_0)$  et la différentielle  $d\exp_{x_0}(p_0)$  ne soit pas surjective. Le *lieu conjugué*, noté  $\mathcal{C}(x_0)$ , est l'ensemble des points conjugués à  $x_0$ . Notons que, d'après le théorème de Sard appliqué à  $\exp_{x_0}$ , le lieu conjugué  $\mathcal{C}(x_0)$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .

*Remarque 1.2.3.* On montre aussi que l'ensemble des extrémités des trajectoires singulières non strictes partant de  $x_0$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ .

### Les résultats.

**Théorème 1.2.2.** *On suppose que la condition de Chow est vérifiée, et que la variété  $M$  est complète pour la distance sous-Riemannienne  $d_{SR}$ . Il existe un sous-ensemble dense  $N_1$  de  $M$  tel que, pour tout point  $x \in N_1$ , il existe un unique chemin minimisant joignant  $x_0$  et  $x$ ; de plus, cette trajectoire admet un relèvement extrémal normal. En particulier, l'image  $\exp_{x_0}(U)$  de l'application exponentielle est dense dans  $M$ .*

Pour tout  $x \in M$ , soit  $D(x) = \text{Vect} \{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$ , et soit  $\mu$  la mesure de Lebesgue sur  $M$ . Vu le résultat précédent, on peut se demander si presque tout point de  $M$  appartient à  $\exp_{x_0}(U)$ . Le résultat suivant donne une réponse positive à cette question dans le cas d'une distribution de corang 1.

**Théorème 1.2.3.** *On suppose que la condition de Chow est vérifiée, et que la variété  $M$  est complète pour la distance sous-Riemannienne  $d_{SR}$ . Si la distribution  $D$  est partout de corang un, alors il existe un sous-ensemble  $N_2$  de  $M$  de mesure de Lebesgue totale tel que, pour tout point  $x \in N_2$ , il existe un chemin minimisant reliant  $x_0$  à  $x$  et ayant un relèvement extrémal normal. De plus, cette trajectoire est non singulière, et  $x$  n'est pas conjugué à  $x_0$ . En particulier, l'ensemble  $\exp_{x_0}(U)$  est de mesure de Lebesgue totale dans  $M$ , i.e.,  $\mu(M \setminus \exp_{x_0}(U)) = 0$ .*

Soit  $\mathcal{A}$  (resp.  $\mathcal{A}_s$ ) l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels que tout chemin minimisant reliant  $x_0$  à  $x$  est singulier (resp., strictement singulier). Bien entendu,  $\mathcal{A}_s \subset \mathcal{A}$ . Les théorèmes précédents impliquent que  $\mathcal{A}_s$  est d'intérieur vide dans  $M$ ; dans le cas de corang un,  $\mathcal{A}$  est de mesure de Lebesgue nulle dans  $M$ . Par ailleurs, l'ensemble  $\mathcal{S}_{min}^{strict}$  des points  $x$  de  $M$  tels qu'il existe un chemin strictement singulier minimisant reliant  $x_0$  à  $x$ , est d'intérieur vide dans  $M$ .

Ces résultats montrent que les singulières minimisantes remplissent "peu" d'espace. Dans la section suivante, on prend le point de vue inverse en s'intéressant aux propriétés de généricité des singulières.

### 1.2.3 Résultats de généricité pour les trajectoires singulières

Dans ce paragraphe, on présente des résultats obtenus en collaboration avec Y. Chitour et F. Jean, dans [11, 20] (voir aussi [33]), de généricité des trajectoires singulières pour des systèmes de contrôle affines, du type (1.4). Lorsque  $f_0 = 0$ , on parle de système affine sans dérive. D'un point de vue intrinsèque, il est alors question de courbes singulières sur des distributions. Ce point de vue n'est pas exposé dans ce mémoire (voir [20] pour la version intrinsèque, géométrique, des résultats de ce paragraphe).

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ , et  $T$  un réel positif. Considérons le système de contrôle affine

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)), \quad (1.11)$$

où  $(f_0, f_1, \dots, f_m)$  est un  $(m+1)$ -uplet de champs de vecteurs lisses sur  $M$ , et l'ensemble des contrôles admissibles  $u = (u_1, \dots, u_m)$  est un sous-ensemble ouvert de  $L^\infty([0, T], U)$ .

Soit  $x(\cdot)$  une trajectoire singulière. Elle est projection d'une extrémale anormale  $(x(\cdot), p(\cdot), 0, u(\cdot))$ . Pour tous  $t \in [0, T]$  et  $i, j \in \{0, \dots, m\}$ , on définit

$$h_i(t) = \langle p(t), f_i(x(t)) \rangle, \quad h_{ij}(t) = \langle p(t), [f_i, f_j](x(t)) \rangle,$$

où  $[\cdot, \cdot]$  est le crochet de Lie de champs de vecteurs. Le long d'une extrémale anormale, on a

$$h_0(t) = \text{cste}, \quad h_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.12)$$

Par dérivation de (1.12), on obtient, pour  $i = 0, \dots, m$ ,

$$h_{i0}(t) + \sum_{j=1}^m h_{ij}(t)u_j(t) = 0, \quad \text{pour presque tout } t \in [0, T]. \quad (1.13)$$

**Définition 1.2.1.** Le long d'une extrémale anormale  $(x(\cdot), p(\cdot), 0, u(\cdot))$ , la *matrice de Goh*  $G(t)$  (resp., la *matrice de Goh augmentée*  $\bar{G}(t)$ ) au temps  $t \in [0, T]$  est la matrice anti-symétrique  $m \times m$  définie par  $G(t) = (h_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq m}$  (resp.  $\bar{G}(t) = (h_{ij}(t))_{0 \leq i, j \leq m}$ ).

Le rang  $G(t)$  est clairement pair. Si de plus  $m$  est impair, le déterminant de  $\bar{G}(t)$  est le carré d'un polynôme  $\bar{P}(t)$  en les  $h_{ij}(t)$  de degré  $(m+1)/2$ , appelé *Pfaffien*. Le long d'une extrémale anormale, on a  $\bar{P}(t) = 0$ , et, après dérivation, on obtient

$$\{\bar{P}, h_0\}(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)\{\bar{P}, h_i\}(t) = 0. \quad (1.14)$$

Soit  $\tilde{G}(t)$  la matrice  $(m+2) \times (m+1)$  définie comme  $\bar{G}(t)$  augmentée de la ligne  $(\{\bar{P}, h_j\}(t))_{0 \leq j \leq m}$ .

Si  $m$  est pair et la matrice de Goh  $G(t)$  au temps  $t$  est inversible (resp. si  $m$  est impair et  $\bar{G}(t)$  est de rang  $m$ ), alors on déduit des relations (1.13) et (1.14) une expression du contrôle singulier  $u(t)$ . Cela motive la définition suivante.

**Définition 1.2.2.** Si  $m$  est pair (resp. impair), une trajectoire singulière est dite *d'ordre minimal* si elle admet un relèvement extrémal anormal le long duquel l'ensemble des temps  $t \in [0, T]$  tels que rang  $G(t) = m$  (resp., rang  $\tilde{G}(t) = m$ ) est de mesure de Lebesgue totale dans  $[0, T]$ .

Notons que cet ensemble est de plus ouvert. Notons de plus que cette définition est plus générale que la définition correspondante de [66], où l'ensemble est supposé dense seulement.

A l'opposé, pour  $m$  quelconque, une trajectoire singulière est dite *de Goh* si elle admet un relèvement extrémal anormal le long duquel la matrice de Goh est identiquement nulle.

**Théorème 1.2.4.** Soit  $m$  un entier tel que  $1 \leq m < n$ , et soit  $\mathcal{F}_{m+1}$  l'ensemble des  $(m+1)$ -uplets de champs de vecteurs indépendants de  $M$ , muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney. Il existe un ouvert  $O_{m+1}$  dense dans  $\mathcal{F}_{m+1}$  tel que, pour tout  $(m+1)$ -uplet  $(f_0, \dots, f_m)$  de  $O_{m+1}$ , toute trajectoire singulière non triviale de (1.11) est d'ordre minimal et de corang un. De plus, le complémentaire de  $O_{m+1}$  dans  $\mathcal{F}_{m+1}$  est de codimension infinie.

**Corollaire 1.2.5.** Avec les notations du théorème 1.2.4, et pour  $m \geq 2$ , il existe un ensemble ouvert  $O_{m+1}$  dense dans  $\mathcal{F}_{m+1}$  tel que tout système de contrôle affine défini avec un  $(m+1)$ -uplet de  $O_{m+1}$  n'a aucune trajectoire de Goh.

Considérons un  $(m+1)$ -uplet  $(f_0, \dots, f_m)$  de champs de vecteurs lisses sur  $M$ , et le système de contrôle affine (1.11) associé. Une trajectoire  $x(\cdot)$  de (1.11) associée à un contrôle  $u(\cdot)$  est dite *rigide* sur  $[0, T]$  s'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $t \in [T - \varepsilon, T + \varepsilon]$  et pour tout contrôle admissible  $v \in L^\infty([0, t], U)$ , on a  $E_{x_0, t}(v) \neq E_{x_0, T}(u)$ . En d'autres termes, le point  $x(T)$  n'est atteignable pour des temps  $t$  proches de  $T$  qu'avec le contrôle  $u$ .

**Corollaire 1.2.6.** Avec les notations du théorème 1.2.4, et pour  $m \geq 2$ , il existe un ensemble ouvert  $O_{m+1}$  dense dans  $\mathcal{F}_{m+1}$  tel que tout système de contrôle affine, défini avec un  $(m+1)$ -uplet de  $O_{m+1}$ , n'admet aucune trajectoire rigide.

**Conséquences en contrôle optimal.** Considérons le problème de contrôle optimal pour le système (1.11), avec le coût

$$C_T(u) = \int_0^T \left( u(t)^T U u(t) + g(x(t)) \right) dt, \quad (1.15)$$

où  $U$  est une matrice réelle  $(m \times m)$  définie positive,  $m$  est un entier,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ , et  $g$  est une fonction lisse sur  $M$ .

**Corollaire 1.2.7.** *Soit  $m \geq 2$  un entier. Il existe un ensemble ouvert  $O_{m+1}$  dense dans  $\mathcal{F}_{m+1}$  tel que tout système de contrôle affine défini avec un  $(m+1)$ -uplet de  $O_{m+1}$  n'a aucune trajectoire singulière minimisante.*

*Remarque 1.2.4.* Comme cela a été mentionné dans au début de ce paragraphe, ces résultats (notamment, le concept d'ordre minimal) peuvent être énoncés de manière intrinsèque, géométrique, pour des courbes singulières sur des distributions (voir [20]). En reprenant les notations de la remarque 1.2.2, rappelons qu'une courbe  $q(\cdot) \in \Omega(q_0, q_1)$  d'une distribution  $D$  est *rigide* si elle est isolée (à reparamétrisation près) dans  $\Omega(q_0, q_1)$  muni de la topologie  $W^{1,\infty}$ . Soit  $\mathcal{D}_m$  l'ensemble des distributions de rang  $m$  sur  $M$ , muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney ; on démontre dans [20] que, si  $m \geq 3$ , alors il existe un ensemble ouvert  $O_m$  dense dans  $\mathcal{D}_m$ , tel que toute distribution  $D \in O_m$  n'a aucune courbe rigide non triviale. Ceci répond positivement à une conjecture de Bryant and Hsu [70], qui ont montré le résultat pour des distributions génériques de rang 3 en dimension 5 ou 6.

On a d'autre part la conséquence suivante en géométrie sous-Riemannienne. Soit  $m \geq 3$  un entier. Notons  $\mathcal{G}_m$  l'ensemble des couples  $(D, g)$ , où  $D$  est une distribution de rang  $m$  et  $g$  est une métrique Riemannienne sur  $D$ , muni de la topologie  $C^\infty$  de Whitney. Il existe un sous-ensemble ouvert dense  $W_m$  de  $\mathcal{G}_m$  tel que tout élément de  $W_m$  n'admet aucune courbe singulière minimisante non triviale.

## 1.3 Régularité de la fonction valeur en contrôle optimal

### 1.3.1 Sous-analyticité de la fonction valeur en l'absence de singulière minimisante

Une partie de ma thèse [44] a été consacrée à cette question. Il s'avère que l'existence de trajectoires singulières minimisantes est intimement liée à la régularité de la fonction valeur. Ceci est apparu tout d'abord dans le cadre de la géométrie sous-Riemannienne, dans les articles [46, 49], où les auteurs montrent que, en l'absence de trajectoire singulière minimisante non triviale, la distance sous-Riemannienne  $d_{SR}(x_0, \cdot)$  à un point  $x_0$  est sous-analytique dans un voisinage époinché de  $x_0$ , et donc, en particulier, les sphères de petit rayon sont sous-analytiques. Dans [48], les auteurs montrent que ceci est vrai pour un ensemble dense de distributions (pour la topologie de Whitney) de rang supérieur ou égal à 3.

Rappelons brièvement ce qu'est un ensemble sous-analytique (voir [103, 106, 162]). Un ensemble analytique (resp., semi-analytique) de  $\mathbb{R}^n$  est un ensemble défini par des égalités (resp., inégalités) de fonctions analytiques. La classe des ensembles semi-analytiques n'est pas stable par projection. Si on ajoute à cette classe l'ensemble des projections d'ensembles semi-analytiques, on obtient la classe des ensembles sous-analytiques. Une application est dite sous-analytique si son graphe est un ensemble sous-analytique.

La classe des ensembles sous-analytiques possède de nombreuses propriétés très agréables : elle est fermée par union, intersection, passage au complémentaire, image inverse par une application analytique, image par une application analytique propre. En bref, c'est une classe dite *o-minimale* (voir [90]).

Les trois propriétés suivantes sont particulièrement intéressantes :

(P<sub>1</sub>) tout ensemble sous-analytique est *stratifiable* (au sens de Whitney) ;

(P<sub>2</sub>) le lieu singulier de toute fonction sous-analytique sur une variété analytique est une sous-variété stratifiée de codimension supérieure ou égale à un ;

(P<sub>3</sub>) soient  $M$  et  $N$  des variétés réelles de dimension finie,  $A$  un sous-ensemble de  $N$ , et soient  $\Phi : N \rightarrow M$  et  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  des applications sous-analytiques. Pour  $x \in M$ , on pose

$$\psi(x) = \inf\{f(y) \mid y \in \Phi^{-1}(x) \cap A\}. \quad (1.16)$$

Si  $\Phi|_A$  est propre, alors  $\psi$  est sous-analytique. Cette dernière propriété (prouvée dans [162]) rend les ensembles sous-analytiques très utiles en calcul des variations, et plus généralement en contrôle optimal.

Les résultats qui suivent ont été montrés dans [4]. Ils s'étendent en fait à des problèmes de contrôle optimal plus généraux, où le coût  $C(T, u) = \int_0^T f^0(x, u) dt$  est analytique au sens  $L^2$ , semi-continu

inférieurement pour la topologie faible sur  $L^2$ , et tel que  $\frac{\partial^2 f_0}{\partial u^2}$  soit coercive (voir [44]). Cependant, pour éviter toute hypothèse technique, on se restreint au cas des systèmes affines

$$\dot{x}(t) = f_0(x(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)), \quad (1.17)$$

où  $f_0, \dots, f_m$ , sont des champs de vecteurs analytiques dans  $\mathbb{R}^n$ , avec un coût du type

$$C(T, u) = \int_0^T \sum_{i=1}^m u_i(t)^2 dt + g(x_u(T)), \quad (1.18)$$

où  $T > 0$ , et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est analytique et propre.

**Définition 1.3.1.** Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et  $T > 0$ . La fonction valeur  $S(T, x_0, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  est définie par

$$S(T, x_0, x) = \inf\{C(T, u) \mid E_{x_0, T}(u) = x\},$$

avec la convention  $S(x) = +\infty$  s'il n'existe aucune trajectoire menant de  $x_0$  à  $x$  en temps  $T$ .

Pour  $r, T > 0$ , on note  $M_{\leq r}(x_0, T) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid S(T, x_0, x) \leq r\}$ .

**Théorème 1.3.1.** Soient  $r, T > 0$  petits, et  $K$  un compact sous-analytique inclus dans  $M_{\leq r}(x_0, T)$ . Si, pour tout  $x \in K$ , il n'existe aucune trajectoire singulière minimisante menant de  $x_0$  à  $x$ , alors  $S(T, x_0, \cdot)$  est continue et sous-analytique sur  $K$ .

Les réels  $r$  et  $T$  sont supposés assez petits de sorte que toute trajectoire de coût plus petit que  $r$  est bien définie sur  $[0, T]$ . L'idée principale sous-jacente à la preuve de ce résultat est de montrer la compacité de l'ensemble des multiplicateurs de Lagrange associés aux extrémales normales, puis de se servir de la propriété  $(P_3)$  des ensembles sous-analytiques.

*Remarque 1.3.1.* D'après le corollaire 1.2.7, l'hypothèse d'absence de trajectoire singulière minimisante est vérifiée génériquement lorsque  $m \geq 2$ .

### 1.3.2 Etude asymptotique en présence de singulières minimisantes

S'il existe des trajectoires singulières minimisantes, la fonction valeur peut ne pas être sous-analytique, ni même continue. Un exemple très simple [4, 44] est donné par le système affine dans  $\mathbb{R}^2$

$$\dot{x}(t) = 1 + y(t)^2, \quad \dot{y}(t) = u(t),$$

et le coût  $C_T(u) = \int_0^T u(t)^2 dt$ . La trajectoire  $(x(t) = t, y(t) = 0)$ , associée au contrôle  $u = 0$ , est singulière minimisante, et la fonction valeur  $S_{(0,0), T}$  n'est ni continue, ni sous-analytique au point  $(T, 0)$ . Précisément, on a le développement asymptotique, pour  $(x, y) \sim (T, 0)$ ,

$$S_{(0,0), T}(x, y) = \frac{1}{4} \frac{y^4}{x - T} + \frac{y^4}{x - T} e^{-\frac{y^2}{x - T}} + o\left(\frac{y^4}{x - T} e^{-\frac{y^2}{x - T}}\right).$$

Dans le cadre de la géométrie sous-Riemannienne, le cas Martinet plat, étudié dans [47], est le cas le plus simple pour lequel il existe une singulière minimisante non triviale; les auteurs montrent que les sphères de petit rayon, et donc la distance à 0, ne sont pas sous-analytiques. Se basant sur ce fait, dans [48], les auteurs montrent que, pour une structure sous-Riemannienne  $(M, D, g)$  de rang 2 telle que  $D^3 \neq D^2$  en  $q_0$ , la distance sous-Riemannienne à  $q_0$  n'est pas sous-analytique.

La classe sous-analytique est donc insuffisante lorsqu'il existe des singulières minimisantes. Une question intéressante, posée dans [44], est donc de chercher une classe plus grande, qui bénéficie des mêmes propriétés que la classe sous-analytique (classe *o-minimale*, ou, du moins, dans laquelle on a de bonnes propriétés de stratification).

En fait, s'il existe une trajectoire strictement singulière minimisante pour le problème (1.17), (1.18), alors l'application exponentielle restreinte aux minimisantes, i.e., l'application paramétrisant les extrémales normales minimisantes, est *non propre*. Cela explique que l'application de la propriété  $(P_3)$

soit mise en défaut. Réciproquement, si cette application n'est pas propre, alors il existe une singulière minimisante. Cette non-propreté est donc caractéristique de l'existence d'une singulière minimisante. Du point de vue qualitatif, cela provoque un phénomène de tangence des ensembles de niveaux de la fonction valeur par rapport à la direction singulière (voir [4, 44]).

D'autre part, une analyse basée sur la théorie spectrale de l'application entrée-sortie permet, dans le cas d'un système affine mono-entrée, de décrire précisément le contact des ensembles accessibles avec une direction singulière. Il s'avère que, sous des hypothèses génériques, ce contact est d'ordre deux, avec un coefficient qui est un invariant du système. Dans le cas sous-Riemannien de rang deux, la sphère se scinde en deux secteurs au voisinage de l'extrémité d'une singulière minimisante, le contact de l'un étant d'ordre deux, et l'autre dépendant de la structure d'algèbre de Lie du système (voir [7, 44] pour ces résultats).

Dans [3, 5, 6, 8], la question de la régularité de la fonction valeur et de ses ensembles de niveaux en présence d'une singulière minimisante est étudiée dans le cas sous-Riemannien dit de *Martinet*. Ce problème, extrêmement complexe, est le suivant. On considère les deux champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^3$

$$f_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad f_2 = \frac{\partial}{\partial y},$$

et on munit la distribution engendrée par ces deux champs de vecteurs d'une métrique  $g$  de la forme  $g = a(x, y, z)dx^2 + c(x, y, z)dy^2$ , où  $a$  et  $c$  sont des germes de fonctions analytiques en 0. Un cas modèle intéressant est  $a = (1 + \alpha y)^2$  et  $c = (1 + \beta x + \gamma y)^2$ . L'unique trajectoire singulière non triviale de ce problème, partant de 0, est  $(x(t), y(t), z(t)) = (t, 0, 0)$ , et elle est minimisante. Elle est stricte si et seulement si  $\alpha \neq 0$ .

Le cas  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , appelé *cas Martinet plat*, a été étudié dans [47]. Les auteurs ont montré que les sphères sous-Riemanniennes de petit rayon ne sont pas sous-analytiques.

Les équations des extrémales données par le principe du maximum se projettent sur une équation fondamentale, portant toute la transcendance du système, qui est l'équation d'un pendule à paramètres. Dans cette représentation, la direction singulière se projette sur les singularités du portrait de phase du pendule qui sont des points cols. En estimant des temps de retour au voisinage de tels points, on montre que, si  $\alpha \neq 0$ , i.e., si l'anormale est stricte, alors les sphères sous-Riemanniennes de petit rayon (et donc, la distance sous-Riemannienne à 0) ne sont pas sous-analytiques (voir [8]).

On appelle *cas Martinet général intégrable* le cas où la métrique s'écrit  $g = a(y)dx^2 + c(y)dy^2$ , où  $a$  et  $c$  sont des fonctions analytiques de  $y$  telles que  $a(0) = c(0) = 1$ . Le cas modèle précédent avec  $\beta = 0$  en est un cas particulier. Les équations du principe du maximum sont alors intégrables par quadratures, et on montre que les sphères sous-Riemanniennes appartiennent à la *classe log-exp* (voir [5]).

La classe log-exp, conceptualisée dans [89], est une extension de la classe sous-analytique par les fonctions log et exp, qui bénéficie des mêmes propriétés que celle des sous-analytiques (en particulier, elle est o-minimale). Plus précisément, une fonction log-exp est une composée finie de fonctions sous-analytiques, d'exponentielles et de logarithmes; si  $g_1, \dots, g_m$ , sont des fonctions log-exp de  $\mathbb{R}^n$ , et si  $f$  est une fonction log-exp de  $\mathbb{R}^m$ , alors la composée  $f \circ (g_1, \dots, g_m)$  est une fonction log-exp de  $\mathbb{R}^n$ . Un ensemble log-exp est défini par un nombre fini d'égalités et d'inégalités satisfaites par des fonctions log-exp. En fait, dans le cas Martinet intégrable, on utilise une sous-classe de cette catégorie, dans laquelle on peut développer un algorithme général d'inversion de fonctions (voir [5, 44]).

Dans le cas général, la question est ouverte, et on conjecture que les sphères sous-Riemanniennes de Martinet ne sont pas log-exp dans le cas (non intégrable)  $\beta \neq 0$  (voir chapitre 3).

