DES GROUPES AUX GROUPOIDES QUANTIQUES.

par Jean-Michel VALLIN

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES EN MATHEMATIQUES

présentée le 14 décembre 2001

JURY :

Claire ANANTHARAMAN.	Examinateur
Saad BAAJ.	Rapporteur
Michel ENOCK	Examinateur
Jean RENAULT.	Examinateur
Leonid VAINERMAN.	Rapporteur
Alfons VAN DAELE.	Rapporteur

UNIVERSITE D'ORLEANS

REMERCIEMENTS

Le travail de Recherche, exposé ici, s'étend sur une longue période (1980-2001). Cette inscription dans la durée doit beaucoup à la passion des mathématiques héritée de mes Professeurs tant aux lycées de Rueil et Janson qu'à l'Université Paris VI, en particulier Jacques Dixmier. Elle doit aussi aux Chercheurs rencontrés pendant mes études de troisième cycle, particulièrement Marouan Ajlani, François Combes, Jean Luc Sauvageot, Michel Enock et Jean-Marie Schwartz; je tiens à leur témoigner ici de ma gratitude.

La reconnaissance, que je dois à M.Enock et J.M.Schwartz, tient non seulement au sujet de ma thèse, qui allait devenir quelques années plus tard au centre d'une intense activité sous le nom de groupes quantiques, mais aussi à leurs encouragements pour me remettre à faire de la recherche, malgré les années écoulées et l'éloignement. Ces années, loin de Paris, furent d'ailleurs l'occasion de rencontrer d'autres mathématiciens, comme Alain Arconte et Robert Janin, dans un contexte professionnel délicat, je leur suis aussi très redevable.

Plus précisément, c'est Michel Enock qui m'a incité à travailler, non plus sur les groupes quantiques désormais investis par d'autres (et non des moindres), mais sur leur prolongement aux groupoïdes. La stratégie nous conduisant à la notion d'unitaire pseudo-multiplicatif lui doit beaucoup.

Je remercie aussi Claire Anantharaman et Jean Renault pour leurs encouragements et la possibilité qui m'a été offerte d'exposer mes travaux dans d'excellentes conditions au séminaire d'algèbres d'opérateurs d'Orléans. Deux de mes articles doivent beaucoup à leurs remarques et travaux sur les groupoïdes.

Je n'oublierai pas le magistral travail de Saad Baaj et Georges Skandalis sur les unitaires multiplicatifs qui est une source inépuisable d'inspiration, ni les nombreuses discussions avec Leonid Vainerman et Marie-Claude David.

Plus généralement ma reconnaissance va à tous les participants aux séminaires d'algèbres d'opérateurs à Paris et Orléans permettant à tous une ouverture régulière aux autres axes de recherche dans ce domaine des mathématiques.

Je tiens aussi à associer à ces remerciements, M Bassano Directeur de l'IUT d'Orléans en 1990 qui m'a recruté et M.Thomas l'actuel Directeur de l'IUT de Chartres ainsi que les différents Responsables de mon Département d'Enseignement, pour la prise en compte parfaite de mes activités de Recherche.

SOMMAIRE

a

DES GROUPES AUX GROUPOIDES QUANTIQUES

1. **Introduction**

Une version non commutative de la Géométrie, au sens de F.Klein et S.Lie, consiste à envisager une classe d'algèbres (les "fonctions" sur les espaces quantiques) sur lesquelles agissent des algèbres plus particulières (les "fonctions" sur les groupes quantiques). Ces algèbres peuvent être de différentes natures: la topologie et la théorie de la mesure s'interprètent dans le domaine des algèbres d'opérateurs par les théories des C^*-algèbres et des algèbres de von Neumann. Un célèbre théorème d'André Weil [We] stipule que dans le cas des groupes, la donnée d'une classe de mesure invariante ou celle d'une topologie de groupe localement compact sont équivalentes. Dans une théorie convenable les aspects topologiques ou de théorie de la mesure des groupes quantiques doivent se correspondre de manière biunivoque: le point de vue des C^*-algèbres et celui des algèbres de von Neumann doivent donc être équivalents. Naturellement, cela ne peut être le cas des espaces quantiques.

La théorie de ce qu'on appelle aujourd'hui groupes quantiques localement compacts a débuté dans le cadre des algèbres de von Neumann. Une catégorie autoduale, moins vaste mais qui lui est identique en dimension finie: les algèbres de Kac, a été mise en place par G.Kac, L.Vainerman, M.Enock, J.M.Schwartz ([KaVa], [ES]). La généralisation non commutative de la dualité de Pontryagin des groupes localement compacts abéliens motivait ces recherches. Mes premiers travaux se situèrent à ce niveau.

2. **Une version topologique des algèbres de Kac [Val1].**

Ma thèse donna une traduction, dans le cadre des C^*-algèbres, de la catégorie des algèbres de Kac et de Hopf von Neumann.

La transformation de Gelfand permet de confondre toute $C^\star$-algèbre commutative A, avec la $C^\star$-algèbre $C_0(Z)$ des fonctions continues, nulles à l'infini, sur le spectre Z de A. On peut donc identifier les $C^\star$-algèbres aux "fonctions" sur un "espace quantique localement compact". Ainsi toute structure supplémentaire sur la $C^\star$-algèbre A correspond à une structure nouvelle sur l'espace quantique localement compact associé Z. Au niveau algébrique, un produit, un élément neutre, un inverse sur Z, se traduisent, respectivement par un coproduit, une co-unité, une co-involution sur A; au niveau analytique, une mesure de Haar se traduit par un poids invariant à gauche sur A. Ces traductions s'appuient, dans ma thèse, sur deux lemmes techniques, utilisant les notions et notations de base des C^*-algèbres, leur produit tensoriel spatial $\otimes$, et la théorie des poids; on peut les résumer ainsi:

2.1. **Lemme (0.2.6.)** *Si A, B sont deux $C^\star$-algèbres et α est un morphisme de A dans la $C^\star$-algèbre $M(B)$ des multiplicateurs de B, les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) $\alpha(A)B$ est normiquement dense dans B,

ii) α possède un unique prolongement $\overline{\alpha}$ de $M(A)$ vers $M(B)$ qui soit un homomorphisme tel que $\overline{\alpha}(1_{M(A)}) = 1_{M(B)}$ et pour toute partie X de $M(A)$, normiquement bornée, $\overline{\alpha} \mid X$ est continue pour les topologies strictes de $M(A)$ et $M(B)$.

