USTL

N° d'ordre : 3706

THÈSE

présentée à :

l'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE,
LILLE I

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
DISCIPLINE : MATHÉMATIQUES
SPÉCIALITÉ : PROBABILITÉS

par

Siham FILALI

Application du calcul stochastique à une classe d'EDP nonlinéaires

Thèse soutenue le 29 Novembre 2005, devant le jury composé de

Président :	Dominique LÉPINGLE, Université d'Orléans
Directeur de Thèse :	Azzouz DERMOUNE, Université Lille 1
Rapporteurs :	Dominique LÉPINGLE, Université d'Orléans
	Samy TINDEL, Univesité Henri Poincaré Nancy
Examinateurs :	Youri DAVYDOV, Université Lille 1
	Thiery GOUDON, Université Lille 1
	Nikolay TZVETKOV,Université Lille 1

Remerciements

Accomplissement d'un cursus universitaire, la thèse de Doctorat représente également une étape personnelle importante.
Je pense qu'il est temps pour moi de remercier toutes les personnes qui m'ont tant donné avant et pendent la thèse.

Je remercie tout à d'abord mon directeur Azzouz Dermoune qui avant de diriger ma thèse, avait encadré mon mémoire de DEA avec professionnalisme. Ses compétences, sa rigueur mathématiques sont autant de qualité que j'ai appréciées chez lui.
Je tiens à le remercier pour sa confiance et pour tout le temps qu'il a su généreusement me consacrer.

J'adresse mes plus vifs remerciements à M. Dominique Lépingle pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de soutenance, après avoir au préalable accepté d'être rapporteur de ce travail. c'est également avec reconnaissance que je remercie M. Samy Tindel, d'avoir été rapporteur de ce travail.
Ils ont fait des rapports pertinents qui ont permis la soutenance de cette thèse.

Je souhaite formuler de vifs remerciements à M. Youri Davydov, M. Thiery Goudon et M. Nikolay Tzvetkov d'avoir accepté de participer au jury.

Une thèse repose également sur les conditions de travail dans lesquelles elle peut être réalisée, et sur les relations cordiales et amicales que le doctorant peut nouer avec son entourage professionnel. Je remercie les membres du laboratoire de mathématiques appliquées de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Je pense en particulier à M^{me} Marie-Claude Viano qui a été d'un aide précieux pour me trouver des vacations. Je remercie ici le personnel et les collègues enseignants, en particulier ceux du laboratoire de statistique et probabilités.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des doctorants et jeunes doctorants dont les parcours croisèrent le mien, en particulier : Frédéric, Abbas, David, Octave et la nouvelle venu Shuyan que je lui souhaite bonne chance. Sans oublier bien sûr mes amis numériciens Anas, Abdellatif, Reda, christophe et Delphine. Je remercie également mes autres amis en particulier Jérome et sa famille, Jessica, Welloli.

Finalement, j'adresse mes remerciements à mon père qui a eu confiance en moi pour partir à l'étranger loin de ma famille, ma mère pour toute sa tendresse et son soutien, ma petite soeur Nora qui est aussi ma meilleur copine, ma grande soeur Loubna pour tout ce qu'il a fait pour moi sans oublier mon grand frère Mounir. Je n'oublierais jamais le soutien de mon oncle Azzedine et ma chére tante Catherine.

Résumé de thèse

Dans cette thèse nous avons utilisé les outils du calcul stochastique pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution du système d'équations aux dérivées partielles nonlinéaire suivant :

$$\mathcal{S}(a,b)\begin{cases}\partial_t(\rho)+div(u\rho)=L^*(\rho)\\ \partial_t(u_i\rho)+div(u_iu\rho)=L^*(u_i\rho),\\ \forall\, 1\le i\le d,\ \ \rho(dx,t)\to\rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t)\to v_i(x)\rho_0(dx)\\ \text{faiblement pour }\ t\to 0^+\end{cases}$$

où $v=(v_1,.....,v_d):\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ est mesurable bornée, $\rho_0(dx)$ est une mesure de probabilté sur $\mathbb{R}^d$, L^* désigne l'adjoint formel de $L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial^2_{x_ix_j}+b(x).\nabla$ et a est une matrice symétrique définie positive. Nous avons construit une solution faible au système des équations différentielles stochastiques nonlinéaire

$$dX_t=\big(E\big[v(X_0)/X_t\big]+b(X_t)\big)dt+\sigma(X_t)dB_t$$

où (B_t) est un mouvement brownien sur $\mathbb{R}^d$, et σ est une racine carrée de la matrice a. En utilisant la formule de Itô combinée avec des estimations de la solution fondamentale de l'équation parabolique $\partial_t u=Lu$, nous avons montré que la famille $\big(P(X_t\in dx), E\big[v(X_0)/X_t=x\big]\ :\ t\ge 0, x\in\mathbb{R}^d\big)$ est l'unique solution faible à notre système d'EDP $S(a,b)$. Dans le cas où a est la matrice identité, et $b=0$, on retrouve le système de gaz sans pression avec viscosité.

Abstract

Let X be the diffusion Markov process on $\mathbf{R}^d$ with the generator $L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x)\partial^2_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^d b_i(x)\partial_{x_i}$, and transition density $G(t,x,y)$. Under some conditions on the matrix $a(x)$ we get the estimate $\sup_{0<t<T,x,y\in\mathbf{R}^d}\sqrt{t}\frac{|\nabla_x G(t,x,y)|}{G(2t,x,y)}<+\infty$ for all $T>0$. The latter estimate is used to get the existence and uniqueness of a solution of the following gas system

$$\mathcal{S}(a,b)\begin{cases}\partial_t(\rho)+div(u\rho)=L^*(\rho)\\ \partial_t(u_i\rho)+div(u_iu\rho)=L^*(u_i\rho),\\ \forall\, 1\le i\le d,\ \ \rho(dx,t)\to\rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t)\to v_i(x)\rho_0(dx)\\ \text{weakly, as }\ t\to 0^+\end{cases}$$

where $\rho_0(dx)$ (a probability measure on $\mathbf{R}^d$), and the bounded vector field $v:=(v_1,...,v_d):\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ are given. The family of probability measures $\rho:=\rho(dx,t)$ and the velocities $u:=u(x,t)$ are unknown. Here L^* is the formal adjoint operator of L.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Pour expliquer la formation des grosses structures dans l'univers (amas des particules et leur évolution), Zeldovich [36] propose le modèle des particules collantes suivant : on considère un système de particules $\{x_i^0\} \subset \mathbf{R}$ ayant comme vitesses initiales $\{v_i^0\}$ et pour masses initiales $\{m_i^0\}$. Les particules se déplacent avec une vitesse constante entre les instants de chocs. À l'instant de choc, les particules qui se rencontrent forment une nouvelle particule massive. Sa masse et sa vitesse sont données par les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Plus précisément si les particules $x_i^0, k \leq i \leq j$ se rencontrent, alors elles forment une nouvelle particule de masse $m_{k,j} = \sum_{l=k}^{j} m_l^0$ et qui part avec une nouvelle vitesse $v_{k,j}$ donnée par l'équation $m_{k,j}v_{k,j} = \sum_{l=k}^{j} m_l^0 v_l^0$. Dans le cas continu, l'état initial du système des particules est défini par une mesure positive $\rho(dx, 0)$ et par une fonction vitesse $x \to u_0(x)$, et si on note par $\rho(dx, t)$ et $u(x, t)$ respectivement la distribution de la matière et la fonction vitesse à l'instant t, alors les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont données par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \partial_x(u\rho) = 0, \\ \frac{\partial(u\rho)}{\partial t} + \partial_x(u^2\rho) = 0, \\ \rho(dx,t) \to \rho(dx,0), u(x,t)\rho(dx,t) \to u_0(x)\rho_0(dx), \text{ lorsque } t \to 0^+. \end{cases}$$

Ce système est appelé système de gaz sans pression, et il a fait l'objet de plusieurs travaux [7, 4, 5, 29]. D'un point de vue de la physique, ce système a été étudié comme un modèle de particules collantes par Zeldovich. Mathématiquement les solutions de ce système sont naturellement des mesures. Ainsi La famille $t \to (\rho(dx, t), u(x, t))$ doit être une solution faible de ce dernier système, c'est-à-dire pour toute fonction $f \in C_0^1$, l'espace C_0^1 est l'ensemble des fonctions de classe C^1 à support compact, et pour tous $0 < t_1 < t_2$,

i) $\int f(x)\rho(dx, t_2) - \int f(x)\rho(dx, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u(x, t)\rho(dx, t)dt$,

ii) $\int f(x)u(x, t_2)\rho(dx, t_2) - \int f(x)u(x, t_1)\rho(dx, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int f'(x)u^2(x, t)\rho(dx, t)dt$,

iii) $\int f(x)\rho(dx, t) \to \int f(x)\rho_0(dx), \int f(x)u(x, t)\rho(dx, t) \to \int f(x)u_0(x)\rho_0(dx)$ lorsque $t \to 0^+$.

L'existence globale d'une solution faible a été obtenue par Brenier, Grenier [7] et E, Rykov and Sinai [29]. Une approche probabiliste a été faite par Dermoune [12]. Il a montré que les trajectoires des particules collantes sont modélisées par un processus stochastique, solution de l'équation différentielle

$$dX_t = \mathbf{E}[u_0(X_0) \,|\, X_t]dt, \quad \text{loi}(X_0) = \rho(dx, 0). \tag{1.1}$$

Les techniques utilisées dans tous ces travaux sont difficiles à étendre en dimension $d > 1$. Une tentative a été faite par Dermoune et Djehiche [13, 14]. Ils ont introduit la viscosité dans le système (1.1) et ont obtenu le système différentiel stochastique non-linéaire suivant :

$$dX_t = \mathbf{E}(u(X_0) \,|\, X_t)dt + \nu dB_t \tag{1.2}$$

où B est un mouvement brownien sur $\mathbf{R}^d$ et $P(X_0 \in dx) := \rho(dx, 0)$ est la loi de X_0. En utilisant la formule d'Itô combinée avec des techniques d'analyse, Dermoune [11] a montré l'existence et l'unicité faible du système (1.2). Il a déduit que $(\rho(dx, t) = P(X_t \in dx), u(x, t) := \mathbf{E}(u_0(X_0) \,|\, X_t = x))$ est l'unique solution faible du système suivant :

$$\mathcal{S}(d,\nu) \begin{cases} \partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_j\rho) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(\rho) \\ \partial_t(u_i\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_iu_j\rho) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(u_i\rho),\ \forall\, 1 \le i \le d \\ \rho(dx,t) \to \rho(dx,0),\ u(x,t)\rho(dx,t) \to v(x)\rho(dx,0) \text{ as } t \to 0^+. \end{cases}$$

Les données initiales $(\rho(dx, 0), v := (v_1, ..., v_d))$ représentent respectivement la densité de la matière et la vitesse à l'instant $t = 0$. Dans le cas $\nu = 0$ le dernier système devient

$$\mathcal{S}(d,0) \begin{cases} \partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_j\rho) = 0 \\ \partial_t(u_i\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(u_iu_j\rho) = 0,\ \forall\, 1 \le i \le d \\ \rho(dx,t) \to \rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t) \to v_i(x)\rho_0(dx) \text{ as } t \to 0^+. \end{cases}$$

Ce système est appelé système de gaz sans pression. Il apparaît dans les méthodes de constructions numériques des solutions de l'équation d'Euler [2, 3, 24].

Une question intéressante et difficile consiste à obtenir $\mathcal{S}(d, 0)$ en faisant tendre la viscosité $\nu \to 0$ dans le système $\mathcal{S}(d, \nu)$ ou d'une façon équivalente dans (1.2). Malheureusement même dans le cas de deux particules initialement situées en $a, b \in \mathbf{R}^d$ et ayant respectivement comme vitesses et masses initiales v_1, v_2 et $p, 1 - p$ (c'est-à-dire $\rho(dx, 0) = p\delta_a + (1 - p)\delta_b, v(x)\rho(dx, 0) = pv_1\delta_a + (1 - p)v_2\delta_b$), l'étude de la limite de $EDS(\nu)$ lorsque $\nu \to 0$ s'avère difficile.

Le premier résultat de ma thèse propose une nouvelle solution probabiliste au système $\mathcal{S}(d, \nu)$. Nous construisons deux diffusions indépendantes $X_t^a = a + \int_0^t u(X_s^a, s)ds + \nu B_t^a, X_t^b = b + \int_0^t u(X_s^b, s)ds + \nu B_t^b$, ayant la même viscosité $\nu \neq 0$ et la même dérive

$$u(x,t) = \frac{p\rho_t^a(x)v_1 + (1-p)\rho_t^b(x)v_2}{p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x)},$$

où ρ_t^a, ρ_t^b sont respectivement les densités de X_t^a et X_t^b. Nous montrons que la famille $(\rho_t(x)dx = p\rho_t^a(x)dx + (1-p)\rho_t^b(x)dx, u(x, t) : t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d)$ est l'unique solution faible du système de gaz sans pression $\mathcal{S}(d,\nu)$ avec condition initiale $(p\delta_a + (1-p)\delta_b, v_1 := v(a), v_2 := v(b))$. Nous espérons dans un travail ultérieur que l'étude de la limite de $\mathcal{S}(d,\nu)$ lorsque $\nu \to 0$ aboutira via ce nouveau processus. Ce travail a été publié dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (CRAS) [9], et sera détaillé dans le chapitre 1.

Le chapitre 2 de ma thèse traite de l'estimation de la densité $G(t,x,y)$ de la diffusion dont le générateur est donné par

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}.$$

Afin d'expliquer notre contribution dans ce chapitre, on rappelle le résultat suivant de Sheu : [30]

Soit $g(x)$ la matrice inverse de $a(x)$. Il existe des fonctions k_1, k_2, c_1 et c_2 à valeurs strictement positives telles que pour $x,\ y \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{1}{(2t\pi)^{d/2}\sqrt{det\ a(y)}} k_2(t)\exp(-c_2(t)I_b(t,x,y)) \le G(t,x,y) \tag{1.3}$$

$$G(t,x,y) \le \frac{1}{(2t\pi)^{d/2}\sqrt{det\ a(y)}} k_1(t)\exp(-c_1(t)I_b(t,x,y)) \tag{1.4}$$

où

$$I_b(t,x,y) = \inf\left\{ \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} g_{ij}(\phi(s))(\dot{\phi}(s) - b(\phi(s)))_i(\dot{\phi}(s) - b(\phi(s)))_j ds,\right.$$
$$\left. \phi(0) = x,\ \phi(t) = y,\ \phi \text{ absolument continue}\right\}.$$

Notre contribution consiste à préciser les constantes c_1, c_2 en fonction du spectre de la matrice inverse de a et du temps.

