
Commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$: une approche par la stratégie de Stackelberg.

Marc Jungers* — Emmanuel Trélat** — Hisham Abou-Kandil*

* Laboratoire SATIE, UMR CNRS 8029

ENS Cachan

61, Avenue Président WILSON

94235 CACHAN Cedex, France.

{Marc.Jungers,Hisham.Abou-Kandil}@satie.ens-cachan.fr

** Université Paris-Sud,

Laboratoire de Mathématique, UMR 8628,

Bât. 425, 91405 Orsay cedex, France

Emmanuel.Trelat@math.u-psud.fr

RÉSUMÉ. La commande mixte $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ consiste à déterminer une commande minimisant la norme \mathcal{H}_2 d'un système tout en respectant une contrainte sous optimale sur une norme \mathcal{H}_∞ . Il s'agit d'un domaine de recherche encore largement ouvert, malgré le nombre important d'approches qui ont été proposées jusqu'à présent. Cet article utilise la théorie des jeux afin de formaliser cette gestion de divers critères (l'un sur la norme \mathcal{H}_2 et l'autre sur la norme \mathcal{H}_∞). Même si cette approche a déjà été exploitée avec la stratégie de Nash dans la littérature, nous proposons ici d'appliquer la stratégie de Stackelberg, qui est mieux adaptée à la gestion de critères sous contrainte de minimisation d'autres critères. Les conditions nécessaires pour un horizon fini sont développées et aboutissent à une commande singulière. Cette propriété est interprétée en terme de théorie des jeux : la stratégie de Stackelberg dégénère en stratégie de Nash. En utilisant les points conjugués, nous montrons que ces conditions sont aussi suffisantes. Un exemple numérique illustre notre approche.

ABSTRACT. Mixed $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$ control corresponds to design a control minimizing a system \mathcal{H}_2 norm with respect to a sub-optimal constraint on a \mathcal{H}_∞ norm. This is an open field of research, despite the abundance of approach in the literature. This paper uses a game theoretic approach to formalize the management of different criteria (one for \mathcal{H}_2 norm and one for \mathcal{H}_∞ norm). Even if this approach was already used with Nash strategy in the literature, we propose here to use Stackelberg strategy, which is adapted to manage different criteria with a hierarchy between them. Necessary conditions for a finite time horizon are developed and lead to a singular

(cheap) control. This property is interpreted in game theoretic terms: Stackelberg strategy degenerates in Nash strategy. By using conjugate times theory, we emphasize that these conditions are also sufficient. Some numerical example illustrates our approach.

MOTS-CLÉS : Commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$, théorie des jeux, stratégie de Stackelberg, équation de Riccati, commande robuste.

KEYWORDS: Mixed $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ control, games theory, Stackelberg strategy, Riccati equation, robust control.

1. Introduction

Les cahiers des charges actuels des synthèses de contrôleurs sont de plus en plus contraignants sur des objectifs de plus en plus divers. La plupart des critères de ces cahiers des charges peuvent se traduire sous forme de problèmes d'optimisation de normes \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ . La théorie des commandes purement \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ est bien connue depuis les années 80. Une commande \mathcal{H}_2 cherche à minimiser le gain induit du système pour des performances moyennes, alors qu'une commande \mathcal{H}_∞ cherche à garantir un certain niveau de performances dans le pire des cas. Malheureusement depuis le contre exemple de Doyle (?), il est connu que la commande \mathcal{H}_2 n'implique pas nécessairement un bon niveau de performance \mathcal{H}_∞ , contrairement à la commande LQ. De la même façon la commande \mathcal{H}_∞ ne permet pas nécessairement un bon niveau de performance en terme de norme \mathcal{H}_2 . Le problème de synthèse de commande $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ (i.e. déterminer un contrôleur minimisant une norme \mathcal{H}_2 sous une contrainte \mathcal{H}_∞) est apparu en 1989 (?) : il s'agissait alors de déterminer un régulateur LQG garantissant un certain niveau pour la norme \mathcal{H}_∞ . Dans cet article, nous utiliserons la modélisation et la terminologie introduites dans (?, ?).

Plusieurs approches ont été proposées pour répondre à ce problème, parmi le nombre important de techniques abordées (signe d'un problème encore largement ouvert), il est possible de citer l'approche par un ensemble d'équations de type Riccati très contraignantes (?), la paramétrisation de Youla (?), ou une optimisation convexe (?), ou encore par une approche itérative utilisant des fonctions de Lyapounov distinctes pour le critère \mathcal{H}_2 et la contrainte \mathcal{H}_∞ (?, ?). (?) propose une combinaison linéaire particulière des inverses des retours d'état \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ qui réalise un compromis entre les critères \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ . (?) montre que les résultats de (?) et (?) sont duaux. Le cas d'un retour d'état a aussi été étudié (?). Enfin entre autres (?) aborde ce problème dans le cadre de la minimisation d'entropie.

Dans cet article, le problème $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ est considéré dans le cadre de la théorie des jeux, qui est la discipline étudiant les systèmes (complexes ou non) sur lesquels plusieurs acteurs ou joueurs interagissent, en essayant de minimiser des critères propres qui leur sont affectés. La théorie des jeux a été développée par John Von Neumann au début de la guerre froide (?). Les contributions majeures de cette théorie sont les stratégies liées aux équilibres de Nash et de Stackelberg (?, ?, ?, ?). Ce cadre de la théorie des jeux pour le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ a déjà été utilisé. Effectivement (?) propose par exemple d'affecter une interprétation \mathcal{H}_2 à un critère et \mathcal{H}_∞ à un autre critère. Les deux joueurs sont alors la commande et la perturbation. Une résolution numérique itérative est utilisée. De même (?) et (?) proposent d'associer à chaque norme \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ un critère (sans terme croisé) d'un des deux joueurs (commande ou perturbation). La stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée est alors utilisée. Cependant cette stratégie place sur le même rôle hiérarchique les deux normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ . Dans cet article une autre stratégie est proposée : celle de Stackelberg (avec une structure d'information

en boucle fermée) (? , ?), qui privilégie un critère par rapport à l'autre.

Le plan de cet article est le suivant : dans la section 2, le problème considéré est formalisé. La section 3 définit la stratégie de Stackelberg et détermine ses conditions nécessaires. Il est mis en avant qu'avec une structure d'information en boucle fermée, la stratégie de Stackelberg dégénère globalement en stratégie de Nash. La fin de la section 3 propose une résolution par une équation différentielle de Riccati couplée à une équation différentielle affine. La section 4 fait appel à la théorie des points conjugués, afin d'obtenir la condition suffisante d'optimalité, qui est traduite en terme d'explosion de la solution de l'équation de Riccati. On peut trouver à la section 5 une illustration de ces résultats, avant une conclusion générale en section 6.

2. Problème standard $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$

2.1. Modélisation du système

Dans cet article le système considéré, d'état $x \in \mathbb{R}^n$ est modélisé avec la forme la plus générale : il possède deux entrées exogènes $w_2 \in \mathbb{R}^{r_2}$ et $w_\infty \in \mathbb{R}^{r_\infty}$ et une entrée de commande $u \in \mathbb{R}^r$ ainsi que deux sorties $z_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ et $z_\infty \in \mathbb{R}^{m_\infty}$ et une sortie de mesure $y \in \mathbb{R}^m$ (voir figure 1). L'entrée w_2 et la sortie z_2 seront utilisés pour définir la norme \mathcal{H}_2 du système, de même l'entrée w_∞ et la sortie z_∞ définiront sa norme \mathcal{H}_∞ . Les performances \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ sont donc définies de façons indépendantes.

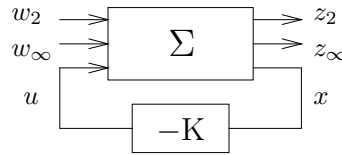


Figure 1. Structure générale du problème $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Le système peut alors se représenter par

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + B_\infty w_\infty + B_2 w_2 + Bu = f(x, w_\infty, w_2, u), \\ z_\infty &= C_\infty x + D_\infty w_\infty + D_{\infty u} u, \\ z_2 &= C_2 x + D_{2u} u, \\ y &= Cx. \end{cases} \quad [1]$$

Système que l'on pourra noter

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|ccc} A & B_\infty & B_2 & B \\ \hline C_\infty & D_\infty & 0 & D_{\infty u} \\ C_2 & 0 & 0 & D_{2u} \\ C & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad [2]$$

L'étude ici se limite au cas d'une commande u sous forme d'un retour d'état et non de sortie, on notera donc que $C = I$ et $m = n$. Aussi on peut noter que $D_{2\infty} = 0$ afin de permettre l'existence de la norme \mathcal{H}_2 .

