

Sur les algèbres obtenues par produit tensoriel. Application aux algèbres de Lie de courant

Elisabeth REMM * - Michel GOZE †

Université de Haute Alsace, F.S.T.
4, rue des Frères Lumière - 68093 MULHOUSE - France

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 18D50, 17A30, 17Bxx, Secondary 17D25.

Keywords. Algèbres de Lie de courant, produit tensoriel d'algèbres sur des opérades quadratiques. Déformations d'algèbres de Lie de courant.

Abstract

Soit \mathcal{P} une opérade quadratique. On détermine une opérade associée $\tilde{\mathcal{P}}$ ayant la propriété suivante, pour toute \mathcal{P} -algèbre A et toute $\tilde{\mathcal{P}}$ -algèbre B alors $A \otimes B$ est une \mathcal{P} -algèbre pour le produit classique. On s'intéresse ensuite au cas particulier des algèbres de Lie de courant en étudiant plus précisément la rigidité et les déformations.

1 Produit tensoriel de \mathcal{P} -algèbres et de $\mathcal{P}^!$ -algèbres

Soit \mathcal{P} une opérade quadratique ayant une opération génératrice (les algèbres sur cette opérade ont une seule opération) et $\mathcal{P}^!$ son opérade duale. Elle vérifie $\mathcal{P}^! = \text{hom}(\mathcal{P}, \mathcal{L}ie)$ où $\mathcal{L}ie$ désigne l'opérade des algèbres de Lie. Pour toute \mathcal{P} -algèbre A et toute $\mathcal{P}^!$ -algèbre B , l'espace vectoriel $A \otimes B$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre de Lie avec $\mu(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = \mu_A(a_1, a_2) \otimes \mu_B(b_1, b_2) - \mu_A(a_2, a_1) \otimes \mu_B(b_2, b_1)$; on en déduit que le produit tensoriel sur $A \otimes B$ défini par

$$\mu(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = \mu_A(a_1, a_2) \otimes \mu_B(b_1, b_2) \quad (1)$$

où μ_A (resp. μ_B) désigne le produit de A (resp. de B) détermine une structure d'algèbre Lie-admissible sur $A \otimes B$. Ceci peut se généraliser au cas des algèbres à plusieurs opérations génératrices comme les algèbres de Poisson.

Dans [3] nous avons défini les opérades $G_i\text{-Ass}$. Une $G_i\text{-Ass}$ -algèbre est nécessairement Lie-admissible. Dans le cas de ces opérades quadratiques nous pouvons munir $A \otimes B$ non

*corresponding author: e-mail: E.Remm@uha.fr

†M.Goze@uha.fr.

seulement d'une structure d'algèbre Lie-admissible mais également d'une structure de G_i - $\mathcal{A}ss$ -algèbre. Rappelons brièvement la définition de ces opérades.

1.1 Les opérades G_i - $\mathcal{A}ss$

Soient \mathbb{K} un corps commutatif et Σ_3 le groupe symétrique d'ordre 3. Notons τ_{ij} la transposition (i, j) et c_i ($i = 1, 2$) le cycle $(1, 2, 3)^i$. Les différents sous-groupes de Σ_3 sont $G_1 = \{Id\}$, $G_2 = \langle \tau_{12} \rangle$, $G_3 = \langle \tau_{23} \rangle$, $G_4 = \langle \tau_{13} \rangle$, $G_5 = \langle c_1 \rangle = \mathcal{A}_3$, le groupe alterné et $G_6 = \Sigma_3$. Pour chacun de ces sous-groupes, on définit le sous-module R_i du $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -module engendré par $(x_i \cdot x_j) \cdot x_k$ et $x_i \cdot (x_j \cdot x_k)$ pour i, j, k tous distincts dans $\{1, 2, 3\}$, de la manière suivante:

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k)\}, \\ R_2 &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) - (x_j \cdot x_i) \cdot x_k + x_j \cdot (x_i \cdot x_k)\}, \\ R_3 &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) - (x_i \cdot x_k) \cdot x_j + x_i \cdot (x_k \cdot x_j)\}, \\ R_4 &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) - (x_k \cdot x_j) \cdot x_i + x_k \cdot (x_j \cdot x_i)\}, \\ R_5 &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) + (x_j \cdot x_k) \cdot x_i - x_j \cdot (x_k \cdot x_i) \\ &\quad + (x_k \cdot x_i) \cdot x_j - x_k \cdot (x_i \cdot x_j)\}, \\ R_6 &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 - x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3) \cdot x_1 - x_2 \cdot (x_3 \cdot x_1) \\ &\quad + (x_3 \cdot x_1) \cdot x_2 - x_3 \cdot (x_1 \cdot x_2) - (x_2 \cdot x_1) \cdot x_3 + x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3) - (x_3 \cdot x_2) \cdot x_1 \\ &\quad + x_3 \cdot (x_2 \cdot x_1) - (x_1 \cdot x_3) \cdot x_2 + x_1 \cdot (x_3 \cdot x_2)\} \end{aligned}$$

L'opérade G_i - $\mathcal{A}ss$ est l'opérade quadratique de générateurs $E = \mathbb{K}[\Sigma_2] = \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{x_i \cdot x_j, i \neq j\}$ et dont l'idéal des relations est R_i . Notons que G_4 - $\mathcal{A}ss = \mathcal{P}re\mathcal{L}ie$.

Soit $(G_i$ - $\mathcal{A}ss)^!$ l'opérade quadratique duale de G_i - $\mathcal{A}ss$. Son idéal $R^!$ est l'orthogonal de R pour le produit scalaire défini par

$$\langle i \cdot (j \cdot k), i \cdot (j \cdot k) \rangle = \text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}, \quad \langle (i \cdot j) \cdot k, (i \cdot j) \cdot k \rangle = -\text{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

Les opérades duales sont quadratiques et définies par les modules $(R_i)^!$ suivants:

$$\begin{aligned} (R_1)^! &= R_1 \\ (R_2)^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - (x_j \cdot x_i) \cdot x_k\} \\ (R_3)^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - (x_i \cdot x_k) \cdot x_j\} \\ (R_4)^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - (x_k \cdot x_j) \cdot x_i\} \\ (R_5)^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - (x_j \cdot x_k) \cdot x_i\} \\ (R_6)^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}}\{(x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - (x_j \cdot x_i) \cdot x_k \\ &\quad (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - (x_i \cdot x_k) \cdot x_j\} \end{aligned}$$

Proposition 1 *Pour toute $(G_i$ - $\mathcal{A}ss)$ -algèbre A et toute $(G_i$ - $\mathcal{A}ss)^!$ -algèbre B sur \mathbb{K} , l'espace vectoriel $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ est muni d'une structure de $(G_i$ - $\mathcal{A}ss)$ -algèbre donnée par*

$$\mu(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = \mu_A(a_1, a_2) \otimes \mu_B(b_1, b_2).$$

Ceci se vérifie directement.