2.2. **Lemme (0.3.5).** *Soit A une $C^\star$-algèbre et φ un poids sur A, fidèle normiquement semi-fini et semi continu inférieurement. On suppose qu'il existe sur A un groupe à un paramètre σ_t, normiquement continu dans les conditions KMS par rapport à φ et tel $(\sigma_t)_{t\in\mathbb{R}}$ soit une action continue de $\mathbb{R}$ sur A. Pour tout élément x de l'ensemble $\mathfrak{N}_{i\overline{\otimes}\overline{\varphi}}$ tel que $(1\otimes x)A + A(1\otimes x) \subset A$,et pour tout y dans $\mathfrak{N}_{i\overline{\otimes}\overline{\varphi}} \cap M_a^{\overline{\varphi}}$, l'élément $(i\overline{\otimes}\overline{\varphi})(x^*(1\otimes y))$ appartient à A.*

Ce dernier lemme m'a amené à utiliser l'objet suivant:

2.3. **Définition.** Soient A et B deux $C^\star$-algèbres, on note $M(A,B) = \{x \in M(A\otimes A)/x(1\otimes B) + (1\otimes B)x \subset A\otimes B\}$

Grâce à ces préliminaires, on peut poser:

2.4. **Définition (0.2.13.)** *On appelle $C^\star$-algèbre de Kac la donnée d'un quadruplet (A, d, j, ϕ), où: A est une $C^\star$-algèbre, d est coproduit, i.e.un morphisme injectif : $A \to M(A,A)$ dans les conditions du lemme 2.1, tel que: $(\overline{i\otimes d})d = (\overline{d\otimes i}))d$, j est une co-involution, i.e. un antiautomorphisme involutif de A tel que $(\overline{j\otimes j})d = \overline{\varsigma} dj$, où ς désigne la volte de A, φ est un poids sur A dans les conditions du lemme 2.2 tel que $(i\overline{\otimes}\overline{\varphi})d = \varphi 1_{M(A)}$, enfin: pour tous x, y dans $\mathfrak{N}_{\overline{\varphi}} \cap M_a^{\overline{\varphi}}$: $j((i\overline{\otimes}\overline{\varphi})(d(x^*)(1\otimes y))) = (i\overline{\otimes}\overline{\varphi})((1\otimes x^*)d(y))$.*

Les $C^\star$-algèbres de Kac traduisent, le passage d'une structure d'espace quantique localement compact, à celle de groupe quantique localement compact. Ceci est la conséquence du théorème suivant:

2.5. **Théorème (3.6. et 3.8.)** *1) Soit G un groupe topologique localement compact, muni d'une mesure de Haar à gauche dz, en notant pour tous s, t dans G et f dans $C_0(G)$: $d_G(f)(s,t) = f(st)$, $j_G(f)(s) = f(s^1)$, et pour $f \geq 0$ $\varphi_G(f) = \int_G f(z)dz$, on fait de $(C_0(G), d_G, j_G, \varphi_G)$ une $C^\star$-algèbre de Kac commutative.*

2) Réciproquement pour toute $C^\star$-algèbre de Kac commutative (A, d, j, φ), le spectre de A peut-être muni d'une structure de groupe topologique localement compact G et d'une mesure de Haar dz telles que la transformation de Gelfand réalise un isomorphisme de (A, d, j, φ) sur $(C_0(G), d_G, j_G, \varphi_G)$

Un exemple symétrique ($\varsigma d = d$) d'algèbre de Kac peut être associé a la $C^\star$-algèbre de convolution $C_r^\star(G)$. J'ai défini des notions, d'action d'une $C^\star$-algèbre de Kac sur une $C^\star$-algèbre, et de produit croisé. J'ai montré qu'à toute action de la $C^\star$-algèbre de Kac commutative (resp.symétrique) associée à G, on fait correspondre une action "duale" de la $C^\star$-algèbre de Kac symétrique (resp.commutative) sur le produit croisé. Ceci me permit de généraliser le théorème du double produit croisé de Takaï.

3. Le théorème de A.Weil généralisé aux algèbres de Kac [EV1]

Mon étude s'intégrait dans les travaux qui ont précédé l'article essentiel de S.Baaj et G.Skandalis [BaSk], qui, reprenant des idées de Stinespring, résumèrent toutes ces structures ainsi que leur dualité en un seul unitaire multiplicatif. En particulier, ils répondirent à une des questions laissées ouvertes par mon article: pour toute algèbre de Kac $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \varphi)$, la $C^\star$-algèbre $\mathbb{C}^\star(\hat{\lambda})$, engendrée par la représentation de Fourier de $\hat{M}_\star$, est une sous $C^\star$-algèbre faiblement dense de M telle que $(\mathbb{C}^\star(\hat{\lambda}), \Gamma_{|\mathbb{C}^\star(\hat{\lambda})}, \kappa_{|\mathbb{C}^\star(\hat{\lambda})}, \varphi_{|\mathbb{C}^\star(\hat{\lambda})})$ soit une C^*-algèbre de Kac. La réciproque a été montrée dans mon deuxième article, en commun avec M.Enock [EV1]. Dans notre cadre le théorème de A.Weil reste vrai.

Ce résultat, précisant les axiomes des $C^\star$-algèbres de Kac, nous a permis de définir dans cette catégorie une dualité qui étend celle des algèbres de Kac et échange $C_0(G)$ et $C_r^\star(G)$. Dans ce cadre, pour toute $C^\star$-algèbre de Kac (A, d, j, φ), nous avons construit une algèbre de Kac associée grâce à la représentation de Gelfand Naimark Segal du poids φ.

