Identification d'un processus autorégressif gaussien stable par la méthode de moyennisation logarithmique dans le cas réel

Faouzi Chaabane*et Hamdi Fathallah †

juin 2006

Résumé

Dans ce travail, on considère un modèle autorégressif gaussien stable à temps continu unidimentionnel et on lui applique les théorèmes limites par moyennisation logarithmique obtenus pour des martingales locales continues à temps continu. On construit alors un estimateur de la covariance du bruit σ^2 et un autre estimateur de θ autre que celui des moindres carrés. En exploitant la méthode de pondération, on améliore les vitesses de convergence de ces nouveaux estimateurs.

Identification of a stable gaussian autoregression process by logarithmic averaging method in the real case

Abstract

In the present work, we consider a stable one-dimensional gaussian autoregressive model in continous time. Using the limit theorems with logarithmic averaging obtained for continous local martingales, we construct then an estimator of the noise covariance σ^2 and an estimator of θ different of the one of the least squares estimator. By exploiting the weighting method we ameliorate the convergence rates of these new estimators.

Keywords : Martingale ; Weight ; Almost-sure central limit theorem ; Logarithmic central limit theorem ; law of iterated logarithm.

*Equipe d'Analyse Stochastique et Modélisation Statistique, Faculté des Sciences de Bizerte, 7021 Jarzouna (Tunisie). Tel :+21672590613 ; Fax :+21672590566, E-mail address :faouzi.chaabane@fsb.rnu.tn.

†Laboratoire LMV, Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines, 45 Avenue des Etats-Unis Batiment Ferma 78035 Versailles (France). Tel :+33139253629 ; Fax :+33139254645, E-mail address :hamdi.fathallah@math.uvsq.fr

1 Introduction

Le but de ce travail est d'estimer les paramètres d'un modèle autorégressif gaussien stable à temps continu unidimentionnel. Etant donné un mouvement brownien standard réel $B = (B_t,\, t \geq 0)$. On définit le processus autorégressif $X = (X_t, t \geq 0)$ avec $X_0 = 0$ par la relation :

$$X_t = \theta \int_0^t X_s ds + \sigma B_t; \quad t \geq 0, \tag{1}$$

avec $\theta \leq 0$ et σ un paramètre réel.
On désigne par $\tilde{\theta}_t$ l'estimateur des moindres carrés pondéré de θ défini par

$$\tilde{\theta}_t = P_t^{-1} \int_0^t \omega_s X_s dX_s, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

correspondant au poids (ω_s) donné par

$$\omega_s = s^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}\}; \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1, \tag{3}$$

avec $P_t = \displaystyle\int_0^t \omega_s X_s^2 ds$ et par $\bar{\theta}_t = \frac{1}{t} \displaystyle\int_0^t \tilde{\theta}_s ds$ son moyennisé.
On remarque que pour $\omega_s = 1$ on obtient l'estimateur des moindres carrés $\widehat{\theta}_t$ de θ défini par

$$\widehat{\theta}_t = (\zeta_t)^{-1} \int_0^t X_s dX_s, \quad t \geq 0, \quad \text{avec} \quad \zeta_t = \int_0^t X_s^2 ds. \tag{4}$$

Dans [3], dans le cas multidimentionnel, Darwich montre que cet estimateur vérifie la loi du logarithme itéré (LLI). De façon précise, on a

$$|\widehat{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big((\frac{\log\log t}{t})^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s..$$

Ce résultat, dans le cas unidimentionnel, découle de la LLI pour les martingales réelles continues (voir [6]). Les théorèmes limites par moyennisation logarithmique permettent entre autre de montrer des résultats aussi bien pour l'estimateur des moindres carrés que l'estimateur pondéré de type
$*$ Théorème de la limite centrale presque-sûre

$$\text{TLCPS :} \quad \frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{s} \, \delta_{\{\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\theta) \quad p.s..$$

Avec $(\Longrightarrow)$ dénote la convergence en loi.
La convergence en moyenne d'ordre deux associée au TLCPS permet d'une part de construire un estimateur de σ et d'autre part de donner un autre estimateur de θ

$$* \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\log t} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$* \quad \breve{\theta}_t = \dfrac{1}{2\log t}\displaystyle\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

On donnera par la suite les vitesses de convergence en loi et presque sûre de l'estimateur $\breve{\theta}_t$ de θ. La méthode de pondération nous permettera d'améliorer les vitesses de convergence de ces estimateurs. les principaux résultats seront énoncés au paragraphe 2 et leurs preuves seront données au paragraphe 4. Le paragraphe 3 sera consacré à la donnée de quelques outils de démonstration.

2 Enoncé des principaux résultats

2.1 Cas sans pondération ($\omega_s = 1$)

Théorème 2.1 *Soit* $X = (X_t,\, t \geq 0)$ *le régresseur stochastique défini par* (1). *Alors on a les résultats suivants*

1. *Théorème de la limite centrale presque-sûre*

$$\text{TLCPS :} \quad \frac{1}{\log t}\int_0^t \frac{ds}{s}\,\delta_{\{\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\theta) \quad p.s..$$