## 1.4 Applications

### 1.4.1 Régularité des solutions de viscosité d'équations d'Hamilton-Jacobi

Dans cette section, on reporte des résultats de [12, 18]. Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H$  une fonction continue sur  $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , appelée *Hamiltonien*, et  $g$  une fonction continue sur  $\partial\Omega$ . L'introduction du concept de *solution de viscosité* par Crandall et Lions [87] dans les années 80 a permis de démontrer de nombreux résultats d'existence et/ou d'unicité, notamment pour des problèmes de Dirichlet du type

$$H(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = g,$$

ainsi que d'autres problèmes (cas d'évolution, équation du deuxième ordre, ...), dans un cadre très général (voir par exemple [87, 130, 56, 57, 91]). La littérature à ce sujet est immense.

Une solution de viscosité peut n'être que continue. Cependant, si  $H$ ,  $g$  et  $\Omega$  sont analytiques, on peut s'attendre à ce que la solution de viscosité soit plus régulière. Bien entendu, à cause de chocs possibles, on ne peut pas espérer une solution globalement analytique. Par exemple dans le cas de l'équation *eikonale*

$$\|\nabla u(x)\|^2 = 1, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

il est facile de voir qu'il existe une unique solution de viscosité qui s'écrit  $u(x) = d(x, \partial\Omega)$ . Cette fonction  $u$  n'est pas analytique sur  $\Omega$ , ceci étant dû à l'intersection des courbes caractéristiques (pour la méthode des caractéristiques, consulter les références citées plus haut). En revanche la fonction  $u$  est, en un sens, "analytique par morceaux". Il s'avère que le bon concept pour décrire ce type de solution est le concept de *sous-analyticité* introduit précédemment. Une fonction sous-analytique est en particulier *stratifiable*, et différentiable sur chaque strate.

Dans cette section, nous énonçons deux résultats concernant le problème de Dirichlet pour des équations d'Hamilton-Jacobi, tout d'abord dans le cadre classique du calcul des variations, puis dans le cas où l'équation est issue d'un problème de contrôle optimal pour des systèmes affines. On se limite à ces deux résultats (voir [18] pour d'autres résultats, notamment les cas d'évolution ou problèmes de Cauchy-Dirichlet).

**Equations d'Hamilton-Jacobi et calcul des variations.** Le résultat ci-dessous précise celui de [130, Th. 5.3 p. 132] dans le cadre analytique. Rappelons tout d'abord le cadre classique du calcul des variations. Soit  $H(x, p)$  une fonction  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , appelée *Hamiltonien*, vérifiant les hypothèses suivantes :

(H<sub>1</sub>)  $H$  est uniformément superlinéaire, i.e.

$$\forall A > 0 \quad \exists C(A) \in \mathbb{R} \quad \forall (x, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad H(x, p) \geq A\|p\| - C(A) ;$$

(H<sub>2</sub>)  $H$  est strictement convexe en  $p$ , i.e., pour tout  $(x, p)$ , la Hessienne  $\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}(x, p)$  est définie positive. Pour tout couple  $(x, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , on pose  $L(x, v) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} (\langle p, v \rangle - H(x, p))$ . Il est bien connu que, sous les hypothèses précédentes sur  $H$ , cette fonction appelée *Lagrangien*, est bien définie sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , et de plus vérifie aussi les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>) (voir par exemple [93]). On a le résultat suivant.

**Théorème 1.4.1.** Soient  $\Omega$  un ouvert borné sous-analytique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $c$  un réel, et soit  $H(x, p)$  un Hamiltonien analytique sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  vérifiant les hypothèses (H<sub>1</sub>), (H<sub>2</sub>), et tel que

$$\exists \alpha < c \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad H(x, 0) \leq \alpha.$$

Soit  $\mathcal{AC}$  l'ensemble des chemins absolument continus de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tous  $x, y \in \overline{\Omega}$  posons

$$S(x, y) = \inf \left\{ \int_0^T (L(x(t), \dot{x}(t)) + c) dt \mid T > 0, x(\cdot) \in \mathcal{AC}, x(0) = y, x(T) = x \right\},$$

où  $L$  est le Lagrangien associé au Hamiltonien  $H$ . Alors, pour tout  $y_0 \in \overline{\Omega}$ , la fonction  $x \mapsto S(x, y_0)$  (resp., pour tout  $x_0 \in \overline{\Omega}$ , la fonction  $y \mapsto S(x_0, y)$ ) est une solution de viscosité sous-analytique de  $H(x, \nabla v(x)) - c = 0$  sur  $\Omega \setminus \{y_0\}$ ,  $v(y_0) = 0$ , (resp.  $H(x, -\nabla v(x)) - c = 0$  sur  $\Omega \setminus \{x_0\}$ ,  $v(x_0) = 0$ ). Soit  $g$  une fonction sous-analytique sur  $\partial\Omega$ , satisfaisant la condition dite de compatibilité

$$\forall x, y \in \partial\Omega \quad g(x) - g(y) \leq S(x, y).$$

Finalement, pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ , soit

$$S(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} (g(y) + S(x, y)).$$

Alors  $S$  est l'unique solution de viscosité du problème de Dirichlet

$$H(x, \nabla v(x)) - c = 0 \text{ sur } \Omega, \quad v|_{\partial\Omega} = g,$$

et de plus est continue et sous-analytique sur  $\overline{\Omega}$ .

## Equations d'Hamilton-Jacobi et systèmes affines.

**Théorème 1.4.2.** Soient  $\Omega$  un ouvert borné sous-analytique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $c > 0$  fixé, et  $f_0, \dots, f_m$ , des champs de vecteurs analytiques sur  $\bar{\Omega}$ . Pour tous  $x \in \Omega$  et  $p \in \mathbb{R}^n$ , posons

$$H(x, p) = -\langle p, f_0(x) \rangle + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^m \langle p, f_i(x) \rangle^2 - c.$$

Soit  $g$  une fonction sous-analytique sur  $\partial\Omega$ . Pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ , on considère le problème de contrôle optimal de mener le système affine

$$\dot{x}_u(t) = f_0(x_u(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x_u(t)), \quad (1.19)$$

du point  $x$  à  $\partial\Omega$  en minimisant le coût

$$C(u) = \int_0^{t(x,u)} \left( \sum_{i=1}^m u_i(s)^2 + c \right) ds + g(x_u(t(x,u))), \quad (1.20)$$

où  $t(x, u)$  est la borne inférieure des temps  $t$  tels que la solution  $x_u(\cdot)$  de (1.19) associée au contrôle  $u$  va du point  $x \in \bar{\Omega}$  à  $\partial\Omega$  en temps  $t$ . On fait les hypothèses suivantes.

- La frontière  $\partial\Omega$  est accessible depuis  $\Omega$ , i.e., pour tout  $x \in \Omega$ , il existe un temps  $t$  et un contrôle sur  $[0, t]$  tels que la solution du système (1.19) associée à ce contrôle, partant de  $x$  au temps 0, joint  $\partial\Omega$  en temps  $t$ . (1.21)

- Il n'existe aucune trajectoire singulière minimisante du système de contrôle (1.19) pour le coût (1.20), joignant  $\Omega$  à  $\partial\Omega$ . (1.22)

Soit  $S(x)$  la fonction valeur associée au problème de contrôle optimal (1.19), (1.20). Plus précisément, si  $\mathcal{S}$  est l'ensemble des solutions  $(u(\cdot), x(\cdot))$  de (1.19) définies sur des intervalles  $[0, t_1]$ , telles que  $x(0) \in \bar{\Omega}$  et  $x(t_1) \in \partial\Omega$ , on a, pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ ,

$$S(x) = \inf \{ C(u) \mid (u(\cdot), x_u(\cdot)) \in \mathcal{S}, x_u(0) = x \}. \quad (1.23)$$

Pour tous  $x, z \in \partial\Omega$ , on définit

$$L(x, z) = \inf \left\{ \int_0^t \left( \sum_{i=1}^m u_i(s)^2 + c \right) ds \mid x_u(\cdot) \in \mathcal{S}, x_u(0) = x, x_u(t) = z, \text{ et } x_u(s) \in \bar{\Omega}, \forall s \in [0, t] \right\}. \quad (1.24)$$

Supposons que  $g$  vérifie la condition de compatibilité

$$\forall x, z \in \partial\Omega \quad g(x) - g(z) \leq L(x, z). \quad (1.25)$$

Alors,  $S$  est bien définie sur  $\bar{\Omega}$ , est continue et sous-analytique sur  $\Omega$ , et est solution de viscosité du problème de Dirichlet

$$H(x, \nabla S(x)) = 0 \text{ sur } \Omega, \quad S|_{\partial\Omega} = g. \quad (1.26)$$

*Remarque 1.4.1.* D'après le corollaire 1.2.7, l'hypothèse (1.22) d'absence de trajectoire singulière minimisante est vérifiée *génériquement* (au sens fort) pourvu que  $m \geq 2$ .

*Remarque 1.4.2.* La condition de compatibilité (1.25), qui est une hypothèse classique pour l'existence de solutions de viscosité, est automatiquement vérifiée lorsque  $g = 0$ .

*Remarque 1.4.3.* Concernant l'unicité et la régularité de  $S$  sur  $\bar{\Omega}$  tout entier, on montre dans [18] les résultats suivants.

- Si de plus l'algèbre de Lie engendrée par les champs  $f_1, \dots, f_m$ , est égale à  $\mathbb{R}^n$  en tout point de  $\partial\Omega$ , alors  $S$  est continue sur  $\bar{\Omega}$ . Par conséquent,  $S$  est l'unique solution de viscosité de (1.26).

- Si le système est de plus “medium-fat” (voir [48, 18]) en tout point de  $\partial\Omega$ , alors  $S$  est sous-analytique sur  $\overline{\Omega}$  tout entier. Notons que cette situation se produit génériquement lorsque  $n \leq m(m-1) + 1$ .

**Exemple 1.4.1.** Les équations

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 + \left(x_1 \frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 = 1, \quad S|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.27)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial S}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial S}{\partial x_3}\right)^2 = 1, \quad S|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.28)$$

admettent une unique solution de viscosité, continue et sous-analytique sur  $\overline{\Omega}$ .

Notons que, dans (1.27), si le terme  $x_1$  est remplacé par 1, on retrouve l'équation eikonale, qui entre dans le cadre du calcul des variations classique. En particulier, le Hamiltonien associé est elliptique. Avec le terme  $x_1$ , le Hamiltonien associé est sous-elliptique, et la propriété de coercivité n'a plus lieu puisque le terme  $x_1$  peut s'annuler. Toute la difficulté de l'analyse réside dans ce fait. Le système de contrôle sous-jacent à cette équation n'a pas de singulière minimisante non triviale, ce qui permet de retrouver une certaine propriété de propreté, et assure la sous-analyticité de la solution de viscosité.

*Remarque 1.4.4.* On peut construire des exemples explicites où toutes les données du problème sont analytiques, et pourtant, l'unique solution de viscosité n'est pas sous-analytique, ceci étant dû à l'existence de singulières minimisantes non triviales (voir [18]). Ces exemples sont basés sur le cas sous-Riemannien de Martinet étudié précédemment.

**Commentaires et conséquences.** Tout d'abord, notons que des résultats ont été établis dans [18] pour des équations d'Hamilton-Jacobi d'évolution (problèmes de Cauchy). Par ailleurs, lorsque  $f_0 = 0$  dans le résultat précédent, on a une interprétation de la fonction valeur (solution de viscosité) comme distance sous-Riemannienne, et des résultats un peu plus fins.

L'intérêt de ces résultats, qui affirment que, sous certaines conditions, la solution de viscosité est sous-analytique, est le suivant. La propriété  $(P_2)$  de la classe sous-analytique (voir section 1.3.1) implique que le *cut-locus*, qui coïncide avec le lieu singulier analytique de la solution de viscosité, est une variété sous-analytique stratifiable de codimension supérieure ou égale à un.

Notons que ce lieu singulier est aussi le lieu où les *courbes caractéristiques* s'intersectent. Les propriétés structurelles de cet ensemble ont été beaucoup étudiées, les méthodes classiques reposant sur l'analyse non lisse et en particulier les *fonctions semi-concaves* (voir [73, 74, 75, 151, 152]). Les résultats de [18] permettent donc en particulier de montrer que les singularités des solutions de viscosité de certaines classes d'équations d'Hamilton-Jacobi forment une sous-variété stratifiée de codimension  $\geq 1$ .

Par ailleurs, il est clair que les résultats peuvent se généraliser. En effet,

1. sous certaines hypothèses (voir section 1.3.1), la principale étant l'absence de singulière minimisante, la fonction valeur associée à un problème de contrôle optimal est sous-analytique ;
2. il est bien connu que, sous des conditions générales, la fonction valeur précédente est solution de viscosité d'une équation d'Hamilton-Jacobi associée au Hamiltonien réduit  $H_r$  du problème de contrôle optimal ;
3. dans [112, 150], les auteurs montrent que, sous certaines hypothèses sur le Hamiltonien  $H_r$ , il existe un problème de contrôle optimal tel que la fonction valeur associée soit exactement la solution de viscosité de l'équation d'Hamilton-Jacobi associée à  $H_r$  (problème de contrôle optimal inverse). Leur preuve s'étend aisément au cadre sous-analytique.

Compte-tenu de ces trois remarques, on peut obtenir un résultat général selon lequel l'unique solution d'une équation d'Hamilton-Jacobi est sous-analytique, pourvu que le problème de contrôle optimal sous-jacent n'admette aucune singulière minimisante.

Mais la preuve de la troisième remarque n'étant pas constructive (elle est basée sur un théorème de point fixe de Kakutani), il peut s'avérer très difficile (voire impossible) de vérifier cette hypothèse dans la pratique. Aussi, nous pouvons conclure cette section avec la question suivante : étant donnée une fonction  $H_r(x, p)$ , (non strictement) convexe en  $p$ , est-il possible de donner des conditions sous lesquelles un problème de contrôle optimal sous-jacent, analytique, n'admettrait aucune singulière minimisante ?

## 1.4.2 Stabilisation hybride semi-globale de systèmes de contrôle affines sans dérive

On reporte ici des résultats de [16, 39] (voir aussi [28, 35]), concernant des propriétés de stabilisation globale quasi-optimale de systèmes hybrides. Considérons, dans  $\mathbb{R}^n$ , le système de contrôle affine sans dérive

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(x(t)), \quad \sum_{i=1}^m u_i(t)^2 \leq 1, \quad (1.29)$$

où  $f_1, \dots, f_m$ , sont des champs de vecteurs lisses. Soit  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ; le système (1.29) est dit globalement asymptotiquement stabilisable au point  $\bar{x}$  si, pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe un contrôle tel que la solution de (1.29) associée à ce contrôle et partant de  $x$ , tend vers  $\bar{x}$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ . Le problème de stabilisation asymptotique a été très étudié. Notons que, dès que  $m < n$ , et si les champs de vecteurs  $f_i$  sont indépendants, la condition de Brockett [69, Theorem 1, (iii)] n'est pas vérifiée, et il n'existe pas de contrôle feedback  $u(x)$  continu pour le système (1.29). Cependant, de nombreux modèles de contrôles (non continus) ont été développés pour de tels systèmes de contrôle (voir par exemple [142, 117, 53] et les références contenues). Les recherches concernant le problème de stabilisation robuste sont très actives. Il existe une grande variété de contrôles robustes stabilisants : des feedbacks discontinus [83, 160], dépendant du temps [85, 84, 143, 144], patchy [52], SRS [153], ..., assurant diverses propriétés de robustesse, selon la notion d'erreur considérée dans ces articles.

Ici, on s'intéresse à des contrôles feedbacks ayant des composantes discrètes et des composantes continues, engendrant des systèmes hybrides, étudiés par exemple dans [163, 61], et utilisés pour la stabilisation dans [148]. Le caractère hybride consiste à définir une stratégie de commutation entre différents contrôles, définis de manière lisse sur une partition de l'espace d'états, ce qui assure la robustesse par rapport à des bruits de mesure et des perturbations externes. De tels systèmes hybrides sont de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), k(x(t) + e(x(t), t), s_d(t))) + d(x(t), t), \quad s_d(t) = k_d(x(t) + e(x(t), t), s_d^-(t)),$$

où  $e$  est un bruit de mesure,  $d$  une perturbation externe, et  $s_d(t) \in \{1, 2\}$  un paramètre de commutation.

La première étape de la procédure décrite dans [16, 39] consiste à résoudre le problème de temps optimal, pour le système (1.29) sous la contrainte sur le contrôle, d'emmener un point  $x$  au point  $\bar{x}$ . Il résulte de l'analyse menée précédemment dans ce manuscrit que, si les champs de vecteurs sont analytiques, et s'il n'existe aucune trajectoire singulière minimisante, alors la fonction temps minimal  $T(x)$  pour emmener le système (1.29) de  $x$  à  $\bar{x}$  est sous-analytique en dehors de  $\bar{x}$ , et donc, en particulier, stratifiable. On montre alors dans [39] que les contrôles optimaux sont des feedbacks analytiques, en dehors d'un ensemble singulier  $\mathcal{S}$  qui est une sous-variété stratifiée de codimension  $\geq 1$ . La stratégie hybride consiste à définir un autre contrôle, sur un voisinage de  $\mathcal{S}$ , et à élaborer, entre ces deux contrôles, une loi de commutation par hystérésis.

Dans [16], ce programme a été achevé pour le système dit de *Brockett* dans  $\mathbb{R}^3$ , pour lequel  $m = 2$ , et  $f_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$ , et  $f_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}$ . Le résultat est le suivant.

**Théorème 1.4.3.** *L'origine est un équilibre robustement stabilisable, semi-globalement et en temps quasi minimal. En d'autres termes, pour tout  $\varepsilon > 0$ , et tout compact  $K \subset \mathbb{R}^3$ , il existe un feedback hybride  $(u, k_d) : \mathbb{R}^3 \times \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{1, 2\}$  vérifiant  $\|u(x, s_d)\| \leq 1$ , tel que, pour toutes (petites) perturbations  $e, d$ , et tout  $x_0 \in K$ , la solution du système de Brockett partant de  $x_0$  atteint l'origine en temps inférieur ou égal à  $T(x_0) + \varepsilon$ .*

Dans [39], on généralise ce résultat à des systèmes affines de la forme (1.29), sous l'hypothèse d'absence de trajectoire singulière minimisante (déjà discutée précédemment dans le manuscrit). Cependant, le théorème ci-dessus, concernant le cas de Brockett, est un peu plus fin. Il est aussi intéressant car la stratégie hybride est définie de manière totalement explicite, alors que le résultat de [39] est un résultat d'existence seulement. Par ailleurs, dans [31], on montre un résultat similaire dans le cas *Martinet intégro*, où il existe des singulières minimisantes. Cela démontre que l'hypothèse d'absence de singulière minimisante n'est pas nécessaire, bien qu'elle soit une bonne hypothèse de travail (voir Corollaire 1.2.7).

## Chapitre 2

# Méthodes numériques en contrôle optimal

Dans ce chapitre, on étudie des applications concrètes de la théorie du contrôle optimal. Après avoir rappelé les méthodes numériques existantes dans la section 2.1, on rappelle quelques points de la théorie des points conjugués dans la section 2.2, qui permet d'obtenir des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité. Dans la section 2.3, on applique ces méthodes à deux problèmes issus de l'aéronautique : la rentrée atmosphérique d'une navette spatiale, et le transfert orbital d'un satellite à poussée faible.

### 2.1 Préliminaires : méthodes numériques directes et indirectes

On se réfère à [1, Chapitre 9] pour plus de détails sur ces méthodes, et des exemples. On distingue deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent à discrétiser l'état et le contrôle, et réduisent le problème à un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire, ou "nonlinear programming"). Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, par une méthode de tir ("shooting method"), un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum. Rappelons plus précisément en quoi elles consistent.

**Méthodes directes.** La méthode directe la plus évidente est la méthode de *discrétisation totale*. En discrétisant l'état et le contrôle, on se ramène à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme

$$\min_{Z \in C} F(Z), \quad (2.1)$$

où  $Z = (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_n)$ , et  $C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in 1, \dots, r, g_j(Z) \leq 0, j \in r+1, \dots, m\}$ . La méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie (par exemple, des contrôles constants par morceaux), et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles (méthodes d'Euler, Runge-Kutta, Adams-Moulton, etc). Il existe une infinité de variantes. Le choix de la méthode dépend du problème abordé. Les méthodes directes ont l'avantage d'être très simples à mettre en oeuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.

La résolution numérique d'un problème de programmation non linéaire du type (2.1) est standard. Elle peut être effectuée, par exemple, par une méthode de pénalisation, ou par une méthode SQP (*sequential quadratic programming*). Dans ces méthodes, le but est de se ramener à des sous-problèmes plus simples, sans contrainte, en utilisant des fonctions de pénalisation pour les contraintes, ou bien d'appliquer les conditions nécessaires de Kuhn-Tucker pour des problèmes d'optimisation avec contraintes. Les méthodes SQP consistent à calculer de manière itérative ces multiplicateurs de Lagrange, en utilisant des méthodes de Newton ou quasi-Newton. A chaque itération, on utilise une méthode de quasi-Newton pour estimer le Hessien du Lagrangien associé au problème de programmation non linéaire, et on résout un sous-problème de programmation quadratique basé sur une approximation quadratique du Lagrangien.

Un autre type de méthode directe consiste à résoudre numériquement l'équation d'Hamilton-Jacobi vérifiée par la fonction valeur du problème de contrôle optimal. Il existe de nombreuses méthodes numériques pour résoudre de telles équations. Les schémas de discrétisation par différences finies sont les plus simples, mais il existe aussi les méthodes de front d'onde (voir [159]), qui consistent à calculer les ensembles de niveau de la fonction valeur  $S$  solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi. Particulièrement efficaces en petite dimension, ces méthodes consistent à faire évoluer le front d'onde de la fonction valeur en partant d'un point ou d'un ensemble initial donné. La complexité algorithmique est linéaire en fonction du nombre de points de discrétisation.

**Méthodes indirectes.** Décrivons la *méthode de tir simple*. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de  $(x(t), p(t))$ , alors le système extrémal est un système différentiel de la forme  $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$ , où  $z(t) = (x(t), p(t))$ , et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme  $R(z(0), z(t_*)) = 0$ . Finalement, on obtient le *problème aux valeurs limites*

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad R(z(0), z(t_*)) = 0. \quad (2.2)$$

Dans le cas non contraint, ce problème est bien posé car le nombre d'équations est égal au nombre d'inconnues. En revanche, dans le cas contraint, il existe une indétermination due à l'existence d'une mesure (voir remarque 1.1.2). Par ailleurs, si le temps final est libre, l'annulation du Hamiltonien fournit une équation supplémentaire.

Notons  $z(t, z_0)$  la solution du problème de Cauchy  $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$ ,  $z(0) = z_0$ . La *fonction de tir* est définie par  $G(t_*, z_0) = R(z_0, z(t_*, z_0))$ . Le problème (2.2) aux valeurs limites est alors équivalent à

$$G(t_*, z_0) = 0,$$

i.e., il s'agit de *déterminer un zéro de la fonction de tir*  $G$ . Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Notons que, si la condition de maximisation permet de déterminer localement le contrôle comme une fonction  $u(x, p)$  lisse, alors la fonction de tir  $G$  est lisse, ce qui assure la validité de la méthode. De plus, pour appliquer une méthode de Newton il faut que  $G$  soit localement une immersion, ce qui est lié à l'existence de temps conjugués (voir section suivante).

Dans le cas du contrôle optimal, le système extrémal, qui est Hamiltonien, est toujours instable, ce qui peut créer des problèmes numériques dans l'application de la méthode de tir simple si le temps d'intégration est grand. Ceci justifie l'introduction de la méthode de tir multiple.