2.2. Normes du système

Les normes du système sont induites par les normes des signaux des entrées et des sorties. En notant $\|\cdot\|_{2,[t_0,t_f]}$ la norme 2 d'un signal sur l'horizon fini $[t_0, t_f]$, les normes \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ d'un système de T_{zw} , qui à l'entrée w associée la sortie z sont définies par :

$$\|T_{zw}\|_{2,[t_0,t_f]} = \|z\|_{2,[t_0,t_f]} \quad [3]$$

$$\|T_{zw}\|_{\infty,[t_0,t_f]} = \sup_w \frac{\|z\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|w\|_{2,[t_0,t_f]}} \quad [4]$$

2.3. Formalisation du problème $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$.

Dans ce paragraphe le problème général de la commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ est énoncé. A un niveau γ de performance garanti pour la norme \mathcal{H}_∞ le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ correspond à déterminer une commande u stabilisante sous forme de retour d'état ($K \in \mathcal{K}_{\text{stabilisant}}$ l'ensemble des retours d'état stabilisants ; afin que cet ensemble ne soit pas vide, la paire (A, B) est supposée stabilisable) minimisant la norme \mathcal{H}_2 sous la contrainte sous-optimale \mathcal{H}_∞ de niveau γ :

$$u = -Kx \quad \text{tel que : } \begin{array}{l} \inf_{K \in \mathcal{K}_{\text{stabilisant}}} \|T_{z_2 w_2}\|_{2,[t_0,t_f]} \\ \text{sous } \|T_{z_\infty w_\infty}\|_{\infty,[t_0,t_f]} < \gamma. \end{array} \quad [5]$$

Les problèmes purement \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_∞ sont fortement présents dans le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Effectivement ils délimitent les comportements extrêmes du problème $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Un paramètre γ trop faible (inférieur à la borne inférieure du problème purement \mathcal{H}_∞) empêche la réalisation de la contrainte et interdit toute solution au problème $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. En revanche le choix d'un paramètre γ trop grand relaxe la contrainte \mathcal{H}_∞ et réduit le problème $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ à un problème purement \mathcal{H}_2 .

3. Théorie des jeux : stratégie de Stackelberg

On introduit deux critères :

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [z_2^T z_2 + \alpha^2 w_\infty^T R_\gamma w_\infty] dt = \int_{t_0}^{t_f} L_2(x, u, w_\infty, w_2) dt, \quad [6]$$

$$J_\infty = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [-z_\infty^T z_\infty + \gamma^2 w_\infty^T w_\infty] dt = \int_{t_0}^{t_f} L_\infty(x, u, w_\infty) dt. \quad [7]$$

avec

$$L_2 = \frac{1}{2} (x^T C_2^T C_2 x + 2x^T C_2^T D_{2u} u + u^T D_{2u}^T D_{2u} u + \alpha^2 w_\infty^T R_\gamma w_\infty), \quad [8]$$

$$R_\gamma = \gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty > 0, \quad \text{pour } \gamma > \bar{\sigma}(D_\infty), \quad [9]$$

et

$$L_\infty = \frac{1}{2} \left(-x^T C_\infty^T C_\infty x + w_\infty^T (\gamma^2 I - D_\infty^T D_\infty) w_\infty - u^T D_{\infty u}^T D_{\infty u} u \right. \\ \left. - x^T C_\infty^T D_{\infty u} w_\infty - x^T C_\infty^T D_{\infty u} u - w_\infty^T D_{\infty u}^T D_{\infty u} u \right) \quad [10]$$

Le critère J_2 [6], de coût instantané L_2 est associé à la norme \mathcal{H}_2 du système qui à w_2 associe z_2 . Le terme $\alpha^2 w_\infty^T R_\gamma w_\infty$ est un terme correctif qui rend le critère J_2 convexe par rapport à la variable w_∞ . La nécessité de ce terme correctif apparaîtra dans la suite. Le critère J_∞ [7], de coût instantané L_∞ est associé à la norme \mathcal{H}_∞ du système qui à w_∞ associe z_∞ . Effectivement si J_∞ est positif pour toute entrée exogène w_∞ , alors $\|T_{z_\infty w_\infty}\|_{\infty, [t_0, t_f]} < \gamma$. On peut noter que la borne inférieure des critères J_∞ sur l'ensemble des entrées w_∞ est soit fini (et est atteint) soit diverge vers $-\infty$, selon la valeur de γ et surtout en fonction de t_f . En fait, selon la théorie des points conjugués (rappelée dans la suite) : $\inf J_\infty \geq 0$ est atteint si $t_f < t_c$, et $\inf J_\infty = -\infty$ si $t_f > t_c$, où t_c est le premier temps conjugué, dans le cas où $R_\gamma > 0$.

La commande optimale u^* minimise la norme \mathcal{H}_2 sous la condition que l'entrée w_∞^* qui maximise le gain énergétique entre l'entrée w_∞ et la sortie z_∞ est appliquée.

La stratégie de Stackelberg offre un cadre naturel à la minimisation sous contrainte. La commande u est considérée comme l'action du leader et l'entrée w_∞ comme l'action du suiveur. Le critère du leader est donc le critère J_2 associé à la norme \mathcal{H}_2 , alors que le critère du suiveur est J_∞ . En posant l'ensemble des réponses rationnelles de l'entrée du suiveur w_∞ à une commande \tilde{u} du leader :

$$\mathcal{R}_\infty(\tilde{u}) = \left\{ w_\infty \mid w_\infty = \arg \inf_{w_\infty} J_\infty(\tilde{u}, w_\infty) \right\}, \quad [11]$$

un équilibre de Stackelberg (u^*, w_∞^*) (? , p. 234 pour une version simplifiée)(?, ?) se définit par

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\infty^* \in \mathcal{R}_\infty(u^*), \\ \text{et} \\ \max_{w_\infty \in \mathcal{R}_\infty(u^*)} J_2(u^*, w_\infty) \leq \max_{w_\infty \in \mathcal{R}_\infty(u)} J_2(u, w_\infty), \quad \forall u \in \mathcal{U}, \end{array} \right. \quad [12]$$

où \mathcal{U} désigne l'ensemble des commandes admissibles pour le système.

Il est à noter que le jeu considéré est un jeu à deux joueurs (même s'il existe trois entrées dans notre système) de somme non nulle (les critères des joueurs ne sont pas opposés l'un de l'autre). Le couple d'entrées (u^*, w_∞^*) correspondant à cet équilibre de Stackelberg est recherché avec une structure d'information en boucle fermée, c'est-à-dire que les entrées u^* et w_∞^* sont des fonctions implicites non seulement du temps t mais aussi de l'état x du système : $u^*(x, t)$ et $w_\infty^*(x, t)$. Cette structure d'information est à opposer à celle en boucle ouverte où les entrées de l'équilibre sont uniquement fonctions implicites du temps t . Ce cadre d'étude étant plus compliqué, il n'est pas couramment rencontré dans la littérature (?). Les paragraphes suivants indiquent les conditions nécessaires pour un tel équilibre. La partie qui suit démontre en utilisant la théorie des points conjugués que ces conditions sont aussi suffisantes, avant le premier temps conjugué.

3.1. Conditions nécessaires pour le suiveur

La résolution du problème du point de vue du suiveur consiste à déterminer l'ensemble des réactions rationnelles [11] du suiveur w_∞ à une commande du leader u . Il s'agit d'un problème d'optimisation classique, le Principe du Minimum de Pontryagin classique (?) s'applique. Posons H_∞ le Hamiltonien lié au critère J_∞ du suiveur sous la contrainte dynamique [1]

$$\begin{aligned} H_\infty &= \psi_\infty^\circ L_\infty + \psi_\infty f \\ &= \frac{1}{2} \psi_\infty^\circ (-x^T C_\infty^T C_\infty x - u^T D_{\infty u}^T D_{\infty u} u + w_\infty^T R_\gamma w_\infty) \\ &\quad \psi_\infty^\circ (-x^T C_\infty^T D_{\infty w_\infty} - x^T C_\infty^T D_{\infty u} u - w_\infty^T D_{\infty}^T D_{\infty u} u) \\ &\quad + \psi_\infty (Ax + B_\infty w_\infty + B_2 w_2 + Bu). \end{aligned} \quad [13]$$