Une $C^\star$-algèbre de Kac (A, d, j, φ), doit ici être simplifiable, i.e. l'ensemble des éléments $d(a)(1 \otimes b)$, avec, a, b dans A, est total dans A, et pour tout t dans $\mathbb{R}$: $\sigma_t j = j\sigma_{-t}$. Cette axiomatique permet de prolonger de manière unique le coproduit d, la co-involution j et le poids φ, en des applications Γ, κ et un poids $\overline{\varphi}$, sur l'algèbre de von Neumann M de la représentation GNS du poids φ, de façon que le théorème suivant soit vrai:

3.1. **Théorème (4.3.1)(5.1.3)(5.2.1)(5.2.2).** *Le quadruplet* $\mathbb{K} = (M, \Gamma, \kappa, \overline{\varphi})$ *est une algèbre de Kac; de plus, si* $\mathbb{C}^*(\hat{\lambda})$ *désigne la* $C^\star$*-algèbre de la représentation de Fourier de* $\hat{M}_\star$*,* (A, d, j, φ) *est égal à* $(C^\star(\hat{\lambda}), \Gamma \mid C^\star(\hat{\lambda}), \kappa \mid C^\star(\hat{\lambda}), \overline{\varphi} \mid C^\star(\hat{\lambda}))$*. La catégorie des* $C^\star$*-algèbres de Kac et celle des algèbres de Kac sont équivalentes.*

4. Des algèbres de Kac aux groupes quantiques localement compacts

Parallèlement, illustrant, dans [Wo1] et [Wo2], sa théorie des pseudo-groupes compacts matriciels, d'exemples significatifs comme $S_\mu U(2)$, S.L. Woronowicz montra, ainsi, l'insuffisance de algèbres de Kac, car celles-ci sont munies d'une antipode involutive. De plus, en construisant au niveau des C^*-algèbres, une déformation quantique du groupe des déplacements du plan $E_\mu(2)$ [Wo3], il donna le premier exemple non trivial de groupe quantique localement compact, non compact, de la géométrie non commutative. En particulier, cet exemple permit à S.Baaj [Ba] de prouver que le caractère involutif des algèbres associées à un unitaire multiplicatif ne se résume pas à la notion topologique de régularité normique. S.L.Woronowicz dégagea une notion très générale d'unitaire multiplicatif "manageable" [Wo4]. Dans l'approche la plus récente, ([KusVa1], [KusVa2], [Vas]), les groupes quantiques localement compacts sont définis à partir d'une algèbre de von Neumann, d'un coproduit, et de deux poids invariants, un à gauche, l'autre à droite, cette donnée permet de construire un unitaire multiplicatif "manageable" et contient tous les exemples connus, en particulier le groupe $ax+b$ [WoZa] [Van3].

La théorie des groupes quantiques localement compacts n'est pas encore achevée car dans le cas des groupes localement compacts l'existence d'une mesure de Haar est un théorème. Elle est cependant démontrée dans un certain nombre de situations étudiées par A.Van Daële comme les cas compacts [Van1] ou discrets [Van2].

5. Des groupes quantiques aux groupoides quantiques ([Val2], [Val3]).

La donnée d'une géométrie nécessite l'existence d'un groupe, mais aussi d'une action de ce groupe sur un espace, ceci se résume en une seule structure: celle de groupoïde associé à un groupe de transformation ([R] example 1.2.a). Les groupoïdes sont les petites catégories aux flèches toutes inversibles, cette définition est si simple qu'ils apparaissent dans bien des branches des mathématiques ([Br]). La généralisation aux groupoïdes des algèbres d'opérateurs associées aux groupes, est due, dans le cadre mesuré à G.W.Mackey [Mac] et P.Hahn [H2]. La construction d'exemples de facteurs de type différent de II et leur lien à la théorie ergodique motivait ces études. Dans ce contexte, l'existence d'une mesure de Haar est un théorème.[H1]. Considérant des groupoïdes topologiques localement compacts, J.Renault a défini de telles structures au niveau des C^*-algèbres [R1].

Il était donc naturel d'envisager la double généralisation des groupes quantiques et des groupoïdes dans une catégorie plus vaste qu'on pourrait appeler groupoïdes quantiques. Nous nous sommes donc fixés cet objectif, en collaboration avec M.Enock, M.C.David L.Vainerman. C'est T.Yamanouchi qui, le premier, a envisagé, en dimension finie une telle généralisation [Y1], il a de plus exhibé en dimension infinie le coproduit symétrique associé à un groupoïde [Y2] mais ce caractère symétrique masquait le fait qu'il considérait en réalité un bimodule et non un simple module.

Cette partie, qui résume les deux articles suivants, a pour but de décrire les structures généralisant les algèbres de Hopf von Neumamn, qu'on peut définir à partir d'une vaste classe de groupoïdes L'idée du passage aux groupoïdes est de ne plus considérer des algèbres mais des bimodules sur une base, ce qui correspond au fait qu'un groupe est un groupoïde pour lequel l'espace des unités est réduit à un singleton. Le coproduit doit ici satisfaire des conditions de compatibilité d'où le nom de bimodule de Hopf donné dans le premier article.

