

Diagrammes pour résoudre le problème d'Einstein et celui d'un joueur de MasterMind

C. Recanati

L.I.P.N.

Université de Paris 13

e-mail: catherine.recanati@lipn.univ-paris13.fr

1. Introduction

Dans un précédent article sur les représentations diagrammatiques et les représentations linguistiques (Recanati, 2004), nous avons analysé en détail ce qui fonde théoriquement la distinction entre les deux types de représentations dans les systèmes inférentiels. Ce rapport est une sorte d'annexe qui donne deux exemples d'utilisation de diagrammes dans la résolution de problèmes où les hypothèses ont une forme d'abstraction limitée.

Le premier est un problème classique de combinatoire, soumis par e-mail à la perspicacité des membres du laboratoire par Cyril Banderier. L'énoncé du problème serait attribué à Einstein qui aurait déclaré que seul 2 % de la population était capable de le résoudre. « Saurez-vous relever le défi ? » a lancé notre collègue. Le problème ne nécessite aucune connaissance spéciale de mathématiques, et peut être résolu par des enfants. Il est intéressant de chronométrer le temps qu'on met à le résoudre, et d'aucuns auront tenté d'utiliser des méthodes de combinatoire ou d'Intelligence Artificielle. Le lecteur est donc invité à lire l'énoncé et à pratiquer sur lui-même l'expérience avant de lire cette solution. S'il ne fait pas cet effort, nous lui recommandons plutôt de sauter la section, car il n'y trouverait alors que peu d'intérêt.

Le second exemple est plus original. Nous avons tenté de résumer ici les observations que nous avons faites il y a une dizaine d'années sur le raisonnement de joueurs de MasterMind. Nous aimerions susciter d'autres analyses sur ce jeu, et c'est la principale motivation de ce rapport. Le jeu du MasterMind se prête en effet à une modélisation du raisonnement, car il contraint le joueur à raisonner logiquement – situation qui n'est guère fréquente dans la vie de tous les jours. En outre, la géométrie de la grille supportant les pions incite le joueur à élaborer des représentations diagrammatiques. Cette grille est utilisée non seulement comme mémoire de jeu, mais aussi comme support de représentations et de preuves. Cette étude a mis en évidence le caractère hybride des raisonnements effectués, et confirme l'élaboration par certains joueurs de divers « modèles mentaux », assez analogues à ceux introduits par Johnson-Laird dans les années

80. La stratégie des experts est en effet basée sur le développement d'une arborescence de tels modèles. Ces modèles, qui correspondent aussi aux modèles d'abstraction limitée définis par Stenning et Oberlander (Stenning et Oberlander, 1995) sont ordonnés par spécificité croissante, et permettent de converger rapidement vers la solution.

2. Le problème d'Einstein

Le problème combinatoire proposé par Einstein est le suivant :

- 1/ Il y a 5 maisons de couleurs différentes, toutes sur une rangée.
- 2/ Dans chaque maison vit une personne de nationalité différente.
- 3/ Chacune de ces 5 personnes boit une boisson, fume une marque de cigarettes et élève un animal.
- 4/ Personne n'a le même animal, ni ne fume les mêmes cigarettes, ni ne boit la même boisson.
- 5/ L'Anglais vit dans la maison rouge.
- 6/ Le Suédois a un chien.
- 7/ Le Danois boit du thé.
- 8/ La maison verte est à gauche de la maison blanche.
- 9/ Le propriétaire de la maison verte boit du café.
- 10/ Celui qui fume des Pall Mall a un oiseau.
- 11/ Celui de la maison jaune fume des Dunhill.
- 12/ Celui de la maison du centre boit du lait.
- 13/ Le Norvégien vit dans la première maison.
- 14/ Celui qui fume des Camel vit à côté du propriétaire du chat.
- 15/ Celui qui a un cheval vit à côté de celui qui fume des Dunhill.
- 16/ Celui qui fume des Gitanes boit de la bière.
- 17/ L'Allemand fume des Gauloises.
- 18/ Le Norvégien vit à côté de la maison bleue.
- 19/ Celui qui fume des Camel a un voisin qui boit de l'eau.

Question : qui possède le poisson ?

2.1. Représentation du problème

La meilleure méthode pour résoudre le problème n'est pas fondée sur des techniques d'IA ou une méthode d'analyse combinatoire, mais tout simplement sur l'utilisation d'une représentation géométrique homéomorphe à la situation. Le principe est d'utiliser une représentation qui dispose les maisons sur une rangée, comme l'indique la première hypothèse. On peut ensuite noter sous chaque maison les attributs qui auront été découverts : couleur de la maison, nationalité de son occupant, animal possédé, boisson bue et cigarettes fumées par lui. Pour faire cela de manière systématique, on peut utiliser un tableau constitué de cinq colonnes figurant les maisons, et permettant de placer les éléments associés aux maisons ou aux occupants sur des lignes, dans les ensembles suivants :

Couleur = {rouge, vert, blanc, jaune, bleu}

Occupant = {Anglais, Suédois, Danois, Norvégien, Allemand}

Animal = {chien, oiseau, chat, cheval, poisson}

Boisson = {thé, café, lait, bière, eau}

Cigarettes = {Pall Mall, Dunhill, Camel, Gitanes, Gauloises}

Ces ensembles ont été obtenus en extension en ajoutant une à une les valeurs mentionnées dans chaque catégorie par l'énoncé. On constate qu'ils sont tous bien constitués de cinq valeurs distinctes. Représenter la situation consiste alors à remplir le tableau en satisfaisant les hypothèses de l'énoncé, qui se traduisent maintenant en contraintes sur les valeurs figurant sur les lignes et les colonnes du tableau.

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur					
Occupant					
Cigarettes					
Boisson					
Animal					

Les quatre premières hypothèses seront vérifiées si les valeurs figurent une fois et une seule sur chaque ligne. Les ensembles ayant 5 éléments, toutes les valeurs seront présentes.

On peut ensuite reformuler les hypothèses restantes en contraintes spatiales sur les valeurs et le tableau :

5/ Anglais et rouge sont dans la même colonne

6/ Suédois et chien sont dans la même colonne

7/ Danois et thé sont dans la même colonne

8/ La colonne où figure vert est juste à gauche de la colonne où figure blanc

9/ Vert et café sont dans la même colonne

10/ Pall Mall et oiseau sont dans la même colonne

11/ Jaune et Dunhill sont dans la même colonne

12/ Lait est dans la colonne centrale

13/ Norvégien est dans la première colonne

14/ La colonne de Camel est à côté de celle de chat.

15/ La colonne de cheval est à côté de celle de Dunhill

16/ Gitanes et bière sont dans la même colonne

17/ Allemand et Gauloises sont dans la même colonne

18/ La colonne de Norvégien est à côté de celle de bleu

19/ La colonne de Camel est à côté de celle de l'eau.

Bien que cette « reformulation » des hypothèses en termes de contraintes spatiales ne soit pas fondamentalement nécessaire, il nous semble qu'elle facilite beaucoup la résolution, car elle focalise ainsi l'attention sur la représentation plutôt que sur le monde. Pour simplifier la présentation de notre solution, nous mentionnerons donc dans la suite les hypothèses du problème sous cette forme.

2.2. Résolution

Si le tableau est rempli en satisfaisant les contraintes précédentes, la nationalité du propriétaire du poisson sera nécessairement celle qui figurera dans la colonne du poisson. Un tel système de représentation est en effet *clos sous contraintes* selon la terminologie utilisée par Barwise et Etchemendy (Barwise et Etchemendy, 1990). C'est-à-dire que l'homomorphisme entre les contraintes sur la représentation et celles de la situation représentée est tel qu'il garantit *de facto* que toutes les conséquences logiques de la situation représentée sont *explicites* sur la représentation obtenue. C'est la raison pour laquelle de tels systèmes de représentation sont extrêmement efficaces, et en contraste brutal avec les autres systèmes inférentiels. En effet, contrairement aux systèmes logiques, ils ne nécessitent aucun calcul pour établir les conséquences de leurs prémisses. Pour établir la validité d'un fait non donné initialement, on intègre simplement les hypothèses sur la représentation, que l'on inspecte ensuite pour vérifier que le fait s'y trouve représenté.