Le vecteur ligne $\psi_\infty \in \mathbb{R}^n$ étant le vecteur d'état adjoint lié à la contrainte dynamique [1] et le scalaire $\psi_\infty^\circ \geq 0$ lié au coût instantané L_∞ . Les conditions nécessaires pour le suiveur w_∞ sont données par les équations Hamiltoniennes du Principe du Minimum de Pontryagin (?) :

$$\frac{\partial H_\infty}{\partial w_\infty} = 0 = \psi_\infty^\circ \frac{\partial L_\infty}{\partial w_\infty} + \psi_\infty \frac{\partial f}{\partial w_\infty} \quad [14]$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\infty &= -\frac{dH_\infty}{dx} \\ &= -\psi_\infty^\circ \left(\frac{\partial L_\infty}{\partial x} + \frac{\partial L_\infty}{\partial u} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) - \psi_\infty \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad [15]$$

$$[16]$$

Par ailleurs, l'état final étant libre, on a la condition de transversalité

$$\psi_\infty(t_f) = 0. \quad [17]$$

D'autre part, le couple

$$(\psi_\infty(t_f), \psi_\infty^\circ) = (0, \psi_\infty^\circ) \quad [18]$$

doit être non trivial (et est défini à un scalaire multiplicatif près), donc ψ_∞° est non nul. On normalise en $\psi_\infty^\circ = 1$. Il est à noter que le terme $\frac{\partial w_\infty}{\partial x}$ n'apparaît pas dans ces équations, à cause de l'équation [14], de la même façon que pour la stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée (?). Effectivement le suiveur, en sélectionnant une commande de son ensemble de réponses rationnelles $\mathcal{R}_\infty(u^*)$, ne fait que jouer une stratégie de Nash.

De l'équation [14], on en déduit l'expression de l'entrée optimale (perturbation dans le pire des cas en terme \mathcal{H}_∞ pour l'entrée u), dans le cas où $\gamma > \bar{\sigma}(D_\infty)$:

$$w_\infty^* = -R_\gamma^{-1} [-D_\infty^T C_\infty x - D_\infty^T D_{\infty u} u + B_\infty^T \psi_\infty^T] = S(x, u, \psi_\infty). \quad [19]$$

Cette perturbation "optimale" est naturellement indépendante de l'entrée w_2 .

Dans la suite de l'article, on adopte les notations suivantes :

$$W_\gamma = I + D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T, \quad [20]$$

$$\bar{B} = B + B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u}, \quad [21]$$

$$\bar{C}_u = D_{2u}^T C_2 + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty, \quad [22]$$

$$U = D_{2u}^T D_{2u} + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u}, \quad [23]$$

$$S_\infty = B_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T, \quad [24]$$

$$\hat{S}_\infty = S_\infty + \alpha^2 \bar{B} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T, \quad [25]$$

$$\hat{S}_\lambda = \bar{B} U^{-1} \bar{B}^T, \quad [26]$$

$$\bar{S}_\infty = S_\infty + \alpha^2 B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T, \quad [27]$$

$$\bar{C}_\infty = (D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} \bar{C}_u - D_\infty^T C_\infty) \quad [28]$$

$$\bar{A} = A + B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty, \quad [29]$$

$$Q = C_2^T C_2 + \alpha^2 C_\infty^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty - \bar{C}_u^T U^{-1} \bar{C}_u, \quad [30]$$

$$\tilde{B} = B_\infty + \alpha^2 \bar{B} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty, \quad [31]$$

$$N = R_\gamma + \alpha^2 D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty, \quad [32]$$

$$\tilde{Q} = Q - \alpha^2 \bar{C}_\infty^T N^{-1} \bar{C}_\infty, \quad [33]$$

$$\tilde{S} = \hat{S}_\lambda + \frac{1}{\alpha^2} \tilde{B} N^{-1} \tilde{B}^T, \quad [34]$$

$$\hat{A} = \bar{A} - \bar{B} U^{-1} \bar{C}_u, \quad [35]$$

$$\tilde{A} = \hat{A} - \hat{S}_\infty \bar{S}_\infty^{-1} B_\infty R_\gamma^{-1} \bar{C}_\infty. \quad [36]$$

L'équation d'évolution [15] du vecteur d'état adjoint ψ_∞ se réécrit en

$$\dot{\psi}_\infty^T = \left(F_\infty^1(x, u, \psi_\infty) + F_\infty^2(x, u, \psi_\infty) \frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^T, \quad \psi_\infty(t_f) = 0, \quad [37]$$

où

$$\begin{aligned} F_\infty^1(x, u, \psi_\infty) &= -\frac{\partial \tilde{L}_\infty}{\partial x} - \psi_\infty \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}, \\ &= x^T C_\infty^T W_\gamma C_\infty + u^T D_{\infty u}^T W_\gamma C_\infty - \psi_\infty \bar{A}, \end{aligned} \quad [38]$$

et

$$\begin{aligned} F_{\infty}^2(x, u, \psi_{\infty}) &= -\frac{\partial \tilde{L}_{\infty}}{\partial u} - \psi_{\infty} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}, \\ &= x^T C_{\infty}^T W_{\gamma} D_{\infty u} + u^T D_{\infty u}^T W_{\gamma} D_{\infty u} - \psi_{\infty} \bar{B}. \end{aligned} \quad [39]$$

On note aussi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u, S(x, u, \psi_{\infty}), w_2) \\ &= \tilde{f}(x, u, \psi_{\infty}, w_2) \\ &= \bar{A}x + \bar{B}u - S_{\infty} \psi_{\infty}^T + B_2 w_2, \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad [40]$$

et

$$\tilde{L}_{\infty} = -\frac{1}{2} (C_{\infty} x + D_{\infty u} u)^T W_{\gamma} (C_{\infty} x + D_{\infty u} u) + \frac{1}{2} \psi_{\infty} S_{\infty} \psi_{\infty}^T. \quad [41]$$

De la même manière, on note

$$\tilde{L}_2(x, u, \psi_{\infty}, w_2) = L_2(x, u, S(x, u, \psi_{\infty}), w_2). \quad [42]$$

3.2. Principe du Minimum de Pontryagin pour une classe particulière

La contrainte dynamique [37] faisant intervenir le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$, la contrainte dynamique pour le problème d'optimisation du leader porte sur l'état augmenté (incluant le coût instantané x° , d'évolution $\dot{x}^{\circ} = \tilde{L}_2$) $X = \begin{pmatrix} x \\ \psi_{\infty}^T \\ x^{\circ} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+1}$ et est de la forme

$$\dot{X} = F(t, X, u, u_y^T) = \begin{pmatrix} F_{\infty}^{1T} + \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} \right)^T F_{\infty}^{2T} \\ \tilde{L}_2 \end{pmatrix}, \quad [43]$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ \psi_{\infty}(t_f) = 0, \\ x^{\circ}(0) = 0, \end{cases} \quad [44]$$

où la commande u est une fonction du temps et de l'état x et non de l'état augmenté $X : u = u(t, h(X)) = u(t, x)$, si l'on note $h(X) = h \begin{pmatrix} x \\ \psi_{\infty}^T \\ x^{\circ} \end{pmatrix} = x$ la projection

qui à X associe l'état x . Le terme u_y est le jacobien de la fonction $u(t, y)$ par rapport à sa deuxième variable.

Tout contrôle optimal u pour le problème d'optimisation du leader (minimiser J_2 sous les contraintes [40] et [37]) est en fait singulier pour le système [43]. Dans le paragraphe qui suit, on rappelle la notion de contrôle singulier, et on établit la caractérisation Hamiltonienne des commandes singulières (?, ?) pour obtenir le Principe du Minimum de Pontryagin pour une classe de problèmes du type [43]. Une approche similaire est effectuée dans le cas LQ dans (?), mais leur approche mathématique, non totalement rigoureuse, comporte quelques imprécisions ou erreurs (bien que le résultat final soit correct). Pour arriver à un tel résultat, la définition de l'application entrée-sortie du système et celle d'un contrôle singulier sont données.

Définition 1 L'application entrée-sortie ou application valeur finale en temps t_f du système [43] de condition initiale X_0 est l'application

$$E_{X_0, t_f} : \begin{array}{l} \mathcal{U} \subset L^\infty([0, t_f] \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r) \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \\ u \mapsto X_u(t_f) \end{array} \quad [45]$$

où $X_u(\cdot)$ désigne la trajectoire solution de [43] associée à la commande u et de condition initiale X_0 .

Si la fonction F de l'équation [43] est de classe \mathcal{C}^p , $p \geq 1$, alors l'application entrée-sortie E_{X_0, t_f} est de classe \mathcal{C}^p .