Dans le chapitre 3, on utilise ce résultat pour obtenir l'existence et l'unicité du système

$$\mathcal{S}(a,b)\begin{cases} \partial_t(\rho) + div(u\rho) = L^*(\rho) \\ \partial_t(u_i\rho) + div(u_i u\rho) = L^*(u_i\rho), \\ \forall\, 1 \le i \le d,\ \rho(dx,t) \to \rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t) \to v_i(x)\rho_0(dx) \\ \text{faiblement, quand } \ t \to 0^+ \end{cases}$$

où L^* est l'adjoint formel de l'opérateur L. Ce système coïncide avec celui étudié par Dermoune [11], lorsque a est la matrice identité et $b = 0$. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans Journal de Mathématiques Pures et Appliquées [10].

Chapitre 2

Diffusion avec interaction entre deux types de particules et système de gaz sans pression avec viscosité

2.1 Introduction et motivation

Dans ce chapitre on étudie le système des équations aux dérivées partielles suivant :

$$\mathcal{S}(\nu,d)\begin{cases}\partial_t\rho+\sum_{j=1}^d\partial_{x_j}(u\rho)=\frac{\nu^2}{2}(\Delta\rho)\\ \partial_t(u_i\rho)+\sum_{j=1}^d\partial_{x_j}(u_iu_j\rho)=\frac{\nu^2}{2}\Delta(u_i\rho)\\ (\rho(dx,t),u(x,t)\rho(dx,t))\to(p\delta_a+(1-p)\delta_b,pv_1\delta_a+(1-p)v_2\delta_b)\\ \text{lorsque } t\to 0+\,.\end{cases}$$

Ici $a, b, v_1, v_2 \in \mathbf{R}^d$ et $p \in (0,1)$ sont les données initiales. Le système $S(\nu,d)$ avec les conditions initiales $(\rho(dx,0),\ v(x)\rho(dx,0))$, où $\rho(dx,0)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ et v est une fonction continue, est appelé système de gaz sans pression avec viscosité ν^2. Le lien entre $S(0,1)$ et les particules collantes a été largement étudié, voir par exemple [7]. Par contre le lien entre le système $S(0,d)$ avec $d>1$ et les particules collantes n'est pas encore bien établi (voir, [38]).

Une première étape pour comprendre ce lien a été proposée dans [11, 12, 13, 14]. Dans cette étape, les auteurs ont construit une unique solution au système $S(\nu,d)$, avec $\nu\neq 0$, via l'équation différentielle stochastique EDS (ν) :

$$X_t = X_0 + \int_0^t E[v(X_0)/X_s]ds + \nu B_t.$$

La variable aléatoire X_0 est indépendante du mouvement brownien B et a pour loi $\rho(dx,0)$. Maintenant, la deuxième étape consiste à obtenir $S(d,0)$ en faisant tendre la viscosité $\nu\to 0$ dans le système $S(\nu,d)$ ou d'une façon équivalente dans EDS(ν). Malheureusement même dans le cas de deux particules initialement situées en a, $b\in\mathbb{R}^d$ et ayant respectivement comme vitesses et masses initiales v_1, v_2 et p, $1-p$ (c'est-à-dire

$\rho(dx,0) = p\delta_a + (1-p)\delta_b,\ v(x)\rho(dx,0) = pv_1\delta_a + (1-p)v_2\delta_b)$, l'étude de la limite de EDS(ν) lorsque $\nu \to 0$ s'avère difficile. On propose dans ce chapitre une nouvelle solution probabiliste au système $S(\nu, d)$.
Nous espérons que l'étude de la limite de $S(\nu, d)$ lorsque $\nu \to 0$ aboutira via ce nouveau processus.
Nous construisons deux diffusions indépendantes

$$X_t^a = a + \int_0^t u(X_s^a, s)ds + \nu B_t^a, \quad X_t^b = b + \int_0^t u(X_s^b, s)ds + \nu B_t^b \tag{2.1}$$

ayant la même viscosité $\nu \neq 0$ et la même dérive

$$u(x,t) = \frac{p\rho_t^a(x)v_1 + (1-p)\rho_t^b(x)v_2}{p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x)} \tag{2.2}$$

où $\rho_t^a,\ \rho_t^b$ sont respectivement les densités de X_t^a et X_t^b. Nous montrons que la famille $(\rho_t(dx) = p\rho_t^a(x)dx + (1-p)\rho_t^b(x)dx, u(x,t) : t \geq 0,\ \ x \in \mathbb{R}^d)$ est l'unique solution faible du système de gaz sans pression $\mathcal{S}(\nu, d)$ avec données initiales $\rho(dx,0) = p\delta_a + (1-p)\delta_b, v(a) = v_1, v(b) = v_2$.

2.2 Idée de la construction et résultats principaux

Nous commençons par donner l'idée générale de cette construction. Soit ψ une densité de probabilité strictement positive, symétrique sur $\mathbb{R}^d$, continue bornée ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2. On pose pour tout $r > 0$, $\phi(x) = r^d\psi(rx)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$.
On considère le système de $N = n + m$ équations différentielles stochastiques suivant :

$$X_t^{i,a,r,n,m} = a + \nu B_t^{i,a} + \int_0^t D_s^{i,a,b,r,n,m} ds \tag{2.3}$$

$$X_t^{j,b,r,n,m} = b + \nu B_t^{j,b} + \int_0^t D_s^{j,b,a,r,n,m} ds \tag{2.4}$$

où

$$D_s^{i,a,b,r,n,m} = \frac{\sum_{j\neq i}^n \phi(X_s^{i,a,r,n,m} - X_s^{j,a,r,n,m})v_1 + \sum_{j=1}^m \phi(X_s^{i,a,r,n,m} - X_s^{j,b,r,n,m})v_2}{\sum_{j\neq i}^n \phi(X_s^{i,a,r,n,m} - X_s^{j,a,r,n,m}) + \sum_{j=1}^m \phi(X_s^{i,a,r,n,m} - X_s^{j,b,r,n,m})} \tag{2.5}$$

et

$$D_s^{j,b,a,r,n,m} = \frac{\sum_{i=1}^n \phi(X_s^{j,b,r,n,m} - X_s^{i,a,r,n,m})v_1 + \sum_{k\neq j}^m \phi(X_s^{j,b,r,n,m} - X_s^{k,b,r,n,m})v_2}{\sum_{i=1}^n \phi(X_s^{j,b,r,n,m} - X_s^{i,a,r,n,m}) + \sum_{k\neq j}^m \phi(X_s^{j,b,r,n,m} - X_s^{k,b,r,n,m})} \tag{2.6}$$

où $(B^{i,a},\ B^{j,b},\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$, sont $N = n+m$- mouvement browniens à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ indépendants. la régularité de ϕ entraîne l'existence et l'unicité de la solution forte de ce système, (voir l'annexe section 4.5).

On montre que pour chaque couple (i,j) fixé, la suite $(X^{i,a,r,n,m},\ X^{j,b,r,n,m})$ converge en loi lorsque $m,n \to +\infty$, $\frac{n}{n+m} \to p$, $r \to 0$, vers une diffusion $(X^a,\ X^b)$ décrite par :

$$X_t^a = a + \int_0^t u(X_s^a, s)ds + \nu B_t^a, \quad X_t^b = b + \int_0^t u(X_s^b, s)ds + \nu B_t^b$$

Puis on prouve que la famille

$$(\rho_t(dx) := pP(X_t^a \in dx) + (1-p)P(X_t^b \in dx),\ u(x,t):\ t \geq 0)$$

est l'unique solution faible du système $S(\nu, d)$.

On peut maintenant énoncer les résultats principaux de ce chapitre, qui ont été publiés dans le Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [9].

2.2.1 Théorème
Soit ψ une densité de probabilité strictement positive, symétrique sur $\mathbb{R}^d$, continue bornée ainsi que ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à 2. On pose pour tout $r > 0$, $\phi(x) = r^d\psi(rx)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^d$. Soit (i,j) fixé. Si $n,m \to +\infty$, $\frac{n}{n+m} \to p$ dans (2.3)-(4.4) et $r \to +\infty$, alors $(X^{i,a,r,n,m}, X^{j,b,r,n,m})$ converge en loi vers (X^a, X^b) solution de (2.1), (2.2).

2.2.2 Corollaire
Il existe deux mouvements browniens indépendants B^a, B^b sur $\mathbb{R}^d$, et un processus Z solution de l'équation différentielle stochastique non-linéaire suivante :

$$Z_t = Z_0 + \nu B_t^{Z_0} + \int_0^t E\big[v(Z_0)/Z_s\big]ds, \quad t \geq 0, \tag{2.7}$$

où Z_0 est indépendante de B^a, B^b est tel que $P(Z_0 = a) = p = 1 - P(Z_0 = b)$. La famille $(\rho(dx,t) := P(Z_t \in dx) = (p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x))dx, \quad u(x,t) = E[v(Z_0)/Z_t = x]: \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d)$ est une solution du système $S(\nu, d)$.

2.2.3 Théorème
La famille $(\rho(dx,t) := P(Z_t \in dx) = (p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x))dx, \quad u(x,t) = E[v(Z_0)/Z_t = x]: \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d)$ est l'unique solution du système $S(\nu, d)$.

Le reste de ce chapitre est consacré à la preuve de ces résultats.

2.3 Existence d'une solution

La preuve se fait en plusieurs étapes.

2.3.1 Étape 1 : la tension

On fixe r et on fait tendre $n,\ m$ vers l'infini, $\frac{n}{n+m} \to p$. D'après le critère de tension (voir l'annexe section 4.6), il est clair que pour tout $1 \leq i \leq n$, pour tout $1 \leq j \leq m$ la suite

$$\big((X^{i,a,r,n,m}, B^{i,a}, X^{j,b,r,n,m}, B^{j,b} : n, m\big)$$

est tendue dans l'espace $C([0,T],\mathbb{R}^{4d})$. En utilisant la régularité de ϕ, les suites

$$t \to T_t^{i,a,r,n,m} = \frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n} \phi\big(X_t^{i,a,r,n,m} - X_t^{j,a,r,n,m}\big),$$

$$t \to T_t^{i,a,b,r,n,m} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \phi\big(X_t^{i,a,r,n,m} - X_t^{j,b,r,n,m}\big),$$

$$t \to T_t^{i,b,r,n,m} = \frac{1}{m-1}\sum_{j\neq i}^{m} \phi\big(X_t^{i,b,r,n,m} - X_t^{j,b,r,n,m}\big),$$

et

$$t \to T_t^{i,b,a,r,n,m} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \phi\big(X_t^{i,b,r,n,m} - X_t^{j,a,r,n,m}\big)$$

sont aussi tendues dans $C([0,T],\mathbb{R})$.
Pour (i,j) fixé, on considère la limite faible d'une sous suite extraite de $\big(X^{i,a,r,n,m}, B^{i,a}$, $X^{j,b,r,n,m}, B^{j,b}, T^{i,a,r,n,m}, T^{i,b,r,n,m}, T^{i,a,b,r,n,m}, T^{,j,b,a,r,n,m}\big)$, notée $\big(X^{i,a,r}, B^{i,a}, X^{j,b,r}, B^{j,b}$, $T^{i,a,r}, T^{j,b,r}, T^{i,a,b,r}, T^{j,b,a,r}\big)$.

2.3.2 Étape 2 : passage à la limite

En utilisant le théorème de représentation de Skorohod (voir l'annexe section 4.8) et le fait que $\frac{n}{n+m} \to p$, on a

$$X_t^{i,a,r} = a + \nu B_t^{i,a} + \int_0^t \frac{pT_s^{i,a,r}v_1 + (1-p)T_s^{i,a,b,r}v_2}{pT_s^{i,a,r} + (1-p)T_s^{i,a,b,r}} ds, \tag{2.8}$$

et

$$X_t^{j,b,r} = b + \nu B_t^{j,b} + \int_0^t \frac{pT_s^{j,b,a,r}v_1 + (1-p)T_s^{j,b,r}v_2}{pT_s^{j,b,a,r} + (1-p)T_s^{j,b,r}} ds. \tag{2.9}$$

Maintenant, nous montrons que

$$T_s^{i,a,r} = \int \phi(X_s^{i,a,r} - z)\rho_s^{a,r}(dz), \qquad T_s^{i,a,b,r} = \int \phi(X_s^{i,a,r} - z)\rho_s^{b,r}(dz), \tag{2.10}$$

et

$$T_s^{j,b,r} = \int \phi(X_s^{j,b,r} - z)\rho_s^{b,r}(dz), \qquad T_s^{j,b,a,r} = \int \phi(X_s^{j,b,r} - z)\rho_s^{a,r}(dz), \tag{2.11}$$

où $\rho_s^{a,r}(dz)$, $\rho_s^{b,r}(dz)$ sont les lois de probabilité respectives de $X_s^{i,a,r}$ et $X_s^{i,b,r}$.
Étape 1
Nous allons montrer l'estimation suivante

$$E\left[\left|T_t^{1,a,r} - \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n} \phi(X_t^{1,a,r} - X_t^{j,a,r})\right|\right] \leq C(n).$$

avec $\lim_{n\to\infty} C(n) = 0$.
En effet, la loi du vecteur aléatoire $(X_t^{i,a,r,n,m}, 1 \leq i \leq n)$ est inter-échangeable, d'où pour $n < N$,

$$E\Big[\Big|\frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\phi(X_t^{1,a,r,N,m} - X_t^{j,a,r,N,m}) - \frac{1}{N-1}\sum_{j=2}^{N}\phi(X_t^{1,a,r,N,m} - X_t^{j,a,r,N,m})\Big|^2\Big]$$
$$= \frac{1}{(n-1)^2(N-1)^2}\Big[\Big(((N-1)^2(n-1) + (n-1)^2(N-1)$$
$$- 2(n-1)(N-1)(n-2))E[\phi(X_t^{1,a,r,N,m} - X_t^{2,a,r,N,m})]\Big)^2$$
$$+ ((N-1)^2(n-2)(n-3) + (n-1)^2(N-2)(N-3)$$
$$- 2(n-1)(N-1)(n-2)(N-3))E\big[\phi(X_t^{1,a,r,N,m} - X_t^{3,a,r,N,m})\big]\Big].$$

Faisant tendre $m, N \to \infty$, $\frac{N}{m+N} \to p$, on en déduit l'existence d'une fonction $C(n)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} C(n) = 0$$

et

$$E\left[\Big|T_t^{1,a,r} - \frac{1}{n-1}\sum_{j=2}^{n}\phi(X_t^{1,a,r} - X_t^{j,a,r})\Big|\right] \leq C(n). \tag{2.12}$$

Étape 2
Pour identifier $T_t^{1,a,r}$ nous allons utiliser la loi forte conditionnelle dont l'énoncé est le suivant.