Résoudre le problème consiste donc ici simplement à remplir le tableau en intégrant successivement toutes les contraintes et à y lire dès que possible la nationalité de l'occupant qui se trouvera marqué dans la colonne du poisson.

A la lecture des hypothèses, on remarque immédiatement que 12/ et 13/ fournissent d'emblée deux valeurs :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	?	?	?	?	?
Occupant	Norvégien	?	?	?	?
Cigarettes	?	?	?	?	?
Boisson	?	?	lait	?	?
Animal	?	?	?	?	?

Ayant la colonne de Norvégien, on s'intéresse naturellement à 18/ qui y réfère, ce qui permet de placer bleu dans la deuxième colonne, car c'est l'unique colonne adjacente.

On cherche ensuite à intégrer les autres hypothèses. La première ligne (et les premières hypothèses) portant sur les couleurs, on s'intéresse tout naturellement à cet aspect, et l'on extrait de l'énoncé les hypothèses suivantes, (parce qu'elles portent sur les couleurs) :

5/ Anglais et rouge sont dans la même colonne

8/ La colonne où figure vert est juste à gauche de la colonne où figure blanc

9/ Vert et café sont dans la même colonne

11/ Jaune et Dunhill sont dans la même colonne

On déduit alors avec 5/ et 8/ que de manière nécessaire :

- rouge est en colonne 3, 4 ou 5 car la colonne 1 est celle du Norvégien et non de l'Anglais, et la colonne 2 celle du bleu.
- les colonnes de vert et de blanc ne peuvent être que 3 et 4, ou 4 et 5.

Il en résulte que les colonnes 3, 4 et 5 contiennent globalement vert, blanc et rouge. Par complémentarité sur l'ensemble des couleurs, on en déduit que jaune est nécessairement colonne 1, car la colonne 2 contient déjà le bleu.

Jaune étant placé, 11/ qui mentionne jaune permet alors de placer Dunhill ; Dunhill placé, on s'intéresse alors à 15/ qui mentionne la colonne de Dunhill :

15/ La colonne de cheval est à côté de celle de Dunhill

Par chance une fois encore, il n'y a qu'une voisine, et on a, de manière nécessaire, le tableau suivant :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	jaune	bleu	?	?	?
Occupant	Norvégien	?	?	?	?
Cigarettes	Dunhill	?	?	?	?
Boisson	?	?	lait	?	?
Animal	?	cheval	?	?	?

On réfléchit alors aux configurations possibles des trois couleurs restantes. 8/ n'autorise en fait que deux possibilités :

- 1) Vert en colonne 3, blanc en colonne 4 et donc dans ce cas, rouge en colonne 5.
- 2) Vert en colonne 4, blanc en colonne 5 et dans ce cas, rouge en colonne 3.

La première configuration est impossible, car si vert se trouvait en colonne 3, café ne pourrait y figurer comme le requiert 9/, puisque la place de la boisson est déjà occupée par lait. La deuxième configuration est donc la seule possible, et on a trouvé les couleurs de chaque maison :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	jaune	bleu	rouge	vert	blanc
Occupant	Norvégien	?	Anglais	?	?
Cigarettes	Dunhill	?	?	?	?
Boisson	?	?	lait	café	?
Animal	?	cheval	?	?	?

On s'intéresse alors à la ligne des occupants, parce que les deux premières hypothèses non encore intégrées les mentionnent et que l'on y a déjà placé deux items. On considère donc les hypothèses restantes sur des nationalités :

6/ Suédois et chien sont dans la même colonne

7/ Danois et thé sont dans la même colonne

17/ Allemand et Gauloises sont dans la même colonne

Les cases déjà remplies font que Danois et thé ne peuvent figurer ensemble qu'en colonne 2 ou en colonne 5. En supposant d'abord Danois et thé en colonne 2, on arrive au tableau :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	jaune	bleu	rouge	vert	blanc

Occupant	Norvégien	Danois	Anglais	?	?
Cigarettes	Dunhill	?	?	?	?
Boisson	?	thé	lait	café	?
Animal	?	cheval	?	?	?

Mais 6/ et 17/ ne permettent pas alors de finir de remplir cette ligne. On attaque alors le problème sous un autre angle : la ligne des boissons ayant trois items, on essaye de la compléter. Les contraintes mentionnant les boissons manquantes sont :

16/ Gitanes et bière sont dans la même colonne

19/ La colonne de Camel est à côté de celle de l'eau.

La position de Dunhill et des autres boissons fait que bière et Gitanes ne peuvent figurer ensemble qu'en colonne 5. Par complétion, on obtient l'eau en première colonne, d'où les Camel en colonne 2, à cause de 19/ :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	jaune	bleu	rouge	vert	blanc
Occupant	Norvégien	Danois	Anglais	?	?
Cigarettes	Dunhill	Camel	?	?	Gitanes
Boisson	eau	thé	lait	café	bière
Animal	?	cheval	?	?	?

Allemand ayant même colonne que Gauloises d'après 17/, il ne peut se trouver qu'en colonne 4. On peut alors compléter la ligne des occupants avec Suédois, et celle des cigarettes, avec Pall Mall.

Reste alors à satisfaire les dernières contraintes :

6/ Suédois et chien sont dans la même colonne

10/ Pall Mall et oiseau sont dans la même colonne

14/ La colonne de Camel est à côté de celle de chat.

Il vient chien en colonne 5, oiseau en colonne 3, et la seule possibilité restante pour que chat soit voisin de Camel, est de le mettre en colonne 1 :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	jaune	bleu	rouge	vert	blanc
Occupant	Norvégien	Danois	Anglais	Allemand	Suédois
Cigarettes	Dunhill	Camel	Pall Mall	Gauloises	Gitanes
Boisson	eau	thé	lait	café	bière
Animal	chat	cheval	oiseau	?	chien

On en déduit que le poisson est dans la quatrième maison et que son propriétaire est Allemand. Pour que cette réponse soit réellement « la » au problème posé, on peut encore montrer que c'est la seule possibilité (ou que, s'il existe une autre configuration de tableau acceptable, le propriétaire du poisson est encore Allemand dans cette autre configuration). En effet, si l'on retourne en arrière, nous avons à un moment choisi arbitrairement de placer le Danois en colonne 2. Il était alors également possible de le placer en colonne 5. Revenons donc à ce point de la résolution, et supposons que Danois figure en colonne 5.

On ne peut alors compléter la ligne des occupants qu'en plaçant le Suédois en colonne 4, car en colonne 2 figure déjà cheval, et 6/ stipule que Suédois et chien sont dans la même colonne. On aurait donc alors nécessairement Allemand en 2 avec les Gauloises, et le tableau :

	Maison 1	Maison 2	Maison 3	Maison 4	Maison 5
Couleur	jaune	bleu	rouge	vert	blanc
Occupant	Norvégien	Allemand	Anglais	Suédois	Danois
Cigarettes	Dunhill	Gauloises	?	?	?
Boisson	?	?	lait	café	thé
Animal	?	cheval	?	chien	?

Mais cette configuration est incompatible avec l'hypothèse suivante sur les boissons

16/ Gitanes et bière sont dans la même colonne

En effet, bière ne pouvant figurer qu'en colonne 1 ou 2, et les colonnes 1 et 2 étant déjà pourvues de cigarettes autres que des Gitanes, 16/ ne pourra jamais être satisfaite.

Cette seconde configuration (où Danois serait en colonne 5) est donc impossible et la solution que nous avons trouvée précédemment est effectivement la seule.