2. *La loi forte quadratique*

$$i) \quad \frac{1}{\log t}\int_0^t \zeta_s^2(\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \frac{ds}{s^2} \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$$ii) \quad \hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{\log t}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

iii) Si de plus on suppose que les observations $(X_t,\, t \geq 0)$ *vérifient l'hypothèse suivante*

$$(H1) \quad \frac{1}{t}\int_0^t X_s^2 ds = \frac{\sigma^2}{2\theta} + \mathbf{o}\Big((\log\log t)^{-1}\Big) \quad p.s., \tag{5}$$

on obtient

$$\breve{\theta}_t = \frac{1}{2\log t}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Théorème 2.2 *On se place dans le cadre du théorème* 2.1 *et en renforçant l'hypothèse* $(H1)$ *de la manière suivante*

$$(H2) \quad \frac{1}{t}\int_0^t X_s^2 ds = \frac{\sigma^2}{2\theta} + \mathbf{o}\Big((\log\log t)^{-1}(\log t)^{-\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s., \tag{6}$$

on obtient

1. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$\text{TLCL :} \quad \sqrt{\log t}\left(\frac{1}{2\log t}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds - \theta\right) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, (2\theta)^2).$$

2. La loi du logarithme itéré logarithmique

$$LLIL: \quad \limsup_{t\to\infty} \frac{\log t}{\sqrt{\log\log\log t}} \left| \frac{1}{2\log t} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds - \theta \right| = 2\theta\sqrt{2} \quad p.s..$$

2.2 Cas avec pondération

Théorème 2.3 *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien à temps continu défini par la relation (1). Alors l'estimateur de moindre carré pondéré $\widetilde{\theta}_t$ de θ donné par la relation (2) ainsi son moyennisé $\bar{\theta}_t$ convergent au sens presque-sûr. De façon précise, pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on a*

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big((\frac{\log t}{t^\alpha})^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s..$$

Si de plus on suppose que $2\alpha - 1 \leq \alpha' < \frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}$, on a

$$|\bar{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big((\frac{\log\log t}{t})^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s..$$

Théorème 2.4 *Sous les hypothèses du théorème 2.3, on a les résultats suivants*

1. Théorème de la limite centrale presque-sûre

$$TLCPS: \quad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{s^{\frac{\alpha}{2}}(\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 2\theta) \quad p.s..$$

2. La loi forte quadratique

$$i) \quad \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{U_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

$$ii) \quad \tilde{\sigma}_t^2 = \frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

iii) Si de plus on suppose que les observations $(X_t,\, t \geq 0)$ vérifient l'hypothèse suivante

$$(H3) \qquad \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-1}) \ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad avec \quad \frac{1}{2} \leq \alpha' < \alpha,$$

on dégage un estimateur fortement consistant de θ à savoir

$$\breve{\theta}_t = \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Théorème 2.5 *Soit $X = (X_t,\, t \geq 0)$ le processus autorégressif gaussien à temps continu satisfisant l'équation (1). Supposons que les observations $(X_t,\, t \geq 0)$ vérifient l'hypothèse suivante*

$$(H4) \qquad \frac{1}{t} \int_0^t X_s^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-1}) \ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty), \quad pour \quad \frac{1}{2} \leq \alpha' < 3\alpha - 2.$$

Alors, on obtient

1. *Théorème de la limite centrale logarithmique*

$$\textit{TLCL :}\quad t^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}}\int_0^t(\tilde{\theta}_s-\bar{\theta}_t)^2ds-\theta\right)\Longrightarrow\mathcal{N}(0,4\theta^2(1-\alpha)).$$

2. *La loi du logarithme itéré logarithmique*

$$\textit{LLIL :}\quad \limsup_{t\to\infty}\frac{t^{1-\alpha}}{\sqrt{\log\log t^{1-\alpha}}}\left|\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}}\int_0^t(\tilde{\theta}_s-\bar{\theta}_t)^2ds-\theta\right|=\sqrt{2(1-\alpha)}2\theta\quad p.s..$$

3 Les outils des démonstrations

Au début de ce paragraphe, on introduit $\tilde{M}=(\tilde{M}_t,t\geq 0)$ la martingale locale réelle continue définie par

$$\tilde{M}_t=\int_0^t\omega_sX_sdB_s,\quad t\geq 0,$$

dont le processus croissant prévisible $\langle\tilde{M}\rangle=(\langle\tilde{M}\rangle_t,t\geq 0)$ est donné par

$$\langle\tilde{M}\rangle_t=\int_0^t\omega_s^2X_s^2ds. \tag{7}$$

D'une part, d'après (1) et (2), on a

$$\tilde{M}_t=\sigma^{-1}P_t(\tilde{\theta}_t-\theta);\quad t\geq 0. \tag{8}$$

D'autre part, on a d'après les relations (1) et (4)

$$M_t=\sigma^{-1}\zeta_t(\widehat{\theta}_t-\theta);\quad t\geq 0, \tag{9}$$

où $M=(M_t,t\geq 0)$ est la martingale locale réelle continue définie par

$$M_t=\int_0^tX_sdB_s,\quad t\geq 0,$$

dont le processus croissant prévisible $\langle M\rangle=(\langle M\rangle_t,t\geq 0)$ n'est autre que le processus $\zeta=(\zeta_t,t\geq 0)$ introduit dans la relation (4).
Afin de simplifier les preuves des principaux résultats, on étudiera les comportements asymptotiques des processus $(\langle M\rangle_t,\, t\geq 0)$, $(\langle\tilde{M}\rangle_t,\, t\geq 0)$ et $(P_t,\, t\geq 0)$. On donnera ensuite quelque propriétés de la pondération (ω_t).
Le lemme suivant (voir [4]) donne Le comportement de la variation quadratique prévisible de la martingale M.