Soit $\mathcal{X} = C([0,T], \mathbb{R}^d)$. Il est clair que pour chaque i, $X^{i,a,r} \in \mathcal{X}$. Par construction, la loi du vecteur $(X^{i,a,r} : i \geq 1)$ est inter-échangeable. Soit Π l'ensemble des bijections $\pi : \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}_*$ qui permute un nombre fini d'éléments de $\mathbf{N}_*$. On désigne par $\mathcal{B}^\infty$ l'ensemble des boréliens de $\mathcal{X}^\infty$ et $X = (X^{i,a,r} : i \geq 1)$. On note $\pi X = (X^{\pi(i),a} : i \geq 1)$.
La tribu $\mathcal{S} = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^\infty, P[X^{-1}(B)\Delta(\pi X)^{-1}(B)] = 0,\ \forall \pi \in \Pi\}$ est appelé l'esemble des événements permutables de $\mathcal{X}$.

Le résultat suivant se trouve par exemple dans [35].

2.3.1 Lemme ([35])

1. *Sachant $\mathcal{S}$, les variables $(X^{i,a,r}, i \geq 1)$ sont indépendantes et identiquement distribuées.*

2. *De plus, si pour chaque fonction f mesurable de $\mathcal{X}$ à valeurs réelles, $(f(X^{i,a,r}), i \geq 1)$ sont mutuellement indépendantes, alors elles sont indépendantes de $\mathcal{S}$.*

On en déduit d'après la loi forte des grands nombres que

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j\neq i}^{n}\phi(X_s^{j,a,r} - X_s^{i,a,r}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \phi(X_s^{i,a} - z)\rho_s^{a,r}(dz).$$

D'où
$$T_s^{i,a,r} = \int \phi(X_s^{i,a,r} - z)\rho_s^{a,r}(dz).$$
Ce qui fini l'identfication de $T_s^{i,a,r}$.
De la même manière, on montre que
$$T_s^{j,b,r} = \int \phi(X_s^{j,b,r} - z)\rho_s^{b,r}(dz)$$
$$T_s^{i,a,b,r} = \int \phi(X_s^{i,a,b,r} - z)\rho_s^{b,r}(dz)$$
$$T_s^{i,b,a,r} = \int \phi(X_s^{i,b,a,r} - z)\rho_s^{a,r}(dz).$$

Finalement, chaque limite de la suite $(X^{i,a,r,n,m}, X^{j,b,r,n,m})$ lorsque $n, m \to +\infty$, $\frac{n}{n+m} \to p$ est une solution faible de l'équation différentielle stochastique suivante :
$$(dX^{a,r}, dX^{b,r}) = \nu(dB_t^a, dB_t^b) + (D_t(X_t^{a,r})dt, D_t(X_t^{b,r})dt), \qquad (X_0^{a,r}, X_0^{b,r}) = (a, b) \quad (2.13)$$
où pour chaque $y \in \mathbb{R}^d$,
$$D_t(y) = \frac{p\int \phi(y-x)\rho_t^{a,r}(dx)v_1 + (1-p)\int \phi(y-x)\rho_t^{b,r}(dx)v_2}{p\int \phi(y-x)\rho_t^{a,r}(dx)v_1 + (1-p)\int \phi(y-x)\rho_t^{b,r}(dx)v_2} \quad (2.14)$$
Ici $(\rho_t^{a,r}(dx), \rho_t^{b,r}(dx))$ sont respectivement les lois de $X_t^{a,r}$ et $X_t^{b,r}$.

Conclusion : Pour montrer ce résultat on a utilisé la loi forte des grands nombres comme dans [11] pages 9,10,11. Cette technique a été utilisée pour la première fois par Zheng [35], voir aussi [8].

2.3.3 Étape 3 : identification de la diffusion

Pour achever la démonstration de l'existence de la solution, il nous reste à faire tendre $r \to 0$, et à montrer que $(X^{a,r}, X^{b,r})$ convergent en loi vers (X^a, X^b) données par (2.1) et (2.2).

Nous avons besoin des quatre lemmes suivants :

2.3.2 Lemme ([31], lemme 11.4.1)
Soit $(f_n, n \geq 1)$ une suite de fonctions positives $B_{\mathbb{R}^d}$-mesurables, vérifiant :

$i)$ *Pour tout* $n \geq 1, \qquad \int f_n(x)dx = 1,$

$ii)$ $\lim_{h\to 0}\sup_{n\geq 1} \int |f_n(x+h) - f_n(x)|dx = 0.$

$iii)$ *On suppose qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que, pour tout $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d)$,*
$$\int f(x)\psi(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\psi(x)dx.$$
Alors $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

On rappelle que S_d^+ est l'espace des matrices réelles carrées $d \times d$ positives et symétriques.

2.3.3 Lemme ([31] Théorème 9.1.15)
Soient $a : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to S_d^+$ et $b : [0,\infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux fonctions mesurables bornées. Pour $T > 0$, on suppose qu'il existe $0 < \lambda_T \leq \Lambda_T < \infty$, $B_T < \infty$ et $\delta_T : (0,\infty) \to (0,\infty)$ une fonction croissante, tels que :
i)$\lambda_T|\theta|^2 \leq \langle \theta, a(x,s)\theta \rangle \leq \Lambda_T|\theta|^2$, *et* $|b(x,s)| \leq B_T$ *pour* $(s,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^d$ *et* $\theta \in \mathbb{R}^d$.
ii) $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \delta_T(\varepsilon) = 0$

$$\sup_{\substack{0 \leq s \leq T \\ |x_1 - x_2| \leq \delta_T(\varepsilon)}} \|a(x_1,s) - a(x_2,s)\| \leq \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Alors pour chaque $T > 0$ il existe $\Phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ fonction croissante qui dépend seulement de $d, T, \lambda_T, \Lambda_T$ et δ_T telle que $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \Phi(\varepsilon) = 0$ et

$$\int_s^T dt \int |p(s,x,t,y+h) - p(s,x,t,y)| dy \leq \Phi(|h|),$$

où $p(s,x;t,y)$ sont les probabilités de transition de la diffusion de générateur

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(t,x) \partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}$$

2.3.4 Lemme
Soit $t > 0$ et soit σ_t la densité de la loi gaussienne de moyenne 0 et de variance $\nu^2 t$, c'est-à-dire

$$\sigma_t(x) = (2\pi\nu^2 t)^{-d/2} \ \exp\big(- \frac{|x|^2}{2\nu^2 t} \big).$$

Pour $h > 0$, $t > p$, nous avons les estimations suivantes pour $h > 0$, $t > p$

$$|\nabla \sigma_t(x)| \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \ \sigma_{2t}(x), \tag{2.15}$$

$$|\sigma_{t+h-p}(x) - \sigma_{t+h-p}(x')| \leq c|x - x'|(t-p)^{-(d+1)/2}. \tag{2.16}$$

Preuve.
On a

$$\begin{aligned}
|\nabla \sigma_t(x)| &= |x|(2\pi\nu^2 t)^{-d/2}(\nu^2 t)^{-1} \exp\big(- \frac{|x|^2}{2\nu^2 t} \big) \\
&= \frac{|x|}{\sqrt{4\nu^2 t}} \ \exp\big(- \frac{|x|^2}{4\nu^2 t} \big) \ (4\pi\nu^2 t)^{-d/2} \exp\big(- \frac{|x|^2}{4\nu^2 t} \big) \frac{2^{\frac{d}{2}+1}}{\nu\sqrt{t}} \\
&\leq \frac{c}{\sqrt{t}} \sigma_{2t}(x),
\end{aligned}$$

puisque $\sup_{x\geq 0}\ x\ \exp(-x^2) < +\infty$.
Pour la deuxième estimation, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_1 \in (x, x')$ tel que

$$|\sigma_{t+h-p}(x) - \sigma_{t+h-p}(x')| \leq |x - x'||\nabla\sigma_{t+h-p}(c_1)|$$

et en appliquant (2.15), on obtient (2.16).

2.3.5 Lemme (Oelschlager [25])
Soit m une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ et $f \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$.
Soit $t \to \rho_t \in M_1(\mathbf{R}^d)$, ensemble des probabilités sur $\mathbb{R}^d$, solution du système suivant :

$$\begin{aligned}&\int f(t,x)\rho_t(dx) - \int f(0,x)\rho_0(dx)\\ &= \int_0^t \Big(\int \Big[\sum_{j=1}^d m(x,s)\partial_{x_j} f(s,x) + \partial_s f(s,x) \Big] \rho_s(dx) + \frac{\nu^2}{2} \int \Delta f(s,x)\rho_s(dx) \Big) ds.\end{aligned} \tag{2.17}$$

Alors

1) *$\rho_t(dx)$ est absolument continue, de densité $\rho_t(x)$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$,*
2)*Il existe c une constante qui dépend uniquement de d, $\|m\|_\infty$, T et ν, telle que :*

$$i)\ \|\rho_t(.)\|_\infty \leq c(t^{-d/2} + 1)\ \ \forall t \leq T, \tag{2.18}$$

$$ii)\ |\rho_t(x) - \rho_s(x)| \leq c((t \wedge s)^{-(d+1)/2} + 1)\ \ |t - s|^{1/5},\quad \forall s \leq t \leq T,\ \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{2.19}$$

$$iii)\ |\rho_t(x) - \rho_t(y)| \leq c(t^{-(d+1)/2} + 1)\ \ |x - y|^{1/2}\quad \forall t \leq T,\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.20}$$

La preuve de ce résultat se trouve dans l'annexe section 4.9.
Retour à la preuve de l'étape 3.
Maintenant, on fixe i, j (par exemple $(i, j) = (1, 1)$), et nous allons faire tendre $r \to 0$ dans les équations (2.13), (2.14). D'abord il est facile de voir que $(X^{1,a,r} := X^{a,r}, X^{1,b,r} := X^{b,r})$ est C-tendu. Par conséquent toute limite (X^a, X^b) lorsque $r \to 0$ est solution d'une équation différentielle de type

$$X_t^a = a + \int_0^t d^a(s)ds + \nu B_t^a \qquad X_t^b = b + \int_0^t d^b(s)ds + \nu B_t^b$$

où (B^a, B^b) sont deux browniens indépendants, et d^a, d^b sont deux processus adaptés bornés.

Il est bien connu (voir par exemple le lemme 4.3.1) que X_t^a, X_t^b ont chacune une densité notée respectivement par $\rho_t^a(x), \rho_t^b(x)$.
Nous voulons montrer que $dxdt$-p.p.

$$\int r^d \psi(r(x-y))\rho_t^{\alpha,r}(dy) \to \rho_t^\alpha(x), \quad \alpha = a, b.$$

Soient $T_2 > T_1 > 0, \delta(t) = 1_{[T_1,T_2]}(t)$ et

$$f_{r,a} : (x,t) \to C \int \phi(x-z)\rho_t^{a,r}(dz)\delta(t)$$

où $C^{-1} = T_2 - T_1$. La fonction $f_{r,a}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Par conséquent la suite $(f_{r,a}, , r \geq 0)$ vérifié la condition i) du lemme 2.3.2.
Si on note $f_a(x,t) = \rho_t^a(x)$, La convergence faible de $\rho_t^{a,r}$ vers ρ_t^a entraîne la condition iii) du lemme.
On va maintenant montrer que $(f_{r,a}, f_a)$ vérifie l'hypothèse ii) du lemme 2.3.2.
Pour h, η deux réels positifs, on a

$$\begin{aligned}
&\int\int |f_{r,a}(x+h, t+\eta) - f_{r,a}(x,t)| \quad dxdt \\
&= C[\int\int \Big|\int \phi(x+h-z)\rho_{t+\eta}^{a,r}(z)\delta(t+\eta) - \phi(x-z)\rho_t^{a,r}(z)dz\delta(t)\Big|dxdt \\
&\leq I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

avec

$$I_1 = C\int\int\Big|\int \big[\phi(x+h-z) - \phi(x-z)\big]\rho_{t+\eta}a, r(z)dz\Big|\delta(t+\eta)\ dxdt$$

et

$$I_2 = C\int_0^T \int\Big|\int \phi(x-z)[\delta(t+\eta)\rho_{t+\eta}a, r(z) - \delta(t)\rho_t^{a,r}(z)]\ dz\Big|\ dxdt.$$

On a

$$I_1 = C\int\int\Big|\int \phi(z)[\rho_{t+\eta}^{a,r}(z+x+h) - \rho_{t+\eta}^{a,r}(z+x)]dz\Big|\delta(t+\eta)\ dx\ dt.$$

Du lemme 2.3.3, on déduit qu'il existe une fonction Φ qui dépend de d, T_2 telle que

$$I_1 \leq C\Phi(h).$$

Pour I_2, il suffit de montrer que

$$I_3 = \sup_r \int_{T_1}^{T_2}\int\Big|\int \phi(x-z)\big[\rho_{t+\eta}^{a,r}(z) - \rho_t^{a,r}(z)\big]dz\Big|dxdt$$

tend vers 0 quand $\eta \to 0$.
Pour chaque $K > 0$ le terme I_3 est la somme de deux termes I_4 et I_5, où

$$I_4 = \sup_r \int_{T_1}^{T_2} \int \Big| \int_{[|z|\leq K]} \phi(x-z)\big[\rho_{t+\eta}(z) - \rho_t^{a,r}(z)\big] \; dz\Big| \; dx \; dt$$

et

$$I_5 = \sup_r \int_{T_1}^{T_2} \int \Big| \int_{[|z|>K]} \phi(x-z)\big[\rho_{t+\eta}^{a,r}(z) - \rho_t^{a,r}(z)\big] \;\; dz\Big| \; dx \; dt.$$

D'après le point ii) du lemme 2.3.5

$$\begin{aligned}&\int_{T_1}^{T_2} \int \Big| \int_{[|z|\leq K]} \phi(x-z)\big[\rho_{t+\eta}(z) - \rho_t(z)\big] dz\Big| dxdt \\ &\leq c\eta^{1/5} \int_{T_1}^{T_2} (t^{-(d+1)/2} + 1)\lambda(B(0,K))dt.\end{aligned}$$

D'autre part, comme $X_t^{a,r} = a + \displaystyle\int_0^t D_s(X_s^{a,r})ds + \nu B_t$, avec D_s bornée, on déduit que

$$I_5 \leq 2\|v_1^+\|_\infty \sup_{t\in[T_1,T_2+1]} \int \rho_0(dy) P\big(|X_t^y| \geq K\big).$$

Comme

$$P(|X_t^y| \geq K) \leq P\big(|\nu B_t| \geq K/2\big) + P\big(|y| + t\|D\|_\infty \geq K/2\big),$$

alors $\int P\big(|X_t^y| \geq K\big)\rho_0(dy) \to 0$ lorsque $K \to +\infty$ uniformément pour $t \in (T_1, T_2+1)$.
On conclut, en appliquant le lemme 2.3.2 que $f_{r,a} \to f_a$ dans $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$. En utilisant le théorème de representation de Skorohod, on peut supposer que $f_{r,a}(x,t) \to f_a(x,t)$ presque partout,
La démonstration pour $(f_{r,b}, f_b)$ est la même que celle de $(f_{r,a}, f_a)$. On en déduit que

$$C \int \phi(x-z)\rho_t^{a,r}(dz) \to \rho_t^a(x) \quad dxdt \quad \text{presque partout}$$

et

$$C \int \phi(x-z)\rho_t^{b,r}(dz) \to \rho_t^b(x) \quad dxdt \quad \text{presque partout.}$$

D'où

$$u(x,t) = \frac{p\rho_t^a(x)v_1 + (1-p)\rho_t^b(x)v_2}{p\rho_t^a(x) + (1-p)\rho_t^b(x)}. \tag{2.21}$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.2.1.
On termine cette section par la preuve du corollaire.