3. Raisonnement d'un joueur au MasterMind

3.1. Le jeu du MasterMind

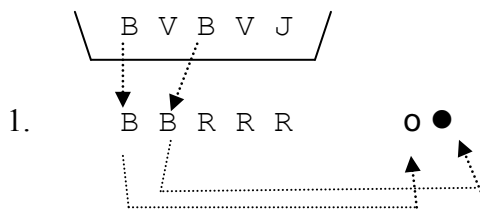
Le jeu du MasterMind consiste à découvrir la configuration cachée d'une rangée de 5 pions de couleurs, choisies parmi 6. Le jeu se joue à deux : un meneur de jeu, qui choisit la configuration cachée, et un joueur, dont le but est de découvrir la solution le plus rapidement possible. Le meneur de jeu matérialise la rangée de pions à trouver en début de partie et la maintient cachée durant tout le jeu. Le joueur doit alors découvrir cette configuration cachée en procédant de la façon suivante. À chaque « coup » il dispose sur une grille une rangée de pions, et le meneur de jeu lui répond en plaçant à droite des fiches noires ou blanches indiquant comment sa rangée coïncide avec la solution. Une fiche blanche indique qu'un pion de couleur est bien placé dans la rangée, et une fiche noire qu'un pion de couleur est mal placé (mais figure néanmoins ailleurs). Les différentes rangées, annotées des fiches noires et blanches données en réponse, restent sur la grille après chaque coup, et le joueur peut s'y référer à tout moment.

Ainsi, si le joueur propose au premier coup une rangée de deux pions bleus suivis de trois pions rouges, et que la configuration cachée est (bleu, vert, bleu, vert, jaune), le meneur de jeu placera en réponse une fiche blanche et une fiche noire sur la droite. En notant les pions de couleurs par une lettre et les fiches par des ronds blancs ou noirs, nous pouvons schématiser la grille du jeu de la façon suivante :

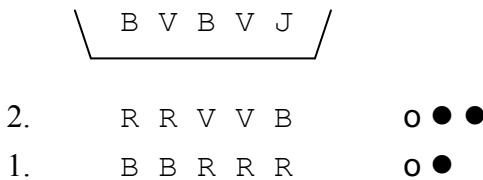


1. B B R R R ○ ●

L'ordre des fiches placées à droite par le meneur de jeu n'indique rien de particulier. Seule leur présence donne une information. Une fiche blanche indique qu'un pion de couleur est bien placé (ici il s'agit du premier pion bleu), et une fiche noire qu'il existe un pion dont la couleur a été découverte, mais qui est mal placé (ici, le deuxième pion bleu). La tradition veut qu'on donne toutes les fiches blanches d'abord, puis toutes les noires.



Si le joueur joue ensuite « R R V V B », le meneur de jeu répondra par une fiche blanche (correspondant au pion vert bien placé) et deux fiches noires (pour un vert et un bleu mal placés) :



C'est à partir d'une telle grille que le joueur va raisonner¹. Ici, il pourrait inférer qu'il existe un vert dans la solution, car il est passé de deux fiches à trois fiches, en ajoutant simplement du vert sur la seconde rangée (mais c'est faux : car 2 verts, 2 bleus et pas de rouge est possible).

3.2. Observations sur la stratégie des joueurs

1. *Les joueurs expérimentés utilisent des configurations permettant de simplifier l'interprétation des fiches a priori.*

Ainsi, un joueur ne cherche généralement pas à jouer une solution plausible ou voisine de la solution, sauf en fin de partie. Une rangée est plutôt jouée dans le but d'obtenir une réponse à une question partielle, comme, « Y a-t-il du rouge ou du vert dans la solution ? ». Pour obtenir de manière certaine une réponse à une question, le joueur peut alors exploiter des informations déjà connues de manière négative. Ainsi, pour déterminer s'il y a un bleu sur deux places données, dans un contexte où il sait qu'il n'y a pas de vert, il peut jouer deux bleus sur les places en question et compléter la rangée par des verts.

Mais si une configuration garantit que toute réponse qui lui est donnée sera facile à interpréter, la jouer utilise néanmoins un coup. Or, bien jouer consiste à trouver la solution en un

¹ Les numéros que nous rajoutons à gauche ne sont pas présents sur la grille mais destinés à nous permettre de référencer les rangées dans nos descriptions.

nombre minimal de coups². Un bon joueur gagne en moyenne en 5/6 coups, et un débutant plutôt en 8. Il faut, en tout état de cause, réussir à gagner en moins de 12 coups, car la taille de la grille est limitée. Le joueur doit donc minimiser le nombre de cas qu'il aura à envisager pour faciliter l'interprétation des fiches tout en maximisant la quantité d'information obtenue.

2. *La stratégie la plus fréquente consiste à rechercher d'abord les couleurs, puis à déterminer les places.*

En début de partie, les joueurs cherchent généralement à déterminer les couleurs en présence. Ils font alors souvent des inférences probabilistes, à partir du nombre de fiches. Ils ne cherchent à déterminer les places que dans une seconde phase, quand les couleurs sont toutes découvertes, et n'utilisent pleinement qu'alors les informations fournies par les fiches pour valider leurs inférences.

3. *En début de jeu, les joueurs réfléchissent peu. Mais on note chez certains joueurs l'utilisation de configurations systématiques qui minimisent le nombre de modèles à considérer pour interpréter les réponses.*

Les informations fournies par les premiers coups ne permettent généralement pas d'aboutir à des faits et les joueurs choisissent de manière relativement aléatoire les combinaisons jouées. Cependant, ils proposent typiquement des configurations de deux ou trois couleurs seulement, parce que l'interprétation exhaustive des fiches réponses pour des combinaisons plus grandes conduit à envisager trop de cas. Les joueurs utilisent donc préférentiellement des répartitions de type 3/2, 2/2/1 ou 3/1/1. Les répartitions en 4/1 ne sont guère jouées, car trop peu informatives (comme les rangées unicolores).

Durant la recherche des couleurs, les joueurs varient volontiers les places des couleurs déjà déterminées, sans chercher à en extraire les conséquences. Ces pions sont placés à divers endroits dans le but de fournir des informations sur les places plus tard. Cette technique présente aussi l'avantage de circonscrire l'ajout d'autres couleurs, qui s'effectue alors de manière contrôlée. Ainsi, si un joueur a d'abord joué R R R V V et obtenu trois fiches, il conclura à la présence nécessaire de rouge, et jouera volontiers ensuite une configuration de type X X X R R, où X est une nouvelle couleur, et les deux pions rouges placés à un endroit qui n'a pas encore été testé.

4. *Les combinaisons jouées sont induites par des hypothèses expliquant les rangées des coups précédents, et la première rangée sert à fixer une hypothèse de base. Cette hypothèse initiale est généralement choisie parce que statistiquement la plus probable.*

Ainsi si le premier coup est

1. B B J J R ○ ●

on ne supposera pas en premier lieu qu'une des fiches corresponde au rouge, car la présence d'un rouge est moins probable que celle d'un bleu ou d'un jaune. La stratégie de la plupart des joueurs consiste en effet à construire progressivement un modèle plausible à partir des hypothèses les plus probables, en vérifiant seulement que ce modèle n'est pas contradictoire avec les coups précédents. (Mais un joueur débutant, peu sensible aux aspects statistiques, pourrait supposer que la fiche « mal placé » corresponde au rouge, simplement parce que le pion rouge et la fiche noire se trouvent tous les deux à l'extrémité droite de la rangée de fiches ou de pions).

² Si le nombre de coups ne comptait pas, il suffirait pour déterminer les couleurs de jouer des combinaisons unicolores. Mais si une rangée de couleur unique permet de déduire le nombre de pions dans cette couleur, elle ne donne par contre aucune information sur leurs places.

Il n'y a bien entendu aucun calcul de probabilités. Mais le joueur ordonne les hypothèses à partir du nombre des pions et des fiches. Dans l'exemple qui précède, il supposera volontiers que les deux fiches obtenues correspondent à des pions bleus ou jaunes, et optera peut-être pour un bleu bien placé et un jaune mal placé, à cause de l'ordre des fiches.