1.2 Cas des algèbres à 3-puissance associatives

Dans [3] nous avons classé des relations de non associativité modulo l'action du groupe Σ_3 . Deux classes d'algèbres se dégagent de cette étude, les algèbres Lie-admissibles et les algèbres à 3-puissance associatives. Ces dernières sont définies par la relation

$$\begin{aligned} & (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 - x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3) \cdot x_1 - x_2 \cdot (x_3 \cdot x_1) + (x_3 \cdot x_1) \cdot x_2 \\ & - x_3 \cdot (x_1 \cdot x_2) + (x_2 \cdot x_1) \cdot x_3 - x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3) + (x_3 \cdot x_2) \cdot x_1 - x_3 \cdot (x_2 \cdot x_1) \\ & + (x_1 \cdot x_3) \cdot x_2 - x_1 \cdot (x_3 \cdot x_2) = 0. \end{aligned}$$

(Ici la signature des permutations n'intervient pas). Nous pouvons définir les opérades quadratiques correspondant aux relations

$$\begin{aligned} R_1^{p^3} &= R_1 \\ R_2^{p^3} &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) + (x_j \cdot x_i) \cdot x_k - x_j \cdot (x_i \cdot x_k) \} \\ R_3^{p^3} &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) + (x_i \cdot x_k) \cdot x_j - x_i \cdot (x_k \cdot x_j) \} \\ R_4^{p^3} &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k) + (x_k \cdot x_j) \cdot x_i - x_k \cdot (x_j \cdot x_i) \} \\ R_5^{p^3} &= R_5 \\ R_6^{p^3} &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 - x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) + (x_2 \cdot x_3) \cdot x_1 - x_2 \cdot (x_3 \cdot x_1) + (x_3 \cdot x_1) \cdot x_2 \\ & - x_3 \cdot (x_1 \cdot x_2) + (x_2 \cdot x_1) \cdot x_3 - x_2 \cdot (x_1 \cdot x_3) + (x_3 \cdot x_2) \cdot x_1 - x_3 \cdot (x_2 \cdot x_1) \\ & + (x_1 \cdot x_3) \cdot x_2 - x_1 \cdot (x_3 \cdot x_2) \} \end{aligned}$$

Notons $(G_i - p^3 \text{Ass})$ l'opérade quadratique correspondante.

Proposition 2 *Pour toute $(G_i - p^3 \text{Ass})$ -algèbre A et toute $(G_i - p^3 \text{Ass})^!$ -algèbre B sur \mathbb{K} , le produit $\mu(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = \mu_A(a_1, a_2) \otimes \mu_B(b_1, b_2)$ munit $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ d'une structure de $(G_i - \text{Ass})$ -algèbre.*

En effet pour $i = 1, \dots, 6$ les opérades duales correspondantes sont décrites par les idéaux de relations suivants:

$$\begin{aligned} (R_1^{p^3})^! &= R_1 \\ (R_2^{p^3})^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k + (x_j \cdot x_i) \cdot x_k \} \\ (R_3^{p^3})^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k + (x_i \cdot x_k) \cdot x_j \} \\ (R_4^{p^3})^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k + (x_k \cdot x_j) \cdot x_i \} \\ (R_5^{p^3})^! &= R_5^! \\ (R_6^{p^3})^! &= \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (x_i \cdot x_j) \cdot x_k - x_i \cdot (x_j \cdot x_k); (x_i \cdot x_j) \cdot x_k + (x_j \cdot x_i) \cdot x_k \\ & (x_i \cdot x_j) \cdot x_k + (x_i \cdot x_k) \cdot x_j \}. \end{aligned}$$

2 L'opérade $\tilde{\mathcal{P}}$ associée à une opérade quadratique \mathcal{P}

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que pour certaines opérades quadratiques, l'opérade duale permet de construire sur le produit tensoriel d'une \mathcal{P} -algèbre A et d'une $\mathcal{P}^!$ -algèbre B une structure de \mathcal{P} -algèbre pour le produit tensoriel classique. Mais ceci n'est pas

vrai pour toute opérade quadratique. Dans ce paragraphe nous allons définir à partir d'une opérade quadratique donnée \mathcal{P} une opérade quadratique associée, notée $\tilde{\mathcal{P}}$, dont la propriété fondamentale est de vérifier la propriété ci-dessus sur le produit tensoriel. Rappelons dans un premier temps la notion d'algèbre $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -associative introduite dans [3]

2.1 Algèbres $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -associatives

Soit $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ l'algèbre de groupe associée au groupe symétrique d'ordre 3, avec \mathbb{K} un corps de caractéristique différente de 2 et 3. On considère l'action à droite de Σ_3 sur $\mathbb{K}[\Sigma_3]$:

$$\begin{aligned} \Sigma_3 \times \mathbb{K}[\Sigma_3] &\rightarrow \mathbb{K}[\Sigma_3] \\ (\sigma, \sum_i a_i \sigma_i) &\mapsto \sum_i a_i \sigma^{-1} \circ \sigma_i. \end{aligned}$$

Pour tout $v \in \mathbb{K}[\Sigma_3]$ on note $\mathcal{O}(v)$ l'orbite correspondante et par $F_v = \mathbb{K}(\mathcal{O}(v))$ le sous-espace linéaire de $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ engendré par $\mathcal{O}(v)$. Comme F_v est un sous-espace Σ_3 -invariant de $\mathbb{K}[\Sigma_3]$, d'après le théorème de Mashke, c'est une somme directe de sous-espaces invariants irréductibles. De plus si on se donne un sous-espace invariant F de $\mathbb{K}[\Sigma_3]$, il existe $v \in \mathbb{K}[\Sigma_3]$ (pas nécessairement unique) tel que $F = F_v = \mathbb{K}(\mathcal{O}(v))$.