Soit (X^a, X^b) donnée par

$$X_t^a = a + \nu B_t^a + \int_0^t \frac{p\rho_s^a(X_s^a)v_1 + (1-p)\rho_s^b(X_s^a)v_2}{p\rho_s^a(X_s^a) + (1-p)\rho_s^b(X_s^a)} ds, \tag{2.22}$$

et

$$X_t^b = b + \nu B_t^b + \int_0^t \frac{p\rho_s^a(X_s^b)v_1 + (1-p)\rho_s^b(X_s^b)v_2}{p\rho_s^a(X_s^b) + (1-p)\rho_s^b(X_s^b)} ds, \tag{2.23}$$

avec $\rho_t^a(x)$, $\rho_t^b(x)$ sont respectivement des densités de X_t^a et X_t^b.
Soit Z_0 est une variable aléatoire indépendante de (X^a, X^b) et tel que $P(Z_0 = a) = p = 1 - P(Z_0 = b)$. Si on pose

$$Z_t = X_t^a 1_{[Z_0=a]} + X_t^b 1_{[Z_0=b]}, \qquad t \geq 0,$$

alors Z satisfait (2.7). Pour montrer que $(P(Z_t \in dx), u(x,t) : t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d)$ est solution faible du système $S(d,\nu)$, on utilise la formule d'Itô :
$\forall f \in \mathbb{C}_c^2(\mathbb{R}^d), \quad t_1 < t_2$

$$f(Z_{t_2}) - f(Z_{t_1}) - \int_{t_1}^{t_2} \Big[u(Z_t,t)\nabla f(Z_t) + \frac{\nu^2}{2}\Delta f(Z_t)\Big] dt = \quad \text{martingale centrée.} \tag{2.24}$$

En prenant l'espérance des deux membres de (2.24), on obtient la première équation du système $S(\nu,d)$. Soit $(v^1(Z_0), ..., v^d(Z_0))$ les composantes du vecteur $v(Z_0)$. En multipliant l'égalité (2.24) par $v^i(Z_0)$, $1 \leq i \leq d$, et en appliquant l'espérance on aboutit à la deuxième équation du système $S(\nu,d)$.

2.4 Unicité de la solution

Il nous reste à montrer l'unicité de la solution du système $S(\nu,d)$. Si on pose $v(a) = v_1$, $v(b) = v_2$ et $\rho(dx,t) = p\delta_a + (1-p)\delta_b$, on retrouve un cas particulier du travail fait par Dermoune dans [11], qu'on rappelle ici :

Soit (ρ, u) une solution faible du système $S(\nu,d)$ et de condition initiale (ρ_0, v), ayant la représentation suivante :

$$q(x,t) := u(x,t)\rho(x,t) = \int v(y)\rho(0,y;t,x)\rho_0(dx), \tag{2.25}$$

$\rho(0,y;t,x)$ étant solution fondamentale de l'équation parabolique :

$$\partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(\rho u) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(\rho).$$

On introduit $q_0(x,t) = q_0(x,t,+) = q_0(x,t,-) = \rho(x,t)$ et

$$q_i(x,t,+) = \int v_i^+(y)\rho_0(dy)\rho(0,y;t,x)dy,$$

$$q_i(x,t,-) = \int v_i^-(y)\rho_0(dy)\rho(0,y;t,x)dy, \quad \forall 1\le i\le d.$$

On a alors

$$q_i(x,t) = q_i(x,t,+) - q_i(x,t,-).$$

Pour tout $\varepsilon = +,-$, si $\frac{1}{c_i^\varepsilon} = \int v_i^\varepsilon(y)\rho_0(dy)dy$, alors $(t \to c_i^\varepsilon q_i(.,t,\varepsilon))$ est une famille de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d$, solution de

$$\partial_t(m) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(b\ m) = \frac{\nu^2}{2}\Delta(m), \tag{2.26}$$

où

$$b(x,t) = \frac{1}{q_0(x,t)}(q_1(x,t),...,q_d(x,t)) \qquad 0\le i\le d.$$

D'après le lemme 2.3.5 , il existe une constante c qui dépend uniquement de $\|v\|_\infty$, ν et d tel que pour tout $i=0,...,d$,

$$\begin{aligned}
&\|q_i(.,t,\varepsilon)\|_\infty \le c(t^{-d/2}+1),\\
&|q_i(y,t,\varepsilon) - q_i(y,s,\varepsilon)| \le c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1) \ \ |t-s|^{1/5},\\
&|q_i(y,t,\varepsilon) - q_i(y',t,\varepsilon)| \le c(t^{-(d+1)/2}+1) \ \ |x-y|^{1/2}.
\end{aligned}$$

On peut montrer également que $q = (q_0(x,t), q_1(x,t,+), q_1(x,t,-)..., q_d(x,t,+), q_d(x,t,-)) := (q_i(\varepsilon) : 0\le i\le d,\ \varepsilon = +,-)$ est solution faible du système

$$\left\{\begin{array}{l}
\partial_t(q_i(\varepsilon)) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} q_i(\varepsilon)F(q) = \frac{\nu^2}{2}\Delta q_i(\varepsilon)\\
\forall 1\le i\le d \quad ,\varepsilon = +,-\\
\ q_i(\varepsilon,dx,t) \to q_i(\varepsilon,dx,0) \ \text{ faiblement pour } t\to 0^+
\end{array}\right.$$

avec

$$F(q) = \frac{1}{q_0}(q_1(+) - q_1(-),...,q_d(+) - q_d(-)).$$

On peut remarquer que $q \to q_i(\varepsilon)F(q)$ est lipschitzienne continue sur le domaine

$$D = \{q \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{2d} : |q_i| \le \|v\|_\infty q_0, |q_i| \le \|v\|_\infty q_0 \forall 1\le i\le d\}.$$

On note $|q| := q_0 + \sum_{i=1}^d |q_i(+)| + |q_i(-)|$.
Soient deux solutions faibles $(q_i^1, 0\le d)$, $(q_i^2, 0\le d)$ de $S(\nu,d)$ avec condition initiale identique ρ_0, v et ayant la représentation 2.25.
On se propose de montrer que $\forall\ 1\le i\le d$

$$q_0^1(x,t) = q_0^2(x,t), q_i^1(x,t,+) = q_i^2(x,t,+), q_i^1(x,t,-) = q_i^2(x,t,-).$$

De (2.26), on déduit pour toute $f\in C_d^2(\mathbb{R}^d\times[0,T]$ et pour $i=0,..,d$

$$\begin{aligned}
&\int f(t,x)q_i^1(x,t,+)dx - \int f(0,x)q_i^1(dx,0)\\
&\qquad = \int_0^t \Big(\int \Big[F(q)\nabla f(s,x) + \partial_s f(s,x)\Big] q_i^1(x,t)dxds\\
&\qquad + \frac{\nu^2}{2}\int \Delta f(s,x)dx q_i^1(x,t,+)dx\Big)ds
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Soit $\sigma_h(x) = (2\pi h)^{-d/2}\exp(-\frac{|x|^2}{2h})$, on a pour tous $h > 0$ la fonction $(x,s) \to \gamma * \sigma_{t+h-s}$ appartient à l'espace $C_b^2(\mathbb{R}^d \times [0,t])$ quelque soit $\gamma \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et en utilisant l'équation 2.27 et

$$\partial_s\sigma_s - \frac{1}{2}\Delta\sigma_s = 0,$$

on a

$$\begin{aligned}
&|q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)| \\
&= \Big| \int_0^t \int \Big(\Big[F(q^1(x,s)).(-\frac{x-y}{t-s})\sigma_{t-s}(y-x) \Big] q_i^1(x,s,+) - \\
&\Big[F(q^2(x,s)).(-\frac{x-y}{t-s})\sigma_{t-s}(y-x) \Big] q_i^2(x,s,+) \Big) \Big|.
\end{aligned}$$

Par convolution avec σ_h , $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\int |q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)|\sigma_h(x-y)dy \leq \int_0^t \int \int \Big| \Big[F(q^1(z,s))q_i^1(z,s,+) \\
&- F(q^2(x,s))q_i^2(z,s,+) \Big] \Big| \frac{|z-y|}{t-s}\sigma_{t-s}(z-y)\sigma_h(x-y)dzdyds \\
&\leq c \int_0^t \int \int \big| q^1(z,s) - q^2(z,s) \big| (t-s)^{-1/2} \frac{|z-y|}{(t-s)^{1/2}} \exp\Big(- \frac{(z-y)^2}{4\nu^2(t-s)} \Big) \\
&.(2\pi\nu^2(t-s)) - d/2 \exp\Big(- \frac{(z-y)^2}{4\nu^2(t-s)} \Big) \sigma_h(x-y)dzdyds \\
&\leq c \int_0^t \int \big| q^1(z,s) - q^2(z,s) \big| (t-s)^{-1/2}\sigma_{2(t-s)+h}(z-x)dzds.
\end{aligned}$$

De la même façon, on montre que

$$\begin{aligned}
&\int \big| q_i^1(y,t,-) - q_i^2(y,t,-) \big| \sigma_h(x-y)dy \\
&\leq c \int_0^t \int \big| q^1(z,s) - q^2(z,s) \big| (t-s)^{-1/2}\sigma_{2(t-s)+h}(z-x)dzds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\int \big| q^1(y,t) - q^2(y,t) \big| \sigma_h(x-y)dy \\
&\leq c \int_0^t \int \big| q^1(z,s) - q^2(z,s) \big| (t-s)^{-1/2}\sigma_{2(t-s)+h}(z-x)dzds.
\end{aligned}$$

Si on pose

$$Q(h,t,x) = \int \big| q^1(y,t) - q^2(y,t) \big| \sigma_h(x-y)dy$$

alors

$$Q(h,t,x) \leq \int_0^t Q(2(t-s)+h,s,x)(t-s)^{-1/2}ds. \tag{2.28}$$

D'autre part, on a

$$Q(h,t,x) \leq ch^{-d/2}.$$

On insère cette inégalité dans (2.28). On obtient

$$\begin{aligned} Q(h,t,x) &\leq \int_0^t (t-s)^{-1/2}(2(t-s)+h)^{-d/2}ds \\ &\leq c\Big(\int_0^{t-h}(t-s)^{-(d+1)/2}ds + \int_{t-h}^t (t-s)^{-1/2}h^{-d/2}ds\Big) \\ &\leq c(h^{-(d-1)/2} + \delta_d^1|\log h| + 1). \end{aligned}$$

On recommence la même opération et on obtient :

$$Q(h,t,x) \leq c(h^{-(d-2)/2} + \delta_{d,2}|\log h| + 1).$$

Finalement en itérant ce procédé jusqu'à l'ordre $d+1$, on arrive au résultat suivant :

$$Q(h,t,x) \leq c \;\text{ uniformément pour } h>0, t\in(0,T], x\in\mathbb{R}^d.$$

D'autre part

$$\lim_{h\to 0} Q(h,t,x) = |q^1(x,t) - q^2(x,t)|$$

ce qui implique

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T]} \left|q^1(x,t) - q^2(x,t)\right| < \infty.$$

De plus pour $t \in (0,T']$ pour chaque i fixé

$$\begin{aligned} &|q_i^1(y,t) - q_i^2(y,t)| \leq c\int_0^t \sup_{z\in\mathbb{R}^d, v\in(0,T']} \left|q^1(z,v) - q^2(z,v)\right|\Big((t-s)^{-1/2} \\ &(2\pi\nu^2(t-s))^{-d/2}.\int\Big(\frac{|x-y|}{(t-s)^{1/2}}\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4\nu^2(t-s)}\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4\nu^2(t-s)}\Big)dx\Big)ds \\ &\leq c \sup_{z\in\mathbb{R}^d, v\in(0,T']} \left|q^1(z,v) - q^2(z,v)\right| \int_0^t (t-s)^{1/2}ds \\ &\leq c \sup_{z\in\mathbb{R}^d, v\in(0,T']} \left|q^1(z,v) - q^2(z,v)\right|\sqrt{T'}. \end{aligned}$$

On a cette majoration uniformément pour $t \in (0,T']$, $y \in \mathbb{R}^d$, d'où

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T']} \left|q^1(z,t) - q^2(z,t)\right| \leq c \sup_{z\in\mathbb{R}^d, v\in(0,T']} \left|q^1(z,v) - q^2(z,v)\right|\sqrt{T'}.$$

Soit $T' < c^{-2}$, pour ce choix on obtient

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T']} \left|q^1(z,t) - q^2(z,t)\right| = 0.$$

On peut procéder pour $[T', 2T']$ comme pour $(0,T']$ précédemment et on arrive enfin au résultat désiré, c'est-à-dire

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T]} \left|q^1(z,t) - q^2(z,t)\right| = 0.$$

Ceci achève la démonstration.