Par rapport à la méthode de tir simple, la méthode de tir multiple découpe l'intervalle  $[0, t_f]$  en  $N$  intervalles  $[t_i, t_{i+1}]$ , et se donne comme inconnues les valeurs  $z(t_i)$  au début de chaque sous-intervalle. Il faut prendre en compte des conditions de recollement en chaque temps  $t_i$ . L'intérêt est d'améliorer la stabilité de la méthode. Une référence classique pour l'algorithme de tir multiple est [161] (voir aussi [1, 2]).

**Quelques remarques.** Si la dynamique du système de contrôle est compliquée, le calcul du système extrémal, notamment des équations adjointes, peut être effectué par différentiation automatique, ou avec un logiciel de calcul formel comme *Maple*, et donc ne pose pas de problème particulier.

Les méthodes indirectes fournissent une extrême précision numérique. De plus, la méthode de tir multiple est, par construction, parallélisable, et son implémentation peut donc être envisagée sur un réseau d'ordinateurs montés en parallèle.

En revanche, pour appliquer la méthode de tir, la structure des commutations doit être connue à l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De même, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état. Deuxièmement, il faut être capable de deviner de bonnes conditions initiales pour l'état et le vecteur adjoint, pour espérer faire converger la méthode de tir. En effet le domaine de convergence de la méthode de Newton peut être assez petit en fonction du problème de contrôle optimal.

Par ailleurs, les méthodes indirectes calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte. Elles sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement,

et donc il faut être capable de vérifier *a posteriori* l'optimalité de la trajectoire calculée. La théorie des points conjugués (voir section 2.2) permet d'établir qu'une extrémale est localement optimale avant son premier temps conjugué. L'optimalité globale est beaucoup plus difficile à établir en général, et sur des exemples spécifiques on l'établit numériquement.

Pour pallier la petitesse du domaine de convergence, on utilise une méthode d'homotopie (ou méthode de continuation), qui consiste à résoudre une famille de problèmes de contrôle optimal  $(\mathcal{P}_\alpha)_{\alpha \in [0,1]}$  dépendant d'un paramètre  $\alpha \in [0, 1]$ , où le problème initial correspond à  $\mathcal{P}_0$ . On doit s'arranger pour que le problème  $\mathcal{P}_1$  soit plus simple à résoudre que  $\mathcal{P}_0$ . Une telle famille peut être construite si l'on possède une bonne intuition et une bonne connaissance de la physique du problème. Par exemple si le problème de contrôle optimal comporte une contrainte forte sur l'état, du type  $c(x) \leq 1$ , une méthode d'homotopie peut consister à relaxer cette contrainte, en résolvant d'abord des problèmes où  $c(x) \leq A$ , avec  $A > 0$  grand. Cette méthode de continuation est utilisée dans le problème de transfert orbital, exposé dans la section 2.3.2 (voir [17], voir aussi [2] pour plus de précisions sur la validité mathématique de la méthode de continuation, et une description algorithmique).

Dans les applications du contrôle optimal à l'aéronautique (voir section 2.3), les méthodes indirectes sont souvent privilégiées car elles fournissent une excellente précision numérique. Les applications exposées dans la section 2.3, à savoir, le problème de rentrée atmosphérique d'une navette spatiale, et le problème de transfert orbital d'un satellite à poussée faible, sont donc basées sur les méthodes indirectes.

## 2.2 Théorie des points conjugués, et algorithmes de calcul

Le but de la théorie des points conjugués est de donner des conditions (du second ordre) nécessaires et/ou suffisantes d'optimalité, pour des problèmes de contrôle optimal. Dans le cas général, on se réfère à l'article [37] (voir aussi [2, Chapitre 9]). Pour ne pas alourdir le manuscrit, dans cette section, on se limite au problème du temps minimal pour le système de contrôle

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0, \quad (2.3)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application lisse,  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , et  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  (cas sans contrainte sur le contrôle). Tout contrôle  $u$  temps minimal sur  $[0, T]$  est alors *singulier*. D'après le principe du maximum rappelé en introduction, la trajectoire  $x(\cdot)$  est projection d'une extrémale, solution des équations

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}(x, p, u), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, p, u), \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial u}(x, p, u) = 0,$$

où  $H(x, p, u) = \langle p, f(x, u) \rangle$ . On suppose que  $H(x(t), p(t), u(t)) \neq 0$  le long de l'extrémale, que la Hessienne  $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(x, p, u)$  est définie négative (hypothèse de Legendre stricte), et que la singularité est de codimension un sur tout sous-intervalle (hypothèse de régularité forte, cf [156]). L'application du théorème des fonctions implicites permet d'exprimer, localement,  $u(t) = u(x(t), p(t))$ . Toute extrémale vérifie alors

$$\dot{x} = \frac{\partial H_r}{\partial p}(x, p), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_r}{\partial x}(x, p),$$

où  $H_r(x, p) = H(x, p, u(x, p))$  est le *Hamiltonien réduit*; soit, en notant  $z = (x, p)$ ,

$$\dot{z}(t) = \vec{H}_r(z(t)). \quad (2.4)$$

On définit l'*application exponentielle* par

$$\exp_{x_0}(t, p_0) = x(t, x_0, p_0),$$

où  $(x(t, x_0, p_0), p(t, x_0, p_0))$  est la solution du système (2.4) partant du point  $(x_0, p_0)$  en  $t = 0$ . Le temps  $t$  varie dans  $\mathbb{R}^+$  (du moins, tant que la solution est bien définie), et le vecteur adjoint initial  $p_0$  est défini à scalaire multiplicatif près, sachant que l'on suppose  $H_r(x_0, p_0) \neq 0$ ; on peut donc supposer que  $p_0 \in S^{n-1}$ . Finalement, l'application  $\exp_{x_0}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+ \times S^{n-1} \cap \{p_0 \mid H_r(x_0, p_0) \neq 0\}$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $z(\cdot, z_0) = (x(\cdot, x_0, p_0), p(\cdot, x_0, p_0))$  une extrémale de référence, définie sur  $[0, T]$ . Le temps  $t_c \in ]0, T]$  est dit *conjugué* si l'application  $\exp_{x_0}(t_c, \cdot)$  n'est pas une immersion en  $p_0$ . Le point  $x(t_c)$  est dit conjugué à  $x_0$ .

On rappelle que, sous les hypothèses précédentes, les extrémités étant fixées, la trajectoire  $x(\cdot)$  de référence est *localement temps optimale* (pour la topologie  $L^\infty$  sur les contrôles) jusqu'à son premier temps conjugué (voir [156], voir aussi [2]).

Pour calculer un temps conjugué, il s'agit donc de déterminer un temps auquel le rang de  $\frac{\partial \exp_{x_0}(t_c, \cdot)}{\partial p_0}$  est inférieur ou égal à  $n - 2$ . Pour cela, on introduit le *système variationnel*

$$\delta \dot{z}(t) = \frac{\partial \vec{H}_r}{\partial z}(z(t)) \delta z(t), \quad (2.5)$$

ou *équation de Jacobi*. Un *champ de Jacobi*  $J(t) = (\delta x(t), \delta p(t))$  est une solution non triviale de (2.5). Il est dit *vertical* au temps  $t$  si  $\delta x(t) = 0$ . Un temps  $t_c$  est conjugué si et seulement s'il existe un champ de Jacobi vertical aux temps 0 et  $t_c$ . On a alors trois tests équivalents de calcul.

**Test 1.** On se restreint à l'espace vectoriel de dimension  $n-1$  des champs de Jacobi  $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , verticaux en 0, vérifiant  $\langle p_0, \delta p_i(0) \rangle = 0$ . Il s'agit donc de calculer numériquement les champs de Jacobi correspondants, et de déterminer à quel instant le rang de  $(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t))$  est inférieur ou égal à  $n - 2$ .

**Test 2.** Une autre possibilité est de calculer numériquement les champs de Jacobi  $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$ , correspondant aux conditions initiales  $\delta p_i(0) = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  représente la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , et calculer le rang de  $(\delta x_1(t), \dots, \delta x_n(t))$ , celui-ci devant être égal à  $n - 1$  en dehors d'un temps conjugué, et étant inférieur ou égal à  $n - 2$  en un temps conjugué.

**Test 3.** La dérivée de l'application exponentielle par rapport à  $t$  étant égale à la dynamique  $f$  du système, on peut donc également prendre une base  $(\delta p_1, \dots, \delta p_{n-1})$  vérifiant  $\langle p_0, \delta p_i(0) \rangle = 0$ , calculer numériquement les champs de Jacobi correspondants  $J_i(t) = (\delta x_i(t), \delta p_i(t))$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , et tester l'annulation du déterminant  $\det(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t), f(x(t), u(x(t), p(t))))$ . En effet, par hypothèse le Hamiltonien est non nul le long de l'extrémale, et donc  $\dot{x}(t)$  est transverse à  $(\delta x_1(t), \dots, \delta x_{n-1}(t))$ .

**Implémentation numérique, et logiciel COTCOT (Conditions of Order Two and CONjugate Times).** L'algorithme précédent est très simple à programmer : il suffit d'intégrer numériquement une équation différentielle (de très nombreuses méthodes efficaces existent), puis de tester la nullité d'un déterminant, ou une chute de rang. Pour calculer numériquement un déterminant ou un rang, de manière efficace, on utilise une *décomposition SVD* de la matrice (décomposition aux valeurs singulières), le rang chutant lorsque la dernière valeur singulière s'annule.

Par ailleurs, pour tester la nullité du déterminant, on peut se contenter de programmer une simple dichotomie. Mais cela suppose que la solution numérique de l'équation aux variations soit suffisamment lisse. En fait, si le système est raide la solution peut numériquement se présenter sous forme de fonction constante par morceaux, auquel cas la procédure de dichotomie peut échouer. On peut alors affiner la méthode de discrétisation de l'équation différentielle, en prenant par exemple un pas plus petit. Mais cela s'avère coûteux et peu efficace. Une meilleure solution consiste à interpoler les points de la solution discrétisée (méthode de collocation), ce qui consiste à lisser la solution.

Cela a été implémenté dans le logiciel COTCOT (Conditions of Order Two and CONjugate Times), disponible sur le web<sup>1</sup> (voir aussi le rapport technique [41]), dont le fichier principal est une routine matlab, *cotcot.m*. Le calcul du système adjoint s'effectue par différentiation automatique, à l'aide du software *Adifor*, disponible sur internet. Le code *Fortran* définissant le Hamiltonien est généré de manière automatique, et des fichiers *mex* sont créés pour *Matlab*. L'intégration numérique des équations différentielles et la solution du problème de tir associé sont effectués avec des codes standards *Netlib*, interfacés avec *Matlab*. Plus précisément, la routine *Matlab* utilisée pour implémenter la méthode de Newton est *hybrd.m*, qui fait appel au code *Fortran hybrd.f* de *Netlib*. Cette routine, fournie dans le package COTCOT, est beaucoup plus fiable et robuste que les routines fournies dans la *Toolbox optim* de *Matlab*.

Dans [37] (voir aussi [34]), on teste en particulier ce logiciel sur le cas d'étude des équations d'Euler, dont la structure (non triviale) est analysée en détails. Des simulations numériques sont faites. Notons que ces équations sont aussi le modèle du contrôle d'attitude d'un solide rigide en rotation autour de son centre de gravité, sous l'action de certaines forces de poussée.

<sup>1</sup><http://www.n7.fr/apo/cotcot/>

## 2.3 Applications en aéronautique

### 2.3.1 Rentrée atmosphérique d'une navette spatiale

Dans cette section, on présente les résultats de [9, 10, 14] (voir aussi [24, 29] et [2, Chapitre 8]), obtenus en collaboration avec B. Bonnard et L. Faubourg. On s'intéresse au problème de contrôle optimal d'une navette spatiale en phase de rentrée atmosphérique, où le contrôle est l'angle de gîte, et le coût est le flux thermique total (facteur d'usure de la navette). Ce problème nous a été posé par le CNES, l'agence spatiale européenne. L'objectif est de déterminer une trajectoire optimale jusqu'à une cible donnée, de stabiliser le système autour de cette trajectoire nominale, en tenant compte du fait que l'engin est de plus soumis à des contraintes sur l'état, et en tenant compte des conditions limites du cahier des charges du CNES.

Le rôle de l'arc atmosphérique est de réduire suffisamment l'énergie cinétique par frottement dans l'atmosphère, d'amener l'engin spatial d'une position initiale précise à une cible donnée, tout en prenant en compte certaines contraintes sur l'état : contrainte sur le flux thermique (car il y a des gens à l'intérieur de la navette!), sur l'accélération normale (confort de vol), et sur la pression dynamique (contrainte technique de structure). Enfin, on cherche de plus à minimiser un critère d'optimisation : le flux thermique total de la navette. Le contrôle est la configuration aérodynamique de la navette. La première question qui se pose est la suivante : les forces aérodynamiques peuvent-elles contribuer à freiner la navette de manière adéquate? En fait si l'altitude est trop élevée (supérieure à 120 km), alors la densité atmosphérique est trop faible, et il est physiquement impossible de générer des forces aérodynamiques suffisamment intenses. Au contraire, si l'altitude est trop basse (moins de 20 km), la densité atmosphérique est trop grande, et le seul emploi des forces aérodynamiques conduirait à un dépassement du seuil autorisé pour le flux thermique ou la pression dynamique. En effet la rentrée atmosphérique s'effectue à des vitesses très élevées. En revanche si l'altitude est comprise entre 20 et 120 km, on peut trouver un compromis. C'est ce qu'on appelle la *phase atmosphérique*.

Durant cette phase, la navette se comporte comme un *planeur*, c'est-à-dire que les moteurs sont coupés : il n'y a pas de force de poussée. L'engin est donc soumis uniquement à la force de gravité et aux forces aérodynamiques. Le contrôle est l'angle de gîte qui représente l'angle entre les ailes et un plan contenant la navette.

**Modélisation du problème.** La modélisation précise du problème a été effectuée dans [9], et n'est pas détaillée ici. L'arc atmosphérique est décrit par le système suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{dr}{dt} &= v \sin \gamma \\
 \frac{dv}{dt} &= -g \sin \gamma - \frac{1}{2} \rho \frac{SC_D}{m} v^2 + \Omega^2 r \cos L (\sin \gamma \cos L - \cos \gamma \sin L \cos \chi) \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \cos \gamma \left( -\frac{g}{v} + \frac{v}{r} \right) + \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} v \cos \mu + 2\Omega \cos L \sin \chi + \Omega^2 \frac{r}{v} \cos L (\cos \gamma \cos L + \sin \gamma \sin L \cos \chi) \\
 \frac{dL}{dt} &= \frac{v}{r} \cos \gamma \cos \chi \\
 \frac{dl}{dt} &= -\frac{v \cos \gamma \sin \chi}{r \cos L} \\
 \frac{d\chi}{dt} &= \frac{1}{2} \rho \frac{SC_L}{m} \frac{v}{\cos \gamma} \sin \mu + \frac{v}{r} \cos \gamma \tan L \sin \chi + 2\Omega (\sin L - \tan \gamma \cos L \cos \chi) + \Omega^2 \frac{r}{v} \frac{\sin L \cos L \sin \chi}{\cos \gamma}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

où  $r = R + h$  ( $R$  étant le rayon de la Terre),  $h$  est l'altitude,  $v$  le module de la vitesse de l'engin,  $\gamma$  l'angle de vol,  $L$  la latitude,  $l$  la longitude, et  $\chi$  l'azimut. Par ailleurs,  $\Omega$  est la vitesse de rotation de la planète,  $\mu$  est l'angle de gîte (c'est le contrôle),  $\rho(r)$  est la densité de l'atmosphère, et  $C_D, C_L$  sont des coefficients de traînée et de portance. Pour les données numériques utilisées, on se réfère aux articles précités, et au cahier des charges imposé par le CNES.

Le problème est d'amener l'engin spatial d'une variété initiale  $M_0$  à une variété finale  $M_1$ , où le temps terminal  $t_f$  est libre (voir table 2.1).

La navette est de plus, au cours de la phase de rentrée atmosphérique, soumise à trois contraintes :

	Conditions initiales	Conditions finales
altitude ( $h$ )	119.82 km	15 km
vitesse ( $v$ )	7404.95 m/s	445 m/s
angle de vol ( $\gamma$ )	-1.84 deg	libre
latitude ( $L$ )	0	10.99 deg
longitude ( $l$ )	libre	166.48 deg
azimut ( $\chi$ )	libre	libre

TAB. 2.1 – Conditions aux limites

- contrainte sur le *flux thermique* :  $\varphi = C_q \sqrt{\rho} v^3 \leq \varphi^{max}$ ,
- contrainte sur l'*accélération normale* :  $\gamma_n = \gamma_{n0} \rho v^2 \leq \gamma_n^{max}$ ,
- contrainte sur la *pression dynamique* :  $\frac{1}{2} \rho v^2 \leq P^{max}$ .

Elles sont représentées sur la figure 2.1, en fonction de l'accélération  $d = \frac{1}{2} \frac{SC_D}{m} \rho v^2$  et de  $v$ .

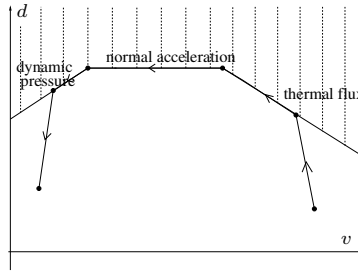


FIG. 2.1 – Contraintes sur l'état, et stratégie de Harpold et Graves

Le problème de contrôle optimal est de minimiser le flux thermique total  $C(\mu) = \int_0^{t_f} C_q \sqrt{\rho} v^3 dt$ , le temps final  $t_f$  étant libre.

**Stratégie d'Harpold et Graves.** Si on fait l'approximation  $\dot{v} \simeq -d$ , le coût peut être écrit  $C(\mu) = K \int_{v_0}^{v_f} \frac{v^2}{\sqrt{d}} dv$ ,  $K > 0$ , et la stratégie optimale consiste alors à maximiser l'accélération  $d$  pendant toute la durée du vol. C'est la politique décrite dans [102], qui réduit le problème à trouver une trajectoire suivant le bord du domaine d'états autorisés, dans l'ordre suivant : flux thermique maximal ; accélération normale maximale ; pression dynamique maximale (voir figure 2.1). L'avantage de cette méthode est que, le long d'un arc frontière, le contrôle s'exprime sous forme de *boucle fermée*, c'est-à-dire en fonction de l'état. Cette forme est bien adaptée aux problèmes en temps réel, et se prête bien aux problèmes de stabilisation. Cependant cette méthode *n'est pas optimale* pour notre critère, et notre but est de déterminer une trajectoire optimale.

**Résultats et simulations numériques.** Le résultat suivant est montré dans [14] grâce à une analyse géométrique fine des extrémales données par le principe du maximum avec contraintes sur l'état.

**Proposition 2.3.1.** *La stratégie optimale est, avec une bonne approximation,  $q_- q_+ q_{flux} q_+ q_{acc} q_+$ , où  $q_+$  (resp.  $q_-$ ) est un arc correspondant au contrôle  $\mu = 0$  (resp.  $\mu = \pi$ ), et  $q_{flux}$  (resp.  $q_{acc}$ ) est un arc frontière correspondant à la contrainte sur le flux thermique (resp. sur l'accélération normale).*

Les contrôles correspondant à un arc frontière sont calculés par dérivation, à l'aide d'un logiciel de calcul formel (*Maple*). Le résultat d'approximation de la proposition 2.3.1 n'est pas facile à montrer. Pour en donner une idée, remarquons que le système (2.6) décrivant l'arc atmosphérique est de la forme

$$\dot{q} = X(q) + u_1 Y_1(q) + u_2 Y_2(q),$$

avec  $u_1 = \cos \mu$ ,  $u_2 = \sin \mu$  et  $q = (r, v, \gamma, L, l, \chi)$ . En posant  $q_1 = (r, v, \gamma)$  et  $q_2 = (L, l, \chi)$ , on peut décomposer le système de la manière suivante :

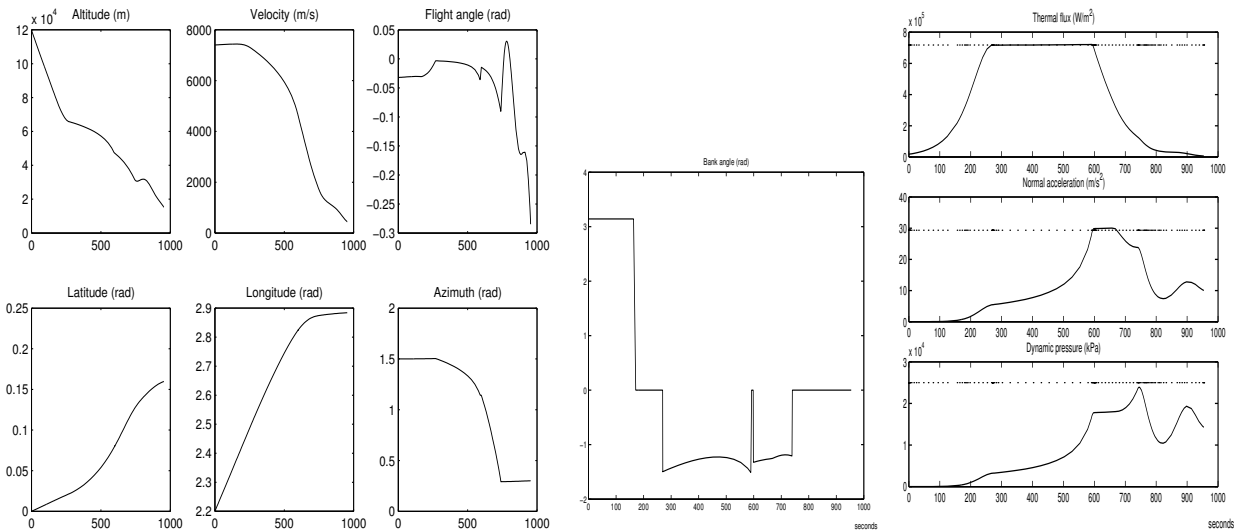
$$\dot{q}_1 = f_1(q_1, u_1) + O(\Omega), \quad \dot{q}_2 = f_2(q_2, u_2).$$

Le premier sous-système représente la *partie cinématique*, i.e. le *mouvement longitudinal* de la navette, tandis que le second sous-système représente la *partie dynamique*, i.e. le *mouvement latéral*. Il s'avère que le premier sous-système constitue une bonne approximation du système complet, et en première analyse il faut se concentrer sur lui. C'est un système affine mono-entrée de  $\mathbb{R}^3$ , de la forme  $\dot{x} = X(x) + uY(x)$ ,  $|u| \leq 1$ . Or, dans des conditions génériques, le bord de l'ensemble accessible en temps petit est constitué des surfaces formées par les arcs  $x_+x_-$  et  $x_-x_+$ , et de plus tout point à l'intérieur de l'ensemble accessible peut être atteint par une trajectoire de la forme  $x_-x_+x_-$  ou  $x_+x_-x_+$  (cf [120]). Bien sûr ce résultat ne tient pas compte d'éventuelles contraintes sur l'état. Il faut donc ensuite établir ce genre de résultat lorsqu'il existe des contraintes sur l'état. Dans [10], il a été établi que, sous certaines conditions, la synthèse temps-minimale locale pour le système précédent est de la forme  $x_-x_+^T x_b x_+^T x_-$ , où  $x_+^T$  est un arc tangent à l'arc frontière  $x_b$ .