Soit (\mathcal{A}, μ) une \mathbb{K} -algèbre ayant μ pour multiplication. On note A_μ l'associateur de μ

$$A_\mu = \mu \circ (\mu \otimes Id - Id \otimes \mu).$$

Chaque $\sigma \in \Sigma_3$ définit alors un endomorphisme Φ_σ de $\mathcal{A}^{\otimes 3}$:

$$\begin{aligned} \Phi_\sigma : \mathcal{A}^{\otimes 3} &\rightarrow \mathcal{A}^{\otimes 3} \\ x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 &\mapsto x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes x_{\sigma^{-1}(2)} \otimes x_{\sigma^{-1}(3)}. \end{aligned}$$

Cela induit pour tout $v = \sum_{i=1}^6 a_i \sigma_i \in \mathbb{K}[\Sigma_3]$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $\sigma_i \in \Sigma_3$, un endomorphisme Φ_v de $\mathcal{A}^{\otimes 3}$

$$\Phi_v = \sum_{i=1}^6 a_i \Phi_{\sigma_i}.$$

Définition 3 1. Une algèbre (\mathcal{A}, μ) est dite $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -associative s'il existe $v \in \mathbb{K}[\Sigma_3]$, $v \neq 0$, tel que $A_\mu \circ \Phi_v = 0$.

2. Soit $A_\mu \circ \Phi_v = 0$ et $A_\mu \circ \Phi_w = 0$ deux identités vérifiées par l'algèbre (\mathcal{A}, μ) . On dira que ces identités sont équivalentes si $F_v = \mathbb{K}(\mathcal{O}(v)) = F_w = \mathbb{K}(\mathcal{O}(w))$.

Remarquons que si F_v n'est pas un sous-espace invariant irréductible, il existe alors $w \in F_v$ tel que $F_w \subset F_v$ et $F_w \neq F_v$. Dans ce cas l'identité $A_\mu \circ \Phi_v = 0$ implique $A_\mu \circ \Phi_w = 0$ mais ces identités ne sont pas équivalentes.

Exemples.

1. Si $v = Id - \tau_{23}$, l'identité

$$A_\mu \circ \Phi_v = 0 \tag{2}$$

devient

$$A_\mu(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 - x_1 \otimes x_3 \otimes x_2) = 0$$

L'algèbre correspondante est une algèbre pré-Lie.

2. Dans tout ce qui suit nous noterons

$$V = \sum_{i=1}^6 (-1)^{\epsilon(\sigma_i)} \sigma_i, \quad W = \sum_{i=1}^6 \sigma_i,$$

où $(-1)^{\epsilon(\sigma_i)}$ est la signature de $\sigma_i \in \Sigma_3$. Une algèbre (\mathcal{A}, μ) est Lie-admissible si

$$A_\mu \circ \Phi_V = 0$$

et à 3-puissance associative si

$$A_\mu \circ \Phi_W = 0.$$

3. Notons pour $i = 1, \dots, 6$

$$V_i = \sum_{\sigma \in G_i} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \sigma, \quad W_i = \sum_{\sigma \in G_i} \sigma.$$

Alors une algèbre (\mathcal{A}, μ) est G_i -ass si

$$A_\mu \circ \Phi_{V_i} = 0$$

et G_i - p^3 ass si

$$A_\mu \circ \Phi_{W_i} = 0.$$

2.2 L'opérade $\tilde{\mathcal{P}}$

Notons

$$A_\mu = A_\mu^L - A_\mu^R$$

où $A_\mu^L(x_1, x_2, x_3) = \mu(\mu(x_1, x_2), x_3)$ et $A_\mu^R(x_1, x_2, x_3) = \mu(x_1, \mu(x_2, x_3))$.

Soit \mathcal{P} une opérade quadratique engendrée par $E \subset \mathbb{K}[\Sigma_2]$ et dont l'idéal des relations R est

$$R = \text{Vect}_{\mathbb{K}} \{ (A_\mu^L \circ \Phi_{v_p} - A_\mu^R \circ \Phi_{w_p})(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3), 1 \leq p \leq s \}$$

avec $v_p = \sum_{i=1}^6 a_p^i \sigma_i$ et $w_p = \sum_{i=1}^6 b_p^i \sigma_i$ pour tout $1 \leq p \leq s$.

Notons \tilde{R} le $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -module engendré par les vecteurs

$$\begin{aligned} & a_p^i a_p^j (A_\mu^L \circ \Phi_{\sigma_i - \sigma_j})(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3), \\ & b_p^i b_p^j (A_\mu^R \circ \Phi_{\sigma_i - \sigma_j})(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3), \\ & a_p^i b_p^j (A_\mu^L \circ \Phi_{\sigma_i} - A_\mu^R \circ \Phi_{\sigma_j})(x_1 \otimes x_2 \otimes x_3), \end{aligned}$$

pour tout $1 \leq p \leq s$.

Définition 4 L'opérade $\tilde{\mathcal{P}}$ associée à l'opérade quadratique \mathcal{P} est l'opérade quadratique engendrée par E^\vee et dont l'idéal des relations est \tilde{R} .

On rappelle que si F est un $\mathbb{K}[\Sigma_n]$ -module à droite, on note F^\vee le \mathbb{K} -espace vectoriel $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(F, K)$ muni de l'action à droite de Σ_n donnée par:

$$(f\sigma)(x) = \epsilon(\sigma)f(x\sigma^{-1})$$

pour tous $f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(F, K)$, $\sigma \in \Sigma_n$ et $x \in F$.

Théorème 5 Soient A est une \mathcal{P} -algèbre et B une $\tilde{\mathcal{P}}$ -algèbre. Alors l'algèbre $A \otimes B$ dont le produit est donné par (1) est munie d'une structure de \mathcal{P} -algèbre.

Exemples

1. Si \mathcal{P} est l'une des opérades (G_i -Ass), alors les opérades $\mathcal{P}^!$ et $\tilde{\mathcal{P}}$ sont égales.
2. Si $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$ alors $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^! = \mathcal{C}om$.
3. Soit $\mathcal{P} = \mathcal{L}eib$ l'opérade de Leibniz. Une algèbre de Leibniz est définie par l'identité

$$x(yz) - (xy)z + (xz)y = 0.$$

Dans ce cas l'opérade $\tilde{\mathcal{P}}$ associée correspond aux relations

$$x(yz) = (xy)z$$

et

$$(xy)z = (xz)y.$$

Ainsi une $\tilde{\mathcal{L}eib}$ -algèbre est une algèbre associative vérifiant

$$xyz = xzy.$$

Cette relation est équivalente à

$$x[y, z] = 0$$

avec $[y, z] = yz - zy$. Cette dernière identité implique que si x et y sont dans la sous algèbre de Lie dérivée de l'algèbre de Lie associée, alors $xy = 0$. L'algèbre de Lie dérivée est donc abélienne et l'algèbre de Lie est nilpotente d'ordre 2. L'opérade duale, notée aussi $\mathcal{Z}inb$, correspond à l'identité