Lemme 3.1 *Soit le processus $(X_t,\, t\geq 0)$ défini par (1). Alors*

$$\frac{1}{t}\int_0^tX_s^2ds\longrightarrow\frac{\sigma^2}{2\theta}\quad p.s.,\quad(t\longrightarrow\infty). \tag{10}$$

Pour (ω_t), le poids défini par (3), on introduit les deux processus suivants

$$V_t = \Big(\int_0^t \omega_s^2 ds\Big)^{\frac{1}{2}} \quad et \quad U_t = \int_0^t \omega_s ds, \quad t \geq 0.$$

On a alors les lemmes suivants

Lemme 3.2 *Le poids (ω_t) satisfait les propriétées suivantes :*

$P_1)$ $t^{-\alpha}\omega_t^{-1}U_t = 2 + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_2)$ $t^{-\alpha}\omega_t^{-2}V_t^2 = 1 + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_3)$ $\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \log V_t^2 = \mathbf{o}(\log t), \quad (t \longrightarrow \infty).$

$P_4)$ $\displaystyle\int_0^t \frac{V_s^2}{U_s^2} ds - \frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} = \mathbf{o}(\log t), \quad (t \longrightarrow \infty).$

Lemme 3.3 *On suppose que les observations $(X_s,\ s \geq 0)$ vérifient l'hypothèse $(H3)$ du théorème 2.4 suivante*

$$\frac{1}{t}\int_0^t X_s^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-1}) \ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty) \quad pour \ \frac{1}{2} \leq \alpha' < \alpha.$$

Alors, on a

i) $\dfrac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{V_t} - \dfrac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-\alpha}) \ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

ii) $\dfrac{P_t}{U_t} - \dfrac{\sigma^2}{2\theta} = o(t^{\alpha'-\alpha}) \ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$

La preuve de ces deux lemmes est donnée dans l'annexe.

4 Démonstration des principaux résultats

Preuve du théorème 2.1

1. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre pour le couple (M, V) avec $V_t^2 = t$ (voir théorème 1 dans [2]), on obtient

$$(\log t)^{-1}\int_0^t \frac{ds}{s}\delta_{\{\frac{M_s}{\sqrt{s}}\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}) \quad p.s..$$

Vu les deux relations (9) et (10) on a

$$\frac{M_s}{\sqrt{s}} \sim \frac{\sigma}{2\theta}\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta) \quad p.s., \quad (s \longrightarrow \infty). \tag{11}$$

Soit

$$\Delta_t = \int_0^t \varphi(\frac{M_s}{\sqrt{s}})\frac{ds}{s} - \int_0^t \varphi(\frac{\sigma}{2\theta}\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta))\frac{ds}{s},$$

où φ est une fonction lipschitzienne continue.
Grâce à l'équivalence (11), on a

$$(\log t)^{-1}|\Delta_t| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{ds}{s}\, \delta_{\{\frac{\sigma}{2\theta}\sqrt{s}(\widehat{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}).$$

Le résultat en découle.

2. i) D'après la relation (9), on a

$$M_s^2 = \sigma^{-2}\langle M\rangle_s^2(\widehat{\theta}_s - \theta)^2. \tag{12}$$

La loi forte quadratique une (LFQ1) appliquée à la martingale M normalisée par le processus $(V_t = \sqrt{t}, t \geq 0)$ (voir théorème 3 dans [2]) donne

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{M_s^2}{s}\frac{ds}{s} \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta} \quad p.s.. \tag{13}$$

Compte tenu de la relation (12), on voit que

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \langle M\rangle_s^2(\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \frac{ds}{s^2} \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s.. \tag{14}$$

Ainsi le résultat est établi.

ii) En appliquant la loi forte quadratique deux (LFQ2) au couple (M, V) (voir théorème 3 dans [2]), on obtient

$$(\log t)^{-1} \int_0^t \frac{M_s^2}{\langle M\rangle_s^2} d\langle M\rangle_s \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la relation (9), on a

$$(\log t)^{-1} \int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds \longrightarrow \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{15}$$

D'une part, dans [3], Darwich a montré que

$$|\widehat{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\left((\frac{\log\log t}{t})^{\frac{1}{2}} \right) \quad p.s.. \tag{16}$$

D'autre part, vu que

$$\bar{\theta}_t - \theta = \frac{1}{t}\int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)\, ds, \tag{17}$$

et en tenant compte de la relation (16), on obtient

$$|\bar{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big((\frac{\log\log t}{t})^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s.. \tag{18}$$

On remarque que

$$\Big|(\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds - (\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds\Big| \leq$$

$$\underbrace{(\log t)^{-2}(\bar{\theta}_t - \theta)\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t) X_s^2 ds}_{(C_t)} + \underbrace{(\log t)^{-1}(\bar{\theta}_t - \theta)^2 \int_0^t X_s^2 ds}_{(D_t)}.$$

En utilisant les relations (10) et (18), on obtient

$$C_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad D_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Ce qui implique que

$$\Big|(\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds - (\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds\Big| \longrightarrow 0 \quad p.s., \ (t \longrightarrow \infty). \tag{19}$$

Le résultat découle des convergences (15) et (19).

iii) La propriété (14) s'écrit

$$(\log t)^{-1}\Big(\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds + \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds \Big) \longrightarrow \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \ (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la relation (16), on obtient

$$(\log t)^{-1}\int_{t_0}^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds = (\log t)^{-1}\int_{t_0}^t \mathcal{O}\Big(\frac{\log\log s}{s}\Big)\Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds.$$

Vu l'hypothèse (H1), on a

$$(\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$(\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow 2\theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{20}$$

Par ailleurs, on voit que

$$\Big|(\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds - (\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds\Big| \leq$$

$$\underbrace{t(\log t)^{-1}(\bar{\theta}_t - \theta)^2}_{(G_t)} + \underbrace{2(\log t)^{-1}(\theta - \bar{\theta}_t)\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t) ds}_{(H_t)}.$$

D'après la relation (18), on obtient

$$G_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad H_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$\left|(\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds - (\log t)^{-1}\int_0^t (\widehat{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds\right| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{21}$$

Alors, d'après les convergences (20) et (21), on conclut le résultat.