Pour exprimer la différentielle de Fréchet de E_{X_0, t_f} , considérons δu un contrôle fixé et notons $X + \delta X$ la trajectoire associée à la commande $u + \delta u$. Par un développement de Taylor, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d(X + \delta X)}{dt} &= F(t, X + \delta X, u(t, h(X + \delta X))) + \delta u(t, h(X + \delta X)), \\ &\quad u_y(t, h(X + \delta X))^T + \delta u_y(t, h(X + \delta X))^T \end{aligned} \quad [46]$$

et

$$\begin{aligned} u(t, h(X + \delta X)) &= u(t, h(X)) + h_X(X)\delta X + o(\delta X) \\ &= u(t, h(X)) + u_y(t, h(X))h_X(X)\delta X + o(\delta X). \end{aligned}$$

Par identification, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta X)}{dt} &= F_X \delta X + F_u u_y h_X \delta X + F_u \delta u + F_{u_y} u_{yy} h_X \delta X + F_{u_y} \delta u_y^T \quad [47] \\ &= \underbrace{(F_X + F_u u_y h_X + F_{u_y} u_{yy} h_X)}_{\tilde{A}} \delta X + \underbrace{F_u}_{\tilde{B}} \delta u + \underbrace{F_{u_y}}_{\tilde{C}} \delta u_y^T \quad [48] \end{aligned}$$

Soit M la résolvante associée à $\tilde{A}(t)$, i.e. la solution du problème de Cauchy

$$\dot{M} = \tilde{A}M, \quad M(0) = I. \quad [49]$$

Alors

$$\delta X(t_f) = M(t_f) \int_0^{t_f} M^{-1}(s) \left(\tilde{B}(s) \delta u(s) + \tilde{C}(s) \delta u_y^T(s) \right) ds. \quad [50]$$

Proposition 1 *La différentielle de Fréchet de cette application est donnée par le système linéarisé en u du système [43]*

$$dE_{X_0, t_f}(u) \cdot \delta u = M(t_f) \int_0^{t_f} M^{-1}(s) \left(\tilde{B}(s) \delta u(s) + \tilde{C}(s) \delta u_y^T(s) \right) ds. \quad [51]$$

Définition 2 *Soit u un contrôle défini sur $[0, t_f]$ tel que sa trajectoire associée $X_u(\cdot)$ issue de $X(0) = X_0$ est définie sur $[0, t_f]$. On dit que le contrôle u (ou la trajectoire $X_u(\cdot)$) est singulier sur $[0, t_f]$ si la différentielle de Fréchet $dE_{X_0, t_f}(u)$ de l'application entrée-sortie au point u n'est pas surjective. Sinon on dit qu'il est régulier.*

Si la commande u est singulière, alors il existe un vecteur ligne $\varphi \in \mathbb{R}^{2n+1}$ non nul, tel que

$$\varphi \cdot dE_{X_0, t_f}(u) = 0. \quad [52]$$

Le vecteur ligne $p(t) = \varphi M(t_f) M^{-1}(t)$ vérifie

$$\dot{p} = -p\tilde{A}, \quad p(t_f) = \varphi. \quad [53]$$

et, pour tout $\delta u(t, h(X))$,

$$\int_0^{t_f} p(t) \left(\tilde{B}(t) \delta u(t, h(X)) + \tilde{C}(t) \delta u_y^T(t, h(X)) \right) dt = 0. \quad [54]$$

Cette relation est vérifiée pour tout commande $\delta u(t, h(X))$, en particulier pour le sous ensemble des commandes ne dépendant pas de l'état, mais uniquement du temps $\delta u(t)$. Cela permet de simplifier l'intégrale en

$$\int_0^{t_f} p(t) \tilde{B}(t) \delta u(t) dt = 0. \quad [55]$$

On en déduit que pour presque tout $t \in [0, t_f]$

$$p(t) \tilde{B}(t) = 0. \quad [56]$$

En revenant à l'expression générale de l'intégrale [54], on obtient

$$\int_0^{t_f} p(t)\tilde{C}(t)\delta u_y(t, h(X))dt = 0. \quad [57]$$

Ce qui implique pour presque tout $t \in [0, t_f]$:

$$p(t)\tilde{C}(t) = 0. \quad [58]$$

Remarque 1 L'obtention des équations [56] et [58] tient au fait que la commande admissible u dépend du temps. En se restreignant à l'ensemble des commandes sous la forme d'un pur retour d'état $u = u(h(X))$ indépendant du temps, les équations [56] et [58] ne sont plus vérifiées. L'équation [54] implique alors uniquement une contrainte reliant \tilde{B} , \tilde{C} et p .

Posons

$$H_2(t, X, u, u_y, p) = pF(t, X, u, u_y). \quad [59]$$

Ce qui précède montre que, pour une commande singulière $u(t, h(X))$, on a

$$\dot{X} = \frac{\partial H_2}{\partial p}, \quad [60]$$

$$\dot{p} = -p\tilde{A} = -\frac{dH_2}{dX}, \quad [61]$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u} = p(t)\tilde{B}(t) = 0, \quad [62]$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_y} = p(t)\tilde{C}(t) = 0. \quad [63]$$

Cette caractérisation Hamiltonienne des commandes singulières est utilisée dans le paragraphe suivant dans le cadre du problème d'optimisation du leader.

3.3. Conditions nécessaires pour le leader

Lemme 1 Si le contrôle u associé au système de contrôle [40] et [37] est optimal pour le coût J_2 , alors il est singulier sur $[0, t_f]$ pour le système augmenté [43].

Preuve du lemme 1 Notons X la trajectoire associée, solution du système augmenté [43], issue de $X_0 = (x_0^T, \psi_{\infty,0}^T, 0)^T$. Le contrôle u étant optimal pour le coût J_2 , il en résulte que le point $X(t_f)$ appartient à la frontière de l'ensemble accessible au temps t_f à partir du point X_0 . L'application entrée-sortie E_{X_0, t_f} n'est pas ouverte dans un voisinage de u . D'après le théorème des fonctions implicites, le contrôle u est donc singulier pour le système augmenté [43].

La commande optimale du leader $u^*(t, x) = u^*(t, h(X))$ est une commande singulière pour le système d'état augmenté X . Le Hamiltonien H défini par [59] lié au critère J_2 du leader sous les contraintes dynamiques [43] peut se réécrire de façon plus détaillée sous la forme

$$H_2 = \lambda_1 \tilde{f} + \lambda_2 (F_\infty^1 + F_\infty^2 u_x)^T + \lambda^\circ \tilde{L}_2. \quad [64]$$

On définit le vecteur d'état adjoint p par

$$p(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda^\circ(t)), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_1(t) \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda_2(t) \in \mathbb{R}^n, \\ \lambda^\circ(t) \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad [65]$$

On peut appliquer les équations obtenues au paragraphe précédent :

$$\frac{\partial H_2}{\partial u} = 0 = \lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} + \lambda_2 \left(\frac{\partial F_\infty^1}{\partial u} + \frac{\partial F_\infty^2}{\partial u} u_y \right)^T + \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u}, \quad [66]$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial u_y} = 0 = \lambda_2^T F_\infty^2, \quad [67]$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{dH_2}{dx} \\ &= -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_\infty^1}{\partial x} + \frac{\partial F_\infty^2}{\partial x} u_y \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial x}, \end{aligned} \quad [68]$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 &= -\frac{dH_2}{d\psi_\infty} \\ &= -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \psi_\infty} - \lambda_2 \left(\frac{\partial F_\infty^1}{\partial \psi_\infty} + \frac{\partial F_\infty^2}{\partial \psi_\infty} u_y \right)^T - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial \psi_\infty}, \end{aligned} \quad [69]$$

$$\dot{\lambda}^\circ = 0. \quad [70]$$

De [70], on déduit que $\lambda^\circ(t)$ est constant, égal à λ° . On peut supposer que $\lambda^\circ \geq 0$ (convention du Principe du Minimum de Pontryagin).

Notons ici que, par convention d'écriture, $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$ sont des vecteurs ligne.

3.4. Conditions de transversalité

L'état initial du système non augmenté $x(0) = x_0$ étant imposé et la réponse du suiveur imposant la valeur finale $\psi_\infty(t_f) = 0$, une partie des conditions initiale et finale de l'état augmenté X est donc imposée. Le vecteur ligne d'état adjoint $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda^\circ)$ doit donc vérifier des conditions de transversalité.

Ces conditions étant découplées, les conditions de transversalité conduisent simplement à (voir par exemple (?), page 104) pour plus de détails sur l'obtention des conditions de transversalité)

$$\lambda_2(0) = 0, \quad [71]$$

et

$$\lambda_1(t_f) = 0. \quad [72]$$

3.5. Dégénérescence de la stratégie de Stackelberg

L'équation [67] fait apparaître le terme $\lambda_2^T F_\infty^2$ qui est le produit de la colonne λ_2^T (λ_2 étant un vecteur d'état adjoint ligne) et de la ligne F_∞^2 . Ce terme étant nul, nécessairement toutes les composantes de λ_2 ou de F_∞^2 sont nulles, c'est-à-dire que $\lambda_2 \equiv 0$ ou $F_\infty^2 \equiv 0$ (ou les deux).