$$(xy)z - x(yz) - x(zy) = 0.$$

Ainsi une $\tilde{\mathcal{L}eib}$ -algèbre est une algèbre de Zinbiel (c'est-à-dire une $\mathcal{L}eib^!$ -algèbre) si $x(yz) = (xy)z = 0$ (tout produit de trois éléments de l'algèbre associative est nul). Ces algèbres sont donc des nilalgèbres A vérifiant $A^3 = 0$. Par exemple, toute algèbre associative commutative est une $\tilde{\mathcal{L}eib}$ -algèbre. Toute $\tilde{\mathcal{L}eib}$ -algèbre unitaire est commutative. En dimension 3 l'algèbre définie par

$$e_1e_1 = e_2, e_1e_3 = e_3e_3 = e_2$$

est une $\tilde{\mathcal{L}eib}$ -algèbre non commutative.

3 Détermination de $\tilde{\mathcal{P}}$ dans le cas Lie-admissible

Dans le tableau suivant on décrit les lois d'algèbres correspondant aux opérades $\mathcal{P}, \mathcal{P}^!, \tilde{\mathcal{P}}$ pour les opérades décrites dans [4], Théorème 3. Rappelons que ces algèbres sont des algèbres Lie-admissibles $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -associatives. Notons $A(x, y, z)$ l'associateur : $A(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$.

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{L}ieAdm : A(x, y, z) - A(y, x, z) - A(x, z, y) - A(z, y, x) + A(y, z, x) + A(z, x, y) = 0. \\ \mathcal{P}^! : A(x, y, z) = 0, \quad x \cdot y \cdot z = y \cdot x \cdot z = x \cdot z \cdot y. \\ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^! \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} = G_5 - \mathcal{A}ss : A(x, y, z) + A(y, z, x) + A(z, x, y) = 0. \\ \mathcal{P}^! : A(x, y, z) = 0, \quad x \cdot y \cdot z = y \cdot z \cdot x = z \cdot x \cdot y. \\ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^! \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} : \alpha A(x, y, z) - \alpha A(y, x, z) + (\alpha + \beta - 3)A(z, y, x) - \beta A(x, z, y) + \beta A(y, z, x) \\ \quad + (3 - \alpha - \beta)A(z, x, y) = 0, \quad (\alpha, \beta) \neq (1, 1) \\ \mathcal{P}^! : A(x, y, z) = 0, \quad (\alpha - \beta)(x \cdot y \cdot z - y \cdot x \cdot z) + (\alpha + 2\beta - 3)(z \cdot y \cdot x - z \cdot x \cdot y) = 0 \end{cases}$$

Le calcul de $\tilde{\mathcal{P}}$ dépend des valeurs des paramètres α et β . Si $(\alpha, \beta) \neq (3, 0)$ ou $(0, 3)$ ou $(0, 0)$ alors

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{L}ieAdm^!$$

Si $(\alpha, \beta) = (3, 0)$ alors $\mathcal{P} = G_2 - \mathcal{A}ss$ et

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^! = G_2 - \mathcal{A}ss^!$$

Si $(\alpha, \beta) = (0, 3)$ alors $\mathcal{P} = G_4 - \mathcal{A}ss$ et

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^! = G_4 - \mathcal{A}ss^!$$

Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, alors $\mathcal{P} = G_3 - \mathcal{A}ss$ et

$$\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^! = G_3 - \mathcal{A}ss^!$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} : A(x, y, z) + (1+t)A(y, x, z) + A(z, y, x) + A(y, z, x) + (1-t)A(z, x, y) = 0, \quad t \neq 1 \\ \mathcal{P}^! : A(x, y, z) = 0, \quad (t-1)x \cdot y \cdot z - (t-1)y \cdot x \cdot z - (t+2)z \cdot y \cdot x + (1+2t)x \cdot z \cdot y \\ \quad - (1+2t)y \cdot z \cdot x + (t+2)z \cdot x \cdot y = 0. \\ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{L}ieAdm^!. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} : 2A(x, y, z) + A(y, x, z) + A(x, z, y) + A(y, z, x) + A(z, x, y) = 0. \\ \mathcal{P}^! : A(x, y, z) = 0, \quad x \cdot y \cdot z + y \cdot x \cdot z - z \cdot y \cdot x - z \cdot x \cdot y = 0. \\ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{L}ieAdm^!. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} : 2A(x, y, z) - A(y, x, z) - A(z, y, x) - A(x, z, y) + A(y, z, x) = 0. \\ \mathcal{P}^! : A(x, y, z) = 0, \quad x \cdot y \cdot z - y \cdot x \cdot z - z \cdot y \cdot x - x \cdot z \cdot y + y \cdot z \cdot x + z \cdot x \cdot y = 0 \\ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{L}ieAdm^!. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{P} = \mathcal{A}ss : A(x, y, z) = 0. \\ \mathcal{P}^! = \mathcal{A}ss \\ \tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{A}ss \end{cases}$$

Proposition 6 Soit \mathcal{P} une opérade correspondant à un type d'algèbres $\mathbb{K}[\Sigma_3]$ -associatives Lie-admissibles. Alors $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^!$ si et seulement si \mathcal{P} est l'une des opérades $G_i - \mathcal{A}ss$.

On peut également déterminer les opérades telles que $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^!$ dans le cas d'une opérade quadratique engendrée par une opération commutative (i.e $E = \mathbb{1}$) ou anticommutative (i.e $E = Sgn_2$)

Proposition 7 Soit $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{K}, E, R)$ une opérade quadratique.

Si $E = Sgn_2$ alors $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^!$ si et seulement si $\mathcal{P} = Com$ ou $\mathcal{P} = \mathcal{F}(Sgn_2)$, l'opérade libre engendrée par la représentation signature.

Si $E = \mathbb{1}$ alors $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}^!$ si et seulement si $\mathcal{P} = \mathcal{F}(\mathbb{1})$ ou $\mathcal{P}(\mathbb{K}, \mathbb{1}, R)$ avec R engendré par les relations $(x_i \cdot x_j) \cdot x_k + (x_j \cdot x_k) \cdot x_i + (x_k \cdot x_i) \cdot x_j$.