Preuve du théorème 2.2

1. Grâce à l'hypothèse (H2), on a

$$\frac{\langle M\rangle_t}{t} = \frac{\sigma^2}{2\theta} + \mathbf{o}\Big((\log t)^{-2}\Big) \quad p.s..$$

Alors en appliquant le théorème de la limite centrale logarithmique au couple (M, V) (voir théorème 5 dans [2]) pour $V_t^2 = t$ et $f(x) = x^2 - 1$, on obtient

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t \Big(\frac{M_s^2}{s} - \frac{\sigma^2}{2\theta}\Big)\frac{ds}{s} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}).$$

Par suite

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t \frac{M_s^2}{s^2} ds - \frac{\sigma^2}{2\theta}(\log t)^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}).$$

Ainsi vu la relation (9), il vient que

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t \frac{M_s^2}{s^2} ds = \sigma^{-2}(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t \frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2}(\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Désormais, on pose

$$I_t = \int_1^t \frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2}(\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Donc

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}} I_t = \int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds + \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 ds. \tag{22}$$

D'après la relation (16), on a

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t (\widehat{\theta}_s - \theta)^2 \Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds =$$

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t \mathcal{O}\Big(\frac{\log\log s}{s}\Big)\Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big) ds \quad p.s.. \tag{23}$$

L'hypothèse (H2), implique que

$$\frac{\langle M\rangle_t^2}{t^2}-\frac{\sigma^4}{4\theta^2}=\mathbf{o}\Big((\log\log t)^{-1}(\log t)^{-\frac{1}{2}}\Big)\quad p.s..$$

Sous cette dernière hypothèse, on voit que

$$(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t(\widehat{\theta}_s-\theta)^2\Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2}-\frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big)ds\ \longrightarrow\ 0,\quad (t\longrightarrow\infty).$$

Par suite

$$\frac{\sigma^2}{2\theta}(\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t(\widehat{\theta}_s-\theta)^2ds-\frac{\sigma^2}{2\theta}(\log t)^{\frac{1}{2}}\Longrightarrow\mathcal{N}(0,\frac{\sigma^4}{\theta^2}).$$

Ce qui signifie que

$$(\log t)^{\frac{1}{2}}\Big[(2\log t)^{-1}\int_1^t(\widehat{\theta}_s-\theta)^2ds-\theta\Big]\Longrightarrow\mathcal{N}(0,(2\theta)^2).$$

Ainsi le résultat est établi grâce à la convergence (21).

2. En appliquant la loi du logarithme itéré logarithmique au couple (M,V) (voir théorème 5 dans [2]), on obtient

$$\limsup_{t\to\infty}(2\log t\log\log\log t)^{-\frac{1}{2}}\Big|\int_1^t(\frac{M_s^2}{s}-\frac{\sigma^2}{2\theta})\frac{ds}{s}\Big|=\frac{\sigma^2}{\theta}\quad p.s..$$

Grâce à la relation (9), on a

$$\int_1^t\frac{M_s^2}{s}\frac{ds}{s}=\sigma^{-2}\int_1^t\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2}(\widehat{\theta}_s-\theta)^2ds=\sigma^{-2}I_t.$$

Vu les deux relations (22) et (23), il vient que

$$(2\log t\log\log\log t)^{-\frac{1}{2}}\int_1^t(\widehat{\theta}_s-\theta)^2\Big(\frac{\langle M\rangle_s^2}{s^2}-\frac{\sigma^4}{4\theta^2}\Big)ds\ \longrightarrow\ 0,\quad (t\longrightarrow\infty).$$

Ce qui implique

$$\limsup_{t\to\infty}(2\log t\log\log\log t)^{-\frac{1}{2}}\log t\Big|\frac{1}{2\log t}\int_1^t\Big(\widehat{\theta}_s-\theta)^2ds-\theta\Big|=2\theta\quad p.s..$$

Ainsi compte tenu de la convergence (21), on déduit le résultat.

Preuve du théorème 2.3

D'après la loi du logarithme itéré appliquée à la martingale continue $\tilde{M}$ (voir [6]), on a

$$V_t^{-1}\tilde{M}_t = \mathcal{O}\Big((\log\log V_t)^{\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s.. \tag{24}$$

Vu la relation (8), la propriété (P_3) du lemme 3.2 et la propriété ii) du lemme 3.3, on conclut que

$$|\tilde{\theta}_t - \theta| = \mathcal{O}\Big((\frac{\log t}{t^{\alpha}})^{\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s.. \tag{25}$$

D'où la première assertion du théorème.
Par ailleurs grâce aux relations (8) et (17), on obtient

$$t^{\frac{1}{2}}(\bar{\theta}_t - \theta) = \sigma t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s}{P_s}\, ds.$$

La propriété (P_4) implique que

$$\frac{V_s}{U_s} = s^{-\frac{\alpha}{2}} + o(s^{\frac{\alpha}{2}-1})) \quad p.s..$$

D'après ii) du lemme 3.3, on a

$$\frac{U_s}{P_s} = \frac{2\theta}{\sigma^2} + o(s^{\alpha'-\alpha}) \quad p.s..$$