Proposition 2 *Si la matrice*

$$\frac{\partial F_\infty^2}{\partial u} = D_{\infty u}^T (I + D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T) D_{\infty u} = D_{\infty u}^T W_\gamma D_{\infty u} \quad [73]$$

est inversible, alors $\lambda_2 \equiv 0$. Dans ce cas, la stratégie de Stackelberg dégénère en stratégie de Nash. Le leader ne tient pas compte de la réaction du suiveur dans sa détermination de commande optimale.

Preuve de la proposition 2 *On utilise un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\lambda_2 \neq 0$, alors $F_\infty^2 \equiv 0$. Les conditions $F_\infty^2 \equiv 0$ et $\frac{\partial F_\infty^2}{\partial u}$ inversible permettent d'appliquer le théorème des fonctions implicites, qui donne, localement le long de la trajectoire, une commande u de la forme*

$$u = u(t, x, \psi_\infty). \quad [74]$$

La contrainte dynamique s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x} = \tilde{f}(x, \psi_\infty, u(t, x, \psi_\infty)), \\ \dot{\psi}_\infty = F_\infty^1(x, \psi_\infty, u(t, x, \psi_\infty)), \end{cases} \quad (F_\infty^2 = 0). \quad [75]$$

Cette dynamique est indépendante de u_y . Le critère J_2 à minimiser ne dépend pas non plus de u_y , mais uniquement de la commande u . Le jacobien u_y n'intervient donc pas dans la solution de ce problème d'optimisation. Tout terme u_y du contrôle u est donc extrémal. Cela contredit l'équation [66], selon laquelle

$$\lambda_2 u_y^T \left(\frac{\partial F_\infty^2}{\partial u} \right)^T = -\lambda_1 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u} - \lambda_2 \frac{\partial F_\infty^1}{\partial u} - \lambda^\circ \frac{\partial \tilde{L}_2}{\partial u}. \quad [76]$$

Donc

$$\lambda_2 \equiv 0. \quad [77]$$

Le fait que $\lambda_2 \equiv 0$ est très particulier. Effectivement cela revient à dire que le leader cherche à minimiser son critère J_2 , sans la contrainte dynamique portant sur l'évolution du vecteur d'état ψ_∞ . Dans le cadre de la théorie des jeux, cela signifie que la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée dégénère globalement en stratégie de Nash avec une structure d'information en boucle fermée. Le rôle hiérarchique des joueurs est donc supprimé en apparence en se plaçant dans le cas d'une structure d'information en boucle fermée.

Interprétons maintenant en termes de théorie des jeux cette condition supplémentaire [73]. Elle signifie que dans le critère du suiveur, la dépendance en u est suffisante pour que le leader impose la commande qu'il souhaite pour le suiveur. Ayant imposé la commande qu'il souhaite au suiveur, il n'est plus contraint de tenir compte de la réponse du suiveur. Même s'il y a une dégénérescence globale de la stratégie de Stackelberg en stratégie de Nash, elle ne fait que cacher une omnipotence du leader sur le suiveur. Effectivement, le leader a assez de poids pour imposer la commande qu'il souhaite pour le suiveur.

Cela justifie donc effectivement l'approche par la stratégie de Nash proposée dans (?) (non justifiée rigoureusement dans cette référence).

Remarque 2 *La dégénérescence de la stratégie de Stackelberg en stratégie de Nash n'est cependant que globale. Effectivement contrairement à la stratégie de Nash, il faut tenir compte ici d'une condition nécessaire supplémentaire [69], prise pour $\lambda_2 \equiv 0$.*

Le vecteur $(\lambda_1(t_f), \lambda_2(t_f), \lambda^\circ) = (0, 0, \lambda^\circ)$, défini à un scalaire multiplicatif près, ne devant pas être nul, on a nécessairement $\lambda^\circ \neq 0$. Il est donc possible de normaliser le vecteur adjoint final en posant $\lambda^\circ = 1$.

3.6. Résolution du problème

De l'équation [66], on obtient l'expression de la commande du leader

$$u^* = -U^{-1}\bar{C}_u x - U^{-1}\bar{B}^T \lambda_1^T + \alpha^2 U^{-1} D_{\infty u}^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T \psi_\infty^T. \quad [78]$$

La dynamique [40] s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \bar{A}x + \bar{B}u^* - S_\infty \psi_\infty^T + B_2 w_2 \\ &= \hat{A}x - \hat{S}_\lambda \lambda_1^T - \hat{S}_\infty \psi_\infty^T + B_2 w_2. \end{aligned} \quad [79]$$

Tenant compte de [68], on obtient aussi

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1^T &= -\bar{A}^T \lambda_1^T - (C_2^T C_2 + \alpha^2 C_\infty^T D_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty) x \\ &\quad - \bar{C}_u^T u^* + \alpha^2 C_\infty^T D_\infty R_\gamma^{-1} B_\infty^T \psi_\infty^T,\end{aligned}\quad [80]$$

$$= -\hat{A}^T \lambda_1^T - Qx - \alpha^2 \bar{C}_\infty^T R_\gamma^{-1} B_\infty^T \psi_\infty^T, \quad [81]$$

$$= g^T(x, \lambda_1, \psi_\infty). \quad [82]$$

L'évolution de ψ_∞ est

$$\dot{\psi}_\infty = \tilde{F}_\infty^1(x, \lambda_1, \psi_\infty) + \tilde{F}_\infty^2(x, \lambda_1, \psi_\infty) \frac{\partial u^*}{\partial x}, \quad [83]$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{F}_\infty^1(x, \lambda_1, \psi_\infty) &= F_\infty^1(x, u^*(x, \lambda_1, \psi_\infty), \psi_\infty), \\ &= x^T [C_\infty^T W_\gamma C_\infty - \bar{C}_u^T U^{-1} D_{\infty u}^T W_\gamma C_\infty] \\ &\quad - \lambda_1 \bar{B}^T U^{-1} D_{\infty u}^T W_\gamma C_\infty \\ &\quad - \psi_\infty [\bar{A} + \alpha^2 B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u}^T W_\gamma C_\infty],\end{aligned}\quad [84]$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{F}_\infty^2(x, \lambda_1, \psi_\infty) &= F_\infty^2(x, u^*(x, \lambda_1, \psi_\infty), \psi_\infty), \\ &= x^T [C_\infty^T W_\gamma D_{\infty u} - \bar{C}_u^T U^{-1} D_{\infty u}^T W_\gamma D_{\infty u}] \\ &\quad - \lambda_1 \bar{B} U^{-1} D_{\infty u}^T W_\gamma D_{\infty u} \\ &\quad - \psi_\infty [\bar{B} - \alpha^2 B_\infty R_\gamma^{-1} D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u}^T W_\gamma D_{\infty u}].\end{aligned}\quad [85]$$

Comme $\lambda_2 = 0$, l'équation d'évolution [69] devient donc la contrainte

$$\hat{S}_\infty^T \lambda_1^T - \alpha^2 \bar{S}_\infty \psi_\infty^T - \alpha^2 B_\infty R_\gamma^{-1} \bar{C}_\infty x = 0. \quad [86]$$

Ici on considère deux sous-cas : $\alpha = 0$ et $\alpha^2 > 0$.

3.6.1. Cas $\alpha = 0$

Dans le cas $\alpha = 0$, la condition nécessaire [86] se simplifie en

$$\lambda_1 \hat{S}_\infty = 0. \quad [87]$$

Or la condition de transversalité [72] permet d'écrire que cette condition nécessaire est équivalente à sa dérivée

$$\dot{\lambda}_1 \hat{S}_\infty = 0. \quad [88]$$

En utilisant les conditions terminales, et en dérivant à nouveau cette relation, on obtient les conditions nécessaires

$$x^T(t_f)Q\hat{S}_\infty = 0, \quad [89]$$

$$x^T(t_f)(Q\hat{A} - \hat{A}Q\hat{S}_\infty) - w_2^T(t_f)B_2Q\hat{S}_\infty = 0, \quad [90]$$

et

$$0 = -(\lambda_1 \hat{A} + x^T Q)(\hat{A}^2 \hat{S}_\infty + \hat{S}_\lambda Q \hat{S}_\infty) \quad [91]$$

$$+(\hat{A}x - \hat{S}_\lambda \lambda_1^T - \hat{S}_\infty \psi_\infty^T + B_2 w_2)^T (Q\hat{A} - \hat{A}Q) \hat{S}_\infty \quad [92]$$

$$\left(\tilde{F}_\infty^1 + \tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \hat{S}_\infty^T Q B_\infty - w_2^T B_2 Q \hat{S}_\infty \quad [93]$$

Les deux conditions [89] et [90] indiquent qu'à chaque condition initiale x_0 , on ne peut pas nécessairement associer une trajectoire optimale.