4 Cas où $\mathcal{P} = Lie$: les algèbres de Lie de courant

Si l'opérade \mathcal{P} est l'opérade *Lie*, alors $\tilde{Lie} = Lie^! = Com$. Une algèbre de Lie du type $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ où \mathfrak{g} est une algèbre de Lie et \mathcal{A} une algèbre associative commutative est dite algèbre de Lie de courant. Ces algèbres ont été souvent étudiées, surtout lorsque $\mathcal{A} = \mathbb{C}[z, z^{-1}]$. Dernièrement leur cohomologie scalaire a été étudiée [8] et plus généralement leur cohomologie à valeur dans un module [9].

4.1 La variété $\mathcal{L}(p, q)$

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie de type $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ où \mathfrak{g}_p est une algèbre de Lie de dimension p et \mathcal{A}_q une algèbre associative commutative de dimension q . On suppose que le corps \mathbb{K} des scalaires est algébriquement clos et de caractéristique nulle. Considérons les bases $\{X_1, \dots, X_p\}$ de \mathfrak{g}_p , $\{e_1, \dots, e_p\}$ de \mathcal{A}_q . Si on note $\{C_{ij}^k\}$ et $\{D_{ab}^c\}$ les constantes de structure de \mathfrak{g}_p et \mathcal{A}_q relatives à ces bases, alors comme

$$[X_i \otimes e_a, X_j \otimes e_b] = \sum_{k,c} C_{ij}^k D_{ab}^c X_k \otimes e_c,$$

celles de \mathfrak{g} relatives à la base $\{X_i \otimes e_a\}_{i=1, \dots, p; a=1, \dots, q}$ sont $\{C_{ij}^k D_{ab}^c\}$. Les relations de Jacobi s'écrivent alors

$$\sum_{l,r} C_{ij}^l C_{lk}^s D_{ab}^r D_{rc}^t + C_{jk}^l C_{li}^s D_{bc}^r D_{ra}^t + C_{ki}^l C_{lj}^s D_{ca}^r D_{rb}^t = 0$$

$$\forall (s, t) \in \{\{1, \dots, p\} \times \{1, \dots, q\}\}.$$

Ces relations polynomiales définissent une structure de variété algébrique $\mathcal{L}(p, q)$ plongée dans l'espace des constantes de structure $\{C_{ij}^k D_{ab}^c\}$. C'est une sous-variété fermée de la variété $\mathcal{L}(pq)$ des algèbres de Lie sur \mathbb{K} de dimension pq .

Il existe deux sortes de déformations

- les déformations de \mathfrak{g} dans la variété $\mathcal{L}(pq)$. Ces déformations sont paramétrées par le deuxième espace de cohomologie de Chevalley $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

- les déformations de \mathfrak{g} dans la variété $\mathcal{L}(p, q)$. Elles sont paramétrées par $H_C^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \oplus H_H^2(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)$ où $H_H^2(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)$ est la cohomologie de Harrison de l'algèbre associative commutative \mathcal{A}_q . La variété $\mathcal{L}(p, q)$ est fibrée par l'action du groupe algébrique $G(p, q) = GL(p) \otimes GL(q)$. On notera $\mathcal{O}_{p,q}(\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q)$ l'orbite de l'algèbre $\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ dans $\mathcal{L}(p, q)$ relative à cette action.

Définition 8 *On dira que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide dans $\mathcal{L}(p, q)$ si l'orbite $\mathcal{O}_{p,q}$ est ouverte (au sens de Zariski). Elle sera dite rigide si l'orbite \mathcal{O} relative à l'action de $GL(pq)$ dans $\mathcal{L}(pq)$ est ouverte.*

Il est clair que la rigidité implique la rigidité dans $\mathcal{L}(p, q)$.

Proposition 9 *Une algèbre de Lie de type tensoriel $\mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide dans $\mathcal{L}(p, q)$ si et seulement si \mathfrak{g}_p est rigide dans $\mathcal{L}(p)$ et \mathcal{A}_q est rigide dans $Com(q)$, la variété des algèbres associatives commutatives de dimension q .*

Exemple. $p = 2, q = 2$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Il n'existe qu'une seule algèbre de Lie rigide à isomorphisme près de dimension 2. Elle est donnée par $[X_1, X_2] = X_2$. Il n'existe qu'une seule algèbre associative commutative à isomorphisme près de dimension 2. Elle est donnée par $e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 e_2 = 0$ et correspond à l'algèbre semi-simple $A_1^2 = M_1(\mathbb{K}) \times M_1(\mathbb{K})$ où $M_n(\mathbb{K})$ est l'algèbre des matrices sur \mathbb{K} d'ordre n . L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2 \otimes A_1^2$ est rigide dans $\mathcal{L}(2, 2)$. Cette algèbre est isomorphe à $\mathfrak{g}_2 \otimes \mathfrak{g}_2$. Elle est aussi rigide dans $\mathcal{L}(4)$.

4.2 Sur la rigidité des algèbres de Lie de courant

Rappel: Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie rigide de dimension finie. Elle admet une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ où $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$ est le radical de \mathfrak{g} , \mathfrak{t} une sous-algèbre maximale abélienne dont les opérateurs adjoints $ad X, X \in \mathfrak{t}$, sont semi-simples et \mathfrak{n} est le nilradical. Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide alors \mathfrak{g}_p est rigide dans $\mathcal{L}(p)$. Si \mathfrak{g}_p est résoluble il en est de même de \mathfrak{g} et on a

$$\mathfrak{g}_p = \mathfrak{t}_p \oplus \mathfrak{n}_p \quad \text{et} \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}.$$

Comme $\mathfrak{n}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est un idéal nilpotent de \mathfrak{g} , $\mathfrak{n}_p \otimes \mathcal{A}_p \subset \mathfrak{n}$.

Lemma 10 *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide alors \mathcal{A}_q possède un idempotent non nul.*

Démonstration. Si \mathcal{A}_q est une nilalgèbre alors \mathfrak{g} est nilpotente. En effet soit $X \in \mathfrak{g}_p$ et $a \in \mathcal{A}_q$. Alors $[ad(X \otimes a)]^m = (ad X)^m \otimes (L_a)^m$ où $L_a : \mathcal{A}_q \rightarrow \mathcal{A}_q$ est la multiplication à gauche par a . Comme \mathcal{A}_q est une nilalgèbre, tous les éléments sont nilpotents et il existe m_0 tel que $(L_a)^{m_0} = 0$. Ainsi $ad(X \otimes a)$ est un opérateur nilpotent pour tout X et tout a . On en déduit que \mathfrak{g} est nilpotente. Soit f une dérivation de \mathfrak{g}_p . Alors $f \otimes Id$ est une dérivation de \mathfrak{g} . Comme \mathfrak{g}_p est rigide, il existe une dérivation intérieure $ad X$ diagonale non nulle. Dans ce cas $ad X \otimes Id$ est une dérivation diagonale non nulle de \mathfrak{g} . Par hypothèse \mathfrak{g} est rigide. Or toute algèbre de Lie rigide nilpotente est caractéristiquement nilpotente, c'est-à-dire que toutes ses dérivations sont nilpotentes. On obtient donc une contradiction et \mathcal{A}_p ne peut être une nilalgèbre. Comme elle est de dimension finie, elle admet un idempotent non nul.