Finalement, dans [14] il est expliqué comment ce résultat permet d'établir la proposition ci-dessus pour le système complet.

*Remarque 2.3.1.* Notons que, dans [10], on donne une classification *complète* des synthèses temps optimales locales, avec contrainte sur l'état, en dimension deux et trois, pour des systèmes affines mono-entrée. Ces résultats généralisent ceux de [120], valides lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur l'état.

Les simulations numériques sont effectuées à l'aide d'un algorithme de tir multiple en *Fortran*, interfacé avec *Matlab*. Les temps de commutation et les valeurs initiales de la longitude et de l'azimut sont calculés avec la méthode de tir multiple. Plus précisément, le premier temps de commutation, de  $q_-$  à  $q_+$ , permet d'ajuster l'entrée dans la phase iso-flux, qui est caractérisée par  $\varphi = \varphi^{\max}$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ ; le troisième temps de commutation, de  $q_{flux}$  à  $q_+$ , est utilisé pour régler l'entrée dans la phase iso-accélération normale; le cinquième temps de commutation, de  $q_{acc}$  à  $q_+$ , permet d'ajuster la vitesse finale  $v(t_f)$ ; l'azimut initial  $\chi(0)$  sert à régler la latitude finale  $L(t_f)$ . Par ailleurs, le temps final est déterminé par l'altitude finale.



(a) Coordonnées d'état (b) Angle de gîte (c) Contraintes sur l'état (contrôle)

Par ailleurs, des calculs numériques de temps conjugués, non reportés ici (voir [14]), permettent de montrer que les arcs ainsi déterminés sont bien optimaux.

Enfin, notons que dans [14], on étudie aussi le problème de rentrée atmosphérique dans le cas où la longitude initiale est fixée (116.59 deg). La trajectoire quasi-optimale est alors de la forme  $q_-q_+^T q_{flux}q_+^T q_-$ , et la contrainte sur l'accélération normale n'est plus active.

### 2.3.2 Transfert orbital d'un satellite à poussée faible

Dans cette section, on expose les résultats obtenus en collaboration avec B. Bonnard et J.-B. Caillau dans [17] (voir aussi [37] et [2, Chapitre 6]).

Un problème important en mécanique spatiale est de transférer un engin soumis à l'attraction terrestre sur une ellipse Keplerienne, ou en un point de cette ellipse pour le problème de rendez-vous avec un autre engin. Ce type de problème classique a été réactualisé avec la technologie des moteurs à poussée faible et continue. Le problème de temps minimal est important pour des satellites à poussée faible (par exemple, à propulsion ionique), car le transfert d'une orbite basse à une orbite géostationnaire peut prendre plusieurs mois. Le système libre évoluant dans le domaine elliptique du problème de Kepler, toutes les trajectoires sont périodiques. La contrôlabilité du système peut être caractérisée en calculant des crochets de Lie. On analyse ici le problème de transfert en temps minimal, et on applique la théorie des points conjugués pour montrer l'optimalité de la trajectoire extrémale transférant le système d'une orbite basse et allongée à l'orbite géostationnaire.

**Modélisation du problème.** L'engin spatial (en pratique, un satellite) est assimilé à un point matériel de masse  $m$ , soumis à l'attraction terrestre et à une force de propulsion  $F$ . Le système s'écrit sous forme d'équation de Kepler contrôlée,

$$\ddot{q} = -\mu \frac{q}{r^3} + \frac{F}{m}, \quad (2.7)$$

où  $q$  est le vecteur position du satellite, et  $\mu$  est la constante de gravitation. La force de poussée  $F$  de l'engin est limitée :  $|F| \leq F_{\max}$ , et on peut changer son orientation. La propulsion se fait par éjection de matière, et il faut rajouter au système l'équation de variation de la masse,

$$\dot{m} = -\beta|F|, \quad (2.8)$$

où  $\beta > 0$  est un paramètre. Dans le problème à poussée faible, la force de poussée est petite comparée à la force d'attraction. L'état du système est  $x = (q, \dot{q})$ . Le problème à résoudre est de transférer *en temps minimal* le système d'un état initial à une orbite donnée (par exemple géostationnaire) pour le problème de transfert orbital, ou en un point de cet orbite.

Soient  $c = q \wedge \dot{q}$  le moment angulaire,  $L = -\mu q/|q| + \dot{q} \wedge c$  l'intégrale de Laplace, et  $H = 1/2 \dot{q}^2 - \mu/|q|$  l'énergie. Le *domaine elliptique* est défini par  $\Sigma_e = \{c \neq 0, H < 0\}$ . A chaque point  $(c, L)$  de ce domaine correspond une unique ellipse décrivant le mouvement du satellite à poussée nulle. Pour avoir une représentation géométrique de l'ellipse osculatrice d'une trajectoire contrôlée, on choisit des coordonnées équinoxiales dans le domaine elliptique. Pour décomposer la poussée, on a deux possibilités. Dans le repère *tangentiel-normal*  $(F_t, F_n, F_c)$ , où

$$F_t = \frac{\dot{q}}{|\dot{q}|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \quad F_c = \frac{q \wedge \dot{q}}{|q \wedge \dot{q}|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}},$$

et  $F_n = F_c \wedge F_t$ , on écrit  $F = u_t F_t + u_n F_n + u_c F_c$ . Dans le repère radial-orthoradial  $(F_r, F_{or}, F_c)$ , où

$$F_r = \frac{q}{|q|} \frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \quad F_{or} = F_c \wedge F_r,$$

on écrit  $F = u_r F_r + u_{or} F_{or} + u_c F_c$ . Dans les deux cas, si  $u_c = 0$ , le mouvement est plan (modèle du transfert orbital plan).

**Contrôlabilité.** L'analyse de l'algèbre de Lie est effectuée dans [17] dans le cas du transfert orbital plan, sur le système de contrôle affine  $\dot{x} = F_0 + u F_1$ , pour chaque repère :  $F_1 = F_t$  (poussée tangentielle uniquement) et  $F_1 = F_{or}$  (poussée orthoradiale). Dans le premier cas, on montre que le système est *contrôlable* dans le domaine 2D elliptique. L'analyse consiste ensuite à étudier les extrémales singulières et régulières. Il s'avère que toutes les singulières sont *elliptiques*, et donc, d'après [65], localement temps maximales. Les extrémales régulières sont classifiées selon leur ordre de contact avec la surface  $\{H_1 = 0\}$  (où  $H_1 = \langle p, F_1 \rangle$  est le relèvement Hamiltonien du champ  $F_1$ ). Dans le cas d'un contact d'ordre 2, le contrôle est bang-bang (il n'y a pas de phénomène de Fuller).

Dans le deuxième cas (poussée orthoradiale), on a toujours contrôlabilité dans le domaine elliptique 2D, mais l'analyse est plus compliquée. On démontre l'existence de singulières hyperboliques et exceptionnelles, qui sont localement temps minimales.

**Résultats et simulations numériques.** L'analyse du problème complet est effectuée dans [17], l'étude se ramenant à celle d'un système de contrôle affine  $\dot{x} = F_0 + \sum_{i=1}^3 u_i F_i$ ,  $|u| \leq 1$ . D'après le principe du maximum, pour le problème du temps minimal, les contrôles extrémaux de ce système se mettent sous la forme  $u = \Phi/|\Phi|$ , en dehors de la surface de commutation  $\{\Phi = 0\}$ , où  $\Phi = (H_1, H_2, H_3)$ , et  $H_i = \langle p, F_i \rangle$ . En dehors de cette surface, les extrémales sont lisses, et le problème est de classifier les contacts avec la surface, i.e., les commutations possibles (voir [17] pour les détails).

D'un point de vue numérique, le système extrémal est calculé, comme pour le problème de rentrée atmosphérique, à l'aide de *Maple*, ou par différentiation automatique dans la routine *COTCOT* présentée précédemment. Pour déterminer la trajectoire optimale, on utilise une méthode de tir simple. On teste ensuite son optimalité avec un calcul de temps conjugué. Les données numériques sont détaillées dans [17], et les simulations numériques sont effectuées à l'aide de *COTCOT*. Pour une poussée maximale de 3 Newton, le temps minimal de transfert est d'environ 12 jours, ce qui correspond à environ 15 orbites autour de la Terre. Sur la figure 2.2, on a pris le temps final comme unité. En haut à gauche, on représente les projections de la trajectoire optimale dans le plan équatorial, et dans un plan orthogonal, afin de montrer comment l'inclinaison est corrigée. Au milieu à gauche est tracé le déterminant, et en bas à gauche, la plus petite valeur singulière de la matrice des champs de Jacobi associés à l'extrémale (sa positivité stricte démontre l'optimalité locale de la trajectoire). A droite, on représente les mêmes données, mais la trajectoire est prolongée sur 3.5 fois le temps minimal. Deux temps conjugués sont détectés. Le premier apparaît environ à 3 fois le temps minimal, et le deuxième à environ 3.5 fois le temps minimal.

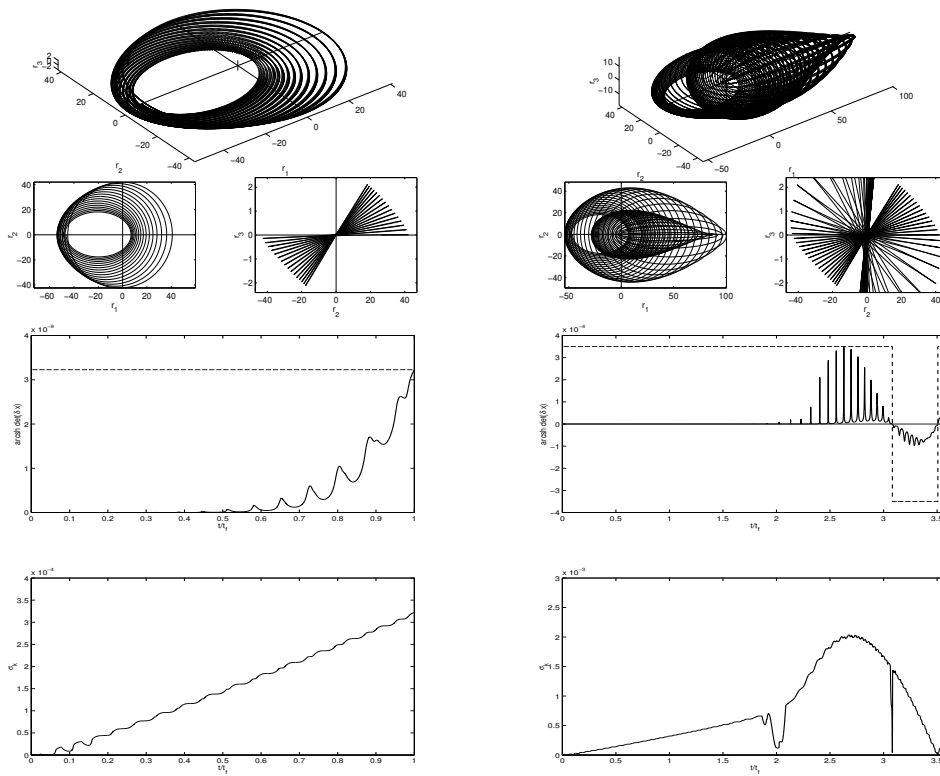


FIG. 2.2 – Transfert orbital

## Chapitre 3

# Extensions et projets de recherche

Tout d'abord, concernant les propriétés des trajectoires singulières, on conjecture que l'ensemble des extrémités des trajectoires singulières de systèmes affines sans dérive est de mesure nulle. Cette conjecture, dite de Sard, est bien connue par les spécialistes de géométrie sous-Riemannienne (voir [141], et voir aussi [15, Section 4.3]). Elle est fortement liée à l'existence d'un algorithme général de planification (voir [78]) pour des systèmes de contrôle affines, la difficulté essentielle dans cet algorithme étant d'éviter les singulières. De plus, en relation avec le concept d'ordre minimal (voir [20]), la question d'un algorithme général de calcul des contrôles singuliers, également liée à la question de planification, est ouverte. Des travaux sur ces sujets sont en cours, en collaboration avec Y. Chitour et F. Jean.

Par ailleurs, l'existence de trajectoires singulières a des conséquences dans la théorie des opérateurs hypoelliptiques. Les trajectoires singulières ont un impact sur le spectre de certaines classes d'opérateurs sous-Laplaciens dont le symbole correspond à une métrique sous-Riemannienne (voir [140]). Ce fait semble général (voir [62, 98]) mais, jusqu'à présent, n'a pas été complètement éclairci. Dans [80, 81], il est conjecturé que, en présence de singulières, les opérateurs sous-Laplaciens hypoelliptiques peuvent perdre la propriété d'hypoellipticité analytique. Cela est relié à la conjecture de Treves [167].

Concernant la régularité de la fonction valeur, on a vu que, s'il existe des singulières minimisantes, la fonction valeur n'est pas sous-analytique en général. Dans le cas d'étude sous-Riemannien de Martinet, dans le cas intégrable, elle appartient à la classe log-exp qui est une extension  $\mathcal{O}$ -minimale de la classe sous-analytique. Dans le cas général non intégrable, il est conjecturé dans [44] que la classe log-exp est insuffisante. En fait, à cause de phénomènes de dissipation, on ne peut pas espérer des propriétés analytiques. Il faudrait donc étendre la classe log-exp à une classe plus grande, dans laquelle on remplacerait l'analyticité par une propriété asymptotique. C'est la raison pour laquelle la classe de fonctions  $\mathcal{FC}^1$ , introduite par Il'Yashenko dans [107] pour résoudre le fameux problème de Dulac, est particulièrement intéressante. Rappelons que le problème de Dulac de finitude des cycles limites a été résolu il y a quelques années indépendamment par J. Ecalle et Yu. S. Il'Yashenko. Dans sa preuve (de nature géométrique), Il'Yashenko construit une classe très large de fonctions non-oscillantes pour décrire les applications premier retour de Poincaré. Dans l'étude du problème de Martinet, on construit de telles applications dans le plan de phase du pendule, mais le pendule dépend d'un certain nombre de paramètres (voir [6, 44]). Donc, ce problème est en fait lié au problème de Dulac à paramètres, c'est-à-dire, au célèbre 16ème problème de Hilbert, irrésolu à ce jour. Remarquons que l'on ne s'intéresse pas à la finitude des cycles limites, mais à cette classe de fonctions introduite par Il'Yashenko pour décrire les applications premier retour. Il faudrait donc construire une classe de fonctions, similaire à  $\mathcal{FC}^1$ , mais avec des paramètres, c'est-à-dire, une classe de fonctions à plusieurs variables, dans laquelle on aurait un bon calcul différentiel. Notons que l'intérêt de construire une telle classe dépasse largement le problème de régularité de la fonction valeur en contrôle optimal. C'est un domaine de recherche à part entière, et beaucoup de personnes travaillent sur ce sujet.

Sur la partie numérique, de nombreuses pistes restent à explorer. Tout d'abord, il faut approfondir les méthodes numériques de résolution d'Hamilton-Jacobi, dans le but de les appliquer au problème de rentrée atmosphérique notamment. L'avantage est que la gestion de contraintes sur l'état ne pose alors aucun problème, et de plus, par cette méthode, on obtient des contrôles sous forme de boucle fermée, ce qui est particulièrement adapté aux problèmes en temps réel et aux systèmes embarqués,

privilegiés en aéronautique. Or, récemment, tout un arsenal de méthodes numériques a été développé pour résoudre numériquement l'équation d'Hamilton-Jacobi (voir [159]) en calculant les ensembles de niveau de la fonction valeur  $S$ , solution de cette équation. Particulièrement efficaces en petite dimension, ces méthodes consistent à faire évoluer le front d'onde de la fonction valeur en partant d'un point ou d'un ensemble initial donné. La complexité algorithmique est linéaire en fonction du nombre de points discrétisant l'ensemble accessible. Ces méthodes ont été implémentées de manière très efficace sur des problèmes de dimension moyenne (typiquement 3). Le problème de rentrée atmosphérique complet, en dimension 6, semble abordable par ce genre de méthode, car l'ensemble accessible est très petit et donc le nombre de mailles nécessaires pour discrétiser l'espace est raisonnable. Des travaux à ce propos sont en cours, en collaboration avec H. Zidani.

Sur les méthodes numériques indirectes utilisées dans les applications décrites dans ce mémoire, les deux problèmes suivants, encore ouverts, sont cruciaux. Tout d'abord, on a vu que l'application d'une méthode de tir nécessite un travail théorique préliminaire, pour déterminer notamment la structure locale des trajectoires optimales. Dans [10], on a décrit les synthèses temps optimales locales pour des systèmes affines mono-entrée, en dimension 2 et 3, avec contraintes sur l'état (voir [120] pour le cas sans contrainte), avec pour motivation le problème de rentrée atmosphérique. Un sujet de recherche très intéressant est d'étendre ces résultats en dimension supérieure, et pour des systèmes plus généraux. Le sujet est à la fois difficile, à cause des trajectoires singulières notamment, et de la généralité du phénomène de Fuller en dimension assez grande (voir [121]), et crucial pour les applications du contrôle optimal, puisqu'il constitue une étape théorique préliminaire indispensable à la mise en oeuvre d'une méthode de tir. Ensuite, une fois déterminées ces synthèses optimales locales, une autre question est de les rendre globales, à l'aide de la théorie des points conjugués. Les résultats présentés dans ce mémoire concernant les temps conjugués concernent le cas sans contrainte sur l'état. Il est donc très important d'étendre cette théorie dans le cas où il existe des contraintes sur l'état. Le travail à effectuer est à la fois théorique (obtenir des conditions nécessaires et/ou suffisantes d'ordre deux, en tenant compte de contraintes sur l'état), et numérique (implémenter les conditions obtenues et étendre le logiciel COTCOT à ce cadre).

Enfin, il est à noter qu'une thèse débute sur l'étude de la dynamique au voisinage des points de Lagrange (thèse de G. Archambeau, sous ma direction), sur un contrat de collaboration-recherche avec EADS, depuis octobre 2005. Cette étude devrait requérir les outils théoriques et numériques développés précédemment.

## Deuxième partie

# Contrôle en dimension infinie

## Chapitre 4

# Contrôlabilité et stabilisation de quelques équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on présente les résultats obtenus dans [13, 36, 19].

La méthode utilisée pour étudier les propriétés de contrôlabilité et de stabilisation des équations aux dérivées partielles de ce chapitre consiste à stabiliser le système par linéarisation le long d'un chemin d'états stationnaires. L'idée est issue de la théorie classique de stabilité de Lyapunov en dimension finie, couplée avec la théorie de déformation quasi-statique. Dans ce paragraphe, nous expliquons donc cette idée en dimension finie. Considérons dans  $\mathbb{R}^n$  un système de contrôle général, de la forme

$$\dot{y}(t) = g(y(t), u(t)), \quad (4.1)$$

où  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^1$ ,  $u(t) \in \mathcal{U}$ , et  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des contrôles admissibles mesurables et essentiellement bornés. Soient  $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$  deux points d'équilibre du système (4.1), i.e.,  $g(y_i, u_i) = 0$ ,  $i = 0, 1$ , pour certains  $u_0, u_1 \in \mathbb{R}^m$ . On suppose que  $(y_0, u_0)$  et  $(y_1, u_1)$  appartiennent à une même composante connexe de l'ensemble des zéros de  $g$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Le but est de construire un contrôle permettant d'aller de  $y_0$  à  $y_1$  en temps  $T > 0$  (éventuellement grand). Pour cela, on raisonne en quatre étapes.

**Première étape.** On construit un chemin de classe  $C^1$ ,  $(\bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau))$ , où  $\tau \in [0, 1]$ , reliant  $(y_0, u_0)$  à  $(y_1, u_1)$ , et tel que  $g(\bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau)) = 0$ , pour tout  $\tau \in [0, 1]$ . Cela est possible d'après l'hypothèse d'appartenance à une même composante connexe. Bien entendu, ce chemin n'est pas en général solution du système (4.1), mais si  $\varepsilon > 0$  est assez petit alors le chemin  $(y^\varepsilon, u^\varepsilon)$  donné par

$$\begin{aligned} [0, 1/\varepsilon] &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ t &\mapsto (y^\varepsilon(t), u^\varepsilon(t)) = (\bar{y}(\varepsilon t), \bar{u}(\varepsilon t)) \end{aligned}$$

est une quasi-solution du système (4.1). En effet,  $\|\dot{y}^\varepsilon - g(y^\varepsilon, u^\varepsilon)\| = O(\varepsilon)$ .

**Deuxième étape.** Cette trajectoire quasi-statique n'est pas stable en général, et doit donc être stabilisée. Pour cela, on introduit le changement de variable  $z(t) = y(t) - y^\varepsilon(t)$ ,  $v(t) = u(t) - u^\varepsilon(t)$ , où  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ . Dans les nouvelles variables  $z, v$ , le système de contrôle s'écrit, si  $\|z(t)\| + \|v(t)\|$  est assez petit,

$$\dot{z}(t) = A(\varepsilon t)z(t) + B(\varepsilon t)v(t) + O(\|z(t)\|^2 + \|v(t)\|^2 + \varepsilon),$$

où  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ , et où  $A(\tau) = \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau))$  et  $B(\tau) = \frac{\partial g}{\partial u}(\bar{y}(\tau), \bar{u}(\tau))$ , avec  $\tau = \varepsilon t \in [0, 1]$ . Par conséquent, il faut stabiliser un système de contrôle linéaire instationnaire *lentement variable en temps*. Cela est effectivement possible lorsque  $\varepsilon$  est assez petit (voir [116]).

**Troisième étape.** Sous la condition de Kalman  $\text{rang}(B(\tau), A(\tau)B(\tau), \dots, A(\tau)^{n-1}B(\tau)) = n$ , pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , il est effectivement possible de stabiliser le système par *placement de pôles*, et de construire explicitement une fonction de Lyapunov quadratique. Notons toutefois que cette procédure ne marche

pas si le système n'est pas lentement variable en temps. A l'aide de cette fonction de Lyapunov, on montre alors que, si  $\varepsilon$  est assez petit, alors  $y(1/\varepsilon)$  appartient à un voisinage prescrit de  $y_1$ . A ce point, on obtient donc un résultat de stabilisation.

**Quatrième étape.** Si le système (4.1) est de plus *localement contrôlable* au point  $y_1$ , alors il est possible de relier en temps fini le point  $y(1/\varepsilon)$  à la cible  $y_1$ . Un tel résultat de contrôlabilité locale résulte en général de l'application du théorème des fonctions implicites et de la contrôlabilité du système linéarisé.

*Remarque 4.0.2.* Une telle déformation quasi-statique a été utilisée par J.-M. Coron dans [86], pour établir la contrôlabilité d'une équation de Saint-Venant. Cependant, dans [86], la déformation quasi-statique  $(y^\varepsilon, u^\varepsilon)$  était naturellement stable, et il n'a pas été nécessaire de réaliser les étapes 2 et 3. Le même commentaire vaut pour le travail de K. Beauchard sur l'équation de Schrödinger (voir [58]).

## 4.1 Equations de la chaleur semi-linéaires

Dans cette section, on expose les résultats obtenus en collaboration avec J.-M. Coron dans [13].

Soient  $L > 0$  fixé, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . Considérons le système de contrôle frontière

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(y), \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, L) = u(t), \end{cases} \quad (4.2)$$

où l'état est  $y(t, \cdot) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $x \in [0, L]$ , et le contrôle est  $u(t) \in \mathbb{R}$ .