Par conséquent vu que $\alpha' - \frac{3}{2}\alpha > \alpha' - \frac{\alpha}{2} - 1$ et $\alpha' > 2\alpha - 1$, on obtient

$$t^{\frac{1}{2}}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{2\theta}{\sigma} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{M}_s}{V_s}\, ds + t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t o(s^{\alpha'-\frac{3}{2}\alpha}) \frac{\tilde{M}_s}{V_s}\, ds.$$

Posons $Z_s = \dfrac{\tilde{M}_s}{V_s}$. D'après la relation (24), on montre que

$$Z_s = \mathcal{O}((\log s)^{\frac{1}{2}}) \quad p.s.. \tag{26}$$

On déduit que

$$t^{\frac{1}{2}}(\bar{\theta}_t - \theta) = \frac{2\theta}{\sigma} t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{\tilde{M}_s}{V_s}\, ds + \mathcal{O}\Big(t^{\alpha'-\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{2}}(\log t)^{\frac{1}{2}}\Big) \quad p.s.. \tag{27}$$

Comme $\dfrac{dV_s}{V_s} \sim \dfrac{s^{-\alpha}}{2} ds$, $(s \longrightarrow \infty)$. Alors

$$\frac{1}{2}\int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} Z_s ds = -\underbrace{\int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}} dZ_s}_{(K_t)} + \underbrace{\int_0^t \frac{s^{\frac{\alpha}{2}}}{V_s} d\tilde{M}_s}_{(L_t)}. \tag{28}$$

D'une part

$$K_t = t^{\frac{\alpha}{2}} Z_t - \frac{\alpha}{2} \int_0^t s^{\frac{\alpha}{2}-1} Z_s ds.$$

Grâce à la relation (26), il vient que

$$K_t = \mathcal{O}\Big((t^\alpha \log t)^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s.. \tag{29}$$

D'autre part, on a

$$\langle L \rangle_t = t^\alpha \frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{V_t^2} - \alpha \int_0^t s^{\alpha-1} \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{V_s^2} ds - 2 \int_0^t s^\alpha \frac{\langle \tilde{M} \rangle_s}{V_s^2} \frac{dV_s}{V_s}.$$

L'assertion i) du lemme 3.3 implique que

$$\langle L \rangle_t = \mathcal{O}(t) \quad p.s..$$

Encore une fois, la LLI appliquée à la martingale continue $\tilde{M}$ montre que

$$L_t = \mathcal{O}\Big((t \log \log t)^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s.. \tag{30}$$

En insérant (29) et (30) dans (28), on obtient

$$\int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}} Z_s ds = \mathcal{O}\Big((t \log \log t)^{\frac{1}{2}} \Big) + \mathcal{O}\Big((t^\alpha \log t)^{\frac{1}{2}} \Big) \quad p.s.. \tag{31}$$

En combinant (27) et (31), la deuxième assertion du théoèreme est établie.

Preuve du théorème 2.4

1. En appliquant le théorème de la limite centrale presque-sûre pour le couple $(\tilde{M}, V)$ avec $V_t^2 = \displaystyle\int_0^t \omega_s^2 ds$, on obtient

   $$(\log V_t^2)^{-1} \int_0^1 \delta_{\{V_s^{-1} \tilde{M}_s\}} d(\log V_s^2) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}) \quad p.s..$$

   D'après la propriété (P_3) du lemme 3.2, on a

   $$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^1 \delta_{\{V_s^{-1} \tilde{M}_s\}} \frac{ds}{s^\alpha} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}) \quad p.s..$$

   Grâce à la relation (8), on obtient

   $$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{ds}{s^\alpha} \delta_{\{\frac{\sigma}{2\theta} s^{\frac{\alpha}{2}} (\tilde{\theta}_s - \theta)\}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2\theta}) \quad p.s..$$

   Le résultat en découle.

2. i) D'après la LFQ1 appliquée à la martingale $\tilde{M}$ normalisée par le processus $V_t^2 = \int_0^t \omega_s^2 ds$, on a

$$(\log V_t^2)^{-1} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2} \frac{dV_s^2}{V_s^2} \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu la relation (8), on a

$$\tilde{M}_t^2 = \sigma^{-2} P_t^2 (\tilde{\theta}_t - \theta)^2. \tag{32}$$

Compte tenu de cette relation et de la propriété (P_3) du lemme 3.2, on voit immédiatement que

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{U_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \;\longrightarrow\; \frac{\sigma^4}{2\theta} \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{33}$$

ii) En appliquant la LFQ2 au couple $(\tilde{M}, V)$, on obtient

$$(\log \langle \tilde{M} \rangle_t)^{-1} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s^2}{\langle \tilde{M} \rangle_s^2} d\langle \tilde{M} \rangle_s \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Compte tenu de la propriété (P_3) du lemme 3.2 et de la propriété i) du lemme 3.3, on a

$$\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{\tilde{M}_s^2}{\langle \tilde{M} \rangle_s^2} d\langle \tilde{M} \rangle_s \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Vu les relations (7) et (8), on obtient

$$\frac{\sigma^2(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{\langle \tilde{M} \rangle_s^2} (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 \omega_s^2 X_s^2 ds \longrightarrow 1 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la propriété (P_2) du lemme 3.2, on a

$$\frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds \;\longrightarrow\; \sigma^2 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{34}$$