5. *Les hypothèses d'interprétation des fiches sont projetées mentalement sur la grille, utilisée comme représentation.*

La correspondance entre les fiches et les pions s'effectue « visuellement » en traçant des liens imaginaires entre des ensemble de fiches et de pions. Les joueurs utilisent des schémas mentaux plus ou moins analogues à ceux de la Figure 1.

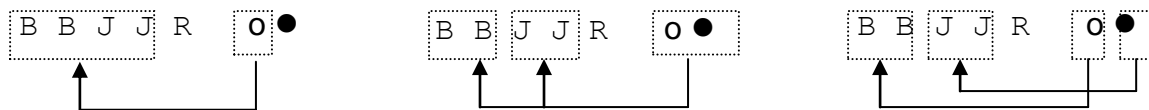


Figure 1. Trois schémas d'interprétations de fiches

Les trois schémas de cette figure ordonnent les modèles considérés par inclusion décroissante. Les associations entre les fiches et les pions y sont de plus en plus spécifiques. Le premier schéma suppose qu'un pion parmi les bleus et les jaunes est bien placé, sans faire d'autre d'hypothèse. Le second suppose qu'il y a un bleu et un jaune exactement (et donc pas de rouge), sans spécifier lequel serait bien placé. Le troisième suppose de plus qu'un bleu qui est bien placé (il se trouve donc sur l'une des deux premières places), et que les deux positions suivantes ne contiennent pas le jaune.

On verra plus loin que l'utilisation de modèles imbriqués est à la base de la stratégie des joueurs expérimentés, et il arrive que de telles suites de schémas emboîtés soient utilisées. Cependant les joueurs débutants se contentent généralement de schémas plus simples, ne mettant en correspondance les fiches et les pions qu'un à un.

Remarquons également au passage que ce type de schémas permet de représenter des modèles alternatifs. De nombreux auteurs ont en effet prétendu que le principal défaut des diagrammes était leur incapacité à représenter des disjonctions et des propriétés du second ordre en général. Néanmoins, cette représentation de la disjonction reste partielle et n'existe que dans la mise en correspondance des fiches et des pions. Elle n'apporte avec elle les conséquences qui en dérivent (via la clôture sous contraintes) qu'au niveau de ce qu'elle représente, i.e. au niveau de la correspondance entre les fiches et les pions, et pas toutes celles qui en résultent sur les pions de la rangée.

6. *Les hypothèses retenues sont biaisées par l'ordre des pions et des fiches.*

On observe ainsi la tendance à considérer d'abord les hypothèses portant sur les pions de gauche plutôt que sur ceux de droite, ou encore une préférence pour l'hypothèse d'interprétation représentée par le troisième schéma de la Figure 1, plutôt que pour celle, pourtant parfaitement symétrique et équiprobable, où un bleu serait mal placé et un jaune bien placé. Pour des raisons peut-être analogues, certains joueurs préfèrent jouer des couleurs contiguës plutôt que séparées. (Pour une répartition de couleur de type 3/2, contenant par exemple du bleu et du rouge, ils préféreront jouer B B B R R que B R B R B).

On peut expliquer ces préférences par l'utilisation de schémas plus ou moins semblables aux précédents, conjointe à la nécessité d'avoir à ordonner et mémoriser le raisonnement. Une

représentation schématique des hypothèses permet en effet de pallier la faiblesse de la mémoire verbale et les hypothèses retenues seront plus faciles à mémoriser si elles sont visualisables sur la grille. L'usage de schémas du type précédent est donc avantageux, mais seulement dans la mesure où ces schémas sont assez simples pour être mémorisés - ce qui en limite la nature et la complexité.

Les biais précédents s'expliquent donc à la fois par les capacités du joueur et par leurs limitations. Ainsi, on ordonne naturellement les rangées de la gauche vers la droite, car la lecture s'effectue dans ce sens. On distingue aussi plus facilement la cardinalité d'ensembles de pions de couleurs contiguës, ce qui motive sans doute cette préférence de certains joueurs. Il est également plus facile de former mentalement des ensembles à partir d'éléments contigus, et ces ensembles peuvent ensuite plus facilement être mis en correspondance, puisqu'il suffit alors d'un seul symbole (un « trait » mental) pour représenter ou mémoriser ce lien.

Les configurations de couleurs contiguës permettent de développer des schémas simples perceptuellement. Ces schémas favorisent alors la mise en correspondance des parties gauche et droite des pions et des fiches, parce que les rangées sont ordonnées de gauche à droite. Cette remarque suffit à justifier la préférence pour le dernier schéma de la Figure 1, par rapport à l'interprétation où un jaune est bien placé et un bleu mal placé. On peut aussi imaginer que les joueurs fassent des opérations mentales sur les objets, et translatent la rangée des fiches sur celle des pions, faisant ainsi émerger schémas analogues à ceux de la Figure 2 :



Figure 2. Variantes de schémas d'hypothèses

L'hypothèse de translations mentales est également plausible car les schémas retenus ne sont pas uniquement fondés sur un ordre gauche-droite. Chez de nombreux joueurs, on observe que ces biais géométriques l'emportent souvent sur la rationalité d'un choix statistique, car l'hypothèse la plus probable n'est pas toujours envisagée. Cependant, plus un joueur sera expérimenté, plus il fondera ses choix sur une estimation statistique. Son utilisation de l'ordre des pions peut néanmoins devenir délibérée et systématique dans ce cadre, pour ordonner des hypothèses équiprobables et ainsi mémoriser les points de retour arrière (*backtrack*) dans son raisonnement.

7. *On note que les joueurs préfèrent raisonner sur les pions bien placés que sur les pions mal placés. Les raisonnements qui incluent des hypothèses sur les places sont plus géométriques et plus rigoureux.*

La préférence pour les hypothèses sur les pions bien placés peut s'expliquer par le fait qu'une telle hypothèse implique que les pions d'autres couleurs figurant sur cette place sont nécessairement mal placés, ou absents de la combinaison. Par contre, l'hypothèse d'un pion mal placé dans une colonne n'a aucune conséquence logique directe et simple sur la position des autres pions occupant cette position. Mais cette préférence s'explique surtout par le fait que ce type d'hypothèse est directement représentable sur un diagramme concret de la solution, et que les inférences qui en résultent sont alors directement perçues. On bénéficie alors pleinement de la clôture sous contraintes de la représentation.

Par contre, l'hypothèse d'un pion mal placé dans une colonne n'a aucune conséquence directe sur la position des autres pions occupant cette position et cette propriété « négative » n'est

pas représentable sur un diagramme concret homéomorphe à la solution, car c'est une propriété du second ordre.

Ce biais explique sans doute la construction de modèles qui spécifient les couleurs des places. Les raisonnements qui sont faits alors sont plus rigoureux et moins inductifs que ceux qui sont faits dans des modèles spécifiant uniquement des cardinalités minimales de couleurs. Les joueurs vérifient ainsi souvent la cohérence d'une interprétation sur une rangée avec les données figurant sur les autres lignes de la grille, ou vérifient le fait qu'une combinaison qu'ils s'appêtent à jouer est en accord avec les fiches des rangées précédentes. Ces vérifications de cohérence utilisent alors massivement des projections géométriques, et les inférences faites sont littéralement guidées par des opérations visuelles.

8. *Les hypothèses d'interprétation des fiches sont formulées et mémorisées dans différents formats, diagrammatiques et linguistiques. Mais le modèle en construction est plutôt mémorisé sous forme verbale, et les inférences ou déductions effectuées sous forme graphique.*

Les joueurs reformulent généralement leurs hypothèses et conclusions sur la solution de manière verbale. Ainsi, ils cherchent à mémoriser des assertions comme « il y a soit un rouge, soit un bleu », ou « il y a au moins un rouge », etc. Le joueur peut en effet mémoriser diagrammatiquement sur une rangée que tel pion est bien ou mal placé, mais pas qu'« il y a deux verts » et « au moins un rouge », car il n'y a pas nécessairement sur la grille de rangée lui permettant de regrouper et/ou visualiser ces faits. Certains faits sont en outre nécessairement représentés sous forme verbale, parce que ce sont des propriétés du second ordre et que les diagrammes sont a priori inaptes à représenter de telles propriétés (ainsi, la négation, l'absence d'une couleur³ ou la disjonction).