Nous avons opté pour une version mesurée car la théorie spatiale développée par A.Connes et J.L.Sauvageot [C], [S1], [S2], [S3] permet de définir des notions adéquates de produit tensoriel fibré, au dessus d'une algèbre de von Neumann (la base), d'espaces hilbertiens, d'algèbres de von Neumann, ou de morphismes normaux. En particulier, si N est une algèbre de von Neumann commutative, et si s, r sont des homomorphismes normaux, fidèles et préservant l'unité, de N dans des algèbres de von Neumann M et P respectivement, alors ces dernières sont des N-modules (indifféremment à gauche ou à droite ici); on peut ainsi donner un sens à $M_s{\star}_rP$. Si $\phi : M_s \to Q_u$.et ϕ': ${}_rP \to_v R$ sont deux homomorphismes ou deux antihomomorphismes normaux et non dégénérés, respectant les structures de modules, on peut définir un produit fibré: $\phi_s{\star}_r\phi' : M_s{\star}_rP \to Q_u{\star}_vR$. De même peut-on définir une volte $\varsigma : M_s{\star}_rP \to P_r{\star}_sM$. Enfin, si T est un poids opératoriel au sens de U.Haagerup de P^+ dans l'extension positive de $s(N)$, il existe, pour toute forme positive normale sur M, un poids produit fibré $\omega_s{\star}_rT$, normal sur $M_s{\star}_rP$. Il faut noter que, contrairement aux algèbres de von Neumann, le produit tensoriel fibré de modules hilbertiens dépend d'un poids sur la base N.

5.1. **Définition.** *1) On appelle bimodule de Hopf von Neumann, la donnée de tout quintuplet* (N, M, s, r, Γ)*, où* M *désigne des algèbres de von Neumann,* $s; r$ *respectivement une (anti)-représentation et une représentation fidèle non dégénérée de* N *dans* M*, dont les images* *commutent, et le coproduit* $\Gamma : M \to M\,{}_s\star_r M$ *un homomorphisme normal injectif respectant les structures de bimodule et tel que:*$(\Gamma\,{}_s\star_r i)\Gamma = (i\,{}_s\star_r\Gamma)\Gamma$.

2) Si (N, M, s, r, Γ) *est un bimodule de Hopf, on appelle co-involution, tout anti-automorphisme de* M *tel que* $j^2 = Id_M$*,* $j{\circ}r = s$*,et* $\varsigma(j\,{}_s\star_r j)\Gamma = \Gamma \circ j$.

3) On appelle poids de Haar sur (N, M, s, r, Γ)*, tout poids opératoriel* P *de* M^+ *dans l'extension positive de* $r(N)$ *tel que pour toute forme positive normale sur* M*:* $(\omega\,{}_s\star_r P) \circ \Gamma = \Gamma \circ P$.

Dans le premier article [Val2], j'exhibe deux telles structures pour tout groupoïde G localement compact, σ-compact, muni d'un système de Haar $\{\lambda^u, u \in G^0\}$ et d'une mesure μ quasi invariante sur G^0, d'intégrale $\nu = \int_{G^0} \lambda^u d\mu$. Dans ces conditions, on peut, comme dans le cas des groupes, construire deux algèbres de von Neumann sur $H = L^2(G, \nu)$, l'une est $L^\infty(G, \nu)$ opérant par multiplication et l'autre, $\mathcal{L}(G)$, opère par convolution. Les deux algèbres ont des structures de bimodule de Hopf co-involutif sur la même base $L^\infty(G^0, \mu)$. Je montre aussi l'existence de poids opératoriels de Haar qui généralisent, au cadre des groupoïdes les mesures de Haar et de Plancherel.des groupes. Enfin je caractérise en dimension finie les groupoïdes en tant qu'objets commutatifs de cette théorie.

Dans la continuation du premier, le second article [Val3] a pour but de généraliser l'approche de S.Baaj et G.Skandalis et en particulier les unitaires multiplicatifs. En utilisant à nouveau la théorie spatiale, j'y exhibe, toujours dans le cas des groupoïdes, un unitaire entre deux produits tensoriels fibrés de bimodules hilbertiens. En particulier les applications source et but confèrent à $H = L^2(G, \nu)$ deux structures de module (H, s) et (H, r), les produits tensoriels fibrés $H\ {}_r\underset{\mu}{\otimes}{}_r\ H$ et $H\ {}_s\underset{\mu}{\otimes}{}_r\ H$ s'identifient à des espaces $L^2(G^2_{rr}, \nu^2_{rr})$ et $L^2(G^2_{sr}, \nu^2_{sr})$. En posant pour tout ξ dans $H\ {}_s\underset{\mu}{\otimes}{}_r\ H$ et pour ν^2_{rr} presque tout (x, y):

$$V_G(\xi)(x, y) = \xi(x, x^{-1}y)$$

on définit un unitaire de $H\ {}_s\underset{\mu}{\otimes}{}_r\ H$ sur $H\ {}_r\underset{\mu}{\otimes}{}_r\ H$ qui vérifie des relations de compatibilité à r et s, et la relation "pentagonale" suivante:

$$({}_rV_G\otimes_r 1)((\Sigma_{r,s})_r\otimes_r 1)(1_r\otimes_s V_G)((\Sigma_{s,r})_r\otimes_r 1)(1_s\otimes_r V_G) = (1_r\otimes_r V_G)(V_{G\,s}\otimes_r 1)$$

où la notation $\Sigma_{i,j}$ désigne la réflexion naturelle de produit tensoriel, qui renverse les structures de module, ce qui justifie l'existence de $({}_rV_G\otimes_r 1)((\Sigma_{r,s})_r\otimes_r 1)$.

On met en place des outils techniques permettant, à partir de cet unitaire, de retrouver toutes les structures décrites dans le premier article. En utilisant une généralisation d'une idée de D.Voiculescu, on étend un théorème, dû à H.Leptin [Le] sur les groupes, en caractérisant sous différentes formes l'éventuelle moyennabilité du groupoïde au sens de C.Anantharaman et J.Renault [AR]. En particulier, si $A(G)$ désigne l'algèbre de Fourier de G au sens de J.Renault [R2], on a:

5.2. **Théorème.** *Le groupoïde G est moyennable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:*

i) il existe une file $\{\xi_i\}$ de vecteurs μ-bornés pour r, au sens de la théorie spatiale, telle que pour tout vecteur η dans H, la file $\|\eta\, {}_r\underset{\mu}{\otimes}{}_r\, \xi_i - V_G(\eta\, {}_s\underset{\mu}{\otimes}{}_r\, \xi_i)\|$ tend vers 0,

ii) l'algèbre $A(G)$ possède une unité approchée pour la norme du prédual de $\mathcal{L}(G)$, positive et qui est dans la boule unité de $A(G)$.