Concernant le problème de contrôlabilité globale, l'un des résultats principaux [92], dû à C. Fabre, J.-P. Puel, et E. Zuazua, affirme que, si  $f$  est globalement lipschitzienne, alors ce système de contrôle est approximativement contrôlable (voir aussi le résultat d'O. Imanuvilov [108] pour la contrôlabilité exacte). Lorsque  $f$  est superlinéaire, le problème est ouvert, en particulier à cause de possibles phénomènes d'explosion. En effet, si  $yf(y) > 0$  pour  $y \neq 0$ , alors le phénomène d'explosion peut se produire pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(y), \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, L) = 0, \\ y(0, x) = y_0(x). \end{cases} \quad (4.3)$$

Par exemple, si  $f(y) = y^3$ , alors, pour de nombreuses données initiales, il existe un temps  $T \in (0, +\infty)$  tel que l'unique solution de (4.3) est bien définie sur  $[0, T) \times [0, L]$ , et vérifie  $\|y(t, \cdot)\|_{L^\infty(0, L)} \xrightarrow{t \rightarrow T} +\infty$  (voir par exemple [59, 95, 77, 114, 127, 135, 173] and les références contenues dans ces articles).

La question suivante se pose alors naturellement : est-il possible, en agissant sur la frontière de  $[0, L]$ , d'éviter le phénomène d'explosion? En fait, la réponse à cette question est négative en général. Dans [94], E. Fernandez-Cara et E. Zuazua ont montré qu'il existe des fonctions  $f$  vérifiant  $|f(y)| \sim |y| \log^p(1 + |y|)$  lorsque  $|y| \rightarrow +\infty$ , avec  $p > 2$ , telles que, pour tout temps  $T > 0$ , il existe des données initiales conduisant à une explosion en temps  $T$ , quel que soit le contrôle  $u$ . Notons cependant que si  $|f(y)| = o(|y| \log^{3/2}(1 + |y|))$  lorsque  $|y| \rightarrow +\infty$ , alors le phénomène d'explosion (qui peut survenir en l'absence de contrôle) peut être évité en agissant avec un contrôle frontière (voir [94]).

Dans le premier cas où le phénomène d'explosion ne peut pas être compensé avec un contrôle frontière, on propose une approche alternative, en montrant qu'il est possible d'aller d'un état stationnaire à tout autre, pourvu qu'ils appartiennent à une même composante connexe de l'ensemble des états stationnaires. Précisons les résultats.

**Définition 4.1.1.** Une fonction  $y \in C^2([0, L])$  est un état stationnaire du système de contrôle (4.2) si

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(y) = 0, \quad y(0) = 0.$$

On note  $S$  l'ensemble des états stationnaires, muni de la topologie  $C^2$ .

Définissons l'espace de Banach

$$Y_T = \left\{ y(t, x), (t, x) \in (0, T) \times (0, L) \mid y \in L^2(0, T, W^{2,2}(0, L)) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2((0, T) \times (0, L)) \right\} \quad (4.4)$$

muni de la norme

$$\|y\|_{Y_T} = \|y\|_{L^2(0,T,W^{2,2}(0,L))} + \left\| \frac{\partial y}{\partial t} \right\|_{L^2((0,T) \times (0,L))}.$$

Notons que  $Y_T$  s'injecte continûment dans  $L^\infty((0,T) \times (0,L))$ .

**Théorème 4.1.1** ([13]). *Soient  $y_0$  et  $y_1$  deux états stationnaires appartenant à une même composante connexe de  $\mathcal{S}$ . Pour tout voisinage  $V$  de  $y_1$  en topologie  $H^1$ , il existe un réel positif  $\varepsilon_0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , il existe un contrôle  $u \in H^1(0, 1/\varepsilon)$  tel que la solution  $y(t, x)$  dans  $Y_{1/\varepsilon}$  de*

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(y), \\ y(t, 0) = 0, \quad y(t, L) = u(t), \\ y(0, x) = y_0(x), \end{cases} \quad (4.5)$$

vérifie  $y(1/\varepsilon, \cdot) \in V$ .

**Corollaire 4.1.2.** *Sous les hypothèses du théorème 4.1.1, il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in L^2(0, T)$  tels que la solution  $y(t, x)$  dans  $Y_T$  du problème de Cauchy-Dirichlet (4.5) vérifie  $y(T, \cdot) = y_1(\cdot)$ .*

*Remarque 4.1.1.* Dans [13], on construit *explicitement* un contrôle  $u$  sous forme de *feedback*, et une fonction de *Lyapunov*. La procédure de stabilisation est effective, et consiste en fait à stabiliser un système de contrôle linéaire instationnaire de dimension finie. En effet, pour construire  $u$ , on a besoin de calculer un nombre fini de quantités reliées à une décomposition Hilbertienne de la solution. L'implémentation numérique s'avère efficace.

*Remarque 4.1.2.* Pour tous  $T > 0$  et  $u \in L^2(0, T)$ , il existe au plus une solution de (4.5) dans  $Y_T$ .

*Remarque 4.1.3.* Le corollaire donne un résultat de contrôlabilité exacte globale (partielle). Le temps  $T$  nécessaire dans la preuve est grand, mais d'autre part il existe en effet des cas où le temps de contrôlabilité  $T$  ne peut pas être arbitrairement petit. Par exemple, si  $f(y) = -y^3$ , toute solution de (4.5) partant de 0 vérifie l'inégalité

$$\int_0^L (L-x)^4 y(T, x)^2 dx \leq 8LT,$$

et par conséquent, pour  $y_0 = 0$ , un temps minimal est requis pour atteindre une cible  $y_1 \neq 0$ . Ce résultat est similaire à celui de Bamberger [105] (voir aussi [96, Lemma 2.1]).

*Remarque 4.1.4.* Si  $y_0$  et  $y_1$  appartiennent à des composantes connexes distinctes de  $\mathcal{S}$ , alors il est en fait impossible de passer soit de  $y_0$  à  $y_1$ , soit de  $y_1$  à  $y_0$ , quels que soient le temps et le contrôle. Cela est dû à l'existence d'une fonction  $y$  de classe  $C^2$  sur  $[0, L]$ , vérifiant

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(y) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = +\infty,$$

et qui joue le rôle de *fonction barrière* (voir à ce sujet les travaux de Diaz [88]).

D'autre part, dans chacun des cas suivants, on montre que l'ensemble des états stationnaires  $\mathcal{S}$  est connexe :

- La fonction  $F$  définie par  $F(y) = \int_0^y f(s) ds$  vérifie la condition asymptotique  $F(y) \xrightarrow{|y| \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- Pour tout  $\alpha > 0$ , l'intégrale indéfinie  $\int \frac{dy}{\sqrt{\alpha - F(y)}}$ , si elle a un sens, diverge en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
- La fonction  $f$  est impaire, i.e., pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $f(-y) = -f(y)$ .

Cette remarque montre donc que cette hypothèse d'appartenance à une même composante connexe est vérifiée dans de nombreux cas, et est en fait quasiment une condition nécessaire et suffisante pour que la conclusion du théorème ait lieu.

*Remarque 4.1.5.* Le résultat du corollaire peut être obtenu par application itérée d'un théorème de contrôlabilité locale exacte (voir [96, Th. 4.4] or [108, Th. 3.3]). Mais ces résultats, basés sur des théorèmes de point fixe de type Kakutani, ne permettent pas de construire un contrôle explicite.

**Simulations numériques.** On présente des simulations numériques effectuées avec *Matlab* pour la fonction  $f(y) = y^3$ , avec  $L = 1$ . L'ensemble  $\mathcal{S}$  des états stationnaires est constitué des solutions  $C^2$  sur  $[0, 1]$  de

$$y''(x) + y(x)^3 = 0, \quad y(0) = 0. \quad (4.6)$$

Il est connexe d'après la remarque précédente. On choisit  $y_0 = 0$ , et on choisit pour cible  $y_1$  la solution de (4.6) s'annulant en  $0, 1/2$  et  $1$ , et n'ayant pas d'autre zéro sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $\tau \in [0, 1]$ , le chemin d'états stationnaires  $(\bar{y}(\tau, \cdot))_{\tau \in [0, 1]}$  est construit de telle manière que, pour tout  $\tau \in [0, 1]$ ,  $\bar{y}(\tau, \cdot)$  est la solution de (4.6) sur  $[0, 1]$  telle que  $\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}(\tau, 0) = \tau y_1'(0)$ , et on pose  $\bar{u}(\tau) = \bar{y}(\tau, 1)$ . On est alors amené à étudier sur  $H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$  la famille à un paramètre d'opérateurs

$$A(\tau) = \Delta + 3\bar{y}(\tau, \cdot)^2 Id,$$

$\tau \in [0, 1]$ . Pour  $\tau = 0$ , on a  $A(0) = \Delta$ , et les valeurs propres et vecteurs propres sont bien connus. En résolvant par homotopie, pour  $\tau \in [0, 1]$ , des problèmes aux valeurs limites, on calcule numériquement les premières valeurs propres et vecteurs propres associés, en utilisant un code standard aux différences finies implémenté dans *Matlab*. Sur cet exemple, les simulations numériques montrent que les deux premières valeurs propres seulement peuvent prendre des valeurs positives lorsque  $\tau \in [0, 1]$ . On stabilise alors ces modes propres instables en utilisant un placement de pôles ou un algorithme LQR (i.e., une procédure de Riccati). Notons que le système de dimension finie correspondant à ces deux modes propres est vraiment instable : numériquement on observe que  $\lambda_1(1) \simeq 89.743$  et  $\lambda_2(1) \simeq 82.518$ .

Les résultats sont donnés sur la figure 4.1, pour  $\varepsilon = 0.05$  et  $\varepsilon = 0.001$ . Notons que, si  $\varepsilon$  est trop grand, alors la solution explose, comme on s'y attend.

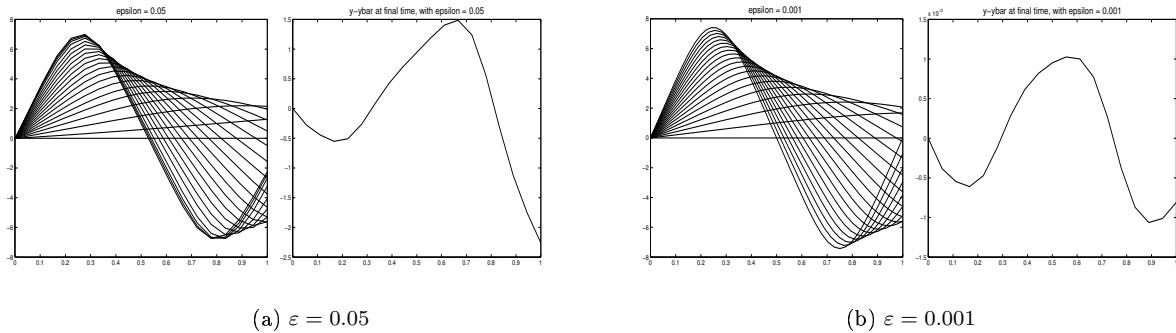


FIG. 4.1 – Simulations numériques pour  $y(t, \cdot)$ , où  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ .

## 4.2 Equations des ondes semi-linéaires

Dans cette section, on présente les résultats obtenus en collaboration avec J.-M. Coron dans [36]. Comme précédemment, soit  $L > 0$  fixé, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$ . On étudie le problème de contrôlabilité exacte de l'équation des ondes semi-linéaire

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(y), \\ y(t, 0) = 0, \quad y_x(t, L) = u(t), \\ y(0, \cdot) = a_0(\cdot), \quad y_t(0, \cdot) = a_1(\cdot), \end{cases} \quad (4.7)$$

où l'état est  $(y(t, \cdot), y_t(t, \cdot)) : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , où  $x \in [0, L]$ , et le contrôle est  $u(t) \in \mathbb{R}$ .

La question de contrôlabilité est la suivante. Pour  $T > 0$  assez grand, et des données initiales  $(a_0, a_1)$  et finales  $(b_0, b_1)$  dans un espace de Hilbert adapté, est-il possible de construire (explicitement) un contrôle  $u$  permettant d'aller, avec le système de contrôle (4.7), de l'état initial  $(a_0, a_1)$  à la cible  $(b_0, b_1)$  en temps  $T$ ?

Lorsque  $f$  est linéaire, la situation est bien connue (voir par exemple [129, 155]). Dans le cas général, les résultats principaux concernant la contrôlabilité globale, dus à E. Zuazua, affirment que, si  $f$  est asymptotiquement linéaire (voir [174]), et plus généralement si  $f$  est globalement lipschitzienne (voir [175]), alors le système de contrôle (4.7) est globalement contrôlable en temps  $T > 2$ , dans l'espace  $H_{(0)}^1(0, L) \times L^2(0, L)$ , pour des contrôles dans  $L^2(0, T)$ . La preuve est basée sur une variante de la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method) et un argument de point fixe. Cette situation se généralise à des fonctions faiblement superlinéaires, ou ayant une bonne condition de croissance (voir [72, 128, 174, 176]). Ici, on note

$$H_{(0)}^1(0, L) = \{y \in H^1(0, L) \mid y(0) = 0\}.$$

Lorsque  $f$  est fortement superlinéaire, la situation est beaucoup plus complexe, notamment à cause des phénomènes d'explosion, comme dans le cas de l'équation de la chaleur vu précédemment. Dans [176], E. Zuazua montre que si  $f$  vérifie

$$\liminf_{s \rightarrow \infty} \frac{-f(s)}{s \ln^p s} > 0,$$

pour  $p > 2$ , alors le système (4.7) n'est exactement contrôlable en aucun temps  $T > 0$ . Plus précisément, pour tout  $T > 0$ , il existe des données initiales  $(a_0, a_1) \in H_{(0)}^1(0, L) \times L^2(0, L)$  pour lesquelles la solution de (4.7) telle que  $y(0, \cdot) = a_0(\cdot)$  et  $y_t(0, \cdot) = a_1(\cdot)$  explose en temps  $t < T$ , pour tout contrôle  $u \in C([0, T])$ . Au vu de ce résultat, on ne peut donc pas espérer obtenir un résultat de contrôlabilité globale. Comme pour l'équation de la chaleur, on se concentre donc sur les états stationnaires, définis de la même façon que dans la définition 4.1.1. On définit aussi l'espace de Banach

$$Y_T = C^0([0, T], H_{(0)}^1(0, L)) \cap C^1([0, T], L^2(0, L)). \quad (4.8)$$

**Théorème 4.2.1** ([36]). *Soient  $y_0$  et  $y_1$  deux états stationnaires appartenant à une même composante connexe de l'ensemble  $\mathcal{S}$  des états stationnaires. Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\varepsilon_1 > 0$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ , il existe un contrôle  $u \in H^2(0, 1/\varepsilon)$  tel que la solution  $y$  dans  $Y_{1/\varepsilon}$  du problème de Cauchy-Dirichlet*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + f(y), \\ y(t, 0) = 0, \quad y_x(t, L) = u(t), \\ y(0, x) = y_0(x), \quad y_t(0, x) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

vérifie  $\|y(1/\varepsilon, \cdot) - y_1(\cdot)\|_{H_{(0)}^1(0, L)} + \|y_t(1/\varepsilon)\|_{L^2(0, L)} \leq \delta$ .

*Remarque 4.2.1.* De même que précédemment, le contrôle  $u$  est construit explicitement sous forme de *feedback*, la procédure consistant à stabiliser un système de contrôle de dimension finie. On a besoin de calculer un nombre fini de coordonnées de la solution, dans une décomposition en base de Riesz.

En couplant le théorème 4.2.1 avec un résultat de contrôlabilité locale, on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 4.2.2.** *Soient  $y_0$  et  $y_1$  deux états stationnaires appartenant à une même composante connexe de  $\mathcal{S}$ . Il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $u \in L^2(0, T)$  tels que la solution  $y(t, x)$  dans  $Y_T$  du problème de Cauchy-Dirichlet (4.9) vérifie  $y(T, \cdot) = y_1(\cdot)$ ,  $y_t(T, \cdot) = 0$ .*

*Remarque 4.2.2.* Les conditions suffisantes assurant la connexité de  $\mathcal{S}$  énoncées dans la remarque 4.1.4 restent valables ici. Cependant, on n'a pas pour l'équation des ondes de résultat d'impossibilité avec des fonctions barrières, lorsque les états stationnaires appartiennent à des composantes connexes distinctes.

Notons aussi que le corollaire peut être établi directement par une application itérée d'un résultat de contrôlabilité locale exacte (voir [174, 176]), mais le contrôle n'est alors pas construit explicitement.

*Remarque 4.2.3.* La procédure de stabilisation, bien que similaire à celle effectuée sur l'équation de la chaleur, est plus difficile à réaliser ici à cause des propriétés conservatives de l'équation des ondes. De plus, l'opérateur n'étant plus auto-adjoint, on doit utiliser le formalisme des bases de Riesz (voir [100, 101, 137, 169]).

Pour gérer le problème venant de l'aspect conservatif, on procède de la manière suivante. En linéarisant le système (4.5) le long d'un chemin d'états stationnaires joignant  $y_0$  à  $y_1$ , on obtient un système de la forme  $w_{tt} = w_{xx} + cw$ , où  $c \in L^\infty(0, T)$ , avec les conditions aux limites  $w(t, 0) = 0$  et  $w_x(t, L) = v(t)$ .

Si on suppose tout d'abord que  $c = 0$ , alors il est clair que le contrôle  $v(t) = -\alpha w_t(t, L)$ , où  $\alpha > 0$ , stabilise ce système. En effet, la fonction *énergie*

$$t \mapsto \int_0^L (w_t(t, x)^2 + w_x(t, x)^2) dt$$

est alors exponentiellement décroissante (voir [118, 119] pour une généralisation de ceci). De plus, un calcul facile montre que les valeurs propres de l'opérateur correspondant ont une partie réelle tendant vers  $-\infty$  lorsque  $\alpha$  tend vers 1. Ce résultat est encore valable asymptotiquement si  $c \neq 0$ . Par conséquent, dans le cas général, si  $\alpha$  est suffisamment proche de 1, alors un nombre fini seulement de valeurs propres peuvent être positives. Le système correspondant à ces modes propres instables peut s'écrire (en utilisant une décomposition de la solution dans une base de Riesz de vecteurs propres généralisés), au premier ordre, comme un système de contrôle linéaire instationnaire. On peut alors stabiliser ce système en utilisant la procédure décrite précédemment.

**Simulations numériques.** On prend les mêmes données que pour l'équation de la chaleur. La famille à un paramètre d'opérateurs linéaires que l'on doit étudier ici s'écrit

$$\tilde{A}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta + 3\tilde{y}(\tau, \cdot)^2 Id & 0 \end{pmatrix},$$

sur

$$D(\tilde{A}(\tau)) = \{(w^1, w^2) \in H \mid w^1 \in H^2((0, L), \mathbb{C}), w^2 \in H^1((0, L), \mathbb{C}), w^2(0) = 0, w_x^1(L) = -\alpha w^2(L)\}.$$

Pour  $\tau = 0$ , les éléments propres de  $\tilde{A}(0)$  sont aisément calculables, ainsi que la base de Riesz duale. En résolvant par continuation pour  $\tau \in [0, 1]$  des problèmes aux valeurs limites, on calcule numériquement les premières valeurs propres  $\lambda_k(\tau)$ . Sur la figure 4.2, à gauche, sont représentées les valeurs propres  $\lambda_{-2}(\tau), \lambda_{-1}(\tau), \lambda_0(\tau), \lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau)$ , pour  $\tau \in [0, 1]$ . Numériquement, on choisit  $\alpha = 1.1$ . Alors, la valeur propre  $\lambda_0(\tau)$  est réelle, passant de  $-1.52$  environ pour  $\tau = 0$ , à  $9.66$  environ pour  $\tau = 1$ . Les valeurs propres  $\lambda_1(\tau)$  et  $\lambda_{-1}(\tau)$  sont complexes conjuguées, jusqu'à une valeur  $\tau_0 = 0.31$  environ. Pour  $\tau = \tau_0$ , la valeur propre  $\lambda_1(\tau_0)$  est double, et le sous-espace propre correspondant est de dimension un. Pour  $\tau > \tau_0$ , les deux valeurs propres sont réelles,  $\lambda_{-1}(\tau)$  est négative, tandis que  $\lambda_1(\tau)$  devient positive. Finalement, pour  $|k| \geq 2$ , la valeur propre  $\lambda_k(\tau)$  est algébriquement simple, complexe, de partie réelle strictement négative.

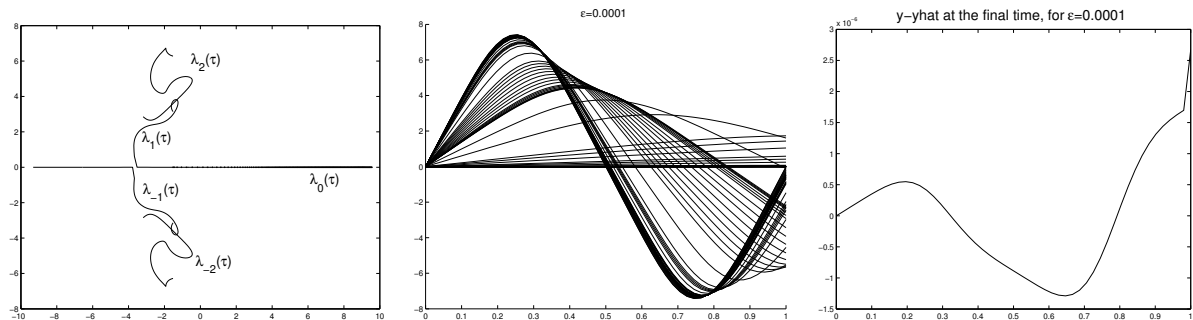


FIG. 4.2 – Simulations numériques pour  $y(t, \cdot)$ , où  $t \in [0, 1/\varepsilon]$ .

Ici donc seuls les modes propres correspondant à  $\lambda_0(\tau)$  et  $\lambda_1(\tau)$  peuvent devenir instables. D'un point de vue algorithmique, afin d'éviter les difficultés techniques liées au calcul d'une forme de Jordan à paramètre, on calcule numériquement, par continuation, et en utilisant une *méthode de tir simple*, une base de l'espace vectoriel réel de dimension trois  $\ker(A_1(\tau) - \lambda_1(\tau)I)(A_1(\tau) - \lambda_0(\tau)I)(A_1(\tau) - \lambda_{-1}(\tau)I)$ , et une base duale. Ensuite, on met en oeuvre une procédure standard de placement de pôles.

Les résultats sont donnés sur la figure 4.2, pour  $\varepsilon = 0.0001$ .

### 4.3 Equations de Navier-Stokes : flots de Couette

Dans cette section, on reporte les résultats de l'article [19], dans lequel on s'intéresse à des états stationnaires particuliers des équations de Navier-Stokes d'un fluide entre deux cylindres concentriques infinis en rotation, les flots de Couette. Connus depuis longtemps, ils ont surtout été étudiés du point de vue de la stabilité, des bifurcations, et des brisures de symétrie (voir [79, 165] et les références contenues). Ici, le but est de contrôler les flots de Couette en agissant sur la rotation du cylindre extérieur.

On formule le problème en coordonnées adimensionnées (voir [19] pour cette réduction). Alors, les équations de Navier-Stokes se ramènent au système

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v &= \Delta v - \mathcal{R}(v \cdot \nabla)v - \nabla p, \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ v_r &= v_z = 0, \quad v_\theta = 1, \quad \text{en } r = r_1, \\ v_r &= v_z = 0, \quad v_\theta = \frac{\omega}{\eta}, \quad \text{en } r = r_2, \end{aligned} \tag{4.10}$$

où  $\Omega$  est le domaine entre les deux cylindres,  $v = (v_r, v_\theta, v_z)$  est le vecteur vitesse des particules de fluide (en coordonnées cylindriques),  $\mathcal{R}$  est le nombre de Reynolds,  $p$  est la pression,  $\eta > 0$  est un paramètre, et  $\omega(t)$  est le contrôle (rotation du cylindre extérieur).