Les joueurs utilisent aussi parfois des représentations annexes concrètes, comme des pions supplémentaires, pour représenter ou mémoriser les hypothèses qu'ils font sur le modèle en construction, ou les faits certains auxquels ils ont abouti. Ainsi, pour pouvoir facilement mémoriser les couleurs trouvées, comme, l'existence d'au moins deux rouges, certains joueurs utilisent des pions qu'ils gardent en main ou posent à côté de la grille. Ces pions représentent alors un modèle qui inclut la solution. Cette technique évite au joueur d'avoir à retenir ces faits, et économise sa mémoire verbale⁴.

Les hypothèses concernant l'interprétation des fiches réponses sont conçues directement (et en partie mémorisées) sur des schémas projetés sur la grille. Mais l'hypothèse d'interprétation faite sur la ligne de départ est généralement reformulée linguistiquement. L'explication est sans doute qu'il faut lier les deux types d'informations, en particulier pour fonder le raisonnement, ce dernier étant par nature hybride. Les joueurs concrétisent en effet toujours le prochain coup sur la grille, ajoutant ou retirant des pions selon les contradictions qu'ils rencontrent avec les hypothèses faites sur les lignes antérieures. Dans cette phase inductive, les représentations et le raisonnement sont plutôt diagrammatiques. Les pions étant directement posés sur la grille, ils sont facilement associés visuellement avec les fiches qui doivent leur correspondre sur les différentes lignes. Le joueur infère les conséquences logiques de son modèle initial et de ses

³ Cependant, certains joueurs utilisent des pions physiques (qu'ils disposent à part) pour mémoriser les couleurs encore possibles. Cela les aide à choisir de nouvelles couleurs et ils piochent alors arbitrairement dans cet ensemble pour fabriquer de nouvelles configurations.

⁴ En outre, on l'a vu dans la résolution du problème d'Einstein, cette représentation « diagrammatique » du modèle permet d'obtenir sans calcul les conséquences des faits représentés (ici les contraintes sur le nombre de pions de couleurs pouvant figurer ensemble).

schémas d'hypothèses. Il peut alors manipuler des représentations hybrides, par exemple qu'une place ne peut contenir de rouge, en annotant mentalement cette place du prédicat « non-rouge ».

9. *Le problème du joueur est de mémoriser son raisonnement, et de bien séparer les hypothèses et les faits établis. Cette problématique le conduit à construire un modèle basé sur les faits, en parcourant une arborescence de modèles ordonnés par inclusion et de spécificité croissante.*

Le joueur doit distinguer entre les choses certaines, les faits, dont il a démontré qu'elles étaient les conséquences logiques d'autres faits avérés, et celles qui ne sont que des hypothèses, ou les conséquences logiques de celles-ci. Mal distinguer les deux types conduit à des erreurs ou à refaire plusieurs fois le même raisonnement. Une autre difficulté intrinsèque est liée à la structure logique des raisonnements possibles, et aux limitations de capacité mémoire du joueur. Cette problématique encourage le développement de stratégies permettant d'ordonner les hypothèses, et favorise celles qui utilisent la grille, car elles économisent d'autant la mémoire linguistique.

Le joueur construit en effet la solution en partant d'un modèle qui satisfait les faits qui sont apparus, et fait pas à pas des hypothèses qui contraignent le modèle et diminuent peu à peu son degré d'abstraction. Les hypothèses avancées sont imbriquées les unes dans les autres, et toute hypothèse ajoutée est susceptible d'être rejetée si une contradiction apparaît. Pour que le raisonnement soit correct, il faut mémoriser les hypothèses, et l'ordre dans lequel elles ont été introduites. En cas de contradiction, on doit en effet raisonner par l'absurde⁵ et conclure à l'incohérence de la dernière hypothèse. On reprend alors le parcours à partir des modèles satisfaisant les hypothèses antérieures, en ajoutant l'hypothèse inverse, car elle est alors logiquement nécessaire. Si l'on ne mémorise pas les hypothèses et leur ordre, on « perd le fil » du raisonnement, et il faut le reprendre à un niveau antérieur, voire à la base.

Une stratégie des experts consiste ainsi à suivre toujours la branche la plus probable et à ne l'abandonner qu'en cas de contradiction. Suivre la branche la plus probable permet d'arriver plus rapidement à la solution, mais a aussi l'avantage d'ordonner les différents modèles. Cet ordre peut ainsi être plus facilement retrouvé et mémorisé car il n'est pas arbitraire.

10. *Certains joueurs utilisent des « modèles mentaux » à la Johnson-Laird. Ces modèles peuvent être organisés en treillis, et les branches parcourues de manière systématique.*

Les arborescences de modèles développées par certains joueurs évoquent la théorie de Johnson-Laird sur la construction de modèles mentaux (cf. Johnson-Laird, 1983). En début comme en fin de partie, beaucoup de joueurs développent en effet des schémas qui peuvent être considérés comme de tels objets.

La remarque que nous avons faite, concernant les pions tenus dans la main par certains joueurs, atteste du développement de ce type de schémas. Les pions que les joueurs tiennent en main constituent une représentation partielle du modèle en cours. On peut noter ces modèles par des séquences de symboles indiquant le nombre de pions des couleurs découvertes. Par exemple, le modèle mental « 2 R 1 B » inclut toutes les combinaisons qui possèdent au moins deux rouges et un bleu. On progresse alors vers la solution en augmentant progressivement le nombre de pions des couleurs mentionnées, ou en introduisant de nouvelles couleurs, jusqu'à atteindre un cardinal de 5 pions.

⁵ Ou *modus tollens* dont la forme stipule que si « p implique q » et que l'on a « non-q », alors on a nécessairement « non-p ».

Les joueurs utilisant ce type de modèles mémorisent bien entendu le nombre exact de pions d'une couleur s'ils l'ont découvert. On retrouve ici la notion d'*exhaustivité* qu'avait introduite Johnson-Laird, et on peut lui emprunter la notation entre crochets pour indiquer que le nombre de pions dans une couleur est exhaustif. Ainsi, le modèle « exactement deux rouges » et « au moins un bleu » serait noté

[2 R] 1 B

Les joueurs mémorisent aussi l'absence de pions d'une couleur. Mais il semble que ce type d'information, mémorisée souvent verbalement, ne soit pas traitée tout à fait au même niveau. Cela s'explique aisément par le fait que l'absence de pion dans une couleur ne saurait être représentée au sein d'un schéma mental homéomorphe à la solution. Le joueur manipule donc en réalité des représentations hybrides comme :

1 B [2 R] « pas de vert »

(ou 1 B, 2 R « exactement deux rouges », « pas de vert »)

Dans la suite, nous noterons pour simplifier l'absence de couleur par des crochets et un zéro, à droite de la représentation de la combinaison, pour rappeler le fait que ce type d'information ne fait pas partie du modèle mental développé par le joueur⁶ au même titre que les premières :

1 B [2 R] [0 V]

Mais quelle que soit la notation que l'on adopte pour décrire ce modèle, on peut en suivre le développement arborescent comme le propose Johnson-Laird. Ainsi, quand le joueur se trouve contraint d'intégrer une hypothèse provenant d'une nouvelle ligne, et débouchant sur deux cas disjoints, par exemple s'il découvre dans le cadre de l'exemple précédent qu'il y a de manière exclusive « soit un jaune, soit un bleu supplémentaire », il peut développer l'alternative ici représentée sur deux lignes, par :

2 B [2 R] [0 V] [0 J]
[1 B] [2 R] 1 J [0 V]

D'autres types de modèles mentaux sont fréquemment utilisés par les joueurs, en particulier dans la dernière phase du jeu, où il s'agit de déterminer les places. Les joueurs considèrent très naturellement en effet des représentations isomorphes à une solution ou les pions sont ordonnés :

[- B - - R] où les tirets marquent les places des couleurs indéterminées.