Cette approche était partielle puisque la base $L^\infty(G^0)$ est commutative, l'étude du cas général s'est faite en collaboration avec M.Enock.

6. **Groupoïdes quantiques associés aux inclusions de profondeur deux d'algèbres de von Neumann. [EV2].**

De fait, si la base N n'est pas abélienne, quitte à considérer la base opposée N^o, i.e. N munie de la multiplication inversée, on peut toujours se ramener à des modules à gauche; ainsi dans ce cadre, on généralise les outils techniques de l'article précédent.

Suivant des travaux initiés par A.Ocneanu, M. Enock a étudié une vaste classe d'inclusions d'algèbres de von Neumamn. Il s'agit des inclusions: $M_0 \subset M_1$, de profondeur deux, irréductibles au sens où le commutant relatif de M_0 dans M_1 est trivial, et munies d'un poids opératoriel régulier ([E1], [EN]). Dans cette situation, et en notant $(M_i)_{i=0,1,2...}$ la construction de base de J.F.R Jones ([J]), il a exhibé un unitaire multiplicatif "manageable" au sens de Woronowicz qui génère sur $M_0' \cap M_2$ et $M_1' \cap M_3$ des structures de groupes quantiques localement compacts au sens de Vaes et Kustermans.

L'idée qui sous-tend notre article est que, dans le cadre plus général où $M_0' \cap M_1$ n'est pas réduite aux scalaires, cette algèbre joue le rôle de base pour des structures comparables à celles que j'ai mises en place dans le cadre des groupoïdes. En munissant $M_0' \cap M_1$ d'un poids n.s.f.f. χ, la même démarche que dans [EN], permet de construire un espace hilbertien $\mathfrak{H}$, une représentation α et deux anti-représentations $\beta; \hat{\beta}$ de $N = (M_0' \cap M_1)^o$ sur $\mathfrak{H}$, normales fidèles non dégénérées et d'images commutant deux à deux, ainsi qu'un unitaire W de $\mathfrak{H}\underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}}\mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H}\underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}}\mathfrak{H}$ Cet unitaire a les propriétés suivantes:

6.1. **Proposition (5.5.)** *Pour tous n, n' dans $M_0' \cap M_1$, on a:*

$$W(\beta(n) \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \hat{\beta}(n')) = (\beta(n) \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} \hat{\beta}(n'))W,$$

$$W(\alpha(n) \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \beta(n')) = (\hat{\beta}(n') \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} \alpha(n))W,$$

de plus, W vérifie la relation "pentagonale" suivante:

$$(W \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} 1_{\mathfrak{H}})(\sigma_{\chi} \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} 1_{\mathfrak{H}})(1_{\mathfrak{H}} \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} W)\sigma_{2\chi^o}(1_{\mathfrak{H}} \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \sigma_{\chi})(1_{\mathfrak{H}} \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} W) =$$
$$= (1_{\mathfrak{H}} \underset{N^o}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} W)(W \underset{N}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} 1_{\mathfrak{H}}).$$

Une des difficultés techniques de cette dernière formule est l'emploi de deux réflexions, l'une est $\sigma_{\chi} : \mathfrak{H} \underset{\chi}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \underset{\chi^o}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} \mathfrak{H}$, et l'autre, $\sigma_{2\chi^o}$, "fait tourner" autour du deuxième produit tensoriel: $\mathfrak{H} \underset{\chi^o}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \mathfrak{H} \underset{\chi^o}{{}_{\beta}\otimes_{\alpha}} \mathfrak{H}$ sur $\mathfrak{H} \underset{\chi}{{}_{\alpha}\otimes_{\beta}} (\mathfrak{H} \underset{\chi^o}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \mathfrak{H})$, où la parenthèse signifie que β agit sur la jambe droite de $\mathfrak{H} \underset{\chi^o}{{}_{\hat{\beta}}\otimes_{\alpha}} \mathfrak{H}$. Nous avons appelé unitaire pseudo-multiplicatif tout unitaire de ce type.

Nous avons ainsi généralisé à ce cadre les constructions de Baaj et Skandalis, en montrant que les "jambes" gauche et droite de tout unitaire pseudo-multiplicatif possèdent naturellement des structures de bimodules de Hopf suivant la définition 5.1 1) généralisée. De plus, on définit également une notion d'action de bimodule de Hopf, de produit croisé et d'algèbre de points fixes.

Donc W confère à $M_0' \cap M_2$ et $M_1' \cap M_3$ (en fait leur commutant dans une représentation fidèle à valeurs dans $\mathfrak{H}$) des structures de bimodules de Hopf. De plus, au cran suivant de la construction de base, on obtient pour un commutant de $M_2' \cap M_4$ une structure de bimodule de Hopf isomorphe à celle du commutant de $M_0' \cap M_2$. Enfin, on montre l'existence d'une action du bimodule de Hopf sous-jacent à $M_1' \cap M_3$ sur M_1, telle que M_0 soit l'algèbre des points fixes et M_2 le produit croisé.

Dans cet article [EV2], nous montrons qu'un unitaire pseudo-multiplicatif en dimension finie pour une base munie d'une trace adéquate, s'identifie à une isométrie partielle multiplicative ayant, en un certain sens, une base. La structure de bimodule de Hopf s'exprime alors beaucoup plus simplement. Il faut noter que cette propriété ne s'étend pas dans le cas général en dimension quelconque. L'étude de la dimension finie a été mon plus récent travail de recherche. Elle a fait l'objet d'un article [Val 4] et d'une étude complémentaire en cours d'élaboration [Val5].