Notons que

$$\Big| \frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 X_s^2 ds - \frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 X_s^2 ds \Big| \leq$$
$$\underbrace{\frac{8(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} (\bar{\theta}_t - \theta) \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t) X_s^2 ds}_{(E_t)} + \underbrace{\frac{4(1-\alpha)}{t^{1-\alpha}} (\bar{\theta}_t - \theta)^2 \int_0^t X_s^2 ds}_{(F_t)}.$$

D'après le théorème 2.3 et la relation (10), on obtient

$$E_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad F_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{35}$$

Grâce à la convergence (34), le résultat est établi.

iii) Posons

$$\tilde{I}_t = \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{P_s^2}{U_s^2}(\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds.$$

Soit

$$\tilde{I}_t = \tilde{I}_t^1 + \tilde{I}_t^2$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{I}_t^1 &= \frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 (\frac{P_s^2}{U_s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2}) ds \quad \text{et} \\ \tilde{I}_t^2 &= \frac{\sigma^4(1-\alpha)}{4\theta^2 t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds. \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse $(H3)$, la relation ii) du lemme 3.3 implique que

$$\Big(\int_0^t \omega_s ds\Big)^{-2} \Big(\int_0^t \omega_s X_s^2 ds\Big)^2 - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} = \mathbf{o}\Big(t^{2(\alpha-1)}(\log t)^{-1}\Big) \quad p.s.. \tag{36}$$

D'après le théorème 2.3 et la relation (36), il vient que

$$\Big|\tilde{I}_t - \tilde{I}_t^2\Big| \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à la propriété (33), on obtient

$$\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds \longrightarrow \theta \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{37}$$

Par ailleurs, pour $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, on voit que

$$\left|\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds\right| \leq$$

$$\underbrace{\frac{1-\alpha}{t^{1-\alpha}}(\bar{\theta}_t - \theta) \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t) ds}_{(Q_t)} + \underbrace{\frac{1-\alpha}{2t^{-\alpha}}(\bar{\theta}_t - \theta)^2}_{(S_t)}.$$

Le théorème 2.3 implique que

$$Q_t \longrightarrow 0 \quad p.s. \quad \text{et} \quad S_t \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent

$$\left|\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \bar{\theta}_t)^2 ds\right| \longrightarrow 0 \quad p.s., \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{38}$$

Alors compte tenu de la convergence (37), le résultat est établi.

Preuve du théorème 2.5

1. D'après i) du lemme 3.3 et vu que $\frac{1}{2} \leq \alpha' < 3\alpha - 2$, l'hypothèse $(H4)$ implique que

$$\Big(\int_0^t \omega_s^2 ds\Big)^{-1}\Big(\int_0^t \omega_s^2 X_s^2 ds\Big) - \frac{\sigma^2}{2\theta} = \mathbf{o}(t^{2(\alpha-1)}) \quad p.s..$$

Alors en appliquant le TLCL au couple $(\tilde{M}, V)$ pour $V_t^2 = \int_0^t \omega_s^2\, ds$ et $f(x) = x^2 - 1$, on obtient

$$(\log V_t^2)^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2} - \frac{\sigma^2}{2\theta})\frac{dV_s^2}{V_s^2} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}). \tag{39}$$

Grâce à la propriété (P_3) du lemme 3.2 et la relation (8), on obtient

$$(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{\tilde{M}_s}{V_s^2}\frac{ds}{s^\alpha} \sim \sigma^{-2}(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{-\frac{1}{2}} \int_1^t \frac{P_s^2}{U_s^2}(\tilde{\theta}_t - \theta)^2 ds, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{40}$$

Soit $\tilde{J}_t$ le terme de droite de la dernière équivalence. On pose

$$\tilde{J}_t = \tilde{J}_t^1 + \tilde{J}_t^2$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{J}_t^1 &= \sigma^{-2}(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\tilde{\theta}_t - \theta)^2(\frac{P_s^2}{U_s^2} - \frac{\sigma^4}{4\theta^2})ds \quad \text{et} \\ \tilde{J}_t^2 &= \frac{\sigma^2}{4\theta^2}(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{-\frac{1}{2}} \int_1^t (\tilde{\theta}_t - \theta)^2 ds. \end{aligned}$$

Vu l'hypothèse $(H4)$ et d'après ii) du lemme 3.3, il vient que pour $\alpha' < 3\alpha - 2$

$$\Big(\int_0^t \omega_s ds\Big)^{-2}\Big(\int_0^t \omega_s X_s^2 ds\Big)^2 - \frac{\sigma^4}{4\theta^2} = \mathbf{o}\Big(t^{\frac{(\alpha-1)}{2}}(\log t)^{-1}\Big) \quad p.s.. \tag{41}$$

D'après le théorème 2.3 et la relation (41), on déduit que

$$\Big|\tilde{J}_t - \tilde{J}_t^2\Big| \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{42}$$

En combinant (39), (40) et (42), on obtient

$$\frac{\sigma^2}{4\theta^2}(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{-\frac{1}{2}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \frac{\sigma^2}{2\theta}(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^4}{\theta^2}).$$

Alors

$$(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{\frac{1}{2}}\Bigg(\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}} \int_0^t (\tilde{\theta}_s - \theta)^2 ds - \theta\Bigg) \Longrightarrow \mathcal{N}(0, 4\theta^2).$$

Grâce à la convergence (38), on obtient le résultat.