Pour tout réel  $\alpha$ , le flot de Couette  $(\bar{v}^\alpha, \bar{p}^\alpha) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  est défini par

$$\bar{v}^\alpha(r, \cdot, \cdot) = (0, \bar{v}_\theta^\alpha(r), 0)^T, \quad \bar{p}^\alpha(r, \cdot, \cdot) = \mathcal{R} \int_{r_1}^r \frac{(\bar{v}_\theta^\alpha(s))^2}{s} ds, \quad \text{avec } \bar{v}_\theta^\alpha(r) = \frac{\alpha - \eta^2}{\eta(1 + \eta)} r + \frac{\eta(1 - \alpha)}{(1 - \eta)(1 - \eta^2)} \frac{1}{r}.$$

C'est une solution stationnaire de (4.10) pour le contrôle constant  $\omega(t) \equiv \alpha$ .

Le domaine  $\Omega$  étant non borné, il convient, pour que le problème soit bien posé (voir [79] ou [165, Ch.II.4]), de supposer que la vitesse  $v$  et la pression  $p$  sont périodiques en  $z$ , de période  $h > 0$  (hypothèse qui est en fait vérifiée a posteriori, dans le théorème ci-dessous). Alors,  $\Omega$  s'identifie à

$$\Omega_h = \{(r, \theta, z) \in \Omega \mid -h/2 \leq z \leq h/2\}.$$

On note  $L^2(\Omega_h)$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\Omega_h$  muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{L^2(\Omega_h)} = \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} r \phi(r, \theta, z) \psi(r, \theta, z) dz d\theta dr.$$

Soit  $L_h^2(\Omega)$  la cloture de l'ensemble des fonctions continues sur  $\Omega$ ,  $h$ -périodiques en  $z$ , par rapport à la norme induite par le produit scalaire  $(\phi, \psi)_{L_h^2(\Omega)} = (\phi|_{\Omega_h}, \psi|_{\Omega_h})_{L^2(\Omega_h)}$ . Soit  $H_h^2(\Omega)$  l'ensemble des fonctions appartenant, jusqu'à leur dérivée seconde, à  $L_h^2(\Omega)$ .

**Théorème 4.3.1.** *Soient  $(\bar{v}^\alpha, \bar{p}^\alpha)$  et  $(\bar{v}^\beta, \bar{p}^\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , deux flots de Couette. Il existe un temps  $T > 0$  et un contrôle  $\omega \in L^2(0, T)$  tels que l'unique solution de (4.10),*

$$v \in \{v \mid v \in L^2(0, T; [H_h^2(\Omega)]^3), \partial_t v \in L^2(0, T; [L_h^2(\Omega)]^3), \operatorname{div} v = 0\}, \quad p \in L^2(0, T; H_h^1(\Omega)),$$

*partant de  $(v(0), p(0)) = (\bar{v}^\alpha, \bar{p}^\alpha)$ , vérifie  $(v(T), p(T)) = (\bar{v}^\beta, \bar{p}^\beta)$ .*

Notons que le temps  $T$  est grand. Ceci est nécessaire dans la preuve, pour assurer l'existence et l'unicité de la solution. En fait, cette propriété permet de réduire le problème de contrôlabilité de (4.10) au problème de contrôlabilité frontière d'une équation parabolique en dimension un.

## Chapitre 5

# Analyse numérique des EDP contrôlées

Ce chapitre est consacré à la présentation des résultats de l'article [38], en collaboration avec S. Labbé. L'objectif est d'établir des résultats d'approximation efficacement implémentables pour des systèmes de contrôle linéaires en dimension infinie, du type

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad y(0) = y_0, \quad (5.1)$$

où l'état  $y(t)$  appartient à un espace de Hilbert  $X$ , le contrôle  $u(t)$  appartient à un Hilbert  $U$ ,  $A : D(A) \rightarrow X$  est un opérateur, et  $B$  est un opérateur de contrôle (en général, non borné) sur  $U$ . La discrétisation de cette EDP, par exemple par un schéma aux différences finies, ou aux éléments finis, conduit à une famille de systèmes de contrôle en dimension finie

$$\dot{y}_h(t) = A_h y_h(t) + B_h u_h(t), \quad y(0) = y_{0h}, \quad (5.2)$$

où  $y_h(t) \in X_h$  et  $u_h(t) \in U_h$ , pour  $0 < h < h_0$ .

Soit  $y_1 \in X$ ; si le système de contrôle (5.1) est contrôlable en temps  $T$ , alors il existe une solution  $y(\cdot)$  de (5.1), associée à un contrôle  $u$ , telle que  $y(T) = y_1$ . La question suivante se pose naturellement : est-il possible de trouver des contrôles  $u_h$ , pour  $0 < h < h_0$ , convergeant vers le contrôle  $u$ , lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers zéro, et tels que les trajectoires associées  $y_h(\cdot)$ , solutions de (5.2), convergent vers  $y(\cdot)$ ? De plus, existe-t-il un algorithme efficace pour calculer les contrôles  $u_h$ ?

Pour des systèmes du type (5.1), il existe de nombreuses méthodes pour réaliser la contrôlabilité. Une méthode bien connue, adaptée aux implémentations numériques, est la méthode HUM (Hilbert Uniqueness Method), introduite dans [129], qui consiste à minimiser la norme  $L^2$  du contrôle. On s'intéresse ici à la question précédente dans le cas où la contrôlabilité de (5.1) est réalisée par la méthode HUM. Le but est d'établir des conditions assurant l'*uniforme contrôlabilité* de la famille des systèmes de contrôle (5.2), et d'établir une méthode d'approximation du contrôle HUM.

La question de l'uniforme contrôlabilité et/ou observabilité a été étudiée par E. Zuazua et des co-auteurs dans une série d'articles [76, 109, 126, 133, 136, 145, 164, 177, 178, 179, 180], pour différents procédés de discrétisation, et différentes équations. Lorsque la constante d'observabilité des systèmes de dimension finie ne dépend pas de  $h$ , on parle d'uniforme observabilité. Pour des schémas aux différences finies classiques, cette propriété a été établie, en dimension un, pour des équations de la chaleur [133], des équations de poutres [126], des équations de Schrödinger [180]. Par contre elle n'a pas lieu pour des équations des ondes en dimension un [109]. Dans ce dernier cas, la constante d'observabilité des systèmes de dimension finie tend vers  $+\infty$  lorsque le pas de discrétisation tend vers 0. Cela est dû à un comportement pathologique des modes de haute fréquence. Du point de vue de la contrôlabilité, cela provoque la divergence des contrôles. Ces résultats s'étendent à d'autres schémas numériques, comme les éléments finis  $P_1 \times P_1$ , et aussi, pour des équations des ondes en dimension deux (voir [109, 136, 177]).

Le cadre dans lequel on définit un schéma de discrétisation est dans le même esprit que [54, 55, 99, 115, 124, 132, 149]. Dans ces articles, des résultats d'approximation sont donnés pour le problème LQR (régulation quadratique), dans le cas parabolique, qui montrent la convergence des contrôles des modèles semi-discrets vers le contrôle continu. Cependant, dans le problème LQR, le point final n'est pas fixé. Or, dans le problème de contrôlabilité exacte, on cherche à joindre exactement un point final donné; par exemple, dans le cas de la contrôlabilité exacte à zéro, on cherche à amener toutes les

fréquences (notamment les hautes) à zéro exactement. Par rapport au problème LQR, cela est une cause supplémentaire de la possible divergence des contrôles lorsque le pas de discrétisation tend vers zéro. Notons que, pour le problème LQR, dans le cas hyperbolique, des techniques de type viscosité artificielle marchent, alors qu'elles échouent pour le problème de contrôlabilité exacte (voir [149]).

On aborde ici la question d'uniforme contrôlabilité, dans le cas où l'opérateur  $A$  engendre un semi-groupe analytique. Bien entendu, à cause des propriétés de régularisation, le système (5.1) n'est pas exactement contrôlable en général, mais seulement exactement contrôlable à zéro.

## 5.1 Le cadre abstrait

Rappelons d'abord quelques faits bien connus sur la contrôlabilité dans des espaces de Hilbert (voir [170, 171, 168]). Soient  $X$  un espace de Hilbert, et  $S(t)$  un semi-groupe fortement continu sur  $X$ , de générateur  $(A, D(A))$ . Soit  $X_{-1}$  le complété de  $X$  pour la norme  $\|x\|_{-1} = \|(\beta I - A)^{-1}x\|$ , où  $\beta \in \rho(A)$  est fixé. Notons que  $X_{-1}$  ne dépend pas de la valeur de  $\beta \in \rho(A)$ . L'espace  $X_{-1}$  est isomorphe à  $(D(A^*))'$ , le dual de  $D(A^*)$  par rapport à l'espace pivot  $X$ , et  $X \subset X_{-1}$ , avec injection continue et dense. Le semi-groupe  $S(t)$  s'étend à un semi-groupe sur  $X_{-1}$ , encore noté  $S(t)$ , dont le générateur est une extension de  $A$ , encore noté  $A$ . Avec ces notations,  $A$  est un opérateur linéaire de  $X$  dans  $X_{-1}$ .

Soit  $U$  un Hilbert. Un opérateur linéaire continu  $B : U \rightarrow X_{-1}$  est dit *admissible* pour  $S(t)$  si toute solution de

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t), \quad (5.3)$$

telle que  $y(0) = y_0 \in X$  et  $u(\cdot) \in L^2(0, +\infty; U)$ , vérifie  $y(t) \in X$ , pour tout  $t \geq 0$ . Dans ce cas,  $y(\cdot) \in H^1(0, +\infty; X)$ , et  $y(t) = S(t)y_0 + \int_0^t S(t-s)Bu(s)ds$ , pour tout  $t \geq 0$ .

Pour  $T > 0$ , on définit  $L_T : L^2(0, T; U) \rightarrow X_{-1}$  par  $L_T u = \int_0^T S(T-s)Bu(s)ds$ . Un opérateur de contrôle  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  est admissible si et seulement si  $\text{Im } L_T \subset X$ , pour un (et donc pour tout)  $T > 0$ .

Soit  $B \in \mathcal{L}(U, X_{-1})$  un opérateur de contrôle admissible. On rappelle que le système (5.3) est dit *exactement contrôlable à zéro* en temps  $T$  si, pour tout  $y_0 \in X$ , il existe  $u(\cdot) \in L^2(0, T; U)$  tel que la solution de (5.3), telle que  $y(0) = y_0$ , associée à  $u(\cdot)$ , vérifie  $y(T) = 0$ . Le système (5.1) est exactement contrôlable à zéro en temps  $T$  si et seulement s'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\int_0^T \|B^* S^*(t)\psi\|_U^2 dt \geq \alpha \|S(T)^*\psi\|_X^2, \quad (5.4)$$

pour tout  $\psi \in D(A^*)$  (inégalité d'observabilité).

Dans ces conditions, soit  $y_0 \in X$ . Pour  $\psi \in D(A^*)$ , on pose  $J(\psi) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B^* S^*(t)\psi\|_U^2 dt + \langle S(T)^*\psi, y_0 \rangle_X$ . La fonction  $J$  est strictement convexe, et coercive d'après l'inégalité (5.4). On définit le contrôle  $u$  par  $u(t) = B^* S^*(T-t)\psi$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , et soit  $y(\cdot)$  la solution de (5.3), telle que  $y(0) = y_0$ , associée à  $u$ . Alors,  $y(T) = 0$ , et de plus,  $u$  est le contrôle de norme  $L^2$  minimale, parmi tous les contrôles dont la trajectoire associée vérifie  $y(T) = 0$ . Ceci est plus ou moins le contenu de la méthode HUM, et donne un moyen implémentable de construire le contrôle  $u$  (voir [179]), appelé contrôle HUM.

## 5.2 Uniforme contrôlabilité des systèmes paraboliques contrôlés semi-discrétisés

On fait les hypothèses suivantes.

**(H<sub>1</sub>)** *Le semi-groupe  $S(t)$  est analytique.*

D'après [146], il existe des réels positifs  $C_1$  et  $\omega$  tels que  $\|S(t)y\|_X \leq C_1 e^{\omega t} \|y\|_X$ , pour tout  $t > 0$  et tout  $y \in D(A)$ . Dans la suite, on pose  $\hat{A} = A - \omega I$ . En particulier, les puissances fractionnaires  $(-\hat{A})^\theta$  sont bien définies, pour  $\theta \in [0, 1]$ .

**(H<sub>2</sub>)** *Le degré de non bornitude de  $B$  est strictement inférieur à 1/2. Autrement dit, il existe  $\gamma \in [0, 1/2)$  tel que  $B \in L(U, D((-\hat{A}^*)^\gamma))'$ .*

Le domaine de  $B^*$  est alors  $D(B^*) = D((-\hat{A}^*)^\gamma)$ . Cette hypothèse implique que  $B$  est *admissible*.

On introduit ensuite des hypothèses d'approximation, inspirées de [124] (voir aussi [54, 55, 99, 115, 132, 149]). On considère deux familles  $(X_h)_{0 < h < h_0}$  et  $(U_h)_{0 < h < h_0}$  d'espaces de dimension finie, où  $h$  est le paramètre de discrétisation.

**(H<sub>3</sub>)** Pour tout  $h \in (0, h_0)$ , il existe des applications linéaires  $P_h : D((-\hat{A}^*)^{1/2})' \rightarrow X_h$  et  $\tilde{P}_h : X_h \rightarrow D((-\hat{A}^*)^{1/2})$  (resp., il existe des applications linéaires  $Q_h : U \rightarrow U_h$  et  $\tilde{Q}_h : U_h \rightarrow U$ ), vérifiant les propriétés suivantes :

**(H<sub>3.1</sub>)** Pour tout  $h \in (0, h_0)$ ,  $P_h \tilde{P}_h = id_{X_h}$ , et  $Q_h \tilde{Q}_h = id_{U_h}$ .

**(H<sub>3.2</sub>)** Il existe  $s > 0$  et  $C_4 > 0$  tels que, pour tout  $h \in (0, h_0)$ ,

$$\forall \psi \in D(A^*) \quad \|(I - \tilde{P}_h P_h) \psi\|_X \leq C_4 h^s \|A^* \psi\|_X, \quad \|(-\hat{A}^*)^\gamma (I - \tilde{P}_h P_h) \psi\|_X \leq C_4 h^{s(1-\gamma)} \|A^* \psi\|_X,$$

$$\forall u \in U \quad \|(I - \tilde{Q}_h Q_h) u\|_U \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

$$\forall \psi \in D(A^*) \quad \|(I - \tilde{Q}_h Q_h) B^* \psi\|_U \leq C_4 h^{s(1-\gamma)} \|A^* \psi\|_X.$$

Notons que, par hypothèse,  $\gamma < 1/2$ , et donc,  $\text{Im } \tilde{P}_h \subset D((-\hat{A}^*)^{1/2}) \subset D((-\hat{A}^*)^\gamma)$ .

Pour tout  $h \in (0, h_0)$ , l'espace vectoriel  $X_h$  est muni de la norme  $\|y_h\|_{X_h} = \|\tilde{P}_h y_h\|_X$ , pour  $y_h \in X_h$  et  $U_h$  est muni de la norme  $\|u_h\|_{U_h} = \|\tilde{Q}_h u_h\|_U$ , pour  $u_h \in U_h$ . Dans ces conditions, il est clair que  $\|\tilde{P}_h\|_{L(X_h, X)} = \|\tilde{Q}_h\|_{L(U_h, U)} = 1$ , pour tout  $h \in (0, h_0)$ . Par ailleurs, il résulte des hypothèses ci-dessus, et du théorème de Banach-Steinhaus, que les normes  $\|P_h\|_{L(X, X_h)}$  et  $\|Q_h\|_{L(U, U_h)}$  sont bornées, uniformément par rapport à  $h$ .

**(H<sub>3.3</sub>)** Pour tout  $h \in (0, h_0)$ , on a  $P_h = \tilde{P}_h^*$ , et  $Q_h = \tilde{Q}_h^*$ , où les adjoints sont pris par rapport aux espace pivots  $X, U, X_h$ , et  $U_h$ .

**(H<sub>3.4</sub>)** Il existe  $C_6 > 0$  tel que  $\|B^* \tilde{P}_h \psi_h\|_U \leq C_6 h^{-\gamma s} \|\psi_h\|_{X_h}$ , pour tout  $h \in (0, h_0)$ , et tout  $\psi_h \in X_h$ .

Pour tout  $h \in (0, h_0)$ , on définit les approximations  $A_h^* : X_h \rightarrow X_h$  de  $A^*$ , et  $B_h^* : X_h \rightarrow U_h$  de  $B^*$ , par  $A_h^* = P_h A^* \tilde{P}_h$ , et  $B_h^* = Q_h B^* \tilde{P}_h$ . Sous l'hypothèse (H<sub>3.3</sub>), il est clair que  $B_h = P_h B \tilde{Q}_h$ , pour tout  $h \in (0, h_0)$ . D'autre part, on pose  $A_h = (A_h^*)^*$  (par rapport à l'espace pivot  $X_h$ ). Notons que, si  $A$  est auto-adjoint, alors  $A_h = P_h A \tilde{P}_h$ .

**(H<sub>4</sub>)** On a les propriétés suivantes :

**(H<sub>4.1</sub>)** La famille d'opérateurs  $e^{tA_h^*}$  est uniformément analytique, i.e., il existe  $C_7 > 0$  tel que

$$\forall t > 0 \quad \|e^{tA_h^*}\|_{L(X_h)} \leq C_7 e^{\omega t}, \quad \text{et } \|A_h e^{tA_h^*}\|_{L(X_h)} \leq C_7 \frac{e^{\omega t}}{t},$$

**(H<sub>4.2</sub>)** Il existe  $C_9 > 0$  tel que, pour tout  $f \in X$  et tout  $h \in (0, h_0)$ , les solutions respectives de  $\hat{A}^* \psi = f$  et  $\hat{A}_h^* \psi_h = P_h f$  vérifient

$$\|P_h \psi - \psi_h\|_{X_h} \leq C_9 h^s \|f\|_X.$$

Autrement dit,  $\|P_h \hat{A}^{*-1} - \hat{A}_h^{*-1} P_h\|_{L(X, X_h)} \leq C_9 h^s$  (hypothèse sur la vitesse de convergence).

*Remarque 5.2.1.* Les hypothèses (H<sub>3</sub>) et (H<sub>4.2</sub>) sont valides pour la plupart des schémas numériques classiques : méthodes de Galerkin, spectrales, différences finies centrées, ... En revanche, comme il est remarqué dans [124], l'hypothèse (H<sub>4.1</sub>) d'uniforme analyticité n'est pas standard, et doit être v rifi e sur chaque exemple. Cependant, cette hypothèse est v rifi e, sous l'hypothèse (H<sub>1</sub>), lorsque la forme bilinéaire associ e à  $A_h$  est uniformément coercive (voir [68] dans le cas auto-adjoint, et [123, Lemma 4.2] pour le cas général).

**Théorème 5.2.1.** *Sous les hypothèses précédentes, le système de contrôle  $\dot{y} = Ay + Bu$  est exactement contrôlable à zéro en temps  $T$ , si et seulement si la famille des systèmes de contrôle  $\dot{y}_h = A_h y_h + B_h u_h$  est uniformément contrôlable au sens suivant. Il existe  $\beta > 0$ ,  $h_1 > 0$ , et des réels strictement positifs  $c, c'$ , tels que l'on ait l'inégalité d'observabilité et d'admissibilité uniforme*

$$c \|e^{TA_h^*} \psi_h\|_{X_h}^2 \leq \int_0^T \|B_h^* e^{tA_h^*} \psi_h\|_{U_h}^2 dt + h^\beta \|\psi_h\|_{X_h}^2 \leq c' \|\psi_h\|_{X_h}^2$$

pour tout  $h \in (0, h_1)$ , et tout  $\psi_h \in X_h$ .

Dans ces conditions, pour tout  $y_0 \in X$ , et tout  $h \in (0, h_1)$ , il existe un unique  $\psi_h \in X_h$  minimisant la fonctionnelle

$$J_h(\psi_h) = \frac{1}{2} \int_0^T \|B_h^* e^{tA_h^*} \psi_h\|_{U_h}^2 dt + \frac{1}{2} h^\beta \|\psi_h\|_{X_h}^2 + \langle e^{TA_h^*} \psi_h, P_h y_0 \rangle_{X_h},$$

et la suite de contrôles  $(\tilde{Q}_h u_h)_{0 < h < h_1}$ , où  $u_h$  est défini par  $u_h(t) = B_h^* e^{(T-t)A_h^*} \psi_h$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , converge faiblement (à sous-suite près), dans l'espace  $L^2(0, T; U)$ , vers un contrôle  $u$  tel que la solution de  $\dot{y} = Ay + Bu$ ,  $y(0) = y_0$ , vérifie  $y(T) = 0$ .

Pour tout  $h \in (0, h_1)$ , soit  $y_h(\cdot)$  la solution de  $\dot{y}_h = A_h y_h + B_h u_h$ ,  $y_h(0) = P_h y_0$ . Alors,

- $y_h(T) = -h^\beta \psi_h$ ;
- la suite  $(\tilde{P}_h y_h(\cdot))_{0 < h < h_1}$  converge faiblement (à sous-suite près), dans l'espace  $L^2(0, T; X)$ , vers  $y(\cdot)$  sur  $[0, T]$ ;
- pour tout  $t \in (0, T]$ , la suite  $(\tilde{P}_h y_h(t))_{0 < h < h_1}$  converge faiblement (à sous-suite près), dans l'espace  $X$ , vers  $y(t)$ .

De plus,  $\int_0^T \|u(t)\|_U^2 dt \leq \frac{1}{c} \|y_0\|_X^2$ , et il existe  $M > 0$  tel que, pour tout  $h \in (0, h_1)$ ,

$$\int_0^T \|u_h(t)\|_{U_h}^2 dt \leq M^2 \|y_0\|_X^2, \quad h^\beta \|\psi_h\|_{X_h}^2 \leq M^2 \|y_0\|_X^2, \quad \text{et} \quad \|y_h(T)\|_{X_h} \leq M h^{\beta/2} \|y_0\|_X.$$

On peut de plus se demander sous quelles conditions le contrôle limite  $u$  est effectivement le contrôle HUM tel que  $y(T) = 0$ .

**Proposition 5.2.2.** Avec les notations du théorème 5.2.1, si de plus la suite de réels  $\|\psi_h\|_{X_h}$ ,  $0 < h < h_1$ , est bornée, alors  $u$  est l'unique contrôle HUM tel que  $y(T) = 0$ .

Une condition suffisante sur  $y_0 \in X$ , assurant la bornitude de cette suite, est la suivante : il existe  $\eta > 0$  tel que le système de contrôle  $\dot{y} = Ay + Bu$  soit exactement contrôlable à zéro, en tout temps  $t \in [T - \eta, T + \eta]$ , et la trajectoire  $t \mapsto S(t)y_0$  dans  $X$ , pour  $t \in [T - \eta, T + \eta]$ , n'est pas contenue dans un hyperplan de  $X$ .