La condition [93] est une condition nécessaire portant sur le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$. La matrice $\hat{S}_\infty^T Q B_\infty$ étant au plus de rang $p < n$, cette condition indique qu'il existe une infinité de possibilité pour le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$.

Cette condition [90] est une relation entre la valeur en $t = t_f$ de l'entrée exogène w_2 et de l'état x . La trajectoire optimale est donc fonction explicite de l'entrée exogène w_2 , considérée comme une perturbation. Cette condition nécessaire ne sera pas vérifiée en général.

Le cas $\alpha = 0$ peut mener à une solution pour le problème de commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$. Cependant la trajectoire associée dépend explicitement de l'entrée exogène w_2 , ce qui n'est ni applicable, ni intéressant. Ce résultat justifie l'utilisation du terme correctif $\alpha^2 w_\infty^T R_\gamma w_\infty$ dans le critère J_2 de la norme \mathcal{H}_2 . Ce terme supplémentaire permet de rendre le critère J_2 convexe par rapport aux deux joueurs u et w_∞ . Dans la suite on considérera toujours le cas $\alpha \neq 0$

3.6.2. Cas $\alpha \neq 0$

Dans le cas $\alpha \neq 0$, la relation [86] est utilisée pour trouver des contraintes sur la valeur $x(t_f)$, ainsi que sur le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$. Effectivement la relation [86] est équivalente à deux relations : la relation [86] prise en $t = t_f$

$$x^T(t_f)\bar{C}_\infty = 0, \quad [94]$$

et sa dérivée

$$g\hat{S}_\infty = \alpha^2 \left(\tilde{F}_\infty^1 + \tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} \right) \bar{S}_\infty + \alpha^2 \tilde{f}^T \bar{C}_\infty^T, \quad [95]$$

soit

$$\tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} B_\infty R_\gamma^{-1} N R_\gamma^{-1} B_\infty^T = v = \left(\frac{1}{\alpha^2} g\hat{S}_\infty - \tilde{F}_\infty^1 - \tilde{f}^T \bar{C}_\infty^T \right). \quad [96]$$

La relation [94] signifie que de tout point x_0 ne part pas une solution optimale : si elles existent, les solutions optimales partent d'un ensemble inclus dans un sous-espace de \mathbb{R}_γ^n de codimension $r_\infty = \text{rang } \bar{C}_\infty$. D'autre part la relation [96] indique qu'il n'y a pas unicité des contrôles optimaux, même s'il y a unicité de la trajectoire optimale. En effet, le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ doit vérifier la relation, en utilisant le pseudo-inverse de la matrice B_∞ ,

$$\tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} B_\infty = v B_\infty (B_\infty^T B_\infty)^{-1} R_\gamma N^{-1} R_\gamma. \quad [97]$$

De ce fait, le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ est donc de la forme

$$\tilde{F}_\infty^2 \frac{\partial u^*}{\partial x} = v B_\infty (B_\infty^T B_\infty)^{-1} R_\gamma N^{-1} R_\gamma (B_\infty^T B_\infty)^{-1} B_\infty^T + e^\perp \quad [98]$$

où e^\perp est tel que

$$(e^\perp)^T \in \text{Ker } B_\infty^T. \quad [99]$$

Il est à noter que le terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ dépend de \tilde{f} et donc de l'entrée exogène w_2 . Cette entrée w_2 n'étant pas associée à la minimisation d'un critère n'est pas considérée comme un joueur. Elle est donc perçue comme une perturbation intervenant au niveau de la contrainte dynamique [79]. Même si le contrôle $u^*(t, x)$ n'est pas une fonction explicite de w_2 , son jacobien $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ est ici fonction explicite de cette perturbation.

Remarque 3 Cette dépendance de façon générale interdit d'étendre cette étude au cas de critères à horizon infini ($t_f \rightarrow +\infty$). Pour la même raison, la connaissance de w_2 est nécessaire pour synthétiser la commande optimale $u^*(t, x)$. Ces difficultés peuvent être levées en ne considérant qu'un seul canal entrée-sortie, c'est-à-dire considérer $w_2 = w_\infty$ et $z_2 = z_\infty$. Simplification qui revient au cadre d'étude proposé dans (?), où de plus les termes croisés ne sont pas considérés.

Remarque 4 Il est possible de choisir une représentation affine pour la commande $u^*(t, y)$

$$u^*(t, y) = u_y (y - x(t)) + u(t). \quad [100]$$

De ce fait, si la trajectoire est $x(t)$, il n'est pas nécessaire de lever l'indétermination du terme $\frac{\partial u^*}{\partial x}$ de la forme [98].

3.7. Résolution par une équation de Riccati

La relation [86] permet d'exprimer le vecteur ligne ψ_∞ en fonction de λ_1 et x

$$\psi_\infty B_\infty = \left(\frac{1}{\alpha^2} \lambda_1 \tilde{B} - x^T \tilde{C}_\infty^T \right) N^{-1} R_\gamma, \quad [101]$$

soit en utilisant le pseudo-inverse de B_∞ de rang plein

$$\psi_\infty = \left(\frac{1}{\alpha^2} \lambda_1 \tilde{B} - x^T \tilde{C}_\infty^T \right) N^{-1} R_\gamma (B_\infty^T B_\infty)^{-1} B_\infty^T. \quad [102]$$

En injectant dans les équations d'évolution de λ_1 et x , on obtient un système différentiel affine en la perturbation w_2

$$\dot{x} = \tilde{A}x - \tilde{S}\lambda_1^T + B_2 w_2 \quad [103]$$

$$\dot{\lambda}_1^T = -\tilde{Q}x - \tilde{A}^T \lambda_1^T. \quad [104]$$

On pose alors la matrice Hamiltonienne

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & -\tilde{S} \\ -\tilde{Q} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix}. \quad [105]$$

Comme pour un problème LQ avec perturbation, on propose de déterminer le vecteur d'état adjoint λ_1 sous une forme affine en l'état

$$\lambda_1^T(t) = K_1(t)x(t) + h_1(t). \quad [106]$$

Un calcul simple montre que si la matrice $K_1(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et le vecteur colonne $h_1(t) \in \mathbb{R}^n$ vérifient les équations différentielles

$$\dot{K}_1 = -K_1 \tilde{A} - \tilde{A}^T K_1 - \tilde{Q} + K_1 \tilde{S} K_1, \quad [107]$$

$$\dot{h}_1 = -K_1 \tilde{S} h_1 + \tilde{A}^T h_1 + K_1 B_2 w_2. \quad [108]$$

et les conditions aux limites

$$K_1(t_f) = 0, \quad h_1(t_f) = 0, \quad [109]$$

alors $\lambda_1(t)$ défini par [106] vérifie bien l'équation différentielle [104] et la condition limite [72].

L'équation [107] est une équation différentielle matricielle de type Riccati standard. La résolution analytique de ce type d'équation est bien connue, grâce au lemme de Radon (voir par exemple (?)).

L'ensemble de ces deux équations, en connaissant l'entrée w_2 , peut se résoudre en les intégrant en temps rétrograde à partir des conditions (qui deviennent initiales) [109].

4. Conditions suffisantes d'optimalité

Le problème aux deux bouts constitué des équations différentielles [103] et [104] avec les conditions $x(0) = 0$ et $\lambda_1(t_f) = 0$ correspond aux conditions nécessaires du problème d'optimisation. Dans ce qui suit, on rappelle quelques éléments de la théorie des points conjugués appliquée à notre cas spécifique, afin d'obtenir des conditions suffisantes (voir par exemple (?), chapitre 9) pour un rappel sur cette théorie).

Définition 3 *L'équation aux variations est*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \lambda_1^T \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \lambda_1^T \end{pmatrix} \quad [110]$$

et s'appelle équation de Jacobi. On appelle champ de Jacobi

$$J(t) = (\delta x^T(t), \delta \lambda_1(t)) \quad [111]$$

une solution non triviale de l'équation de Jacobi [110].