2. En appliquant la LLIL au couple $(\tilde{M}, V)$, on obtient

$$\limsup_{t\to\infty}(2\log V_t^2 \log\log\log V_t^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|\int_1^t (\frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2}-\frac{\sigma^2}{2\theta})\frac{dV_s^2}{V_s^2}\Big| = \frac{\sigma^2}{\theta} \quad p.s..$$

Ainsi d'après (42), on a

$$\int_1^t \frac{\tilde{M}_s^2}{V_s^2}\frac{ds}{s^\alpha} \sim (\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha})^{\frac{1}{2}}\tilde{J}_t^2, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Grâce à cette dernière équivalence et la propriété (P_3) du lemme 3.2, on obtient

$$\limsup_{t\to\infty}(2\log V_t^2 \log\log\log V_t^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}}\int_0^t(\tilde{\theta}_s-\theta)^2 ds-\theta\Big| = 2\theta \quad p.s..$$

Ce qui signifie que

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{t^{1-\alpha}}{\sqrt{\log\log t^{1-\alpha}}}\Big|\frac{1-\alpha}{2t^{1-\alpha}}\int_0^t(\tilde{\theta}_s-\theta)^2 ds-\theta\Big| = 2\theta\sqrt{2(1-\alpha)} \quad p.s..$$

Le résultat est établi vu la convergence (38). Ce qui achève la preuve du théorème.

5 Annexe

Preuve du lemme 3.2

1. **Preuve de (P_1)**
Soit $N = (N_t,\, t \geq 0)$ la fonction définie par

$$N_t = t^{-\alpha}\omega_t^{-1}U_t.$$

D'après l'expression du poids (ω_t), on voit que

$$N_t = t^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}\int_0^t s^{-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}ds.$$

Dans la suite on s'interessera au comportement asymptotique de $(N_t,\, t \geq 0)$. Il est clair que

$$N_t \geq t^{-\frac{\alpha}{2}}e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}\Big(\int_{t'}^t s^{-\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}ds\Big), \quad \text{avec} \quad 1 \leq t' < t.$$

Donc

$$N_t \geq e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}\int_{t'}^t s^{-\alpha}e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}ds.$$

Comme

$$\int_{t'}^t s^{-\alpha}e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}ds = 2\Big(e^{\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} - e^{\frac{(t')^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}\Big).$$

D'où, on a

$$N_t \geq 2 - 2e^{\frac{(t')^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}}.$$

Pour $t' < t$, on déduit que

$$N_t - 2 \geq -2e^{\frac{(t')^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} = \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

Par conséquent

$$\liminf_{t\to\infty} t^{1-\alpha}(N_t - 2) = 0.$$

D'où

$$\liminf_{t\to\infty} N_t = 2. \tag{43}$$

Par ailleurs, notons que pour $0 < \lambda < 1$, on a

$$N_t \leq \beta_t^\lambda + \gamma_t^\lambda \tag{44}$$

où

$$\begin{aligned}
\beta_t^\lambda &= t^{-\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \int_1^{t\lambda} s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds, \\
\gamma_t^\lambda &= t^{-\frac{\alpha}{2}} (t\lambda)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \int_{t\lambda}^{t} s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} ds.
\end{aligned}$$

Afin de trouver la limite supérieure de N_t, on cherche le comportement asymptotique des fonctions β_t^λ et γ_t^λ. En remarquant que

$$\begin{aligned}
t^{1-\alpha}\beta_t^\lambda &= 2t^{1-\frac{3}{2}\alpha} e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} \left(e^{-\frac{(t\lambda)^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}} - e^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}} \right) \\
&= 2t^{1-\frac{3}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}\left((t\lambda)^{1-\alpha} - t^{1-\alpha} \right)} - 2t^{1-\frac{3}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2(1-\alpha)}(1-t^{1-\alpha})}
\end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et $0 < \lambda < 1$, on déduit que

$$t^{1-\alpha}\beta_t^\lambda \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty). \tag{45}$$

De la même façon on établit la relation suivante

$$\gamma_t^\lambda = 2\lambda^{\frac{\alpha}{2}} \left(1 - e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}(\lambda^{1-\alpha} - 1)} \right).$$

Comme $\lambda^{1-\alpha} - 1 < 0$, on obtient

$$\gamma_t^\lambda \sim 2\lambda^{\frac{\alpha}{2}}, \ \ (t \longrightarrow \infty).$$

De plus on a

$$t^{1-\alpha}(\gamma_t^\lambda - 2\lambda^{\frac{\alpha}{2}}) = -t^{1-\alpha} e^{\frac{t^{1-\alpha}}{2(1-\alpha)}(\lambda^{1-\alpha}-1)} = \mathbf{o}(1). \tag{46}$$

En remplaçant λ par $\lambda_t = 1 - t^{-\alpha}$, les propriétés (44), (45) et (46) restent vraies. Par conséquent on obtient

$$t^{1-\alpha}(N_t - 2) \leq t^{1-\alpha}\beta_t^{\lambda_t} + t^{1-\alpha}\Big(\gamma_t^{\lambda_t} - 2\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}}\Big) + 2t^{1-\alpha}\Big(\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}} - 1\Big). \tag{47}$$

Vu que λ_t vérifie

$$t^{1-\alpha}(1 - \lambda_t) \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty)$$

on déduit que

$$0 \leq \lambda_t^{\frac{\alpha}{2}} - 1 \leq \frac{\alpha}{2}(\lambda_t - 1)\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}-1} = \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

Compte tenu de ce dernier résultat et le fait que

$$t^{1-\alpha}\beta_t^{\lambda_t} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad t^{1-\alpha}(\gamma_t^{\lambda_t} - 2\lambda_t^{\frac{\alpha}{2}}) \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty),$$

il vient que

$$\limsup_{t\to\infty} N_t = 2. \tag{48}$$

Grâce à (43) et (48), on conclut le résultat.