Un exemple de cette situation est le cas où, en plus des hypothèses précédentes, l'opérateur  $A$  a une base Hilbertienne de vecteurs propres  $e_k$ , associés aux valeurs propres  $\lambda_k$ , pour  $k \in \mathbb{N}$ , vérifiant  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k} < +\infty$ . Le point initial  $y_0 = \sum_{k \in \mathbb{N}} y_{0k} e_k$  doit alors être tel que  $y_{0k} \neq 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

*Remarque 5.2.2.* Insistons sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un résultat de contrôlabilité exacte à zéro uniforme. Un tel résultat n'est en effet pas valable en général : pour des équations de la chaleur en dimension deux, avec certains domaines de contrôle, la famille des systèmes semi-discrets obtenus par un schéma aux différences finies n'est pas uniformément exactement contrôlable à zéro (voir [180]). Cependant, le résultat du théorème ci-dessus est plus fort que la propriété de contrôlabilité approchée uniforme. En effet, la suite des contrôles  $u_h$  du théorème converge vers un contrôle  $u$  réalisant la contrôlabilité exacte à zéro pour le modèle continu. En revanche, la propriété de contrôlabilité approchée uniforme signifie que la suite de contrôles  $u_h$  converge vers un contrôle  $u$  amenant le système (5.1) à un voisinage (prescrit) de zéro seulement.

D'autre part, notons que la notion de contrôlabilité uniforme utilisée ici est pertinente du point de vue numérique. En effet, numériquement il est impossible de réaliser exactement zéro.

### 5.3 Exemple d'application : contrôle de type Neumann pour l'équation de la chaleur

On donne ici un exemple d'application du théorème 5.2.1, et des simulations numériques. Soient  $d \geq 1$  un entier,  $c$  un réel,  $\Omega$  un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\Gamma = \partial\Omega$ . Soient  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des sous-ensembles de  $\Gamma$  tels que  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  et  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ . Considérons le système de contrôle frontière

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= \Delta y + cy \quad \text{dans } (0, T) \times \Omega, & y(0, \cdot) &= y_0(\cdot) \quad \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial n} &= u \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1, & \frac{\partial y}{\partial n} &= 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_2, \end{aligned} \tag{5.5}$$

où  $y_0 \in L^2(\Omega)$  et  $u \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ . Posons  $X = L^2(\Omega)$  et  $U = L^2(\Gamma_1)$ . Il est bien connu (voir [138, 154, 155, 157, 158], voir aussi [97]) que le système de contrôle (5.5) est exactement contrôlable à zéro dans  $X$ , avec des contrôles  $u \in L^2(0, T; U)$ . Il peut s'écrire sous la forme (5.3), où l'opérateur auto-adjoint  $A : D(A) \rightarrow X$  est défini par  $Ay = \Delta y + cy$ , pour tout  $y$  dans  $D(A) = \{y \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2\}$ , et  $B = -AN \in L(U, D(A^*)')$ , où  $N$  est l'application de Neumann, définie par

$$Nu = y \Leftrightarrow \left( Ay = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = u \text{ sur } \Gamma_1, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \right).$$

Ici, on suppose que  $-c$  n'est pas une valeur propre de  $\Delta$ . L'adjoint  $B^* \in L(D(A^*), U)$  de  $B$  est donné par  $B^*\psi = \psi_{\Gamma_1}$ , pour tout  $\psi \in D(A^*)$ . De plus, le degré de non bornitude de  $B$  est  $\gamma = 1/4 + \varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ . Les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  sont vérifiées. Notons que  $D((-A)^{1/2}) = H^1(\Omega)$ .

**Semi-discretisation par éléments finis.** On écrit un modèle semi-discret de (5.5), en utilisant la méthode des éléments finis d'ordre un. Considérons une famille de maillages simplexés  $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $\mathbb{R}^d$ , avec  $\mathcal{T}_n = (K_k)_{k \in \{1, \dots, N_n\}}$ , où, pour tout  $k \in \{1, \dots, N_n\}$ ,  $K_k$  est un  $d$ -simplexe ouvert tel que, pour tout  $l \in \{1, \dots, N_n\} \setminus \{k\}$ , on a  $K_k \cap K_l = \emptyset$  et  $\bigcup_{k=1}^{N_n} \overline{K}_k = \overline{\Omega}$ . Soit  $\partial I_n$  l'ensemble des indices tels que, pour tout  $k \in \partial I_n$ , on a  $\overline{K}_k \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ . Soit  $S_n$  le nombre de sommets distincts  $(p_k)_{k \in \{1, \dots, S_n\}}$  de  $\mathcal{T}_n$ , et soit  $\partial S_n$  l'ensemble des indices des sommets distincts de  $(K_k \cap \Gamma_1)_{k \in \partial I_n}$ . Soit  $h_n = \max_{k \in \{1, \dots, N_n\}} \text{diam}(K_k)$ , où  $\text{diam}(K_k)$

est le diamètre de  $K_k$ . On suppose que  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement décroissante. Pour simplifier, l'indice  $n$  est remplacé par  $h$  dans ce qui suit. Posons  $X_h = \{y \in C^0(\Omega) \mid \forall k \in \{1, \dots, N_h\}, y|_{K_k} \text{ est linéaire}\}$ , et  $U_h = \{u \in C^0(\Gamma_1) \mid \forall k \in \partial I_h, y|_{K_k \cap \Gamma_1} \text{ est linéaire}\}$ . Les espaces  $X_h$  et  $U_h$  sont respectivement engendrés par  $\Phi_h = (\varphi_k)_{k \in \{1, \dots, S_h\}}$  et  $\Upsilon_h = (v_k)_{k \in \partial S_h}$ , vérifiant

$$\begin{aligned} \forall k \in \{1, \dots, S_h\}, \varphi_k(p_k) = 1, \quad \forall l \in \{1, \dots, S_h\} \setminus \{k\}, \varphi_k(p_l) = 0, \\ \forall k \in \partial S_h, v_k(p_k) = 1, \quad \forall l \in \partial S_h \setminus \{k\}, v_k(p_l) = 0. \end{aligned}$$

Notons que  $X_h \subset D((-A)^{1/2}) = H^1(\Omega)$  et  $U_h \subset U$ . Soit  $\tilde{P}_h$  (resp.,  $\tilde{Q}_h$ ) l'injection canonique de  $X_h$  dans  $D((-A)^{1/2})$  (resp., de  $U_h$  dans  $U$ ). Pour tout  $y \in D((-A)^{1/2})' = H^1(\Omega)'$ , et tout  $u \in U$ , posons

$$P_h y = (M_h^{-1} \langle y, \tilde{P}_h \Phi_h \rangle_{H^1(\Omega)', H^1(\Omega)}) \cdot \Phi_h, \quad Q_h u = (M_{\partial, h}^{-1} \langle u, \tilde{Q}_h \Upsilon_h \rangle_U) \cdot \Upsilon_h,$$

où  $M_h = \langle \Phi_h, \Phi_h^T \rangle_{X_h}$ , et  $M_{\partial, h} = \langle \Upsilon_h, \Upsilon_h^T \rangle_{U_h}$ , sont des matrices de masse. Les hypothèses  $(H_{3.1})$  et  $(H_{3.3})$  sont trivialement vérifiées; l'hypothèse  $(H_{3.2})$ , avec  $s = 2$ , découle de la théorie classique des éléments finis, et l'hypothèse  $(H_{3.4})$  découle d'une propriété d'approximation standard (voir [166]).

Finalement, le modèle semi-discret de (5.5) s'écrit

$$M_h \dot{Y}(t) = A_h Y(t) + B_h V(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

où  $Y_0 \in \mathbb{R}^{S_h}$ ,  $V(t) \in \mathbb{R}^{\#\partial S_h}$ ,  $Y(t) \in \mathbb{R}^{S_h}$ ,  $A_h = -\langle \nabla \Phi_h, \nabla \Phi_h^T \rangle_{X_h} + cM_h$ , et  $B_h = -\langle \Upsilon_h, \Phi_h^T \rangle_{U_h}$ .

*Remarque 5.3.1.* Notons que, pour l'implémentation numérique, ce modèle d'approximation n'est pas écrit dans les espaces abstraits  $X_h$  et  $U_h$ , mais plutôt dans  $\mathbb{R}^{S_h}$  et  $\mathbb{R}^{\#\partial S_h}$ . Cela ne modifie pas l'unicité de l'inégalité d'observabilité et d'admissibilité (5.2.1). En effet, les applications

$$\begin{aligned} \iota_h : X_h &\longrightarrow \mathbb{R}^{S_h} & \iota_{\partial, h} : U_h &\longrightarrow \mathbb{R}^{\#\partial S_h} \\ y_h &\longmapsto M_h^{-1} \langle y_h, \Phi_h \rangle_X, & u_h &\longmapsto M_{\partial, h}^{-1} \langle u_h, \Upsilon_h \rangle_U, \end{aligned}$$

sont des isomorphismes bornés supérieurement et inférieurement, uniformément par rapport à  $h$ .

L'hypothèse  $(H_{4.1})$  d'analyticité uniforme résulte de [68]. L'hypothèse  $(H_{4.2})$  est vérifiée avec  $s = 2$  (voir [124, 166]). Par conséquent, le théorème 5.2.1 s'applique, avec par exemple  $\beta = 0.45$ .

**Simulations numériques.** La procédure de minimisation du théorème 5.2.1 a été implémentée sous *Matlab* pour  $d = 1$  et  $d = 2$ , en utilisant une méthode standard de type gradient, qui a l'avantage de ne pas avoir à calculer le gradient de la fonctionnelle (ce calcul étant très coûteux). On choisit  $c = 1$ . L'opérateur  $A$  a une valeur propre positive, et le système (5.5) non contrôlé (i.e.,  $u \equiv 0$ ) est instable.

*L'équation de la chaleur en dimension un.* Soient  $\Omega = (0, 1)$ ,  $\Gamma_1 = \{1\}$ ,  $\Gamma_2 = \{0\}$ ,  $c = 1$ , et  $T = 1$ . Avec les notations précédentes, considérons la subdivision de  $\Omega$ ,  $p_k = (k-1)h$ , pour  $k \in \{1, \dots, S_h\}$  et  $h = 1/(S_h - 1)$ . Les simulations numériques sont faites avec un pas de temps égal à 0.001.

name	$S_h$	$h$	$y_0$
1D_10	11	$10^{-1}$	$y_0(x) = x$
1D_100	101	$10^{-2}$	$y_0(x) = x$
1D_1000	1001	$10^{-3}$	$y_0(x) = x$
sin1D_10	11	$10^{-1}$	$y_0(x) = \sin^2(\pi x)$
sin1D_100	101	$10^{-2}$	$y_0(x) = \sin^2(\pi x)$
sin1D_1000	1001	$10^{-3}$	$y_0(x) = \sin^2(\pi x)$

name	$\ \psi_h\ _X$	$h^\beta$	$\ h^\beta\psi_h + y_h(T)\ _X$	$\ y_h(T)\ _{X_h}$	$\ y_h^u(T)\ _{X_h}$
1D_10	0.41380476	0.3720411	0.0030567	0.1567023	1.3577812
1D_100	0.53185422	0.1264632	0.0036999	0.0700055	1.3577812
1D_1000	0.70536645	0.0446885	0.0039907	0.0339719	1.3577812
sin1D_10	0.41383134	0.3720411	0.0030884	0.1567131	1.3577812
sin1D_100	0.53222526	0.1264632	0.0040701	0.0700721	1.3577812
sin1D_1000	0.70565021	0.0446885	0.0039909	0.0339841	1.3577812

Ici, on note  $y_h^u(T)$  l'extrémité au temps  $T$  de la solution de (5.5), pour  $u_h \equiv 0$ .

La convergence de la méthode n'est pas très bonne. Ceci est cependant en accord avec les estimations (5.2.1) du théorème 5.2.1, avec, ici,  $\beta/2 = 0.225$ . Ces résultats illustrent la difficulté d'utiliser la méthode HUM pour calculer des contrôles. Dans notre cas, pour diviser  $\|y_h(T)\|_{X_h}$  par 10, il faut diviser  $h$  par 30000. Par ailleurs, il faut trois jours de calculs, sur un bi-processeur (Xeon 2.40 GHz, 512 Go RAM), pour faire converger l'algorithme, pour  $h = 10^{-3}$ .

*Equation de la chaleur en dimension deux.* Soit  $\Omega$  le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ , soient  $c = 1$ , et  $T = 1$ . Les simulations numériques sont faites avec un pas de temps égal à 0.001.

name	$S_h$	$y_0$	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$
disk_1	55	$y_0(x, y) = x + y$	$\Gamma$	$\emptyset$
	104	$y_0(x, y) = x + y$	$\Gamma$	$\emptyset$
disk_2	55	$y_0(x, y) = x + y$	$\{(x, y) \in \Gamma \mid x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$	$\Gamma \setminus \Gamma_1$
	104	$y_0(x, y) = x + y$	$\{(x, y) \in \Gamma \mid x \geq 0 \text{ and } y \geq 0\}$	$\Gamma \setminus \Gamma_1$

name	$S_h$	$\ \psi_h\ _X$	$h^\beta$	$\ h^\beta\psi_h + y_h(T)\ _X$	$\ y_h(T)\ _{X_h}$	$\ y_h^u(T)\ _{X_h}$
disk_1	55	0.1587292	0.6142423	0.0174738	0.0803068	0.1035126
	104	0.2309178	0.4511246	0.0195391	0.0849494	0.1085287
disk_2	55	0.1649749	0.6142423	0.0116253	0.0962398	0.1035126
	104	0.1751393	0.4511246	0.0106206	0.1025904	0.1086115

Le programme `disk_1` donne des résultats légèrement meilleurs que `disk_2`. Cela est dû au fait que le contrôle agit sur une partie du bord seulement. Les simulations utilisent 55 et 104 mailles (voir figure 5.1). Comme précédemment, les temps de calculs sont très longs, et, pour diviser  $\|y_h(T)\|_{X_h}$  par 10, il faut diviser le diamètre des mailles par 30000, c'est-à-dire, multiplier le nombre de mailles par  $9.10^8$ , ce qui n'est pas faisable sur une machine standard en temps raisonnable, et indique les limites de la méthode.

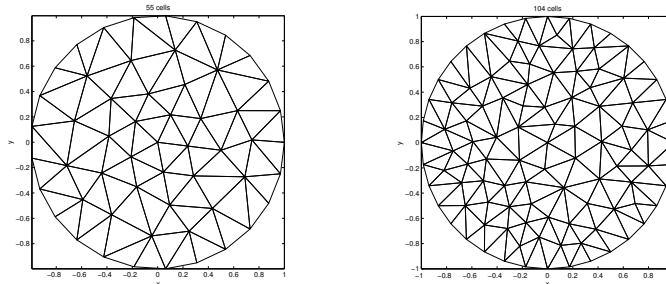


FIG. 5.1 – Maillages utilisés.

## Chapitre 6

# Extensions et projets de recherche

Les résultats de contrôlabilité et stabilisation obtenus pour les équations de la chaleur et des ondes doivent pouvoir s'étendre en dimension supérieure. En fait, on devrait pouvoir obtenir un résultat général, basé sur une décomposition de la solution dans une base de Riesz, pour des équations semi-linéaires de la forme  $\dot{y} = Ay + f(y) + Bu$ , en dimension quelconque. Dans le cas parabolique, l'extension ne devrait pas poser de gros problèmes. En revanche, dans le cas hyperbolique, il faut a priori être capable de déterminer un contrôle feedback qui stabilise le système lorsque  $f = 0$ . L'ajout d'une semi-linéarité perturbe le spectre du système linéarisé le long d'un chemin d'états stationnaires, et le but est alors de corriger un nombre fini  $n$  de modes propres éventuellement instables, par une procédure de Riccati par exemple. Cependant, en vue de démontrer le résultat de stabilisation et de construire une fonction de Lyapunov, la mise en oeuvre d'une procédure de Riccati exige d'obtenir des estimations très précises des matrices de gain, en fonction de  $n$ . En utilisant des décompositions ad hoc de l'équation de Riccati (voir [45]), cela devrait être possible.

Il serait très intéressant, du point de vue pratique, d'étendre le résultat de contrôlabilité des flots de Couette au cas où il existe des perturbations. Cependant, afin de pouvoir mener une analyse spectrale précise du problème, les perturbations doivent être supposées périodiques en  $z$  (voir [79, 165]). Dans ce contexte, quelques résultats théoriques concernant le spectre existent dans la littérature (voir [110, 111]), concernant essentiellement l'analyse du premier mode propre instable. On doit pouvoir écrire un résultat de contrôlabilité dans le cas où il existe des perturbations périodiques, en faisant des hypothèses numériquement vérifiables, ou bien des hypothèses vérifiées génériquement. Un travail de recherche sur ce sujet est en cours, en collaboration avec M. Schmidt.

Concernant la partie numérique, de très nombreuses questions passionnantes se posent. On a vu que, sous des conditions standards sur le processus de discrétisation, pour une EDP exactement contrôlable à zéro, si les semi-groupes des systèmes semi-discrets sont uniformément analytiques, et si le degré de non bornitude de l'opérateur de contrôle est strictement inférieur à  $1/2$ , alors les modèles semi-discrets sont uniformément contrôlables. De plus, on a donné une procédure de minimisation permettant de calculer les contrôles approchés. Cependant, aucune vitesse de convergence sur les contrôles n'a été donnée, et le problème est ouvert. Par ailleurs, la condition sur le degré de non bornitude  $\gamma$  de  $B$  est forte, et un problème ouvert très intéressant est d'explorer le cas  $\gamma \geq 1/2$ . Notons que, lorsque  $\gamma < 1/2$ ,  $B$  est automatiquement admissible, mais cela n'est pas forcément le cas si  $\gamma \geq 1/2$ , et peut engendrer des difficultés supplémentaires. Pourtant, de nombreux cas importants, où  $\gamma \geq 1/2$ , sortent du cadre des résultats présentés dans ce mémoire, comme par exemple l'équation de la chaleur avec contrôle frontière de type Dirichlet. Dans ce dernier cas toutefois, en dimension un, les modèles semi-discrets aux différences finies sont uniformément contrôlables (voir [133]). On peut donc penser que l'analyse menée dans [38] s'étend au cas  $0 \leq \gamma < 1$ . Mais dans [180], l'auteur donne des arguments qui laissent à penser que la propriété d'uniforme contrôlabilité peut échouer si la dimension est assez grande.

Une autre question ouverte, probablement beaucoup plus difficile, est de s'affranchir de l'hypothèse d'analyticité du semi-groupe. Elle est utilisée de manière cruciale dans la preuve, et l'extension aux cas hyperboliques n'est donc pas du tout claire. Par exemple, dans le cas de l'équation des ondes en dimension un, avec contrôle frontière de Dirichlet, un résultat d'uniforme contrôlabilité a été obtenu dans [76], avec une méthode d'éléments finis mixte. L'extension en dimension supérieure semble poser

problème (voir [180]). Cependant, un résultat général de stabilisation uniforme a été récemment établi dans [149], pour des systèmes hyperboliques, et une piste intéressante est d'essayer d'adapter les techniques de preuve utilisées dans cet article au problème de contrôlabilité exacte.

Enfin, la question d'uniforme contrôlabilité est complètement ouverte dans le cas des EDP semi-linéaires (et, plus généralement, non linéaires). Il semble raisonnable de considérer, dans un premier temps, si des résultats similaires peuvent être établis dans le cas de non-linéarités globalement lipschitziennes. En effet, en combinant des arguments de point fixe et la méthode HUM (voir par exemple [178]), il devrait être possible de réduire l'étude au cas linéaire.

Par ailleurs, une étude débute, en collaboration avec S. Labbé et G. Carbou, sur la compréhension et la simulation de systèmes ferromagnétiques complexes. Il s'agit de systèmes multimatériaux constitués de domaines ayant au moins une direction de longueur négligeable (non-fils, couches minces). Le but est de développer des modèles homogénéisés et de contrôler l'aimantation dans les particules ferromagnétiques par un champ magnétique extérieur. L'étude de l'optimisation du retournement de l'aimantation dans une micro-particule magnétique est motivée par des applications possibles au contrôle de l'aimantation dans les paillettes magnétiques et les problèmes d'enregistrement rapide.



# Bibliographie

## Livres

- [1] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert (2005), 250 pages.
- [2] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*, Math. & Appl. **51**, Springer Verlag (2006), XIV, 276 pages.

## Articles de journaux

- [3] B. Bonnard, M. Chyba, E. Trélat, *Sub-Riemannian geometry : one-parameter deformation of the Martinet flat case*, J. Dynam. Control Systems **4**, 1 (1998), 59–76.
- [4] E. Trélat, *Some properties of the value function and its level sets for affine control systems with quadratic cost*, J. Dynam. Control Systems **6**, 4 (2000), 511–541.
- [5] B. Bonnard, G. Launay, E. Trélat, *The transcendence needed to compute the sphere and wave front in Martinet sub-Riemannian geometry*, Geometric control theory (Moscow, 1998), 82–117, Itogi Nauki Tekh. Ser. Sovrem. Mat. Prilozh. Temat. Obz., 64, Vseross. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform. (VINITI), Moscow, 1999. English version in J. Math. Sciences (Kluwer) **103**, 6 (2001), 686–708.
- [6] B. Bonnard, E. Trélat, *On the role of abnormal minimizers in sub-Riemannian geometry*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **10**, 3 (2001), 405–491.
- [7] E. Trélat, *Asymptotics of accessibility sets along an abnormal trajectory*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **6** (2001), 387–414.
- [8] E. Trélat, *Non subanalyticity of sub-Riemannian Martinet spheres*, C. R. Acad. Sci. Paris **332**, I (2001), 527–532.
- [9] B. Bonnard, E. Trélat, *Une approche géométrique du contrôle optimal de l'arc atmosphérique de la navette spatiale*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **7** (2002), 179–222.
- [10] B. Bonnard, L. Faubourg, G. Launay, E. Trélat, *Optimal control with state constraints and the space shuttle re-entry problem*, J. Dynam. Control Systems **9**, 2 (2003), 155–199.
- [11] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, *Propriétés génériques des trajectoires singulières*, Comptes Rendus Math. **337**, 1 (2003), 49–52.
- [12] E. Trélat, *Solutions sous-analytiques globales de certaines équations d'Hamilton-Jacobi*, Comptes Rendus Math. **337**, 10 (2003), 653–656.
- [13] J.-M. Coron, E. Trélat, *Global steady-state controllability of 1-D semilinear heat equations*, SIAM J. Control Optim. **43**, 2 (2004), 549–569.
- [14] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Optimal control of the atmospheric arc of a space shuttle and numerical simulations by multiple-shooting techniques*, Math. Models Methods Applied Sci. **15**, 1 (2005), 109–140.
- [15] L. Rifford, E. Trélat, *Morse-Sard type results in sub-Riemannian geometry*, Math. Annalen **332**, 1 (2005), 145–159.
- [16] C. Prieur, E. Trélat, *Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback*, Math. Control Signals Syst. **17**, 3 (2005), 201–216.
- [17] B. Bonnard, J.-B. Caillaud, E. Trélat, *Geometric optimal control of elliptic Keplerian orbits*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **5**, 4 (2005), 929–956.
- [18] E. Trélat, *Global subanalytic solutions of Hamilton-Jacobi type equations*, accepté pour publication dans Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non Lin.
- [19] M. Schmidt, E. Trélat, *Controllability of Couette-Taylor flows by rotating cylinders*, accepté pour publication dans Comm. Pure Appl. Anal.
- [20] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, *Genericity results for singular curves*, accepté pour publication dans J. Diff. Geometry.