Chapitre 3

Estimation de la densité de diffusion

Soit $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}$ l'opérateur différentiel de second ordre sur $\mathbb{R}^d$. Les coefficients $a_{ij},\ b_i$ appartiennent à $C_b^{2+\beta}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f deux fois dérivables avec f et ses dérivées bornées et $\partial^2_{x_i x_j} f$ Hölderiennes d'ordre $\beta \in (0,1)$. La matrice $a(x)$ est symétrique, de plus on suppose que $a(x) \geq \lambda I_{d\times d}$, où $\lambda > 0$ et $I_{d\times d}$ est la matrice identité de dimension d. Sous ces conditions (voir [30]), il existe un processus de Markov X_t à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = a^{1/2}(X_t)dB_t + b(X_t)dt.$$

De plus X admet des densités de transitions $G(t,x,y)$ solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\partial_t G(t,s,y) = LG(t,x,y), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d$$

avec $G(0,x,y) = \delta(x-y)$.

3.1 Résultat principal

Le résultat suivant est dû Sheu [30] :

3.1.1 Théorème
Soit $g(x)$ la matrice inverse de $a(x)$. Il existe k_1, k_2, c_1 et c_2 des fonctions positives telles que pour $x,\ y \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{(2t\pi)^{d/2}\sqrt{deta(y)}} k_2(t)\exp\Big(-c_2(t)I_b(t,x,y)\Big) \leq G(t,x,y) \tag{3.1}$$

$$G(t,x,y) \leq \frac{1}{(2t\pi)^{d/2}\sqrt{deta(y)}} k_1(t)\exp\Big(-c_1(t)I_b(t,x,y)\Big) \tag{3.2}$$

où

$$I_b(t,x,y) = \inf\Bigg\{\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j} g_{ij}(\phi(s))\big(\dot\phi(s) - b(\phi(s))\big)_i\big(\dot\phi(s) - b(\phi(s))\big)_j ds$$

$$\left.\phi(0)=x,\ \phi(t)=y\right\}$$

Le résultat principal de ce chapitre est d'obtenir les estimations suivantes :

3.1.2 Théorème (A. Dermoune, S. Filali, 2003 [10])
Si

$$-\infty<\lambda_g=\inf_{x\in\mathbb{R}^d}\inf_{|\eta|=1}\langle g(x)\eta,\eta\rangle \quad\leq\quad \Lambda_g=\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\sup_{|\eta|=1}\langle g(x)\eta,\eta\rangle<+\infty,$$

alors $\forall T>0,\ t\in]0,T],\ \forall\varepsilon>0$, *il existe une fonction* δ *telle que* $\sup_{t\in[0,T]}\delta(t,\varepsilon)\leq\varepsilon$

$$c_1(t)=\delta(t,\varepsilon)+\lambda_g\Lambda_g^{-1},$$

$$c_2(t)=\begin{cases}1+c(\|\sigma^2\|_\infty,\|\partial_x^2\sigma^2\|_\infty)\lambda_g^{-1}t\\ \text{ou bien}\ \ \delta(t,\varepsilon)+\Lambda_g\lambda_g^{-1}.\end{cases}$$

Ici $\sigma^2=a$

L'intérêt de ce résultat apparaîtra dans le chapitre qui suit.

3.2 La preuve

Le schéma de la preuve est le même que celui de Sheu. Les outils utilisés sont dûs à Fleming [18].

3.2.1 Transformation logarithmique (Flemming [18])

Si $f\in C_b^\beta(\mathbb{R}^d)$, alors la fonction

$$f(t,x)=\int G(t,x,y)f(y)dy=E_x[f(X_t)]$$

a les propriétés suivantes :
$\partial_{x_ix_j}f(t,x),\ \partial_{x_j}f(t,x),\ \partial_tf(t,x)$ sont continues et

$$\partial_tf(t,x)=Lf(t,x),\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

$$f(0,x)=f(x).$$

On définit pour $y_0\in\mathbb{R}^d$ et $\alpha>0$,

$$f_\alpha(y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\right)^d\frac{1}{\sqrt{det\ a(y_0)}}\exp\Big(-\frac{1}{2\alpha}g_{ij}(y_0)(y-y_0)_i(y-y_0)_j\Big)\tag{3.3}$$

et $G^\alpha(t,x)=E_x[f_\alpha(X_t)]$. Nous avons

$$\lim_{\alpha\to0}G^\alpha(t,x)=G(t,x,y_0)$$

et $J^\alpha(t,x) = -logG^\alpha(t,x)$ est solution du problème non-linéaire suivant :

$$\partial_t J^\alpha(t,x) = \frac{1}{2}\ a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} J^\alpha(t,x) + b_j(x)\partial_{x_j} J^\alpha(t,x) \\ - \frac{1}{2}\ a_{ij}(x)\partial_{x_i} J^\alpha(t,x)\partial_{x_j} J^\alpha(t,x), \quad t>0, x\in\mathbb{R}^d,$$

avec

$$J^\alpha(0,x) = -\log\ (f_\alpha(y_0))\ . \tag{3.4}$$

3.2.1 Lemme
Soit $\mathcal{F}_{T,x}$l'espace des fonctions mesurables $u:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que le système

$$\begin{cases} d\eta(t) = u(t,\eta(t))dt + \sigma(\eta(t))dB_t \\ \eta(0) = x, \end{cases}$$

a pour solution $\eta(.)$ qui vérifie $E\Big[\int_0^T |u(t,\eta(t)|^2 dt\Big] < \infty$.
Si on note $k(x,u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} g_{ij}(x)(b(x)-u)_i(b(x)-u)_j$ et si on pose $u(t) = u(t,\eta(t))$ alors

$$J^\alpha(T,x) = \inf_{u\in\mathcal{F}_{T,x}} E\Bigg[\int_0^T k(\eta(t),u(t))dt + J^\alpha(0,\eta(T))\Bigg].$$

Cette borne est atteinte en

$$u_\alpha^*(t,x) = b(x) - a(x)\nabla J^\alpha(T-t,x).$$

De plus, si on note par $J_T(x,y) = -logG(T,x,y)$, alors

$$J_T(x,y_0) = \lim_{\alpha\to 0}\ \inf_{u\in\mathcal{F}_{T-\alpha,x}} E\Bigg[\int_0^{T-\alpha} k(\eta(t),u(t))dt + J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))\Bigg].$$

Afin d'obtenir une borne inférieure et supérieure pour $G(T,x_0,y_0)$, il suffit d'obtenir une borne inférieure et supérieure pour $J^\alpha(T-\alpha,x_0)$ indépendemment de α.

3.2.2 Estimation de la borne supérieure

Dans un premier temps, nous montrons la première expression de c_2 c'est-à-dire

$$c_2(t) = 1 + c\big(\|\sigma^2\|_\infty, \|\partial_x^2\sigma^2\|_\infty\big)\lambda_g^{-1} t.$$

Pour cela nous sélectionnons $\phi:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ absolument continue, telle que $\phi(0)=x_0$, $\phi(T)=y_0$ et

$$I_T(\phi) = I_b(T,x,y).$$

Voir [39] pour l'existence de ϕ.
On définit

$$u(t,x) = \dot\phi(t) - \frac{x-\phi(t)}{T-t},\ \text{pour} \qquad 0\le t\le T-\alpha. \tag{3.5}$$

On vérifie facilement que $u \in \mathcal{F}_{T-\alpha,x_0}$, puisque $u(t,x)$ est lipschitzienne en x.
En utilisant le lemme précèdent, on a

$$J^\alpha(T-\alpha,x) \leq E\left[\int_0^{T-\alpha} k(\eta(t),u(t))dt + J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))\right]$$

où

$$d\eta(t) = u(t,\eta(t))\ dt + \sigma(\eta(t))\ dB(t) \tag{3.6}$$

et $\eta(0) = x_0$.
Nous sommes amenés à estimer $E\left[\int_0^{T-\alpha} k(\eta(t),u(t))dt\right]$ et $E[J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))]$.

A) Estimation de $E\left[\int_0^{T-\alpha} k(\eta(t),u(t))dt\right]$.

Nous montrons d'abord deux résultats préliminaires qui nous seront utiles par la suite.
En utilisant l'EDS (3.6), on obtient

$$d(\eta(t)-\phi(t)) = -\frac{\eta(t)-\phi(t)}{T-t}\ dt + \sigma(\eta(t))\ dB(t).$$

L'igalité suivante découle de la formule de Itô

$$\frac{\eta(t)-\phi(t)}{T-t} = \int_0^t \frac{1}{T-s}\sigma(\eta(s))\ dB(s).$$

L'isométrie de Itô implique pour tout $0 \leq t \leq T-\alpha$

$$\begin{aligned} E\Big[|\eta(t)-\phi(t)|^2\Big] &= (T-t)^2 E\Big[\Big|\int_0^t \frac{1}{T-s}\sigma(\eta(s))\ dB(s)\Big|^2\Big] \\ &= (T-t)^2 E\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\ |\sum_i a_{ii}(\eta(s))|\ ds \\ &\leq d\|a\|_\infty (T-t) \end{aligned} \tag{3.7}$$

et

$$E\Big[\big(\eta(t)-\phi(t)\big)_i\big(\eta(t)-\phi(t)\big)_j\Big] = (T-t)^2 E\left[\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} a_{ij}(\eta(s))\ ds\right]. \tag{3.8}$$

Maintenant nous commmençons l'estimation **A**.Nous avons besoin des notations suivantes :

$$\Delta^1(t) = \eta(t)-\phi(t)$$

$$\Delta^2(t) = \eta(t)-\dot\phi(t) = -\frac{\eta(t)-\phi(t)}{T-t} = -\frac{1}{T-t}\Delta^1(t),$$

$$\partial_{x_i}k = \frac{\partial}{\partial x_i}k(\phi(t),\dot\phi(t)).$$

Nous utiliserons les notations similaires suivantes $\partial_{u_i}k$, $\partial_{x_ix_j}k$, $\partial_{x_iu_j}k$ et $\partial_{u_iu_j}k$ et on posera

$$\partial_{u_iu_j}k(\lambda) = \partial_{u_iu_j}k\big(\phi(t) + \lambda\Delta^1(t), \dot{\phi}(t) + \lambda\Delta^2\big).$$

La formule de Taylor appliquée à k entre les points $(\eta(t), u(t))$ et $(\phi(t), \dot{\phi}(t))$ donne

$$\begin{aligned}
k(\eta(t), u(t)) &= k(\phi(t), \dot{\phi}(t)) + \partial_{x_i}k\Delta_i^1(t) + \partial_{u_i}k\Delta_i^2(t) \\
&+ \frac{1}{2}\Big(\partial_{x_ix_j}k\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t) + 2\partial_{x_iu_j}k\Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t) + \partial_{u_iu_j}k\Delta_i^2(t)\Delta_j^2(t)\Big) \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \Big(\partial_{x_ix_j}k(\lambda\mu) - \partial_{x_ix_j}k(0)\Big)\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda \, d\mu \, d\lambda \qquad (3.9) \\
&+ 2\int_0^1\int_0^1 \Big(\partial_{x_iu_j}k(\lambda\mu) - \partial_{x_iu_j}k(0)\Big)\Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)\lambda \, d\mu \, d\lambda \\
&+ \int_0^1\int_0^1 \Big(\partial_{u_iu_j}k(\lambda\mu) - \partial_{u_iu_j}k(0)\Big)\Delta_i^2(t)\Delta_j^2(t)\lambda \, d\mu \, d\lambda,
\end{aligned}$$

ici nous avons omis le signe somme pour ne pas alourdir les notations. Pour obtenir l'estimation **A**, il suffit d'obtenir des estimation de chaque terme de (3.9). Nous avons plusieurs termes à estimer.

Estimation 1

Il est facile de voir, en utilisant le fait que $t \in [0, T-\alpha] \to \frac{\eta(t)-\phi(t)}{T-t}$ est une martingale, que

$$E\Big[\int_0^{T-\alpha} (\partial_{x_i}k\Delta_i^1(t) + \partial_{u_i}k\Delta_i^2(t)) \, dt\Big] = 0.$$

Estimation 2

Maintenant nous considérons le terme $\int_0^{T-\alpha} \partial_{x_ix_j}k(x,u)\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)dt$. On sait par définition de $k(x,u)$ que

$$\begin{aligned}
\partial_{x_ix_j}k(x,u) &= \langle\frac{1}{2}\partial_{x_ix_j}g(x)(b(x)-u), b(x)-u\rangle + \langle\partial_{x_i}g(x)\partial_{x_j}b(x), b(x)-u\rangle \\
&+ \langle\partial_{x_j}g(x)(b(x)-u), \partial_{x_i}b(x)\rangle + \langle g(x)\partial_{x_jx_i}b(x), b(x)-u\rangle \\
&+ \langle g(x)\partial_{x_i}b(x), \partial_{x_j}b(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Nous allons majorer chaque terme.

$$\begin{aligned}
&E\Big[\int_0^{T-\alpha} \big|\langle\partial_{x_ix_j}g(b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t)), (b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t))\rangle\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\big| \, dt\Big] \\
&\leq \|\partial^2 g\|_\infty \int_0^{T-\alpha} \big|b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t)\big|^2 E\Big[\big|\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\big|\Big]dt \\
&\leq d\|\partial^2 g\|_\infty\|a\|_\infty T\int_0^{T-\alpha} \big|b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t)\big|^2 \, dt \quad \text{en utilisant (3.7)} \\
&\leq \frac{d\|\partial^2 g\|_\infty\|a\|_\infty}{2\lambda_g} \, T \, I_T(\phi).
\end{aligned}$$

Ensuite

$$
\begin{aligned}
&E\Big[\int_0^{T-\alpha}\big|\langle\partial_{x_i}g(\phi(t))\partial_{x_j}b(\phi(t)),(b(\phi(t))-\dot\phi(t))\rangle\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\big|\ dt\Big]\\
&\le\|\partial g\|_\infty\|\partial b\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\Big|b(\phi(t))-\dot\phi(t)\Big|E\Big[\big|\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\big|\Big]dt\\
&\le d\|\partial b\|_\infty\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty T\int_0^{T-\alpha}\Big|b(\phi(t))-\dot\phi(t)\Big|\ dt\quad\text{ en utilisant (3.7)}\\
&\le d\|\partial b\|_\infty\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty\ T\ I_T(\phi)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
E\Big[\int_0^{T-\alpha}\partial_{x_ix_j}k\ \Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)dt\Big]\le c_1T^2+c_2I_T(\phi)^{1/2}+c_3I_T(\phi)
$$

où

$$
\begin{aligned}
c_1&=d\|g\|_\infty\|\partial b\|_\infty^2\|a\|_\infty\\
c_2&=d(2\|\partial b\|_\infty\|\partial g\|_\infty+\|g\|_\infty\|\partial^2b\|_\infty)\|a\|_\infty T\\
c_3&=\frac{d\|\partial^2g\|_\infty\|a\|_\infty}{2\lambda_g}.
\end{aligned}
$$