2. **Preuve de** (P_2)

Posons $N' = (N'_t,\, t \geq 0)$, la fonction définie par

$$N'_t = t^{-\alpha}\omega_t^{-2}V_t^2.$$

D'après l'expression du poids (ω_t), on voit que

$$N'_t = e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \int_0^t s^{-\alpha} e^{\frac{s^{1-\alpha}}{1-\alpha}} ds = 1 - e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \longrightarrow 1, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par ailleurs

$$t^{1-\alpha}(N'_t - 1) = -t^{1-\alpha}e^{-\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \longrightarrow 0, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

D'où la propriété (P_2).

3. **Preuve de** (P_3)

La propriété (P_2) implique que

$$t^{-\alpha} = \frac{\omega_t^2}{V_t^2} + \mathbf{o}\Big(\frac{\omega_t^2}{V_t^2}t^{\alpha-1}\Big).$$

Compte tenu de l'expression du poids, on obtient

$$V_t^2 = e^{\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}} - 1 \sim t^{\alpha}\omega_t^2, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Par conséquent on a

$$t^{-\alpha} - V_t^{-2}\omega_t^2 = \mathbf{o}(t^{-1}).$$

Vu que

$$\frac{\omega_t^2}{V_t^2} \sim V_t^{-2}\frac{dV_t^2}{dt}, \quad (t \longrightarrow \infty).$$

La propriété (P_3) est établie.

4. **Preuve de** (P_4)
   Grâce à la propriété (P_1), on a

$$t^{-2\alpha}\omega_t^{-2}U_t^2 = 4 + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

La propriété (P_2) donne

$$t^{-\alpha}\omega_t^{-2}V_t^2 = \frac{1}{4} + \mathbf{o}(t^{\alpha-1}).$$

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$\frac{V_t^2}{U_t^2} = t^{-\alpha} + \mathbf{o}(t^{-1}).$$

Ce qui achève la preuve de (P_4).

Preuve du lemme 3.3

D'après l'égalité (4), on a

$$\langle\tilde{M}\rangle_t = \frac{\sigma^2}{2\theta}V_t^2 + \int_0^t \omega_s^2(X_s^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta})ds.$$

Comme

$$\frac{\langle M\rangle_t}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t X_s^2 ds \longrightarrow \frac{\sigma^2}{2\theta}\ p.s., \quad (t \longrightarrow \infty).$$

Alors

$$A_t - \frac{\sigma^2}{2\theta} = \frac{1}{t}\int_0^t (X_s^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta})ds,$$

avec $A_t = \frac{\langle M\rangle_t}{t}$, $t > 0$. Donc

$$d(t(A_t - \frac{\sigma^2}{2\theta})) = (X_t^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta})dt.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\int_0^t \omega_s^2(X_s^2 - \frac{\sigma^2}{2\theta})ds &= \int_0^t \omega_s^2 d(s(A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta})) \\ &= [\omega_s^2 s(A_s - \tfrac{\sigma^2}{2\theta})]_0^t - \int_0^t s(A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta})d\omega_s^2.\end{aligned}$$

Compte tenu de l'expression de la pondération définie dans (3), on voit que

$$d\omega_s^2 = \omega_s^2 \{ \frac{1}{(1-\alpha)s^\alpha} - \frac{\alpha}{s} \} ds.$$

Par conséquent

$$\langle \tilde{M} \rangle_t - \frac{\sigma^2}{2\theta} V_t^2 = [\omega_s^2 s (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta})]_0^t + \alpha \int_0^t (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds - \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t s^{1-\alpha} (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds. \tag{49}$$

Grâce à la propriété (P_2) et l'hypothèse $(H3)$, il vient que

$$\frac{1}{V_t^2} \int_0^t (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds \leq \int_0^t (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \frac{\omega_s^2}{V_s^2} ds = \mathbf{o}(t^{\alpha' - \alpha}).$$

De même on a

$$\frac{1}{V_t^2} \int_0^t s^{1-\alpha} (A_s - \frac{\sigma^2}{2\theta}) \omega_s^2 ds = \mathbf{o}(t^{\alpha' - \alpha}).$$

Vu la relation (49), on obtient la propriété i) suivante

$$\frac{\langle \tilde{M} \rangle_t}{V_t^2} - \frac{\sigma^2}{2\theta} = \mathbf{o}(t^{\alpha' - \alpha}) \quad p.s..$$

De la même façon, on établit la propriété ii).

Références

[1] Chaâbane. F., Touati. A., On averaging methods for identification of lineear regression models. *C.R. Acad. Sci. Paris, t.* **333,** série I, (2001) p. 133-138.

[2] Chaâbane. F., Invariance principales with logarithmic averaging for continuous local martingales. *Statistics and Probability Letters,* **59** ,(2002) 209-217.

[3] Darwich. A.R., A law of iterated logarithm for multidimensional local martingales and its application in stochastic linear regression *C.R.Acad.Sc.Paris,t.* **309**, série I, (1989) 387-390.

[4] Le Breton. A., Musiela. M., Some parameter estimation problems for hypoellitic homogeneous gaussian diffusions, *Banach Centre Publications,* **16**, (1985) 337-356.

[5] Le Breton. A., Musiela. M., A law of large numbers for vector continuous local martingales and its application in stochastic linear regression. *C.R.Acad.Sc.Paris,t.* **303,** série I, n 9 (1986).

[6] Revuz. D., Yor M., Continuous martingales and brownian motion. (second edition) *Springer-Verlag,* (1994).