7. **Groupoïdes quantiques finis[Val4][Val5]**

Une première généralisation, dans la direction des groupoïdes, des algèbres de Kac de dimension finie a été l'oeuvre de T.Yamanouchi [Y2]. Sa démarche consistait à reprendre l'axiomatique des algèbres de Kac en n'imposant pas que le coproduit soit unitaire. Il obtient alors une catégorie autoduale dont les objets commutatifs caractérisent les groupoïdes finis. Cette démarche a l'inconvénient d'imposer une antipode involutive. Or, dans ce cadre, et contrairement aux .groupes quantiques de dimension finie, cette propriété n'est pas nécessairement vraie. Des physiciens théoriciens G.Bohm, F. Nill, et K.Szlachanyi ([BoSz1],[BoSz2], [BoSz3], [BoSzNi]), ont montré que, dans une catégorie plus vaste appelée C^*-algèbres de Hopf faibles (ou groupoïdes quantiques finis), il existe des exemples tirés de la théorie conforme des champs, pour lesquels l'antipode n'est pas involutive. On peut noter un "tour d'horizon" (survey) sur cette question dû à Dimitri Nikshych et Leonid Vainerman [NV2]. Il était donc important de préciser les liens de cette théorie avec la nôtre. L'idée de base, ici, est que la théorie spatiale s'interprète facilement en dimension finie, il s'agit essentiellement de réduction.

Considérons une algèbre de von Neumann N de dimension finie, s une anti-représentation et r une représentation fidéles et non dégénérées de N dans des espaces hilbertiens de dimension finie $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{K}$ respectivement. Alors, en notant $tr_{\mathfrak{K}}$ la trace canonique non normalisée de $\mathfrak{K}$ et $\tau = tr_{\mathfrak{K}} \circ r$, il existe un projecteur e_{sr} de $s(N) \otimes r(N)$ et un isomorphisme isométrique de $\mathfrak{H} \,{}_s\!\underset{\tau}{\otimes}_r \mathfrak{H}$ sur $e_{sr}(\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H})$. Ceci explique pourquoi le coproduit des C^*-algèbres de Hopf faibles s'exprime à l'aide du produit tensoriel ordinaire, l'image de 1 par ce coproduit est le projecteur associé à la réduction.

Il s'agit dès lors, d'étudier des isométries partielles multiplicatives en dimension finie ayant une base au sens de la définition suivante:

7.1. **Définition.** *Avec les notations qui précèdent, si* $I : \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H} \to \mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ *est une isométrie partielle, on dira qu'elle est multiplicative quand* $I_{12}I_{13}I_{23} = I_{23}I_{12}$. *On appelle base de* I, *tout triplet* $(N, \alpha, \beta, \hat{\beta})$ *où* α *est une représentation, et* $\beta, \hat{\beta}$ *sont deux anti-représentations, toutes trois fidèles non dégénérées de* N *dans* $\mathfrak{H}$; *on doit supposer aussi que*

$tr_{\mathfrak{K}} \circ \alpha = tr_{\mathfrak{K}} \circ \beta = tr_{\mathfrak{K}} \circ \hat{\beta}$, que leur images commutant deux à deux, et qu'on a:

1) $e_{\hat{\beta}\alpha}$ et $e_{\alpha\beta}$ sont respectivement le projecteur initial et final de I

2) pour tous n, n' dans N: $(\beta(n) \otimes \hat{\beta}(n'))I = I(\beta(n) \otimes \hat{\beta}(n'))$ et $(\hat{\beta}(n) \otimes \hat{\alpha}(n'))I = I(\alpha(n') \otimes \beta(n))$.

En reprenant la démarche de S.Baaj et G.Skandalis, on obtient:

7.2. **Proposition.** *Avec les notations de la définition 7.1, les sous ensembles S et $\hat{S}$ de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ définis par $S = \{(\omega \otimes i)(I)/\omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})_\star\}$ et $\hat{S} = \{((i \otimes \omega)(I)/\omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})_\star\}$, en sont des sous algèbres non dégénérées. Elles sont involutives (donc des $C^\star$-algèbres si et seulement si elles sont régulières, c'est à dire: $\alpha(N)' = \{(i \otimes \omega)(\Sigma I)/\omega \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})_\star\}$, où Σ désigne la réflexion naturelle de $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$. Si I est régulière, S et $\hat{S}$ ont des structures de $C^\star$-algèbres de Hopf faibles en dualité.*

Du fait de l'emploi d'une trace τ sur N, on n'obtient pas toutes les $C^\star$-algèbres de Hopf faibles, mais celles dont l'antipode est involutive sur des sous algèbres canoniquement associées. Réciproquement partant d'une $C^\star$-algèbre de Hopf faible, dans les conditions qui précèdent, la représentation GNS du poids de Haar associé, permet de construire une isométrie partielle multiplicative, ayant une base et régulière, qui la génère

En conséquence d'un article de M.Enock [E2], les isométries partielles multiplicatives qui proviennent d'inclusions sont régulières. Ceci me permet d'affirmer, avec les notations du paragraphe 6, que si $M_0 \subset M_1$ est une inclusion d'algèbres de von Neumann en profondeur deux, dotée d'un poids opératoriel régulier de groupe modulaire identique. et telle que $M_0' \bigcap M_2$ est de dimension finie, alors $M_0' \bigcap M_2$ possède une structure de C^*-algèbre de Hopf faible; ceci généralise un théorème de D.Nikshysh et L.Vainerman [NV1]. Poussant plus loin la généralisation de la construction de S.Baaj et G.Skandalis, je mets en évidence une notion de vecteur fixe (ou cofixe) et ses liens à la régularité et à la mesure de Haar normalisée. Enfin je caractérise les isométries partielles multiplicatives associées aux groupoïdes finis et donne, en fin de l'article [Val4], des exemples pour illustrer la difficulté de la normalisation des vecteurs fixes.