## Actes de colloques, proceedings

- [21] B. Bonnard, E. Trélat, *Stratification du secteur anormal dans la sphère de Martinet de petit rayon*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 258, A. Isidori, F. Lamnabhi Lagarrigue and W. Respondek (Eds), Nonlinear Control in the Year 2000, Vol. 2, Springer, 2001, 239–251.
- [22] E. Trélat, *Optimality of singular trajectories and asymptotics of accessibility sets under generic assumptions*, Contemporary trends in nonlinear geometric control theory and its applications (Mexico City, 2000), World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2002, 441–458.
- [23] E. Trélat, *Bifurcations of reachable sets near an abnormal direction and consequences*, Dynamics, bifurcations, and control (Kloster Irsee, 2001), Lecture Notes in Control and Inform. Sci., 273, Springer, Berlin, 2002, 89–99.
- [24] E. Trélat, *Optimal control of a space shuttle and numerical simulations*, Dynamical systems and differential equations (Wilmington, NC, 2002), Discrete Contin. Dyn. Syst. 2003, suppl., 842–851.
- [25] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Conjugate times for smooth singular trajectories and bang-bang extremals*, Lagrangian and Hamiltonian methods for nonlinear control 2003, IFAC, 2003, 177–182.
- [26] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Classification of local optimal syntheses for time minimal control problems with state constraints*, Lagrangian and Hamiltonian methods for nonlinear control 2003, IFAC, 2003, 117–122.
- [27] E. Trélat, *Singular trajectories and subanalyticity in optimal control and Hamilton-Jacobi theory*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **64**, 1 (2006), 89–101.
- [28] C. Prieur, E. Trélat, *Robust optimal stabilization of the Brockett integrator via a hybrid feedback*, accepté pour publication, MTNS, Leuven, Belgium, 2004.
- [29] E. Trélat, *Contrôle optimal appliqué au problème de rentrée atmosphérique*, accepté pour publication, CIFA, Douz, Tunisie, 2004.
- [30] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Geometric analysis of minimum time Keplerian orbit transfers*, accepté pour publication, IFIP, Torino, Italy, 2005.
- [31] C. Prieur, E. Trélat, *Hybrid robust stabilization in the Martinet case*, accepté pour publication, Proceedings 4th J. Meeting, Control and Cybernetics, 2005.
- [32] J.-M. Coron, E. Trélat, *Feedback stabilization along a path of steady-states for 1-D semilinear heat and wave equations*, accepté pour publication, Proceedings CDC-ECC'05, Séville, Spain, 2005.
- [33] Y. Chitour, F. Jean, E. Trélat, *Singular trajectories of driftless and control-affine systems*, accepté pour publication, Proceedings CDC-ECC'05, Séville, Spain, 2005.
- [34] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Computation of conjugate times in smooth optimal control : the COTCOT algorithm*, accepté pour publication, Proceedings CDC-ECC'05, Séville, Spain, 2005.
- [35] C. Prieur, E. Trélat, *Semi-global minimal time hybrid robots stabilization of analytic driftless control-affine systems*, accepté pour publication, Proceedings CDC-ECC'05, Séville, Spain, 2005.

## Articles soumis

- [36] J.-M. Coron, E. Trélat, *Global steady-state stabilization and controllability of 1-D semilinear wave equations*, Preprint de l'Univ. d'Orsay, 2005.
- [37] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Second order optimality conditions and applications in optimal control*, Preprint de l'Univ. d'Orsay, 2005.
- [38] S. Labbé, E. Trélat, *Uniform controllability of semidiscrete approximations of parabolic control systems*, Preprint de l'Univ. d'Orsay, 2005.
- [39] C. Prieur, E. Trélat, *Quasi-optimal robust stabilization of control systems*, Preprint LAAS, 2005.

## Chapitres de livres

- [40] Y. Chitour, E. Trélat, *Controllability of partial differential equations*, accepté pour publication, Advances Topics in Control Systems Theory, Lecture Notes FAP 2004, F. Lamnabhi-Lagarrigue, A. Loria, E. Pan-teley (Eds).

## Rapports techniques

- [41] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Cotcot : short reference manual*, Technical report RT/APO/05/1, "<http://www.n7.fr/apo/cotcot/>".

## Articles de vulgarisation scientifique

- [42] E. Trélat, *Introduction au contrôle optimal*, Revue de Math. Spé, Math. Concrètes **3** (2002/2003), 248–288.
- [43] J.-M. Coron, E. Trélat, *Tout est sous contrôle*, Plein Sud - Spécial Recherche (2004), 126–131.

## Thèse de doctorat

- [44] E. Trélat, *Etude asymptotique et transcendance de la fonction valeur en contrôle optimal ; catégorie log-exp en géométrie sous-Riemannienne dans le cas Martinet*, Thèse, Univ. de Bourgogne, 2000.

---

## Autres références

- [45] H. Abou-Kandil, G. Freiling, V. Ionescu, G. Jank, *Matrix Riccati equations*, Control and systems theory, Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.
- [46] A. Agrachev, *Compactness for sub-Riemannian length-minimizers and subanalyticity*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **56**, 4 (1998), 1–12.
- [47] A. Agrachev, B. Bonnard, M. Chyba, and I. Kupka, *Sub-Riemannian sphere in Martinet flat case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **2** (1997), 377–448.
- [48] A. Agrachev, J.-P. Gauthier, *On subanalyticity of Carnot-Carathéodory distances*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **18**, 3, 2001.
- [49] A. Agrachev, A. Sarychev, *Strong minimality of abnormal geodesics for 2-distributions*, J. Dyn. Cont. Syst. **1**, 2, 1995.
- [50] A. Agrachev, A. Sarychev, *Abnormal sub-Riemannian geodesics : Morse index and rigidity*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13**, 1996.
- [51] A. Agrachev, A. Sarychev, *On abnormal extremals for Lagrange variational problems*, J. Math. Syst. Estim. Cont. **8**, 1, 1998.
- [52] F. Ancona, A. Bressan, *Flow stability of patchy vector fields and robust feedback stabilization*, SIAM J. Cont. Opt. **41**, 5 (2002), 1455–1476.
- [53] A. Astolfi, *Discontinuous control of the Brockett integrator*, European J. Control **4** (1998), 49–53.
- [54] H. T. Banks, K. Ito, *Approximation in LQR problems for infinite dimensional systems with unbounded input operators*, J. Math. Systems Estim. Control, 7 (1997), no. 1.
- [55] H. T. Banks, K. Kunisch, *The linear regulator problem for parabolic systems*, SIAM J. Control Optim., 22 (1984), no. 5, 684–698.
- [56] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Birkhäuser, Inc., Boston, 1997.
- [57] G. Barles, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Math. & Appl. 17, Springer-Verlag, 1994.
- [58] K. Beauchard, *Local controllability of a 1-D Schrödinger equation*, to appear in J. Math. Pures Appl. (2005).
- [59] J. Bebernes, D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*, Applied Math. Sciences, 83, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [60] A. Bellaïche. *Tangent space in sub-Riemannian geometry*, Sub-Riemannian geometry, Birkhäuser, 1996.
- [61] A. Bensoussan, J. L. Menaldi, *Hybrid control and dynamic programming*, Dyn. Cont. Discrete Impulsive Syst. **3**, 4 (1997), 395–442.
- [62] J.-M. Bismut. *Large deviations and the Malliavin calculus*, Progress in Mathematics **45**, Birkhäuser, 1984.
- [63] G. A. Bliss, *Lectures on the calculus of variations*, U. of Chicago Press, 1946.
- [64] B. Bonnard, M. Chyba, *The role of singular trajectories in control theory*, Math. Monograph, Springer-Verlag, 2003.
- [65] B. Bonnard, I. Kupka, *Théorie des singularités de l'application entrée/sortie et optimalité des trajectoires singulières dans le problème du temps minimal*, Forum Math. **5** (1993).

- [66] B. Bonnard, I. Kupka, *Generic properties of singular trajectories*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non lin. **14**, 2 (1997), 167–186.
- [67] U. Boscaïn, B. Piccoli, *Optimal syntheses for control systems on 2-D Manifolds*, Springer SMAI series, 43, 2004.
- [68] J. Bramble, A. Shatz, V. Thomee, L. Wahlbin, *Some convergence estimates for semidiscrete Galerkin type approximations for parabolic equations*, SIAM J. Num. Anal., 14 (1977), 218–241
- [69] R. W. Brockett, *Asymptotic stability and feedback stabilization*, in Differential geometric control theory, R. W. Brockett, R. S. Millman and H. J. Sussmann, ed., Boston, Birkhäuser (1983), 181–191.
- [70] R. L. Bryant, L. Hsu, *Rigidity of integral curves of rank 2 distributions*, Invent. Math. **114** (1993).
- [71] A. E. Bryson, Y. C. Ho, *Applied optimal control*, Hemisphere Publishing Corp. Washington, 1975.
- [72] P. Cannarsa, V. Komornik, P. Loreti, *Well posedness and control of semilinear wave equations with iterated logarithms*, ESAIM Cont. Optim. Calc. Var. **4** (1999), 37–56.
- [73] P. Cannarsa, A. Mennucci, C. Sinestrari, *Regularity results for solutions of a class of Hamilton-Jacobi equations*, Arch. Rat. Mech. Analysis **40** (1997), 197–223.
- [74] P. Cannarsa, C. Sinestrari, *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **58**, Birkhäuser, Boston (2004).
- [75] P. Cannarsa, H. M. Soner, *On the singularities of the viscosity solutions to Hamilton-Jacobi-Bellman equations*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 3, 501–524.
- [76] C. Castro, S. Micu, *Boundary controllability of a linear semi-discrete 1-D wave equation derived from a mixed finite element method*, Preprint Univ. Madrid, 2005.
- [77] T. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Math. & Appl., 1, Ellipses, 1990.
- [78] A. Chelouah, Y. Chitour, *On the Motion Planning of Rolling Surfaces*, Forum Math. **15**, 5 (2003), 727–758.
- [79] P. Chossat, G. Iooss, *The Couette-Taylor problem*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [80] M. Christ, *Analytic hypoellipticity breaks down for weakly pseudoconvex Reinhardt domains*, Internat. Math. Res. Notices **3** (1991), 31–40.
- [81] M. Christ, D. Geller, *Counterexamples to analytic hypoellipticity for domains of finite type*, Ann. of Math. (2), 135, no. 3 (1992), 551–566.
- [82] F. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*, Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1983.
- [83] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaeu, L. Rifford, R. J. Stern, *Feedback stabilization and Lyapunov functions*, SIAM J. Cont. Opt. **39**, 1 (2000), 25–48.
- [84] R. T. Closkey, R. M. Murray, *Exponential stabilization of driftless nonlinear control systems using homogeneous feedback*, IEEE Trans. Automat. Control **42**, 5 (1997), 614–628.
- [85] J.-M. Coron, *Global asymptotic stabilization for controllable systems without drift*, Math. Control Signals Syst. **5** (1992), 295–312.
- [86] J.-M. Coron, *Local controllability of a 1-D tank containing a fluid modeled by the shallow water equations*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 8 (2002), 513–554.
- [87] M. G. Crandall, P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 1–42.
- [88] J. I. Diaz, *Obstruction and some approximate controllability results for the Burgers equation and related problems*, Control of partial differential equations and applications, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 174, Dekker, New York (1996), 63–76.
- [89] L. van den Dries, A. Macintyre, D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. of Math. **140** (1994), 183–205.
- [90] L. van den Dries, C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. Journal **84**, 2 (1996).
- [91] L. C. Evans, *Partial differential equations*, American Math. Soc., 1998.
- [92] C. Fabre, J.-P. Puel, E. Zuazua, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 125 (1995), 31–61.
- [93] A. Fathi, *Weak KAM Theorem and Lagrangian Dynamics*, Cambridge University Press (2003).
- [94] E. Fernandez-Cara, E. Zuazua, *Null and approximate controllability for weakly blowing up semilinear heat equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 17, 5 (2000), 583–616.

- [95] H. Fujita, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$* , J. Faculty Science, Univ. Tokyo, 13 (1966), 109–124.
- [96] A. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, *On controllability of certain systems simulating a fluid flow*, Flow Control, IMA, Max D. Gunzburger Editor, Springer-Verlag, 1992, 149–184.
- [97] A. V. Fursikov, O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of evolution equations*, Lecture Notes Series, 34, Seoul, 1996.
- [98] B. Gaveau, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents*, Acta Math. **139** (1977), 94–153.
- [99] J. S. Gibson, *The Riccati integral equations for optimal control problems on Hilbert spaces*, SIAM J. Control Optim., 17 (1979), 537–565.
- [100] I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Translations of Mathematical Monographs, 18, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [101] B.-Z. Guo, *Riesz basis approach to the stabilization of a flexible beam with a tip mass*, SIAM J. Control Optim. **39**, 6 (2001), 1736–1747.
- [102] J. Harpold, C. Graves, *Shuttle entry guidance*, Journal of Astronautical Sciences **27** (1979), 239–268.
- [103] R. M. Hardt, *Stratification of real analytic mappings and images*, Invent. Math. **28**, 1975.
- [104] R. F. Hartl, S. P. Sethi, R. G. Vickson, *A survey of the maximum principles for optimal control problems with state constraints*, SIAM Rev. **37**, 2 (1995), 181–218.
- [105] J. Henry, *Etude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques non linéaires*, Thèse, Paris, 1977.
- [106] H. Hironaka, *Subanalytic sets, Number theory, algebraic geometry and commutative algebra*, in honor of Y. Akizuki, Tokyo (1973).
- [107] Yu. S. Il'Yashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Transl. Math. Monographs **94**, 1991.
- [108] O. Yu. Imanuvilov, *Controllability of parabolic equations*, Sb. Math., 186, 6 (1995), 879–900.
- [109] J. A. Infante, E. Zuazua, *Boundary observability for the space semi-discretizations of the 1-D wave equation*, M2AN Math. Model. Numer. Anal., 33 (1999), no. 2, 407–438.
- [110] G. Iooss, *Théorie non linéaire de la stabilité des écoulements laminaires dans le cas de "l'échange des stabilités"*, Arch. Rational Mech. Anal. **40** (1970/1971), 166–208.
- [111] V. I. Iudovich, *On the stability of steady flows of a viscous incompressible fluid*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **161** (1965), 1037–1040.
- [112] H. Ishii, *On representation of solutions of Hamilton-Jacobi equations with convex Hamiltonians*, Lecture Notes in Num. Appl. Anal. **8** (1985), 15–52.
- [113] D. Jacobson, D. Lele, J. L. Speyer, *New necessary conditions of optimality for control problems with state-variable inequality constraints*, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971), 255–284.
- [114] S. Kaplan, *On the growth of solutions of quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 305–330.
- [115] F. Kappel and D. Salamon, *An approximation theorem for the algebraic Riccati equation*, SIAM J. Control Optim., 28 (1990), no. 5, 1136–1147.
- [116] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [117] I. Kolmanovskiy, N. H. McClamroch, *Developments in nonholonomic control problems*, IEEE Control Systems **15** (1995), 20–36.
- [118] V. Komornik, *Rapid boundary stabilization of linear distributed systems*, SIAM J. Control Optim. **35**, 5 (1997), 1591–1613.
- [119] V. Komornik, E. Zuazua, *A direct method for the boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. Anal. Appl. **69** (1990), 33–54.
- [120] A. J. Krener and H. Schättler, *The structure of small-time reachable sets in low dimensions*, SIAM J. Cont. Optim. **27**, 1 (1989), 120–147.
- [121] I. Kupka, *The ubiquity of Fuller's phenomenon*, Nonlinear controllability and optimal control, 313–350, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math. **133**, Dekker, New York, 1990.
- [122] I. Kupka, *Abnormal extremals*, Preprint, 1992.
- [123] I. Lasiecka, *Convergence estimates for semidiscrete approximations of nonselfadjoint parabolic equations*, SIAM J. Num. Anal., 21, 5 (1977), 894–908.

- [124] I. Lasiecka, R. Triggiani, *Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories. I. Abstract parabolic systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 74, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [125] G. Lebeau, L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), 335–356.
- [126] L. Leon, E. Zuazua, *Boundary controllability of the finite-difference space semi-discretizations of the beam equation*, A tribute to J.-L. Lions, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 8 (2002), 827–862.
- [127] H. A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form  $Pu_t = -Au + F(u)$* , Arch. Rat. Mech. Anal., 51 (1973), 371–386.
- [128] L. Li, X. Zhang, *Exact controllability for semilinear wave equations*, J. Math. Anal. Appl. **250** (2000), 589–597.
- [129] J.-L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*, SIAM Rev. **30** (1988), 1–68.
- [130] P.-L. Lions, *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, Pitman, 1982.
- [131] W. S. Liu, H. J. Sussmann, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics of rank two distributions*, Memoirs AMS **118**, 564 (1995).
- [132] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Chapman & Hall/CRC, Research Notes in Mathematics, 398, 1999.
- [133] A. Lopez, E. Zuazua, *Some new results related to the null controllability of the 1-d heat equation*, Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, VIII (1998), 1–22.
- [134] H. Maurer, *On optimal control problems with bounded state variables and control appearing linearly*, SIAM Journal Cont. Optim. **15**, 3 (1977), 345–362.
- [135] F. Merle, H. Zaag, *Stability of the blow-up profile for equations of the type  $u_t = \Delta u + |u|^{p-1}u$* , Duke Math. J., 86, 1 (1997), 143–195.
- [136] S. Micu, *Uniform boundary controllability of a semi-discrete 1-D wave equation*, Numer. Math., 91 (2002), no. 4, 723–768.
- [137] V. P. Miĥailov, *On Riesz bases in  $\mathcal{L}^2(0, 1)$* , Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), 981–984.
- [138] V. J. Mizel, T. I. Seidman, *Observation and prediction for the heat equation*, J. Math. Anal. Appl. **28** (1969), 303–312.
- [139] R. Montgomery, *Geodesics which do not satisfy geodesic equations*, Preprint, 1991.
- [140] R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry*, J. Dyn. Cont. Syst. **1**, 1, 1995.
- [141] R. Montgomery, *A tour of sub-Riemannian geometries, their geodesics and applications*, Math. Surveys and Monographs 91, American Math. Soc., Providence, 2002.
- [142] P. Morin, J.-B. Pomet, C. Samson, *Developments in time-varying feedback stabilization of nonlinear systems*, IFAC Symp. on Nonlinear Control System Design, Enschede, The Netherlands **3** (1998).
- [143] P. Morin, C. Samson, *Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach*, IEEE Trans. Automat. Control **48**, 9 (2003), 1496–1508.
- [144] P. Morin, C. Samson, *Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics*, ESAIM Cont. Optim. Calc. Var. **4** (1999), 1–35.
- [145] M. Negreanu, E. Zuazua, *Uniform boundary controllability of a discrete 1-D wave equation*, Systems Control Lett., 48 (2003), 3-4, 261–279.
- [146] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Applied Mathematical Sciences, 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [147] L. Pontryagin, V. Boltyanski, R. Gamkrelidze, E. Michtchenko, *Théorie mathématique des processus optimaux*, Editions Mir, Moscou, 1974.
- [148] C. Prieur, *Uniting local and global controllers with robustness to vanishing noise*, Math. Control Signals Systems **14** (2001), 143–172.
- [149] K. Ramdani, T. Takahashi, M. Tucsnak, *Uniformly exponentially stable approximations for a class of second order evolution equations : application to the optimal control of flexible structures*, Preprint Univ. Nancy, 2004.
- [150] F. Rampazzo, *Faithful representations for convex Hamilton-Jacobi equations*, Preprint, Univ. di Padova.
- [151] L. Rifford, *Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks*, SIAM J. Control Optim. **41** (2002), no. 3, 659–681.

- [152] L. Rifford, *Singularities of viscosity solutions and the stabilization problem in the plane*, Indiana Univ. Math. J. **52**, 5 (2003), 1373–1396.
- [153] L. Rifford, *The stabilization problem : AGAS and SRS feedbacks*, in Optimal Control, Stabilization, and Nonsmooth Analysis, Lectures Notes in Control and Information Sciences **301**, Springer-Verlag, Heidelberg (2004), 173–184.
- [154] D. L. Russell, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies in Appl. Math. **52** (1973), 189–211.
- [155] D. L. Russell, *Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions*, SIAM Rev., 20, 4 (1978), 639–739.
- [156] A. Sarychev, *The index of the second variation of a control system*, Math. USSR Sbornik **41**, 3 (1982).
- [157] T. I. Seidman, *Observation and prediction for the heat equation, III*, J. Differential Equations **20** (1976), no. 1, 18–27.
- [158] T. I. Seidman, *Observation and prediction for the heat equation, IV, Patch observability and controllability*, SIAM J. Control Optim. **15** (1977), 3, 412–427.
- [159] J. A. Sethian, *Level set methods and fast marching methods. Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 3, Cambridge University Press, 1999.
- [160] E. D. Sontag, *Clocks and insensitivity to small measurement errors*, ESAIM Cont. Opt. Calc. Var. **4** (1999), 537–557.
- [161] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [162] M. Tamm, *Subanalytic sets in the calculus of variation*, Acta Math. **146** (1981).
- [163] L. Tavernini, *Differential automata and their discrete simulators*, Nonlinear Anal. **11** (1997), 665–683.
- [164] L. R. Tcheugoué Tébou, E. Zuazua, *Uniform exponential long time decay for the space semi-discretization of a locally damped wave equation via an artificial numerical viscosity*, Numer. Math., 95 (2003), no. 3, 563–598.
- [165] R. Temam, *Navier-Stokes equations, Theory and numerical analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.
- [166] V. Thomée, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1984.
- [167] F. Trèves, *Analytic hypo-ellipticity of a class of pseudodifferential operators with double characteristics and applications to the  $\bar{\partial}$ -Neumann problem*, Comm. Partial Differential Equations **3**, no. 6-7 (1978), 475–642.
- [168] M. Tucsnak, G. Weiss, *Simultaneous exact controllability and some applications*, SIAM J. Control Optim., 38 (2000), 5, 1408–1427.
- [169] C.-Z. Xu, G. Sallet, *On spectrum and Riesz basis assignment of infinite-dimensional linear systems by bounded linear feedbacks*, SIAM J. Cont. Optim. **34**, 2 (1996), 521–541.
- [170] G. Weiss, *Admissible observation operators for linear semigroups*, Israel J. Math., 65 (1989), 1, 17–43.
- [171] G. Weiss, *Admissibility of unbounded control operators*, SIAM J. Control Optim., 27 (1989), 3, 527–545.
- [172] L. C. Young, *Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*, Chelsea, New York, 1980.
- [173] H. Zaag, *A remark on the energy blow-up behavior for nonlinear heat equations*, Duke Math. J., 103, 3 (2000), 545–555.
- [174] E. Zuazua, *Exact controllability for the semilinear wave equation*, J. Math. Pures Appl. **69** (1990), 1–31.
- [175] E. Zuazua, *Exact boundary controllability for the semilinear wave equation*, Nonlinear partial differential equations and their applications, Collège de France seminar, Vol. X, Paris, 1987-1988, 357–391, Pitman Research Notes Math. Ser., 220, 1991.
- [176] E. Zuazua, *Exact controllability for semilinear wave equations in one space dimension*, Ann. Inst. Henri Poincaré **10**, 1 (1993), 109–129.
- [177] E. Zuazua, *Boundary observability for the finite-difference space semi-discretizations of the 2-D wave equation in the square*, J. Math. Pures Appl., 9, 78 (1999), no. 5, 523–563.
- [178] E. Zuazua, *Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 8 (2002), no. 2, 469–513.
- [179] E. Zuazua, *Optimal and approximate control of finite-difference approximation schemes for the 1-D wave equation*, Rendiconti Mat. VIII, 24, II (2004), 201–237.
- [180] E. Zuazua, *Propagation, Observation, Control and Numerical Approximation of Waves approximated by finite difference method*, SIAM Rev. **47**, 2 (2005), 197–243.