Proposition 11 *Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide alors \mathcal{A}_q est une algèbre associative commutative rigide unitaire dans $Com(q)$.*

Démonstration. Soit $e \in \mathcal{A}_q$ tel que $e^2 = e$. La décomposition de Pierce associée

$$\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_q^{00} \oplus \mathcal{A}_q^{10} \oplus \mathcal{A}_q^{01} \oplus \mathcal{A}_q^{11}.$$

où $\mathcal{A}_q^{ij} = \{x \in \mathcal{A}_q / e \cdot x = ix, x \cdot e = jx\}$ se réduit à $\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_q^{11} \oplus \mathcal{A}_q^{00}$ car \mathcal{A}_q est commutative et l'on a $\mathcal{A}_q^{11} \cdot \mathcal{A}_q^{00} = \{0\}$. Ainsi \mathcal{A}_q est somme directe de deux sous-algèbres commutatives. Comme \mathcal{A}_q est rigide il en est de même de \mathcal{A}_q^{11} et \mathcal{A}_q^{00} . La sous-algèbre \mathcal{A}_q^{11} est unitaire (e est l'unité). D'après le lemme précédent \mathcal{A}_q^{00} possède un idempotent et admet une décomposition

$$\mathcal{A}_q^{00} = \mathcal{A}_q^{0011} \oplus \mathcal{A}_q^{0000}$$

avec $\mathcal{A}_q^{0011} \neq \{0\}$. Par induction on en déduit que

$$\mathcal{A}_q = \mathcal{A}_q^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_q^p$$

avec \mathcal{A}_q^i unitaire d'unité e_i et $\{e_1, \dots, e_p\}$ forme un système d'idempotents orthogonaux. Alors $e_1 + \dots + e_p$ est une unité de \mathcal{A}_q .

Théorème 12 *Soit \mathfrak{g}_p une algèbre de Lie rigide de radical résoluble non nilpotent telle que $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide si et seulement si $\mathcal{A}_q = M_1^q$ est donnée par $e_i^2 = e_i$ $i = 1, \dots, q$, $e_i \cdot e_j = 0$ si $i \neq j$.*

Démonstration. Comme \mathcal{A}_q est unitaire, le radical de \mathfrak{g} est résoluble non nilpotent. De plus $Z(\mathfrak{g}_p) = \{0\}$ implique $Z(\mathfrak{g}) = \{0\}$. En effet si $U = \sum_{j,a} \alpha_{ja} X_j \otimes x_a$ est dans le centre de \mathfrak{g} , alors $[U, X \otimes 1] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}_p$. Ainsi

$$\sum \alpha_{j,a} [X_j, X] \otimes x_a = 0.$$

On en déduit $[\sum_j \alpha_{ja} X_j, X] = 0$ pour tout a et pour tout X . Donc $\sum_j \alpha_{ja} X_j \in Z(\mathfrak{g}_p)$ pour tout a . Donc $\alpha_{ja} = 0$ pour tout a et $U = 0$.

Par conséquent \mathfrak{g} est une algèbre de Lie rigide de centre trivial dont le radical est non nilpotent. On en déduit que toutes les dérivations sont intérieures. Soit f une dérivation non nulle de \mathcal{A}_q . Comme \mathcal{A}_q est commutative, elle est nécessairement extérieure. Alors $Id \otimes f$ est une dérivation de \mathfrak{g} et vérifie $(Id \otimes f)(X \otimes 1) = X \otimes f(1) = 0$ car $f(1 \cdot 1) = 2f(1) = f(1) = 0$. Supposons que $Id \otimes f \in Int(\mathfrak{g})$, c'est-à-dire $Id \otimes f = ad(\sum \alpha_{ij} X_i \otimes x_j)$. Alors $(Id \otimes f)(X \otimes 1) = \sum \alpha_{ij} [X_i, X] \otimes x_j = 0$ ce qui implique $\sum \alpha_{ij} [X_i, X] = 0$ pour tout j et pour tout X . Donc $\sum \alpha_{ij} X_i \in Z(\mathfrak{g}_p)$ pour tout j . Comme le centre est trivial $\sum \alpha_{ij} X_j = 0$ pour tout j et $Id \otimes f \notin Int(\mathfrak{g})$. On a une contradiction. Ainsi \mathcal{A}_q est telle que toute dérivation externe est nulle. On en déduit que $\mathcal{A}_q = M_1^q$.

4.3 Cohomologie et déformations

a) La cohomologie de Chevalley des algèbres de Lie de courant a été calculée dans [9] pour les degrés 1 et 2. En particulier on montre que l'algèbre des dérivations vérifie

$$Der(\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q) = Der(\mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{A}_q \oplus Hom(\mathfrak{g}_p / [\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p], Z(\mathfrak{g}_p)) \otimes \frac{End(\mathcal{A}_q)}{\mathcal{A}_q + Der \mathcal{A}_q}.$$

Plus précisément soit $f = f_1 \otimes f_2$ une dérivation de \mathfrak{g} . Notons μ_1 le produit de Lie de \mathfrak{g} et μ_2 celui de \mathcal{A}_q . Alors f est une dérivation de \mathfrak{g} si et seulement si

$$\mu_1(f_1(X), Y) \otimes \mu_2(f_2(a), b) + \mu_1(X, f_1(Y)) \otimes \mu_2(f_2(b), a) - f_1(\mu_1(X, Y)) \otimes f_2(\mu_2(a, b)) = 0$$

pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ et $a, b \in \mathcal{A}_q$. Si \mathcal{A}_q est unitaire, en prenant $a = b = 1$, on obtient

$$[\mu_1(f_1(X), Y) + \mu_1(X, f_1(Y)) - f_1(\mu_1(X, Y))] \otimes f_2(1) = 0$$

et f_1 est une dérivation de \mathfrak{g}_1 dès que $f_2(1) \neq 0$. Prenons $a = b$. L'identité ci-dessus se réduit à:

$$f_1(\mu_1(X, Y)) \otimes (\mu_2(f_2(a), a) - f_2(a^2)) = 0.$$

Ainsi, soit f_1 vérifie $f_1(\mu_1(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)) = 0$, soit f_2 vérifie $\mu_2(f_2(a), a) = f_2(a^2)$. Cette dernière identité se linéarise en

$$\mu_2(f(a), b) + \mu_2(a, f(b)) = 2f_2(a, b).$$

Concernant la classe des algèbres rigides étudiées, $Z(\mathfrak{g}_p) = \{0\}$ (Notons que la conjecture " toute algèbre de Lie rigide est de centre trivial " n'est aujourd'hui ni confirmée ni infirmée). On en déduit

$$\mathcal{D}er(\mathfrak{g}) \simeq \mathcal{D}er(\mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{A}_q.$$