Dans l'article en préparation [Val5], mon objectif est de généraliser les travaux de S.Baaj, E.Blanchard et S.Skandalis sur les sous objets des unitaires multiplicatifs en dimension finie [BBS]. Je précise les liens entre l'existence d'une unité pour S et celle de vecteur fixe normalisé. Je montre qu'on peut transformer, par réduction, ampliation et isomorphisme, une isométrie partielle multiplicative régulière en une forme irréductible dans un sens généralisant la définition 6.2 de [BaSk]. Je prouve, pour cette forme irréductible, une propriété de multiplicativité à coefficient de l'espérance conditionnelle canonique de $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ sur la base; le cas d'une antipode involutive (cas Kac) est caractérisé par le fait que ce coefficient vaille un. Je montre que l'isométrie partielle est entièrement caractérisée par les deux C^*-algèbres de Hopf faibles associées, les espaces de vecteurs fixes et cofixes et un coefficient valant un dans le cas Kac. Enfin je caractérise les C^*-algèbres de Kac faibles en dualité opérant dans le même espace de Hilbert et sous forme irréductible à l'aide de la propriété de multiplicativité de l'espérance conditionnnelle canonique sur leur intersection.

8. **Perspectives**

Dans un premier temps il s'agira de finaliser le projet d'article [Val5]. En particulier, on peut espérer étendre au cas général la caratérisation des C^*-algèbres de Kac faibles en dualité et sous forme irréductible. Enfin on peut envisager de déterminer une correspondance d Galois entre les sous algèbres (de von Neumann) intermédiaires d'une inclusion et un équivalent des pré-sous-groupes.

En dimension finie, l'étude globale de la régularité reste à faire, elle est liée à la connaissance de la mesure de Haar normalisée et son expression en fonction de l'isométrie partielle.

Dans le cas général, il faudra caractériser les groupoïdes localement compacts en termes d'unitaires pseudo-multiplicatifs commutatifs, ce qui est la réciproque des articles [Val2] et [Val3].

Franck Lesieur prépare une thése à l'Université d'Orléans sous la direction de M.Enock, sur la généralisation à notre cadre du point de vue développé par S.Vaes et J.Kustermanns. A partir d'un bimodule de Hopf muni de deux poids opératoriels invariants à gauche pour l'un et à droite pour l'autre, il construit un unitaire pseudo-multiplicatif dont une des jambes le génère. Cette axiomatique fournit ainsi un bon cadre pour obtenir une dualité.dans une catégorie qu'on pourrait appeler groupoïdes quantiques mesurés. Dans ce cadre général on peut aussi envisager une correspondance de Galois pour les facteurs intermédiaires et généraliser le travail de L.Vainerman et D.Nikshych [NV3].

Un autre axe de travail est également celui de la version topologique de ces structures, i.e. dans le cadre des C^*-algèbres. On peut noter au passage que $\mathcal{L}(G)$ n'est pas, en général, central: $r_G(L^\infty(G^0))$ n'est pas dans son centre sauf si $r_G = s_G$ comme dans le cas des champs de groupes, une version topologique de ces structures nécessiterait de s'affranchir du caractère central, en généralisant par exemple les travaux de E.Blanchard [Bl].

REFERENCES:

[AR] ANANTHARAMAN C. J.RENAULT Amenable groupoids *l'Enseignement mathématique, Genève* (2000)

[Ba] BAAJ S. Représentation régulière du groupe quantique des déplacements de Woronowicz. *Proc.conf.oper.alge.(Orléans, France) Astérisque* **232**, 11-48 (1995).

[BaSk] BAAJ S. et SKANDALIS G. Unitaires multiplicatifs et dualité pour les produits croisés de C*-algèbres. *Ann. Sci. ENS* **26** (1993), 425-488.

[BBS] BAAJ S., BLANCHARD E., SKANDALIS G. Unitaires multiplicatifs en dimension finie et leurs sous-objets *Ann.Inst.Fourier* **49** (1999) fasc.4 1305-1344.

[Bl] BLANCHARD E. Tensor products of $C(X)$-algebras over $C(X)$. *Proc.conf.oper.alge.(Orléans, France) Astérisque.* **232**, 81-92 (1995).

[BoSz1] G.BHM and K.SZLACHÁNYI A coassociative C*-Quantum group with Non Integral Dimensions. *Lett.Math.Phys.* **38** (1996))437-456.

[BoSz2] G.BHM and K.SZLACHÁNYI Weak C*-Hopf algebras: the coassociative symmetry of non integral dimensions, *Quantum groups and quantum spaces. Banach Center Publications* **40** (1997) 9-19.

[BoSz3] G.BHM and K.SZLACHÁNYI WeakC^*-Hopf Algebras and Multiplicative Isometries à paraître au *Jour.of Oper.Theo.*

[BoSzNi] G.BHM K.SZLACHÁNYI and F.NILL Weak Hopf Algebras I.Integral Theory and C^*-structure . *Journal of Algebra* **221** 385-438 (1999).

[Br] BROWN R. From groups to groupoids. A brief survey. *Bull.London Mathematical Society* **19**(1987) 113-134.

[C2] CONNES A. On the spatial theory of von Neumann algebras. *JFA* **35** (1980) 153-164

[E1] ENOCK M.Inclusions irréductibles de facteurs et unitaires multiplicatifs II*J.of Funct.Analysis* **154** (1998) 67-108.

[E2] ENOCK M.Inclusion of von Neumann algebras and quantum groupoids II *JFA* **178** (2000) 156-225. .

[EN] ENOCK M. NEST R. Inclusions of factors, multiplicative unitaries and Kac algebras. *J.of Funct.Analysis* **137** (1996) 466-543.

[ES] ENOCK M. et SCHWARTZ J.M. Une dualité dans les algèbres de von Neumann. Supp.*Bull.Soc.Math.France.*Mémoire **44** (1975) 1-144.

[EV1] ENOCK M. et VALLIN J.M. $C^\star$-algèbres de Kac et algèbres de Kac. *Proc.London.Math.Soc.***(3)66**,(1993) 619-650.