Que les couleurs aient été entièrement déterminées ou non, on peut aisément ordonner les modèles de ce type par spécificité croissante. La stratégie des joueurs est toujours la même, et consiste à spécifier progressivement les couleurs des pions correspondant aux tirets. Si les couleurs sont déterminées, on peut contraindre plus fortement les différentes possibilités.

La stratégie d'une joueuse que nous avons étudiée exploitait la géométrie de la grille pour ordonner le développement des deux types de modèles mentaux (pions ordonnés ou non), et ce, de manière totalement consciente. Cette personne construisait en effet chaque modèle

⁶ On a cependant observé qu'un joueur qui se servait de pions annexes pour mémoriser son modèle, représentait également par des pions concrets l'ensemble des couleurs (dans lequel il pouvait puiser pour augmenter le nombre de pions). Il manipulait ainsi deux ensembles concrets de pions : celui des pions découverts, et celui des pions de couleurs ajoutables. S'il découvrait qu'il n'y avait pas de vert, ou que le rouge était épuisé, il supprimait simplement de l'ensemble des couleurs possibles la couleur en question. L'avantage cognitif et pragmatique de ce mode de représentation était très net, et ce joueur jouait très rapidement.

progressivement en ordonnant géométriquement les interprétations équiprobables sur chaque ligne (en favorisant systématiquement les pions de gauche). Les branches de modèles pouvaient alors être parcourues de manière systématique, et elle pouvait progresser ainsi vers la solution sans perdre le fil du raisonnement.

Mais la plupart des joueurs sont plus opportunistes et utilisent des fragments de raisonnements, construits à partir de modèles semblables aux précédents ou à partir de schémas du type de la Figure 1. Remarquons au passage que ces derniers sont plus performants que les modèles mentaux que nous venons de décrire. Ainsi, l'hypothèse exprimée par le deuxième schéma Figure 1 regroupe les 3 modèles mentaux alternatifs :

2B [0J] ou [0B] 2J □ □ ou [1B] [1J]

De même le modèle correspondant au dernier schéma est plus spécifique que le modèle :

[1B] [1J]

Les schémas du type de la Figure 1 sont plus fins car ils permettent de différencier les interprétations des fiches noires et blanches. Par l'intermédiaire des fourches, ils peuvent représenter la disjonction - ce qui n'est pas le cas des modèles précédents.

3.3. Exemples

Soit le début de partie suivant :

2. ○ ○ B B B (aucune fiche)
1. B B J J R ○ ●

Le joueur a entamé avec une combinaison de trois couleurs et a obtenu deux fiches. Il en infère qu'au moins une des trois couleurs qu'il a proposées est absente de la combinaison. Il suppose que c'est le rouge, car le rouge a la plus faible probabilité d'apparition. Sous cette hypothèse, il analyse que des modèles possibles sont (de manière exclusive)

2 B [0 J] [0 R]
ou [1 B] [1 J] [0 R]
ou 2 J [0 B] [0 R]

Il se demande alors s'il y a du bleu, et décide de faire varier la position des bleus sur la prochaine ligne, tout en introduisant une autre couleur (l'orange). N'obtenant alors aucune fiche, il conclut aisément qu'il n'y a ni bleu, ni orange et peut réinterpréter les fiches de la première rangée. Il peut maintenant déduire de manière certaine que les modèles possibles sont uniquement :

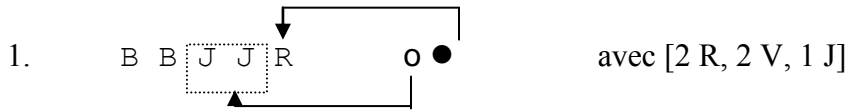
2 J [0 R] [0 B] [0 O]
ou [1 J] 1 R [0 B] [0 O]

Dans la rangée jouée ensuite, il teste de nouvelles places pour le rouge et le jaune, tout en introduisant du vert. Supposons qu'il ait beaucoup de chance et découvre cinq fiches :

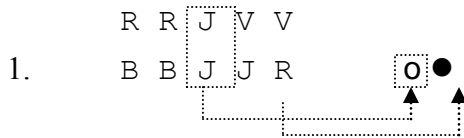
3. J V R R V ○ ● ● ● ●
2. ○ ○ B B B
1. B B J J R ○ ●

Toutes les couleurs sont découvertes : on a [2 R, 2 V, 1 J] et il s'agit maintenant de déterminer les places. Le joueur organise son raisonnement à partir de la première ligne. Sur cette rangée, soit un rouge, soit un jaune étaient bien placés, puisqu'il n'y a pas de bleu. Il suppose

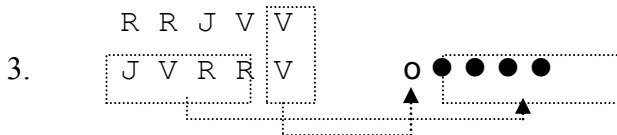
alors que c'était un jaune, parce que c'est l'hypothèse la plus probable, compte tenu qu'il y a deux jaunes pour un seul rouge sur la rangée. Il se place donc dans le cadre du schéma d'interprétation suivant :



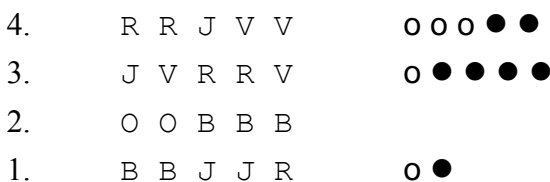
Dans cette hypothèse, les rouges ont vraisemblablement toujours été mal placés, car un seul pion était bien placé sur la troisième ligne. Le joueur décide donc de jouer les deux rouges sur les deux premières positions, non encore testées. Il s'apprête donc à jouer [R R - -] et doit décider de la position occupée par le pion jaune. Il opte pour la position centrale, car c'est la première qui se présente de gauche à droite ligne 1. D'où le début de combinaison, [R R J - -], nécessairement complétée ici en [R R J V V] avec les couleurs découvertes. Avant de jouer, le joueur vérifie la compatibilité de cette solution avec les rangées précédentes. La vérification est effectuée en projetant ces pions sur chaque ligne. Ainsi, sur la première ligne, on aurait bien obtenu les deux fiches présentes puisque :



La seconde rangée aurait bien évidemment donné le même résultat, et sur la troisième, un seul pion serait effectivement bien placé :



Les données sont donc compatibles avec cette combinaison, et le joueur la joue. Cette fois, trois pions sont correctement placés :

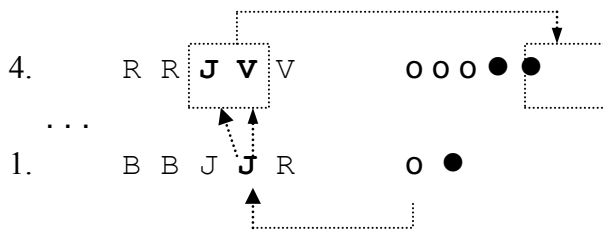


Dans un tel cas, le joueur sait par expérience qu'il lui suffit d'échanger deux pions pour trouver la solution. Il lui faut donc trouver deux pions mal placés. Il s'interroge alors sur son hypothèse concernant le jaune. Son raisonnement est le suivant : si le jaune est bien placé au centre, alors le rouge est mal placé ligne 1. Dans ce cas, cette position n'étant occupée ni par un jaune (puisque'il n'y en a qu'un seul, ici au centre), ni par un rouge, elle est *nécessairement* occupée par un vert. On est donc alors dans le cadre du modèle [- - J - V]. En projetant ces pions sur la troisième ligne, on a donc le vert bien placé en bout de ligne, et les deux rouges mal placés :

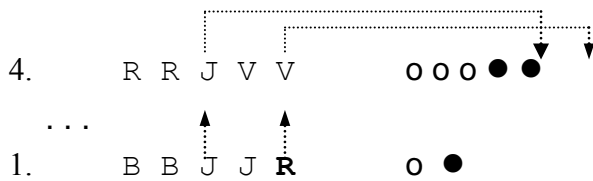
3. - - J - V
 J V R R V ○ ● ● ● ●

Donc, sous cette hypothèse, les deux rouges ne peuvent occuper que les deux premières positions. L'hypothèse du jaune central conduit donc *nécessairement*⁷ au modèle [R R J -V], et à la configuration [R R J V V] qui vient d'être rejetée. L'hypothèse de départ est donc fausse, et le pion jaune ne se trouve pas au centre. En conséquence, si un jaune est bien placé ligne 1, ce ne peut qu'être en avant dernière position.