Dans le cas général, le premier espace de cohomologie est donné par [9]:

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^1(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{A}_q \oplus Hom(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{D}er(\mathcal{A}_q) \oplus Hom(\mathfrak{g}_p / [\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p], Z(\mathfrak{g}_p)) \otimes \frac{Hom(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)}{\mathcal{A}_q + \mathcal{D}er \mathcal{A}_q}.$$

Dans ce cas, ceci se réduit à

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \simeq H^1(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{A}_q \oplus Hom(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{D}er(\mathcal{A}_q).$$

Si \mathfrak{g}_p est rigide de radical non nilpotent, alors toutes les dérivations sont intérieures. On en déduit $H^1(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) = 0$ et $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = Hom(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{D}er(\mathcal{A}_q)$. Ainsi $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}er(\mathcal{A}_q) = 0$. On retrouve donc le résultat

Proposition 13 *Soit \mathfrak{g}_p une algèbre de Lie rigide de radical non nilpotent et de centre nul. Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ est rigide si et seulement si $\mathcal{D}er(\mathcal{A}_q) = 0$.*

b) Une 2- cochaîne de Chevalley φ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \otimes \mathcal{A}_q$ se décompose sous la forme

$$\varphi = \psi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_3 \otimes \psi_4$$

avec $\psi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$, $\varphi_2 \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$ et $\varphi_3 \in \mathcal{S}^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$, $\psi_4 \in \mathcal{C}^2(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)$, où $\mathcal{C}^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$ désigne l'espace des 2-cochaines de Chevalley de \mathfrak{g}_p , $\mathcal{S}^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$ l'espace des applications bilinéaires symétriques à valeurs dans \mathfrak{g}_p , $\mathcal{C}^2(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)$ l'espace des 2-cochaines de la cohomologie de Harrison de \mathcal{A}_q . On en déduit que par rapport à cette décomposition on peut écrire $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = (H^2)' \oplus (H^2)''$. Le premier espace a été calcul dans ([9], proposition 3.1). On trouve

$$(H^2)' = H^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \mathcal{A}_q \oplus \mathcal{B}(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \frac{H_H^2(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)}{\mathcal{P}_+(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)} \oplus \chi(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p) \otimes \frac{\mathcal{A}(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)}{\mathcal{P}_+(\mathcal{A}_q, \mathcal{A}_q)}$$

(pour les notations voir [9]). Par contre le deuxième espace n'est calculé que lorsque \mathfrak{g}_p est abélienne.

Soit $\mu_1 \otimes \mu_2 + \epsilon(\psi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_3 \otimes \psi_4)$ une déformation infinitésimale de $\mu_1 \otimes \mu_2$. La partie linéaire de l'identité de Jacobi donne l'expression d'un 2-cocycle de Chevalley de $\mu_1 \otimes \mu_2$. On trouve:

$$\begin{aligned} \delta_{\mu_1 \otimes \mu_2}(\psi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_3 \otimes \psi_4) &= \Sigma \mu_1(\psi_1(X_1, X_2), X_3) \otimes \mu_2(\varphi_2(a_1, a_2), a_3) \\ &\quad + \Sigma \mu_1(\varphi_3(X_1, X_2), X_3) \otimes \mu_2(\psi_4(a_1, a_2), a_3) \\ &\quad + \Sigma \psi_1(\mu_1(X_1, X_2), X_3) \otimes \varphi_2(\mu_2(a_1, a_2), a_3) \\ &\quad + \Sigma \varphi_3(\mu_1(X_1, X_2), X_3) \otimes \psi_4(\mu_2(a_1, a_2), a_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pour tout $X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}_p$ et $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{A}_q$, la somme étant prise sur les permutations cycliques de $(1, 2, 3)$. On en déduit

Proposition 14 *Si \mathcal{A}_q est unitaire alors $\psi_1 \in Z^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$ dès que $\varphi_2(1, 1) \neq 0$.*

Si $X_1 = X_2 = X_3$, l'identité ci-dessus se réduit à:

$$\mu_1(\varphi_3(X, X), X) \otimes \Sigma \mu_2(\psi_4(a_1, a_2), a_3) = 0.$$

Proposition 15 *S'il existe $X \in \mathfrak{g}_p$ tel que $\mu_1(\varphi_3(X, X), X) \neq 0$ alors*

$$\mu_2 \bullet \psi_4 = 0$$

avec

$$\mu_2 \bullet \psi_4(a_1, a_2, a_3) = \Sigma \mu_2(\psi_4(a_1, a_2), a_3).$$

Notons que ψ est un 2-cocycle pour la cohomologie de Harrison de μ_2 si $\mu_2 \bullet \psi_4 = \psi_4 \bullet \mu_2$. Supposons \mathfrak{g} rigide résoluble sans centre. Alors \mathcal{A}_q est unitaire et $\psi_1 \in Z^2(\mathfrak{g}_p, \mathfrak{g}_p)$ dès que $\varphi_2(1, 1) \neq 0$.

5 Application : algèbres associatives commutatives réelles rigides

5.1 Algèbres de Lie réelles rigides

L'étude des algèbres de Lie réelles rigides a été dernièrement initiée dans [1]. Rappelons les principaux résultats. Soit \mathfrak{n} une algèbre de Lie réelle nilpotente de dimension finie. On appelle *tore externe de dérivations* de \mathfrak{n} une sous algèbre abélienne \mathfrak{t} de l'algèbre de Lie des dérivations $\mathcal{D}er(\mathfrak{n})$ telle que les éléments $f \in \mathfrak{t}$ soient semi-simples. Ceci signifie que les dérivations complexes $f \otimes Id \in \mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}$ soient simultanément diagonalisables. Si \mathfrak{t} est un tore externe de dérivations maximal de \mathfrak{n} alors $\mathfrak{t} \otimes \mathbb{C}$ est un tore maximal de Malcev de $\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}$. Comme tous les tores maximaux de $\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C}$ sont conjugués par rapport à $Aut(\mathfrak{n} \otimes \mathbb{C})$ leur dimension sont égales. Il en est de même pour les tores maximaux \mathfrak{t} de \mathfrak{n} . Cette dimension est appelée le rang de \mathfrak{n} . Mais contrairement au cas complexe, tous les tores maximaux ne sont pas conjugués par rapport au groupe des automorphismes.