A partir de ce système linéaire, il est possible de définir la résolvante par

$$\begin{pmatrix} \delta x(t) \\ \delta \lambda_1^T(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_3(t) & \phi_4(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta \lambda_1^T(0) \end{pmatrix}. \quad [112]$$

Définition 4 *Le premier temps conjugué t_c est le premier temps qui rend (pour $\delta x_0 = 0$) l'application $\delta \lambda_1(0) \mapsto \delta x(t_c) = \phi_2(t_c) \delta \lambda_1(0)$ non surjective.*

L'existence d'un champ de Jacobi vérifiant $\delta x(0) = \delta x(t_c) = 0$ équivaut à la condition

$$\text{rang } \phi_2(t_c) < n. \quad [113]$$

Les propositions suivantes sont standards en théorie linéaire-quadratique.

Proposition 3 *Le premier temps conjugué t_c correspond au premier temps d'explosion en temps fini de cette équation de Riccati.*

Preuve de la proposition 3 La solution de l'équation de Riccati [107] est donnée par la relation :

$$K_1(t) = \phi_4(t)\phi_2^{-1}(t). \quad [114]$$

Le temps t_c est le premier temps qui rende non inversible la matrice $\phi_2(t)$. On a donc

$$\|K_1(t)\| \rightarrow +\infty, \text{ lorsque } t \rightarrow t_c. \quad [115]$$

Voir (? , chapitre 9) pour plus de détails.

Proposition 4 Les solutions du Principe du Minimum de Pontryagin sont optimales avant leur premier temps conjugué.

La commande donnée par la solution de l'équation de Riccati est optimale si et seulement si l'équation de Riccati [107] admet une solution sur $[0, t_f]$ sans explosion en temps fini, c'est-à-dire si et seulement si $0 < t_f < t_c$.

5. Exemple

Pour illustrer ces résultats, on considère les données

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 \\ 0.6 & -1.4 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \\ C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, & D_{2u} &= \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}, \\ C_\infty &= [3 \quad -1.5], & B_\infty &= \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, & D_{\infty u} &= [1.5], \\ D_\infty &= [2], & \alpha &= 1. \end{aligned}$$

Pour les paramètres

$$\gamma = 15, \quad t_f = 10,$$

les coefficients de K_1 sont obtenus sur la figure 2, par intégration.

La matrice K_1 étant connue, il est possible, avec une entrée $w_2(t)$ (représentée sur la figure 3) par exemple de la forme

$$w_2(t) = \frac{1}{2} \sin \left(2\pi 10 \frac{t}{t_f} \right) \exp \left(-10 \frac{t}{t_f} \right), \quad [116]$$

d'intégrer en temps rétrograde le vecteur h_1 , qui est représenté sur la figure 4.

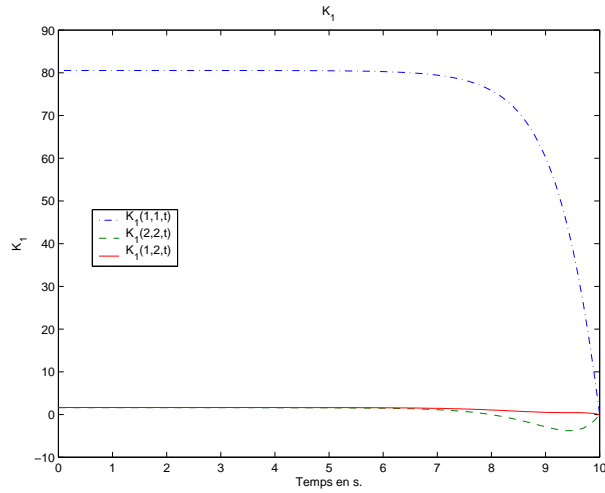


Figure 2. Coefficients de la matrice $K_1(t)$.

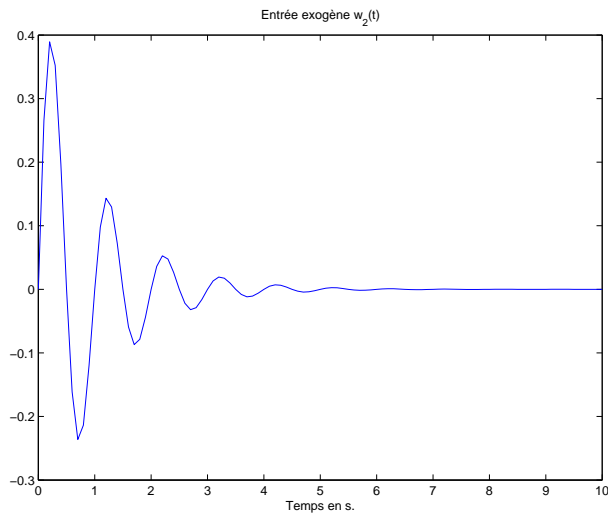


Figure 3. Coefficients de l'entrée $w_2(t)$.

La commande $u^*(t)$ et l'état $x(t)$ sont alors représentés respectivement sur les figures 5 et 6.

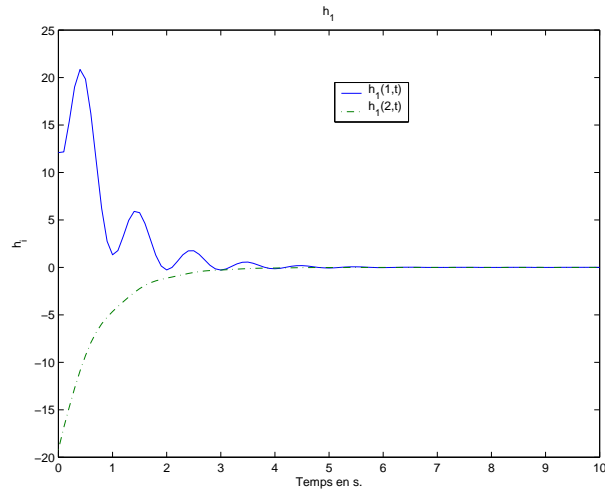


Figure 4. Coefficients du vecteur $h_1(t)$.

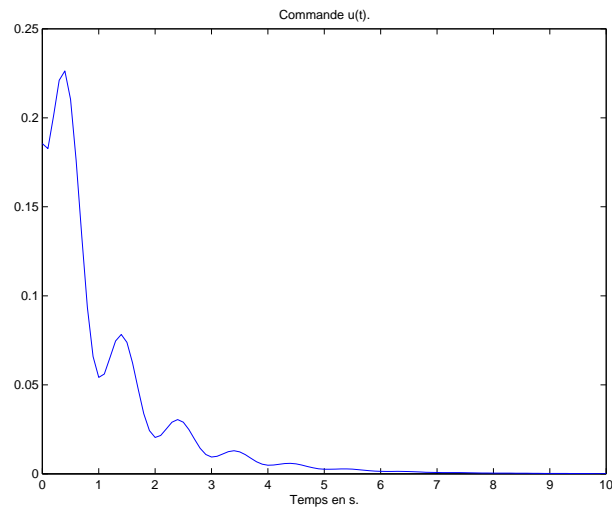


Figure 5. Commande $u^*(t)$.

Les critères optimaux sont donnés par

$$J_2 = 4, 2, \quad J_\infty = 89, \quad \frac{\|z_\infty\|_{2,[t_0,t_f]}}{\|w_\infty\|_{2,[t_0,t_f]}} = 81, 3 < \gamma^2 = 225 \quad [117]$$

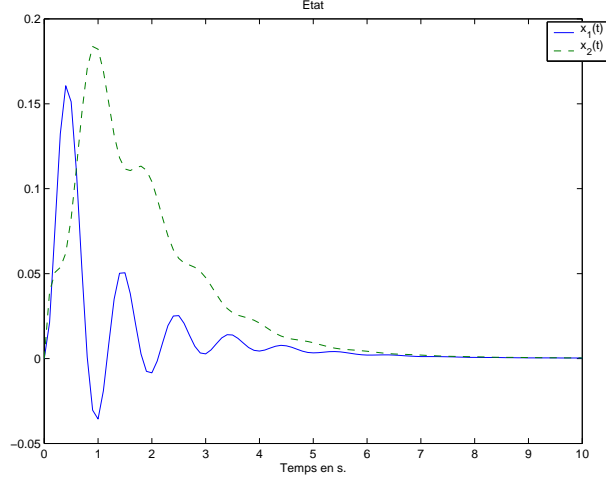


Figure 6. Coefficients du vecteur d'état $x(t)$.

A partir de cette simulation, il est possible de faire certains commentaires. Ici la matrice \tilde{Q} est semi-définie positive. Cette propriété permet d'obtenir certaines propriétés supplémentaires.

Proposition 5 Si \tilde{Q} est semi-définie positive, alors la solution $K_1(t)$ de l'équation de Riccati [107] est symétrique et semi-définie positive.