Le joueur fait alors littéralement « remonter » cette information sur la grille, en regardant ce qui se trouve en quatrième place sur chaque rangée. Sur la troisième rangée, un rouge serait alors effectivement mal placé, et sur la quatrième, un vert et le jaune se trouveraient nécessairement mal placés. Cette inférence est effectuée visuellement, comme le montre le schéma suivant :



Le joueur réalise alors qu'un échange entre ces deux pions fournit une solution potentielle : [R R V J V]. En réalité, il peut déjà crier victoire, car on peut montrer que c'est la seule solution. En effet, l'alternative pour interpréter la première rangée serait d'avoir le rouge bien placé, au lieu du jaune. Dans ce cas, la remontée de cette information sur la quatrième ligne conduirait à avoir le jaune central mal placé, ainsi que le vert sur la dernière position ; mais un échange des deux (les autres sont supposés alors être bien placés) ne donnerait pas le rouge en dernière position, et serait donc contradictoire avec l'hypothèse de départ :

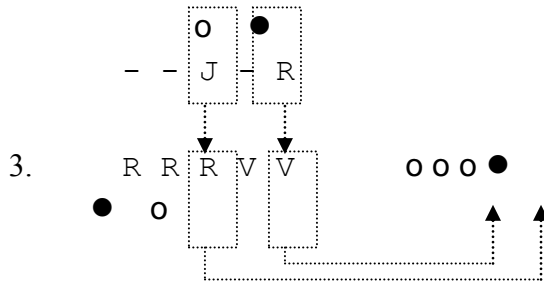


Donnons un second exemple de partie, avec les deux mêmes premiers coups pour simplifier, mais d'autres coups ensuite et une autre configuration à découvrir. Reprenons le cours de la partie quand le joueur a découvert qu'il n'y a que deux modèles alternatifs, 2 J [0 J] ou [1 J] 1 R après deux coups joués. Il tente cette fois de nouvelles positions pour le rouge, pour voir si cette couleur est présente ou non, et introduit une nouvelle couleur : le vert. Supposons qu'il obtienne alors :

3. R R R V V ○ ○ ○ ●
 2. ○ ○ B B B
 1. B B J J R ○ ●

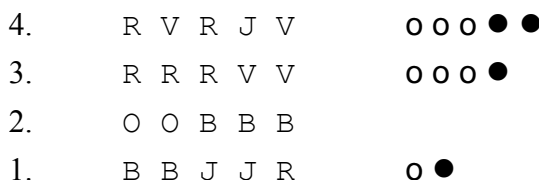
⁷ Le joueur a quasiment fait ce raisonnement pour aboutir à la configuration de la quatrième ligne, mais il a fait une inférence probabiliste. Ici, il vérifie que cette inférence était en réalité logiquement correcte.

Les modèles induits par cette troisième ligne sont [2 R] 2 V ou 3 R [1 V], et il y a donc dans tous les cas au moins deux rouges. En recombinaison cette information avec la première ligne, on obtient qu'il y a un jaune et un seul, d'où seulement deux modèles possibles : [2 R, 2 V, 1 J] ou [3 R, 1 V, 1 J]. Le joueur observe qu'il a découvert au moins découvert 4 pions, et qu'il est dans le cadre du modèle 2 R [1 J] 1 V. Il décide de commencer à raisonner sur les places. En supposant le jaune bien placé au centre, il obtient par projection de la première ligne sur la troisième, que le rouge central s'y trouverait mal placé, et le vert de droite bien placé (cette position ne pouvant être occupée ni par un rouge, ni par un jaune) :

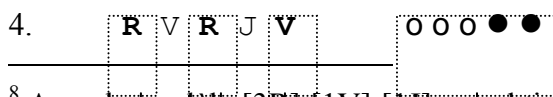


Le jaune central conduit donc au modèle [- - J - V]. Les trois pions des positions restantes du schéma devant être mis en correspondance avec les deux fiches blanches restantes, on en infère qu'au moins l'un des deux premiers rouges est bien placé. Sous l'hypothèse du jaune central, le cas [2 R, 2 V, 1 J] se décline donc en [R R J V V], [R V J R V] ou [V R J R V].

Le joueur vérifie alors une à une ces trois possibilités. Le raisonnement est fastidieux, mais s'il est fort, il en viendra à bout. La combinaison [R R J V V] aurait dû fournir 4 fiches blanches sur la troisième ligne et peut donc être éliminée. De même, les combinaisons [R V J R V] ou [V R J R V] auraient dû donner au moins deux fiches noires. Le cas [2 R, 2 V, 1 J] est donc contradictoire avec le jaune au centre. Mécontent de n'avoir découvert aucune possibilité, le joueur décide alors (un peu arbitrairement⁸) d'abandonner l'hypothèse du jaune central. Il garde néanmoins l'hypothèse d'un jaune bien placé sur la première ligne avec [2 R, 2 V, 1 J] et joue 4. :



Cette fois, toutes les couleurs sont découvertes, et il lui suffit normalement d'échanger deux pions pour trouver la solution. Incertain de son raisonnement, il peut néanmoins ne pas réaliser qu'il vient de montrer que le jaune central et le modèle [2 R, 2 V, 1 J] sont incompatibles. Il n'est donc pas certain d'avoir établi le fait que le jaune est en quatrième position. Pour déterminer quelles sont les correspondances certaines entre les pions et les fiches de la quatrième ligne, le joueur décide alors de reprendre son raisonnement en repartant de faits indiscutables, induits par la comparaison des éléments communs aux lignes 3 et 4. Appliquant cette « technique » d'appariement, il constate (visuellement) que les pions rouge et vert des positions 1, 3 et 5, doivent être mis en correspondance avec trois fiches parmi les quatre encadrées à droite :



⁸ Avec le modèle [3R] [1V] [1J], on obtient de manière la configuration [R R J R V], qui est encore compatible à ce stade avec les 3 premières lignes.

3. **R R R V V** ○ ○ ○ ●

Il peut alors faire le raisonnement suivant : si ces trois pions correspondaient aux trois fiches blanches, la solution serait obtenue en échangeant les pions restants de la quatrième ligne. La solution serait alors [R J R V V], mais, dans ce cas, la troisième rangée devrait comporter 4 fiches blanches. Donc ces trois pions sont en correspondance avec 2 fiches blanches et une fiche noire. Autrement dit, deux des pions sont bien placés, et l'autre, mal placé, devra être échangé avec un autre (en position 2 ou 4). Si les deux rouges étaient bien placés et le vert mal placé, on ne pourrait échanger le vert qu'avec le jaune. On aurait donc nécessairement [R V R V J], mais cette solution n'est pas compatible avec la première ligne qui aurait alors dû comporter deux fiches noires.