Estimation 3

Maintenant on s'occupe du terme

$$
E\Big[\int_0^{T-\alpha}\partial_{x_iu_j}k\ \Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)dt\Big].
$$

On a

$$
\partial_{x_iu_j}k(x,u)=-\frac{1}{2}(\langle\partial_{x_i}g\ (b(x)-u),e_j\rangle-\langle g(x)\ \partial_{x_i}b(x),e_j\rangle)
$$

Nous déduisons de l'estimation

$$
\begin{aligned}
E\Big[\int_0^{T-\alpha}&\big|\langle\partial_{x_i}g(b(\phi(t))-\dot\phi(t)),e_j\rangle\Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)\big|\ dt\Big]\\
&\le\|\partial g\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\big|b(\phi(t))-\dot\phi(t)\big|E\Big[\big|\Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)\big|\Big]dt\\
&\le\|\partial g\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\frac{1}{T-t}\big|b(\phi(t))-\dot\phi(t)\big|E\Big[\big|\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\big|\Big]dt\\
&\le d\ \|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty T^{1/2}\Big(\int_0^T\big|b(\phi(t))-\dot\phi(t)\big|^2dt\Big)^{1/2}\\
&\le\frac{d\ \|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty}{\lambda_g^{1/2}}T^{1/2}I_T(\phi)^{1/2},
\end{aligned}
$$

l'inégalité suivante :

$$E\Big[\int_0^{T-\alpha}\partial_{x_iu_j}k\ \Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)dt\Big]\le c_4T^{1/2}I_T(\phi)^{1/2}+c_5T$$

où

$$c_4=\frac{d\ \|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty}{\lambda_g^{1/2}}$$
$$c_5=d\|g\|_\infty\|\partial b\|_\infty\|a\|_\infty.$$

Estimation 4
Maintenant, on arrive à l'estimation du terme

$$A=\frac12 E\Big[\int_0^{T-\alpha}\partial_{u_iu_j}k\Delta_i^2(t)\Delta_j^2(t)\ dt\Big].$$

Puisque $\partial_{u_iu_j}k=g_{ij}(\phi(t))$, ce terme est égal à

$$\begin{aligned}&\frac12\int_0^{T-\alpha}g_{ij}(\phi(t))E\Big[\Big(\frac{\eta(t)-\phi(t)}{T-t}\Big)_i\Big(\frac{\eta(t)-\phi(t)}{T-t}\Big)_j\Big]\ dt\\ &=\frac12\int_0^{T-\alpha}E\Big[\frac{1}{(T-s)^2}g_{ij}(\phi(t))\ a_{ij}(\eta(s))\ ds\Big]dt.\quad \text{d'après l'identité 3.8}\end{aligned}$$

En utilisant l'égalité

$$a_{ij}(\eta(s))=a_{ij}(\eta(s))-a_{ij}(\phi(s))+a_{ij}(\phi(s))-a_{ij}(\phi(t))+a_{ij}(\phi(t)),$$

nous allons voir que

$$A\le\frac d2(\log T-\log\alpha)+\frac{2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty d}{\lambda_g^{1/2}}T^{1/2}\big(I_T(\phi)\big)^{1/2}+\|g\|_\infty\|a\|_\infty\ T^{1/2}.$$

En effet, la quantité A s'écrit comme la somme $A=A_1+A_2+A_3$. On va estimer chaque terme.

$$\begin{aligned}A_1&=\frac12\int_0^{T-\alpha}\int_0^t E\Big[\frac{1}{(T-s)^2}\ g_{ij}(\phi(t))[a_{ij}(\eta(s))-a_{ij}(\phi(s))]\ ds\Big]dt\\ &\le\frac12\|g\|_\infty\|a\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}E\big[|\eta(s)-\phi(s)|\big]\ ds\ dt\\ &\le\frac12\|g\|_\infty\|a\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}E\big[|\eta(s)-\phi(s)|^2\big]^{1/2}\ ds\ dt\\ &\le\frac12\|g\|_\infty\|a\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\int_0^t\frac{(T-s)^{1/2}}{(T-s)^2}\ ds\ dt\qquad\text{d'après (2.28)}\\ &\le\|g\|_\infty\|a\|_\infty\int_0^{T-\alpha}(T-t)^{-1/2}dt\\ &\le\|g\|_\infty\|a\|_\infty\ T^{1/2}.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis pour a_{ij} on a

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2} \int_0^{T-\alpha} \int_0^t E\Big[\frac{1}{(T-s)^2}\ g_{ij}(\phi(t))\Big[a_{ij}(\phi(s)) - a_{ij}(\phi(t))\Big]\ ds\Big]dt \\
&\le \frac{d}{2}\|g\|_\infty \frac{1}{2} \int_0^{T-\alpha} \int_0^t g_{ij}(\phi(t))\ \ \frac{1}{(T-s)^2} \\
&\qquad E\int_0^1 \Big|\langle \partial a(\lambda\phi(s) + (1-\lambda)\phi(t)), \phi(s) - \phi(t)\rangle\ \Big|\ d\lambda\ ds\ dt \\
&\le \frac{d}{2}\|g\|_\infty \|\partial a\|_\infty \int_0^{T-\alpha} \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2} E|\int_s^t \dot\phi(u)\ du|\ ds\ dt \\
&\le \frac{d}{2}\|g\|_\infty \|\partial a\|_\infty \int_0^{T-\alpha} \int_0^t \frac{1}{(T-s)^{3/2}} \Big[\int_s^T |\dot\phi(u)|^2\ du\Big]^{1/2}\ ds\ dt \\
&\le \frac{2\|g\|_\infty \|\nabla a\|_\infty d}{\lambda_g^{1/2}} T^{1/2}\big(I_T(\phi)\big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Comme (g_{ij}) est la matrice inverse de (a_{ij}), on a

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{1}{2} \int_0^{T-\alpha} E\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\ g_{ij}(\phi(t))\ a_{ij}(\phi(t))\ ds\ dt \\
&= \frac{d}{2} \int_0^{T-\alpha} \int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\ ds\ dt \\
&\le \frac{d}{2}(\log T - \log\alpha).
\end{aligned}$$

En conclusion, nous avons

$$A \le \frac{d}{2}(\log T - \log\alpha) + \frac{2\|g\|_\infty \|\nabla a\|_\infty d}{\lambda_g^{1/2}} T^{1/2}\big(I_T(\phi)\big)^{1/2} + \|g\|_\infty \|a\|_\infty\ T^{1/2}.$$

Il nous reste la majoration des trois termes d'erreur qui apparaissent dans la formule de Taylor (3.9).

Estimation 5

On utilise essentiellement l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, (voir la proposition (4.3) de [28]). Nous avons

$$\begin{aligned}
H_1(t) &= E\int_0^1 \int_0^1 \big(\partial_{u_i u_j} k(\lambda\mu) - \partial_{u_i u_j} k(0)\big)\Delta_i^2(t)\Delta_j^2(t)\lambda\ d\mu\ d\lambda \\
&= E\int_0^1 \int_0^1 \big(g_{ij}(\phi(t) - \lambda\mu\Delta^1(t)) - g_{ij}(\phi(t))\big)\Delta_i^2(t)\Delta_j^2(t)\lambda\ d\mu\ d\lambda
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq E\int_0^1\int_0^1 \Big|g_{ij}(\phi(t)-\lambda\mu\Delta^1(t))-g_{ij}(\phi(t))\Big|\Big|\Delta_i^2(t)\Delta_j^2(t)\Big|\lambda\ d\mu\ d\lambda\\
&\leq \frac{\|\partial g\|_\infty d}{2}E\Big[|\Delta^1(t)|\big|\Delta^2(t)\big|^2\Big]\\
&\leq \frac{\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty^{1/2}d}{2}E\Big[|\Delta^1(t)|^2\Big]^{1/2}E\Big[|\Delta^2(t)|^4\Big]^{1/2}\\
&\leq \frac{\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty^{1/2}d}{2}(T-t)^{1/2}E\Big[|\Delta^2(t)|^4\Big]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy, on a

$$
\begin{aligned}
E\big[|\Delta_i^2(t)|^4\big]^{1/4} &\leq \frac{1}{3}\bigg(E\Big[\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}a_{ii}(\eta(s))\ ds\Big]^2\bigg)^{1/4}\\
&\leq \frac{1}{3}\|a\|_\infty(T-t)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
H_1(t)\leq \frac{\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty^{3/2}d^2}{18}(T-t)^{-1/2}.
$$

Ce qui implique

$$
\int_0^{T-\alpha}H_1(t)\ dt\leq \frac{\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty^{3/2}d^2}{9}T^{1/2}.
$$

Estimation 6

Pour le deuxième terme de l'erreur, on a

$$
\begin{aligned}
H_2(t) &= E\int_0^1\int_0^1\Big(\partial_{x_iu_j}k(\lambda\mu)-\partial_{x_iu_j}k(0)\Big)\Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)\lambda\ d\mu\ d\lambda\\
&= H_2^1+H_2^2.
\end{aligned}
$$

On rappelle que

$$
\partial_{x_iu_j}k(x,u)=-\frac{1}{2}\Big(\langle\partial_{x_i}g\ (b(x)-u),e_j\rangle-\langle g(x)\ \partial_{x_i}b(x),e_j\rangle\Big).
$$

Pour le premier terme H_2^1, il est égal à

$$
\begin{aligned}
E\int_0^1\int_0^1\Big[&\langle\partial_{x_i}g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t))\big(b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)\big)-\dot\phi(t)-\lambda\mu\Delta^2(t))_i,e_j\rangle-\\
&\langle(\partial_{x_i}g(\phi(t))(b(\phi(t))-\dot\phi(t))_i,e_j\rangle\Big]\Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t)\lambda\ d\mu\ d\lambda.
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$
\begin{aligned}
H_2^1 \leq E \int_0^1 \int_0^1 & \Big[\Big| \partial_{x_i} g(\phi(t) + \lambda\mu\Delta^1(t))(b(\phi(t) + \lambda\mu\Delta^1(t)) - \dot{\phi}(t) - \mu\lambda\Delta^2(t))_i - \\
& \big(\partial_{x_i} g(\phi(t))\big(b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t)\big)_i \Big| \Big] \Big| \Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t) \Big| \lambda \, d\mu \, d\lambda \\
\leq E \int_0^1 \int_0^1 & \Big[\Big| \Big(\partial_{x_i} g(\phi(t) + \lambda\mu\Delta^1(t))\Big)_i - \big(\partial_{x_i} g(\phi(t))\big)_i \Big| |b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t))\Big| \Big] \\
& \Big| \Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t) \Big| \lambda \, d\mu \, d\lambda \\
+ E \int_0^1 \int_0^1 & \Big[\Big| (\partial_{x_i} g(\phi(t) + \lambda\mu\Delta^1(t)))_i \lambda\mu\Delta^2(t)_i \Big| \Big| \Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t) \Big| \Big] \lambda \, d\mu \, d\lambda \\
+ E \int_0^1 \int_0^1 & \Big[\Big| (\partial_{x_i} g(\phi(t) + \lambda\mu\Delta^1(t)))_i (b((\phi(t) + \lambda\mu\Delta^1(t)) - b(\phi(t)))_i \Big| \Big] \\
& \Big| \Delta_i^1(t)\Delta_j^2(t) \Big| \lambda \, d\mu \, d\lambda. \\
\leq \frac{\|\partial^2 g\|_\infty d}{6} & \Big| b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t)) \Big| E\Big[|\Delta^1(t)|^2 |\Delta^2(t)|^2 \Big] + d \frac{\|\partial g\|_\infty (1 + \|b\|_\infty)}{6} \\
& E\Big[|\Delta^1(t)| |\Delta^2(t)|^2 \Big] \\
\leq \frac{\|\partial^2 g\|_\infty \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{18} & T^{1/2} \Big| b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t)) \Big| + \frac{\|\partial g\|_\infty (1 + \|b\|_\infty) \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{18} (T - t)^{-1/2}.
\end{aligned}
$$

Pour le terme qui reste de H_2, on a

$$H_2^2 \leq \frac{d\|a\|_\infty}{2} \|g\|_\infty \|\partial b\|_\infty.$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
& \int_0^{T-\alpha} H_2^1(t) dt \\
& \quad \leq \frac{\|\partial^2 g\|_\infty \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{18} T^{1/2} \int_0^{T-\alpha} |b(\phi(t) - \dot{\phi}(t))| dt + \frac{\|\partial g\|_\infty (1 + \|b\|_\infty) \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{9} T^{1/2} \\
& \quad \leq \frac{\|\partial^2 g\|_\infty \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{18} T \Big(\int_0^T |b(\phi(t)) - \dot{\phi}(t))|^2 dt \Big)^{1/2} + \frac{\|\partial g\|_\infty (1 + \|b\|_\infty) \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{9} T^{1/2} \\
& \quad \leq \frac{\|\partial^2 g\|_\infty \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{18 \ \lambda_g} T^{1/2} I_T(\phi)^{1/2} + \frac{\|\partial g\|_\infty \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{9} T^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$\int_0^{T-\alpha} H_2(t) dt \leq c_6 T^{1/2} I_T(\phi)^{1/2} + c_7 T^{1/2} + c_8 T,$$

où

$$c_6 = \frac{\|\partial^2 g\|_\infty \|a\|_\infty^{1/2} d^2}{18\ \lambda_g},$$

$$c_7 = \frac{\|\partial g\|_\infty (1+\|b\|_\infty)\|a\|_\infty^{1/2} d^2}{9},$$

$$c_8 = \frac{d\|a\|_\infty}{2}\|g\|_\infty \|\partial b\|_\infty.$$

Estimation 7

On considère maintenant le dernier terme

$$H_3(t) = E\int_0^1\int_0^1 \Big(\partial_{x_ix_j}k(\lambda\mu) - \partial_{x_ix_j}k(0)\Big)\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu.$$