[EV2] ENOCK M. et VALLIN J.M. Inclusions of von Neumann algebras, and quantum groupoids. *Journal of Functional Analysis* **172**, 249-300 (2000).

[H1] HAAN P.Haar measure for measure groupoids. *Trans. Amer. Math. Soc.* **242.**(1978) 1-33

[H2] HAAN P. The regular représentation for measure groupoids *Trans. Amer. Math. Soc.* **242**. (1978) 35-72

[J] JONES J.F.R., Index for subfactors. *Invent. math.* **72** (1983) 1-25.

[KacVa] KAC G. VAINERMAN L. Nonunimodular ring-groups and Hopf-von-Neumann algebras.Math.USSR *Sbornik* **23** (1974) 185-214.

[KusVa1] KUSTERMANS J. VAES S. A simple definition for locally compact quantum groups.*Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, Série I **328** (10)(1999) 871-876

[KusVa2]] KUSTERMANS J. VAES S Locally compact quantum groups in the von Neumann algebraic setting. Preprint

[Le] LEPTIN.H Sur l'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact.*C. Rendus de l'Académie des Sciences Paris* **266** (1968), série I p1180-1182.

[Mac] MACKEY G.W. Ergodic theory and virtual groups.*Math. Ann.* **186** (1966 187-207

[Ni] NILL F. Axioms for weak bialgebras *math.QA*/**9806130**(1998)

[Nd] NIKSHYCH D. Duality for actions of weak Kac algebras and crossed-product inclusions of II_1 factors.*math.QA*/**9810049**(1998)

[NV1] NIKSHYCH D. VAINERMAN L. A characterization of depth 2 subfactors of II_1 factors. *JFA* **171**) 278-307 (2000).

[NV2] NIKSHYCH D. VAINERMAN L. Finite Quantum Groupoids and Their Applications. *math.QA*/**0006057** (2000)

[NV3] NIKSHYCH D. VAINERMAN L. A Galois correspondance for II_1 factors and quantum groupoids *JFA* **178**) 113-142

[R1] RENAULT J. *A groupoid approach to C^*-algebras* Lect.Notes in Mah. **793** Springer-Verlag 1980..

[R2] RENAULT J. The Fourier algebra of a measured groupoïd and its multipliers. *JFA*, **145** (1997) 455-490.

[S1] SAUVAGEOT J.L. Produit tensoriel de Z-modules *Publications math. de l'Université Paris 6* **23** (1980).

[S2] SAUVAGEOT J.L. Produit tensoriel de Z-modules et applications.*Proc. of the inter.conf.on operator algebras and their connections with topology and ergodic theory at Busteni.Rumania* (1983).

[S3] SAUVAGEOT J.L. Sur le produit tensoriel relatif d'espaces de Hilbert. *Journal of Operator Theory* **9** (1983)p237-258.

[Val1] VALLIN J.M. $C^\star$-algèbres de Hopf et $C^\star$-algèbres de Kac *Proc.London Math.Soc.(3)* **50** (1985) p131-174..

[Val2] VALLIN J.M. Bimodules de Hopf et poids opératoriels de Haar *Journal of Operator Theory* **35** (1996) p39-65.

[Val3] VALLIN J.M. Unitaire pseudo-multiplicatif associé à un groupoïde. Applications à la moyennabilité.*Journal of Operator Theory* **44** (2) (2000), 347-368.

[Val4] VALLIN J.M.Groupoïdes quantiques finis. *Journal of Algebra.***239** (2001) p215-261.

[Val5] VALLIN J.M.Finite dimensional quantum groupoids (II). En preparation.

[Van1] VAN DAELE A. The Haar measure on a compact quantum group *Proc. Ame.Math.Soci.* **123** (1995) p3125-3128

[Van2] VAN DAELE A. Discrete quantum groups *Journal of Algebra.***180** (1996) p431-444.

[Van3] VAN DAELE A. The Haar measure on some locally compact quantum groups *Preprint of K.U. Leuven.* (2001).

[Vas] VAES S. Locally compact quantum groups. *Pub.Dep.Wiskunde.* Maart 2001. Faculteit Wetenschappen. Katholieke universiteit Leuven Belgium

[We] WEIL A. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. *Act.Sc. Ind. Hermann Paris* **1145** 1953)

[Wo1] WORONOWICZ S.L. Compact matrix pseudogroups *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 613-665.

[Wo2] WORONOWICZ S.L. Twisted $SU(2)$ group. An example of a non commutative differential calculus. *RIMS* Vol.**23** No.1 117-181 (1987)

[Wo3] WORONOWICZ S.L.Unbounded elements affiliated with C^*-algebras and non-compact quantum groups. *Commun. Math. Phys.* **136** No.2, 399-432 (1991)

[Wo4] WORONOWICZ S.L.From multiplicative unitaries to quantum groups.*Int. J. Math.* **7**, No.1, 127-149 (1996).

[Wo5] WORONOWICZ S.L. Quantum $SU(2)$ and $E(2)$ groups, contraction procedure.*Comm.math.phys.* **149** 637-652 (1992)

[Wo5] WORONOWICZ S.L. Quantum $SU(2)$ and $E(2)$ groups, contraction procedure.*Comm.math.phys.* **149** 637-652 (1992)

[Wo6] WORONOWICZ S.L. Quantum "$ax + b$" group on complex plane

Int.Journ. of Maths. Vol.**12** n.4 p461-503 (2001)

[WoZa] WORONOWICZ S.L. ZAKRZEWSKI Quantum "$ax + b$" *Prepub. Dep.of math.methods in phys.*March 1999 Faculty of Physics, University of Warsaw Poland.

[Y1] YAMANOUCHI T. Duality for actions and co-actions of groupoids on von-Neumann algebras *Memoirs of the American Mathematical Society* **484**(1993).

[Y2] YAMANOUCHI T. Duality for generalized Kac algebras and a characterisation of finite groupoids algebras. *Journal of Algebra* **163**, p9-50 (1994)