Le vert (en dernière position) est donc bien placé, et l'un des deux rouges mal placés. Ce rouge mal placé devrait être échangé avec le vert ou le jaune de la position 2 ou 4. Par ailleurs, le rouge sur la première ligne est mal placé puisqu'il occupe la position du vert, et donc un jaune de cette ligne est bien placé.

Si le joueur considère le pion jaune bien placé en position 4, i.e. sous l'hypothèse [- - - J V], il n'a plus que deux combinaisons à envisager, selon le rouge bien placé pour lequel il opte [R - - J V] ou [- - R J V] (les pions restants se déduisant par échange des deux pions mal placés donnés ligne 4) :

4. **R V R J V** ○ ○ ○ ● ●
 ou 4. **R V R J V** ○ ○ ○ ● ●

Il conclut ainsi soit à [R R V J V] , soit à [V R R J V]. Il peut alors choisir arbitrairement l'une des deux et la jouer car ces deux combinaisons sont compatibles avec les rangées précédentes, comme l'illustrent les deux schémas suivants (ici, en gras les pions bien placés, obtenus par projection de la solution, et en italique souligné les pions mal placés) :

5. V R R J V compatible???
 4. R V **R** **J** **V** ○ ○ ○ ● ●
 3. R **R** **R** V **V** ○ ○ ○ ●
 2. ○ ○ B B B
 1. B B J **J** R ○ ●

et de même :

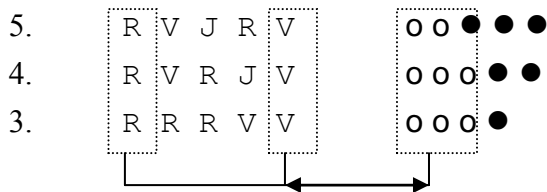
5. R R V J V compatible???
 4. **R** V R **J** **V** ○ ○ ○ ● ●
 3. **R** **R** R V **V** ○ ○ ○ ●
 2. ○ ○ B B B
 1. B B J **J** R ○ ●

Par contre, s'il reprend l'hypothèse du jaune central, [- - J - V], cela lui fournit le rouge mal placé et le rouge bien placé sur la quatrième rangée, soit [R - J - V] et il conclut alors à deux possibilités : [R R J V V] ou [R V J R V]. Mais ces deux combinaisons étant contradictoires avec le nombre de pions bien placés sur la troisième ligne (la première devrait en fournir 4, et la seconde 2), un joueur consciencieux devrait les éliminer et remettre en cause l'hypothèse du pion jaune central.

Supposons néanmoins que le joueur commette l'erreur de ne pas vérifier la cohérence de sa solution potentielle et joue [R V J R V], il obtiendra alors par exemple :

5. R V J R V ○ ○ ● ● ●

Et cette fois, la comparaison des éléments communs aux différentes lignes lui fournira rapidement la solution grâce à la mise en correspondance des éléments communs à gauche sur les pions, et à droite sur les fiches :



On en conclut en effet alors « graphiquement » que les pions rouge et vert des extrémités sont nécessairement bien placés, indépendamment de toute hypothèse de départ. Le joueur pourra alors constater son erreur concernant l'hypothèse d'un jaune central (nécessairement mal placé ligne 5), et conclure à [R - - J V] grâce à la ligne 1, puis à la solution [R R V J V], obtenue en échangeant les pions vert et rouge des positions 2 et 3 sur la quatrième ligne.

4. Conclusion

Dans ce rapport, nous avons donné deux exemples montrant l'efficacité des diagrammes dans la résolution de problèmes où les hypothèses ont une forme d'abstraction limitée. Cette efficacité provient essentiellement de la *clôture sous contraintes*, propriété logique très forte de certains systèmes de représentations diagrammatiques. Mais ce n'est pas uniquement pour bénéficier de ses avantages que les humains utilisent des diagrammes. Au jeu de MasterMind, leur utilisation permet aussi de pallier la limitation des capacités cognitives du joueur. Ils permettent d'ancrer le raisonnement sur la grille et des capacités visuelles peu coûteuses, soulageant ainsi la mémoire verbale. Mais en retour, les capacités visuelles, elles aussi limitées, influencent la forme et la complexité des diagrammes et des inférences.

Dans la résolution du problème d'Einstein, la clôture sous contraintes explique l'efficacité de la solution proposée et justifie l'ensemble du raisonnement. Au jeu du MasterMind, le raisonnement est plus fragmenté et plus opportuniste, et il consiste en une série de déductions partielles utilisant différents types de représentations. Chaque coup joué amène avec lui de nouveaux diagrammes, et l'on ne peut pas toujours projeter sur une rangée les informations contenues dans un diagramme provenant d'une autre. La propriété de clôture sous contraintes s'y manifeste donc aussi⁹, mais ici de manière locale.

Cette étude sur le raisonnement des joueurs a montré qu'ils développent des stratégies de résolution proprement graphiques, en projetant sur la grille des représentations géométriques, sans nécessairement passer par une forme linguistique. Les projections mentales des hypothèses effectuées sont ainsi propagées d'une rangée à l'autre pour vérifier qu'elles ne sont pas contradictoires avec la grille. On a aussi observé (cf. la fin du raisonnement dans le second exemple) que certains joueurs cherchaient à repérer les pions communs à plusieurs rangées pour en inférer un schéma minimal d'interprétation de leurs fiches communes. Cette stratégie visuelle est ici ancrée sur des opérations de *pattern matching* entre les lignes, et sur la mise en correspondance d'ensemble de fiches et de pions. Les joueurs évaluent également visuellement

⁹ Par exemple, quand un modèle qui spécifie les couleurs mais pas les places est représenté avec des pions concrets, il n'est pas nécessaire de vérifier que la somme des cardinalités des couleurs est inférieure à 5 : il suffit de ne considérer que des ensembles de moins de 5 pions. De même lorsqu'un pion de couleur est posé sur la grille pour représenter un début de solution, cette construction physique inclut d'emblée toutes les conséquences logiques qui en résultent.

les probabilités des modèles envisageables en comparant les rapports de masses des couleurs. Certaines inférences réalisées peuvent donc être qualifiées de graphiques ou visuelles. On a aussi remarqué qu'un joueur qui obtient 3 fiches blanches et 2 fiches noires sait d'expérience qu'il lui suffit d'échanger deux pions pour arriver à la solution. Cette inférence totalement automatique, est directement ancrée sur la série des fiches physiques de la grille, et exprime la conclusion directement sur la combinaison physique des pions. Cette règle est donc « graphique » au niveau de sa prémisse (ce qui en permet l'automatisation) et aussi au niveau de sa conclusion, qui s'exprime directement sur la représentation utilisée, i.e. la combinaison physique de pions.

On constate aussi que la géométrie de la grille est utilisée pour simplifier la mise en œuvre du raisonnement et les retours en arrière. La grille assure donc la mémorisation des coups précédents, mais sert également de support de preuves. Le raisonnement général est fondé sur des faits partiels découverts à chaque coup, mais finit par se baser sur une hypothèse d'interprétation de la première rangée ou des modèles induits à partir de celle-ci. On constate ensuite souvent un ordonnancement du raisonnement basé sur l'ordre vertical des rangées.

Bibliographie

- Barwise J. & Etchemendy J., 1990, « Visual Information and Valid Reasoning », dans *Visualization in Mathematics*, Zimmerman, W., ed., Mathematical Association of America, Washington DC, 1990, et dans *Philosophy and the Computer*, Westview Press.
- Johnson-Laird P.N., 1983, *Mental Models: towards a cognitive science of language, inference, and consciousness*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Recanati C., 2004, « Raisonner avec des diagrammes : perspectives cognitives et computationnelles », rapport LIPN 2004-03, Université de Paris13, Fev. 2004 (paru depuis dans *Intellectica n°40, pp.9-42, en 2005*).
- Stenning K. & Oberlander I., 1995, « A Cognitive Theory of Graphical and Linguistic Reasoning: Logic and Implementation » in *Cognitive Science*, vol. 19 (1).