Définition 16 On appelle indice toroidal de \mathfrak{n} le nombre de classes de conjugaison des tores externes maximaux module $\text{Aut}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n})$ le groupe des automorphismes de \mathfrak{n} .

Exemple. L'indice toroidal de l'algèbre de Lie abélienne réelle \mathfrak{a}_n de dimension n est $[n/2] + 1$ où $[p]$ désigne la partie entière du rationnel p . En effet soit $\{X_1, \dots, X_n\}$ une base de \mathfrak{a}_n et notons f_i la dérivation définie par $f_i(X_j) = \delta_i^j X_j$ et $f_{1,2p}$ la dérivation donnée par

$$\begin{cases} f_{1,2p}(X_{2p-1}) = X_{2p}, \\ f_{1,2p}(X_{2p}) = X_{2p-1}. \end{cases}$$

Les tores maximaux extérieurs sont à conjugaison près les sous algèbres de $gl(n, \mathbb{R})$ engendrées par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1 &= \mathbb{R}\{f_1, \dots, f_n\} \\ \mathfrak{t}_2 &= \mathbb{R}\{f_{1,2}, f_1 + f_2, f_3, \dots, f_n\} \\ \mathfrak{t}_3 &= \mathbb{R}\{f_{1,2}, f_1 + f_2, f_{1,4}, f_3 + f_4, f_5, \dots, f_n\} \\ &\dots \\ \mathfrak{t}_n &= \mathbb{R}\{f_{1,2}, f_1 + f_2, f_{1,4}, f_3 + f_4, \dots, f_{1,n}, f_{n-1} + f_n\} \end{aligned}$$

si n est pair, sinon la dernière dérivation est remplacée par

$$\mathfrak{t}_n = \mathbb{R}\{f_{1,2}, f_1 + f_2, f_{1,4}, f_3 + f_4, \dots, f_{1,n-1}, f_{n-2} + f_{n-1}, f_n\}.$$

5.2 Algèbres associatives commutatives réelles rigides

Soit \mathfrak{r}_2 l'algèbre de Lie réelle de dimension 2 non abélienne. Elle est donnée dans la base $\{X_1, X_2\}$ par $[X_1, X_2] = X_2$. Soit \mathcal{A}_s une algèbre associative commutative rigide de dimension n . Sa complexifiée est isomorphe $M(1)_{\mathbb{C}}^n$. Ainsi l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_2 \otimes \mathcal{A}_s$ est rigide dont la complexifiée est isomorphe \mathfrak{r}_2^n . Elle se décompose sous la forme

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r}_2 \otimes \mathcal{A}_s = \mathfrak{t}_s \oplus \mathfrak{a}_n.$$

Cette décomposition permet de trouver la structure de l'algèbre associative commutative réelle rigide \mathcal{A}_s . En effet si $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ est la base de \mathfrak{t}_s correspond aux dérivations $f_{1,2}, f_1 + f_2, \dots, f_{1,2s}, f_{2s-1} + f_{2s}, f_{2s+1}, \dots, f_n$ alors les crochets non nuls de \mathfrak{g} sont

$$\begin{cases} [Y_1, X_1] = -X_2, [Y_1, X_2] = X_1 \\ [Y_2, X_1] = X_1, [Y_2, X_2] = X_2 \\ \dots \\ [Y_{2s-1}, X_{2s-1}] = -X_{2s}, [Y_{2s-1}, X_{2s}] = X_{2s-1} \\ [Y_{2s}, X_{2s-1}] = X_{2s-1}, [Y_{2s}, X_{2s}] = X_{2s} \\ [Y_i, X_i] = X_i, \quad i = 2s + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de \mathcal{A}_p telle que l'isomorphisme entre $\mathfrak{r}_2 \otimes \mathcal{A}_p$ et $\mathfrak{t}_s \oplus \mathfrak{a}_n$ soit donné par $U_1 \otimes e_i = Y_i$ et $X_{2i} = U_2 \otimes e_{2i-1}$, $X_{2i-1} = U_2 \otimes e_{2i}$ pour $i = 1, \dots, s$ et $X_j = U_2 \otimes e_j$ pour $j = 2s + 1, \dots, n$. L'algèbre associative réelle rigide \mathcal{A}_s est donc définie par

$$\begin{cases} e_{2i-1}^2 = e_{2i-1}, \quad i = 1, \dots, s \\ e_{2i-1}e_{2i} = e_{2i}e_{2i-1} = e_{2i}, \quad i = 1, \dots, s \\ e_{2i}^2 = -e_{2i-1}, \quad i = 1, \dots, s \\ e_j^2 = e_j, \quad j = 2s + 1, \dots, n. \end{cases}$$

References

- [1] Ancochea Bermudez J.M., Campoamor Stursberg R., Garcia Vergnolle L., Goze M., Algèbres de Lie réelles résolubles algébriquement rigides. arXiv.math RT/0605300 may 2006.
- [2] Ginzburg V., Kapranov M., Koszul duality for operads. *Duke Math Journal.* **76** 1, (1994), 203-272.
- [3] Goze M., Remm E., Lie-admissible algebras and operads. *Journal of Algebra* **273**/1 (2004), 129-152.
- [4] Goze M., Remm E., A class of nonassociative algebras. Algebra colloquium 2006. To appear
- [5] Loday J.-L., Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz. *Enseign. Math.* (2) 39 (1993) n.3-4, 269-293.
- [6] Markl M., Shnider S., Stasheff J., *Operads in algebra, topology and physics*. Mathematical Surveys and Monographs, 96. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. x+349 pp.
- [7] Markl M., Remm E., Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras. To appear in *Journal of Algebra*.
- [8] Neeb K.H., Wagemann F., The second cohomology of current algebras of general Lie algebras, math.RA/0511260.
- [9] Zusmanovich P., Low-dimensional cohomology of current Lie algebras and analogs of the Riemann tensor for loop manifold. *Linear Algebra and Applications* 407 (2005), 71-104.