En effet, il suffit de noter que $K_1(t_f) = 0$, $\tilde{Q} \geq 0$ et $\tilde{S} \geq 0$, et d'appliquer (? , Theorem 4.1.6).

Proposition 6 Si $\tilde{Q} \geq 0$, alors la solution $K_1(t)$ n'admet pas de premier temps conjugué. C'est-à-dire $t_c = +\infty$.

Les hypothèses $K_1(t_f) = 0$, $\tilde{Q} \geq 0$ et $\tilde{S} \geq 0$ permettent d'appliquer (? , Corollary 3.6.7, Example 3.6.8).

Proposition 7 Dans les conditions des propositions 5 et 6, supposons que $K_1(t)$ admette la limite K_1^∞ en $t \rightarrow +\infty$. Alors $(\tilde{A} - \tilde{S}K_1^\infty)$ est stable.

Preuve de la proposition 7 On passe à la limite dans l'équation [107], ce qui conduit à l'équation de Liapunov

$$K_1^\infty(\tilde{A} - \tilde{S}K_1^\infty) + (\tilde{A} - \tilde{S}K_1^\infty)^T K_1^\infty = -\tilde{Q} - K_1^\infty \tilde{S} K_1^\infty < 0. \quad [118]$$

La conclusion s'ensuit, car K_1^∞ est symétrique et semi-définie positive.

La matrice $(\tilde{A} - \tilde{S}K_1)^T$ est la matrice de dérive liée à l'évolution de $h_1(t)$ [108]. En intégrant en temps rétrograde, la matrice de dérive sera donc instable. Cela indique que vers les temps proches de l'origine $t = 0$, les valeurs des composantes h_1 peuvent être très grandes. Ces grandes valeurs se répercutent sur la commande et l'état. Les critères J_2 et J_∞ prennent alors des valeurs très grandes.

La matrice \tilde{Q} n'est pas définie positive dans le cas général, il est néanmoins possible dans des cas particuliers d'explicitier des conditions suffisantes pour que \tilde{Q} soit semi-définie positive.

Proposition 8 *La matrice \tilde{Q} peut se mettre sous la forme*

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} C_2^T & C_\infty^T D_\infty R_\gamma^{-1} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} C_2 \\ R_\gamma^{-1} D_\infty^T C_\infty \end{bmatrix}, \quad [119]$$

où

$$\begin{cases} M_{11} &= I - D_{2u} U^{-1} [U + \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty N^{-1} D_\infty^T D_{\infty u}] U^{-1} D_{2u}^T, \\ M_{12} &= -2D_{2u} U^{-1} \alpha^2 D_{\infty u}^T D_\infty [R_\gamma^{-1} - N^{-1}] R_\gamma, \\ M_{22} &= 2\alpha^2 (2R_\gamma - N) [R_\gamma^{-1} - N^{-1}] R_\gamma. \end{cases} \quad [120]$$

Lemme 2 *La matrice N vérifie*

$$R_\gamma < N < 2R_\gamma. \quad [121]$$

Preuve du lemme 2 *La première inégalité provient directement de la définition de la matrice N . La deuxième inégalité est donnée par Lemme d'Inversion Matricielle*

$$\begin{aligned} 2R_\gamma - N &= R_\gamma - \alpha^2 D_\infty^T D_{\infty u} U^{-1} D_{\infty u} D_\infty \\ &= R_\gamma (R_\gamma + \alpha^2 D_\infty^T D_{\infty u} (D_{2u}^T D_{2u})^{-1} D_{\infty u} D_\infty)^{-1} R_\gamma \\ &> 0. \end{aligned} \quad [122]$$

D'après le lemme 2, le terme M_{22} est défini positif.

Proposition 9 *Dans le cas particulier scalaire, $r = n = 1$, $m_\infty = m_2 = 1$ et $r_\infty = r_2 = 1$, M admet une valeur propre nulle et une positive.*

Preuve de la proposition 9 Posons $\beta = D_{\infty u}^T D_\infty$ et $\eta = D_{2u}$, la matrice M s'exprime alors par

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{11} = \frac{2\frac{\alpha^4\beta^4}{R_\gamma^2}}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)}, \\ M_{12} = \frac{-2\frac{\alpha^4\beta^3\eta}{R_\gamma}}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)}, \\ M_{22} = \frac{2\alpha^4\beta^2\eta^2}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)}. \end{array} \right. \quad [123]$$

Soit

$$M = \frac{2\alpha^4\beta^2}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{R_\gamma^2} & -\frac{\beta\eta}{R_\gamma} \\ -\frac{\beta\eta}{R_\gamma} & \eta^2 \end{bmatrix} \quad [124]$$

$$= \frac{2\alpha^4\beta^2}{\left(\eta^2 + \frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)\left(\eta^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{R_\gamma}\right)} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{R_\gamma} \\ -\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta}{R_\gamma} & -\eta \end{bmatrix} \quad [125]$$

La colonne $\begin{bmatrix} \frac{\beta}{R_\gamma} \\ -\eta \end{bmatrix}$ étant à coefficients réels, la matrice M possède 0 et un terme positif comme valeurs propres.

Proposition 10 Dans le cas scalaire, d'après la proposition 9, la matrice \tilde{Q} est semi-définie positive et donc le premier temps conjugué t_c est rejeté à l'infini.

6. Conclusion

Cet article analyse la commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ pour les systèmes différentiels multicanaux. Le cadre utilisé est la théorie des jeux, en particulier la stratégie de Stackelberg avec une structure d'information en boucle fermée. Cette stratégie est en effet bien adaptée à la gestion de divers critères n'ayant pas la même position privilégiée. Les conditions nécessaires sont indiquées et conduisent à la résolution d'une équation différentielle de Riccati associée à une équation différentielle affine. Il est mis en avant

que dans ce cadre, le leader est suffisamment puissant pour faire dégénérer globalement la stratégie de Stackelberg en stratégie de Nash. Grâce à la théorie des points conjugués, les conditions suffisantes d'optimalité sont traduites en termes d'explosion de la solution de l'équation différentielle de Riccati. Un exemple illustre ces résultats.

Article reçu le 02/2006.

Version révisée le 2006.

Rédacteur responsable : MARC JUNGERS

SERVICE ÉDITORIAL – HERMES-LAVOISIER
14 rue de Provigny, F-94236 Cachan cedex
Tél : 01-47-40-67-67
E-mail : revues@lavoisier.fr
Serveur web : <http://www.revuesonline.com>

ANNEXE POUR LE SERVICE FABRICATION
A FOURNIR PAR LES AUTEURS AVEC UN EXEMPLAIRE PAPIER
DE LEUR ARTICLE ET LE COPYRIGHT SIGNÉ PAR COURRIER
LE FICHER PDF CORRESPONDANT SERA ENVOYÉ PAR E-MAIL

1. ARTICLE POUR LA REVUE :
L'objet. Volume 8 – n°2/2005
2. AUTEURS :
Marc Jungers — Emmanuel Trélat** — Hisham Abou-Kandil**
3. TITRE DE L'ARTICLE :
Commande mixte $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: une approche par la stratégie de Stackelberg.
4. TITRE ABRÉGÉ POUR LE HAUT DE PAGE MOINS DE 40 SIGNES :
Stratégie de Stackelberg pour $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$
5. DATE DE CETTE VERSION :
18 juillet 2006
6. COORDONNÉES DES AUTEURS :
 - adresse postale :
 - * Laboratoire SATIE, UMR CNRS 8029
ENS Cachan
61, Avenue Président WILSON
94235 CACHAN Cedex, France.
{Marc.Jungers,Hisham.Abou-Kandil}@satie.ens-cachan.fr
 - ** Université Paris-Sud,
Laboratoire de Mathématique, UMR 8628,
Bât. 425, 91405 Orsay cedex, France
Emmanuel.Trelat@math.u-psud.fr
 - téléphone : 00 00 00 00 00
 - télécopie : 00 00 00 00 00
 - e-mail : Jungers@satie.ens-cachan.fr
7. LOGICIEL UTILISÉ POUR LA PRÉPARATION DE CET ARTICLE :
L^AT_EX, avec le fichier de style `article-hermes.cls`,
version 1.2 du 03/03/2005.
8. FORMULAIRE DE COPYRIGHT :
Retourner le formulaire de copyright signé par les auteurs, téléchargé sur :
<http://www.revuesonline.com>

SERVICE ÉDITORIAL – HERMES-LAVOISIER
14 rue de Provigny, F-94236 Cachan cedex
Tél : 01-47-40-67-67
E-mail : revues@lavoisier.fr
Serveur web : <http://www.revuesonline.com>