On a

$$\begin{aligned}
&E\int_0^1\int_0^1 \Big[\langle \partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta_1(t))(b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta_1(t)) - \dot\phi(t) - \lambda\mu\Delta^2(t)),\\
&\qquad\qquad b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta_1(t)) - \dot\phi(t) - \lambda\mu\Delta^2(t)\rangle\\
&\quad - \langle \partial_{x_ix_j} g(\phi(t))(b(\phi(t)) - \dot\phi(t)), b(\phi(t)) - \dot\phi(t)\rangle\Big]\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu\\
&= H_3^1(t) + H_3^2(t) + H_3^3(t) + H_3^4 + H_3^5 + H_3^6,
\end{aligned}$$

où le terme H_3^1 est égal à

$$\begin{aligned}
&E\int_0^1\int_0^1 \langle\big[\partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)) - \partial_{x_ix_j} g(\phi(t))\big](b(\phi(t)) - \dot\phi(t)), b(\phi(t)) - \dot\phi(t)\rangle\\
&\qquad\qquad \Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu\\
&\le \frac{\|\partial^3 g\|_\infty d}{6} E\Big[|\Delta^1(t)|^3\Big]|b(\phi(t)) - \dot\phi(t)|^2\\
&\le \frac{\|\partial^3 g\|_\infty d}{6} T^{3/2}\Big|b(\phi(t)) - \dot\phi(t)\Big|^2.
\end{aligned}$$

Le terme

$$\begin{aligned}
H_3^2 &= E\int_0^1\int_0^1 \langle\big(\partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)\big)\big(b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)) - b(\phi(t))\big),\\
&\qquad \big(b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)) - b(\phi(t))\big)\rangle\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu\\
&\le E\int_0^1\int_0^1 \|\partial^2 g\|_\infty \Big|b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)) - b(\phi(t))\Big|^2\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu\\
&\le E\int_0^1\int_0^1 \|\partial^2 g\|_\infty \|b\|_\infty^2\Big|\lambda\mu\Delta^1(t)\Big|^2\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu\\
&\le c\|\partial^2 g\|_\infty\|b\|_\infty^2\|a\|_\infty^4(T-t)^2.
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
H_3^3(t) &= 2E\int_0^1\int_0^1 \langle \big(\partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)\big) b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)) - b(\phi(t)), \lambda\mu\Delta^2(t)\rangle \\
&\qquad\qquad \Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu \\
&\le \frac{2\|\partial^2 g\|_\infty\ d}{3}\ \|b\|_\infty\ E[\ |\Delta^1(t)|^2|\Delta^2(t)|\ ] \\
&\le \frac{2\|\partial^2 g\|_\infty\ d\|a\|_\infty}{9}\|b\|_\infty\ T^{1/2},
\end{aligned}
$$

pour le terme H_3^4, on a

$$
\begin{aligned}
H_3^4(t) &= 2E\int_0^1\int_0^1 \langle \big(\partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)\big)\big(b(\phi(t)) - \dot\phi(t)\big), \lambda\mu\Delta^2(t)\rangle \\
&\qquad\qquad \Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu \\
&\le \frac{2\|\partial^2 g\|_\infty\ d\|a\|_\infty}{9}\ T^{1/2}\big|b(\phi(t)) - \dot\phi(t)\big|.
\end{aligned}
$$

Ainsi le terme H_3^5 est égale à

$$
\begin{aligned}
&2E\int_0^1\int_0^1 \langle \big(\partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)\big)\big(b(\phi(t)) - \dot\phi(t)\big), b(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)) - b(\phi(t))\rangle \\
&\qquad\qquad \Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ d\mu \\
&\le \frac{2\|\partial^2 g\|_\infty\ d\|a\|_\infty\|\partial b\|_\infty}{6}\ T^{3/2}|b(\phi(t)) - \dot\phi(t)|.
\end{aligned}
$$

Finalement

$$
\begin{aligned}
H_3^6(t) &= E\int_0^1\int_0^1 \langle \big(\partial_{x_ix_j} g(\phi(t)+\lambda\mu\Delta^1(t)\big)\lambda\mu\Delta^2(t), \lambda\mu\Delta^2(t)\rangle\Delta_i^1(t)\Delta_j^1(t)\lambda\ d\lambda\ \mu \\
&\le \frac{\|\partial^2 g\|_\infty d}{12} E\Big[\big|\Delta^1(t)\big|^2\big|\Delta^2(t)\big|^2\Big] \\
&\le \frac{\|\partial^2 g\|_\infty\|a\|_\infty d^2}{36}.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\int_0^{T-\alpha} H_3(t)dt \le c_9 I_T(\phi) + c_{10} I_T(\phi)^{1/2} + c_{11}
$$

où

$$
c_9 = \frac{\|\partial^3 g\|_\infty d}{6\lambda_g} T^{3/2},
$$

$$
c_{10} = d\|\partial^2 g\|_\infty\ \Big(\frac{2T + 3\|\partial b\|_\infty T^2}{9\lambda_g^{1/2}}\Big)\|a\|_\infty
$$

et

$$c_{11} = d\Big[\frac{1}{36} + \|b\|_\infty^2 \|a\|_\infty^3 T^3 + \frac{2\|b\|_\infty}{9} T^{1/2}\Big] \|a\|_\infty \|\partial^2 g\|_\infty.$$

Conclusion

$$E\Big[\int_0^{T-\alpha} k(\eta(t), u(t))dt\Big] \leq c + cI_T(\phi) + cI_T(\phi)^{1/2}$$

B) Estimation de $E\big[J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))\big]$.

On a par définition de $J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))$

$$\begin{aligned} E\big[J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))\big] &= \frac{d}{2}\log 2\pi\alpha + \frac{1}{2}\log\ det\ a(y_0) \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} g_{ij}(y_0) E[(\eta(T-\alpha) - y_0)_i (\eta(T-\alpha) - y_0)_j]. \end{aligned}$$

Il nous reste à estimer le membre de droite. On rappelle que $y_0 = \phi(T)$. A partir de l'écriture

$$\eta(T-\alpha) - y_0 = \eta(T-\alpha) - \phi(T-\alpha) + \phi(T-\alpha) - \phi(T),$$

on a d'après l'isométrie de Itô

$$\begin{aligned} E\big[(\eta(T-\alpha) - y_0)_i(\eta(T-\alpha) - y_0)_j\big] &= (\phi(T-\alpha) - \phi(T))_i(\phi(T-\alpha) - \phi(T))_j \\ &\quad + E\big[(\eta(T-\alpha) - \phi(T-\alpha))_i(\eta(T-\alpha) - \phi(T-\alpha))_j\big] \\ &\leq d\|a\|_\infty \alpha + \Big|\Big(\int_{T-\alpha}^T \dot\phi(u)\ du\Big)_i \Big(\int_{T-\alpha}^T \dot\phi(u)\ du\Big)_j\Big| \\ &\leq d\|a\|_\infty \alpha + d\Big|\int_{T-\alpha}^T \dot\phi(u)\ du\Big|^2 \\ &\leq d\|a\|_\infty \alpha + d\alpha \int_{T-\alpha}^T |\dot\phi(u)|^2\ du. \end{aligned}$$

Ceci implique l'estimation

$$E\big[J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))\big] \leq \frac{d}{2}\log 2\pi\alpha + \frac{1}{2}\log\ det\ a(y_0) + \frac{d}{2}\|a\|_\infty + \frac{d}{2}\int_{T-\alpha}^T |\dot\phi(u)|^2\ du.$$

Conclusion :
Estimation de la borne supérieure de $J_T(x_0, y_0)$.
En regroupant toutes les estimations obtenues, on a

$$\begin{aligned} E\big[J^\alpha(0,\eta(T-\alpha))\big] + E\Big[\int_0^{T-\alpha} k(\eta(t), u(t))dt\Big] &\leq \frac{d}{2}(\log T - \log\alpha) + cI_T(\phi) + cI_T(\phi)^{1/2} \\ &\quad + \frac{d}{2}\log 2\pi\alpha + \frac{1}{2}\log\ det\ a(y_0) + \frac{d}{2}\|a\|_\infty + \frac{d}{2}\int_{T-\alpha}^T |\dot\phi(u)|^2\ du. \end{aligned}$$

On remarque alors que le terme $\log \alpha$ disparaît. En utilisant le résultat élémentaire suivant :

$$\forall \;\; \delta \; > 0 \quad \exists \; c(\delta) > 0 \quad \text{tel que} \quad z^{1/2} \leq \delta z + c(\delta) \quad \text{pour tout} \;\; z \geq 0, \tag{3.10}$$

et en faisant tendre α vers 0, on obtient

$$J_T(x_0, y_0) \leq \frac{d}{2} \log 2 \; \pi \; T + \frac{1}{2} \log \; det \; a(y_0) + c_2(T) I(T, x_0, y_0) + k_2(T),$$

où

$$c_2(T) = 1 + c\big(\|\sigma^2\|_\infty, \|\partial_x^2 \sigma^2\|_\infty\big) \lambda_g T.$$

Nous passons maintenant à la borne inférieure de $J^\alpha(T-\alpha, x_0)$

3.2.3 Estimation de la borne inférieure.

Soit $u_\alpha^*(t,x)$ la fonction définie dans le lemme 3.2.1. On considère le processus ξ solution de l'EDS suivante

$$d\xi(t) = u_\alpha^*(t, \xi(t)) dt + \sigma(\xi(t)) dB(t) \quad \xi(0) = x_0.$$

Nous avons par définition de u_α^*,

$$J^\alpha(T-\alpha, x_0) = E\Big[\int_0^{T-\alpha} k(\xi(t), u^*(t)) dt + J^\alpha(0, \xi(T-\alpha)) \Big], \tag{3.11}$$

où $u^*(t) \equiv u_\alpha^*(t, \xi(t))$.
Soit la trajectoire aléatoire $\psi(.)$ solution de

$$\psi(t) = \frac{\xi(t) - \psi(t)}{T-t} + u^*(t), \qquad\qquad 0 \leq t \leq T - \alpha$$

$$\psi(0) = x_0 \; .$$

En utilisant la formule de Itô, on a

$$\frac{\xi(t) - \psi(t)}{T-t} = \int_0^t \frac{1}{T-t} \; \sigma(\xi(s)) \; dB(s). \tag{3.12}$$

En appliquant de nouveau l'isométrie de Itô comme (3.7), on obtient

$$E\Big[|\xi(t) - \psi(t)|^2\Big] \leq \|a\|_\infty (T-t) \tag{3.13}$$

$$E\Big[(\xi(t) - \psi(t))_i (\xi(t) - \psi(t))_j\Big] = (T-t)^2 E\Big[\int_0^t \Big(\frac{1}{T-s}\Big)^2 a_{ij}(\xi(s)) \; ds\Big]. \tag{3.14}$$

D'une part, la positivité de a combinée avec (3.11) entraine

$$E\Big[J^{\alpha}(0,\xi(T-\alpha))\Big] \leq J^{\alpha}(T-\alpha,x_0)$$

Donc

$$E\Big[|\xi(T-\alpha)-y_0|^2\Big] \leq c_1\alpha J^{\alpha}(T-\alpha,x_0) - c_2\alpha\log\alpha - c_3\alpha \tag{3.15}$$

D'autre part de (3.14) et (3.15), $\psi(T-\alpha)$ tend vers y_0 quand $\alpha\to 0$, en probabilité. Donc

$$I(T,x_0,y_0) \leq \liminf_{\alpha\to 0}\int_0^{T-\alpha} k(\psi(t),\dot{\psi}(t))dt$$

Maintenant on fait appel à la formule de Taylor appliquée à k entre les points $(\xi(t),u^*(t))$ et $(\psi(t),\dot{\psi}(t))$. On obtient la formule suivante analogue à (3.9)

$$E\int_0^{T-\alpha} k(\xi(t),u^*(t)) = I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6$$

où

$$I_1 = \frac{1}{2}E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j=1,..d} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\psi(t))-\dot{\psi}_i(t)\Big)\Big(b(\psi(t))-\dot{\psi}_j(t)\Big)\Big]\,dt,$$

$$I_2 = E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j=1,..d} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\psi(t))-\dot{\psi}(t)\Big)_i\Big(b(\xi(t))-b(\psi(t)) \;+\frac{(\xi(t)-\psi(t))}{T-t}\Big)_j dt\Big]$$

$$I_3 = \frac{1}{2}E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j=1,..d} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\xi(t))-b(\psi(t))\Big)_i\Big(b(\xi(t))-b(\psi(t))\Big)_j dt\Big]$$

$$I_4 = \frac{1}{2}E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j=1,..d} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\xi(t))-b(\psi(t))\Big)_i\Big(\xi(t)-\psi(t)\Big)_j\,\frac{1}{T-t}\,dt\Big]$$

$$I_5 = \frac{1}{2}E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j=1,..d} g_{ij}(\xi(t))\Big(\xi(t)-\psi(t)\Big)_i\Big(\xi(t)-\psi(t)\Big)_j\,\Big(\frac{1}{T-t}\Big)^2\,dt\Big]$$

et

$$I_6 = E\big[J^{\alpha}(0,\xi(T-\alpha))\big].$$

Estimation de I_1

En utilisant que λ_g (respectivement Λ_g) est la plus petite valeur propre (la plus grande valeur propre) de g, on a

$$I_1 \geq \frac{\lambda_g}{2}E\Big(\int_0^{T-\alpha}\Big|b(\psi(t))-\dot{\psi}(t)\Big|^2\,dt\Big) \;\geq \frac{\lambda_g}{2\Lambda_g}Z_{\alpha}$$

Estimation de I_2

Pour le terme I_2 on a

$$\begin{aligned}
I_2 &= E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\Big)_i\Big(\frac{(\xi(t)-\psi(t))}{T-t}\Big)_j dt\Big]\\
&+ E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\Big)_i\Big(b(\xi(t))-b(\psi(t))\Big)_j dt\Big]\\
&= I_2'+I_2''
\end{aligned}$$

où

$$I_2' = E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\Big)_i\Big(\frac{(\xi(t)-\psi(t))}{T-t}\Big)_j dt\Big]$$

et

$$I_2'' = E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j} g_{ij}(\xi(t))\Big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\Big)_i\Big(b(\xi(t))-b(\psi(t))\Big)_j dt\Big]$$

En tenant compte que pour chaque (i,j) fixé

$$g_{ij}(\xi(t)) = g_{ij}(\xi(t)) - g_{ij}(\psi(t)) + g_{ij}(\psi(t)) - g_{ij}(y_0) + g_{ij}(y_0).$$

On a alors $I_2' = I_2^1 + I_2^2 + I_2^3$

$$\begin{aligned}
I_2^1 &= E\Big[\int_0^{T-\alpha}\sum_{i,j}\Big(g_{ij}(\xi(t))-g_{ij}(\psi(t))\Big)\Big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\Big)_i\Big(\xi(t)-\psi(t)\Big)_j\frac{1}{T-t}dt\Big]\\
&\geq -c\|\partial g\|_\infty\int_0^{T-\alpha} E\Big[\big|\xi(t)-\psi(t)\big|^2\big|b(\psi(t))-\dot\psi(t))\big|\Big]\frac{1}{T-t}dt\\
&\geq -c\|\partial g\|_\infty\int_0^{T-\alpha}\Big(E\big|\frac{\xi(t)-\psi(t)}{T-t}\big|^4\Big)^{1/2}\Big(E\big|b(\psi(t))-\dot\psi(t))\big|^2\Big)^{1/2}(T-t)\; dt
\end{aligned}$$

par inégalité de hôlder.
On rappelle que d'après (3.12), $\frac{\xi(t)-\psi(t)}{T-t}$ est une martingale. En aplliquant l'inégalité de B.D.G., il existe une constante c telle que

$$E\Big[\Big(\frac{\xi(t)-\psi(t)}{T-t}\Big)_i^4\Big] \leq cE\Big[\Big(\int_0^s\frac{1}{T-s}\Big)^2 a_{ii}(\xi(t))ds\Big]^2$$

D'où

$$I_2^1 \geq -\frac{C\; d^2\|\partial g\|_\infty\|a\|_\infty^2}{\lambda_g}\; T^{1/2}\; Z_\alpha^{1/2}.$$

Maintenant on va estimer I_2^2.
On rappelle que si $M(t)$ une martingale centrée et x une fonction dérivable alors

$$d(M(t)x(t)) = M(t)dx(t) + x(t)dM(t).$$

On applique ce résultat à la martingale $\xi(t) - \psi(t)/(T-t)$ et à $x(t) = \psi(t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
I_2^2 &= E\Big[\int_0^{T-\alpha} \sum_{ij} g_{ij}(y_0)\big(b(\psi(t)) - \dot{\psi}(t)\big)_i \big(\xi(t) - \psi(t)\big)_j \frac{1}{T-t} dt\Big] \\
&= E\Big[\int_0^{T-\alpha} \sum_{i,j} g_{ij}(y_0) b(\psi(t))_i \big(\xi(t) - \psi(t)\big)_j \frac{1}{T-t} dt\Big] \\
&- \sum_{i,j} g_{ij}(y_0) E\Big[\big(\psi(T-\alpha) - y_0\big)_i \big(\xi(T-\alpha) - \psi(T-\alpha)\big)_j\Big] \frac{1}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Une estimation similaire à celle de I_2^1 montre que

$$E\Big[\int_0^{T-\alpha} \sum_{i,j} g_{ij}(y_0) b(\psi(t))_i \big(\xi(t) - \psi(t)\big)_j \frac{1}{T-t} dt\Big] \quad \geq -CT^{1/2} \tag{3.16}$$

Pour le deuxième terme, on utilise la décomposition

$$\begin{aligned}
&\big(\psi(T-\alpha) - y_0\big)_i \big(\xi(T-\alpha) - \psi(T-\alpha)\big)_j = \big(\xi(T-\alpha) - y_0\big)_i \big(\xi(T-\alpha) - y_0\big)_j + \\
&\big(\psi(T-\alpha) - \xi(T-\alpha)\big)_i \big(\xi(T-\alpha) - \psi(T-\alpha)\big)_j + \big(\xi(T-\alpha) - y_0\big)_i \big(y_0 - \psi(T-\alpha)\big)_j \\
&= R_1(ij) + R_2(ij) + R_3(ij).
\end{aligned}$$

En appliquant (3.13), nous avons

$$\begin{aligned}
E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0) R_2(ij)\Big] &= E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0)(\psi(T-\alpha) - \xi(T-\alpha)_i(\xi(T-\alpha) - \psi(T-\alpha)_j\Big] \\
&\leq \Lambda_g E\Big[|\xi(T-\alpha) - \psi(T-\alpha)|^2\Big] \\
&\leq \Lambda_g \|a\|_\infty \, \alpha.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

D'après (3.15), on a

$$\begin{aligned}
E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0) R_1(ij)\Big] &= E\Big[g_{ij}(y_0)(\xi(T-\alpha) - y_0)_i(\xi(T-\alpha) - y_0)_j\Big] \\
&\leq \Lambda_g \quad E\Big|\xi(T-\alpha) - y_0\Big|^2 \\
&\leq C,
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0) R_1(ij)\Big] \tag{3.18}$$

$$\geq -C^{1/2} \bigg(E\Big[\sum_{ij} g_{ij}(y_0)\big(\xi(T-\alpha) - y_0\big)_i \big(\xi(T-\alpha) - y_0\big)_j\Big]\bigg)^{1/2}. \tag{3.19}$$

Finalement, de l'estimation

$$
\begin{aligned}
E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0)R_3(ij)\Big] &\le E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0)\big(\xi(T-\alpha)-y_0\big)_i\big(y_0-\xi(T-\alpha)\big)_j\Big] \\
&+ E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0)\big(\xi(T-\alpha)-y_0\big)_i\big(\xi(T-\alpha)-\psi(T-\alpha)\big)_j\Big] \\
&\le \Lambda_g E\Big|\xi(T-\alpha)-y_0\Big|^2 + \|g\|_\infty\Big(E\Big[\Big|\xi(T-\alpha)-y_0\Big|^2\Big]\Big)^{1/2} \\
&\Big(E\Big[\Big|\xi(T-\alpha)-\psi(T-\alpha)\Big|^2\Big]\Big)^{1/2}
\end{aligned}
$$

D'où

$$
E\Big[\sum_{i,j} g_{ij}(y_0)R_3(ij)\Big] \ge -C \tag{3.20}
$$

En combinant (3.17), (3.20), (3.18) et en utilisant (3.10), on obtient

$$
\begin{aligned}
I_2^2 &\ge -cT^{1/2} - c - c\frac{1}{\alpha}\Big(E\Big[g_{ij}(y_0)\big(\xi(T-\alpha)-y_0\big)_i\big(\xi(T-\alpha)-y_0\big)_j\Big]\Big)^{1/2} \\
&\ge -c - \frac{1}{2\alpha}E\Big[g_{ij}(y_0)\big(\xi(T-\alpha)-y_0\big)_i\big(\xi(T-\alpha)-y_0\big)_j\Big].
\end{aligned}
$$

Il nous reste à traiter le terme

$$
I_2^3 = E\Big[\int_0^{T-\alpha}\big(g_{ij}(\psi(t))-g_{ij}(y_0)\big)\big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\big)_i\big(\xi(t)-\psi(t)\big)_j\frac{1}{T-t}dt\Big].
$$

On utilise le faite que g est β Holderienne avec $\beta < 1$ et on obtient pour chaque (i,j) fixé, l'estimation suivante

$$
\begin{aligned}
|g_{ij}(\psi(t))-g_{ij}(y_0)| &\le \Big|g_{ij}(\psi(t)) - g_{ij}\Big(\psi(T-\alpha)-\int_t^{T-\alpha} b(\psi(s))ds\Big)\Big| \\
&\quad + \Big|g_{ij}\Big(\psi(T-\alpha)-\int_t^{T-\alpha} b(\psi(s))ds\Big) - g_{ij}(y_0)\Big| \\
&\le c\Big|\psi(t)-\psi(T-\alpha)+\int_t^{T-\alpha} b(\psi(s))ds\Big|^\beta \\
&+ c\Big|\int_0^{T-\alpha} b(\psi(s))ds\Big|^\beta + c|\psi(T-t)-y_0|^\beta \\
&\le c\Big(\int_t^{T-\alpha}|\dot\psi(s)-b(\psi(s))|ds\Big)^\beta + c(T-t)^\beta + |\psi(T-\alpha)-y_0|^\beta \ .
\end{aligned}
$$

Cette dernière estimation combinée avec les inégalités de Holder et de B.D.G. nous donnent

$$
I_2^3 \ge -cT^\beta Z_\alpha^{1/2} - cT^{\beta/2}Z_\alpha^{1/2+(\beta/2)}.
$$

D'autre part

$$\begin{aligned}I_2'' &= E\Big[\int_0^{T-\alpha}\big(g_{ij}(\xi(t))\big)\big(b(\psi(t))-\dot\psi(t)\big)_i\big(b(\xi(t))-b(\psi(t))\big)_j dt\Big]\\ &\geq -\frac{\|b\|_\infty\|g\|_\infty}{\lambda_g^{1/2}}T^{1/2}\ Z_\alpha^{1/2}.\end{aligned}$$

Finalement

$$I_2 \geq -c - c\ T^{1/2}\ Z_\alpha^{1/2} - -cT^{\beta}Z_\alpha^{1/2} - cT^{\beta/2}Z_\alpha^{1/2+(\beta/2)}.$$

Estimation de I_3

En appliquant de nouveau la positivité de a, on a

$$I_3 \geq 0$$

Estimation de I_4

Par hypothèse sur b et $g$et en utilisant l'estimation (3.13) on a

$$I_4 \geq -\|b\|_\infty\|g\|_\infty T^{1/2}.$$

Estimation de I_5

On a

$$\begin{aligned}I_5 &= \frac{1}{2}E\Big[\int_0^{T-\alpha} g_{ij}(y_0)\big(\xi(t)-\psi(t)\big)_i\big(\xi(t)-\psi(t)\big)_j\ \Big(\frac{1}{T-t}\Big)^2\ dt\Big]\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{T-\alpha} g_{ij}(y_0)E\Big[\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}a_{ij}(\xi(s))\ ds\Big]dt\ \ \text{D'après Isométrie de Itô}\end{aligned}$$

Maintenant on utilise la décomposition

$$\begin{aligned}a_{ij}(\xi(s)) &= a_{ij}(\xi(s)) - a_{ij}(\psi(s)) + a_{ij}(\psi(s)) - a_{ij}(\psi(T-\alpha))\\ &\quad + a_{ij}(\psi(T-\alpha)) - a_{ij}(y_0) + a_{ij}(y_0)\end{aligned}$$

pour obtenir $I_5 = S_1+S_2+S_3+S_4$. ceci revient à estimer quatre termes.
Estimation de S_1.

$$\begin{aligned}S_1 &= \frac{1}{2}\int_0^{T-\alpha} g_{ij}(y_0)E\Big[\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\big(a_{ij}(\xi(s))-a_{ij}(\psi(s))\big)\ ds\Big]dt\\ &\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{2}\int_0^{T-\alpha}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^2}\Big[E\big|\xi(s)-\psi(s)\big|^2\Big]^{1/2}\ dsdt\\ &\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty\|a\|_\infty^{1/2}}{2}\int_0^{T-\alpha}\int_0^t\frac{1}{(T-s)^{3/2}}\ dsdt\ \text{d'après (3.13)}\\ &\leq d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty\|a\|_\infty^{1/2}T^{1/2}.\end{aligned}$$

Estimation de S_2.

$$\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{2}\int_0^{T-\alpha} g_{ij}(y_0)E\Big[\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\big(a_{ij}(\psi(s)) - a_{ij}(\psi(T-\alpha))\big)\ ds\Big]dt \\
&\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{2}\int_0^{T-\alpha}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\Big[E\big|\psi(s)-\psi(T-\alpha)\big|\Big]ds\ dt \\
&\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{2}\int_0^{T-\alpha}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\big[E\int_s^{T-\alpha}|\dot\psi(t)|\ du\big]ds\ dt \\
&\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{2}Z_\alpha^{1/2}\ \int_0^{T-\alpha}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^{3/2}}dsdt \\
&\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{4}T^{1/2}\ Z_\alpha^{1/2} + \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{4}T^{1/2}.
\end{aligned}$$

Estimation de S_3.
Nous avons $E|\psi(T-\alpha)-y_0| \leq E|\psi(T-\alpha)-\xi(T-\alpha)| + E|\xi(T-\alpha)-y_0|$, alors

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{2}\int_0^{T-\alpha} g_{ij}(y_0)E\Big[\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}\big(a_{ij}(\psi(T-\alpha)) - a_{ij}(y_0)\big)\ ds\Big] \\
&\leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{2}\Big[E\big|\psi(T-\alpha)-y_0\big|\Big]\int_0^{T-\alpha}\frac{1}{T-t}\ dt
\end{aligned}$$

En utilisant (3.15)

$$S_3 \leq \frac{d^2\|g\|_\infty\|\nabla a\|_\infty}{2}(\log T - \log\alpha)(c_1\alpha J^\alpha(T-\alpha,x_0) - c_2\alpha\log\alpha + \|a\|_\infty^{1/2}\alpha^{1/2}),$$

or ce terme tend vers 0 lorsque $\alpha \to 0$.
Estimation de S_4.
Finalement le quatrième terme est

$$S_4 = \frac{d}{2}\int_0^{T-\alpha}\int_0^t \frac{1}{(T-s)^2}ds = -\frac{d}{2}\log\frac{\alpha}{T} - \frac{d}{2}\frac{T-\alpha}{T}.$$

Conclusion

Estimation de la borne inférieure de $J_T(X_0,y_0)$.
En regroupant toutes ces estimations, on trouve

$$J_T(x_0,y_0) \geq \frac{d}{2}\log 2\pi T + \frac{1}{2}\log det\ a(y_0) + c_1(T)I(T,x_0,y_0) - k_1(T)$$

où $c_1(T) = \delta(T) + \lambda_g\Lambda_g^{-1}$. Le terme δ aussi petit qu'on veut.

La preuve de l'estimation c'est-à-dire $c_2(T) = \delta(T) + \Lambda_g\lambda_g^{-1}$ est similaire à celle de $c_1(T) = \delta(T) + \lambda_g\Lambda_g^{-1}$.

Chapitre 4

Existence et unicité de la solution d'un système d'EDP nonlinéaire

Soit X un processus de markov sur $\mathbf{R}^d$ de générateur $L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i}$, et de densité de transition $G(t,x,y)$. Les coefficients $a_{ij},\ b_i$ appartiennent à $C_b^{2+\beta}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions f deux fois dérivables, avec f et ses dérivées bornées et $\partial^2_{x_i x_j} f$ Hölderiennes d'ordre $\beta \in (0,1)$. La matrice $a(x)$ est symétrique, de plus on suppose que $a(x) \geq \lambda I_{d\times d}$, où $\lambda > 0$ et $I_{d\times d}$ est la matrice identité de dimension d.
Le but de ce chapitre est d'obtenir l'existence et l'unicité d'une solution au système suivant :

$$\mathcal{S}(a,b) \begin{cases} \partial_t(\rho) + div(u\rho) = L^*(\rho) \\ \partial_t(u_i\rho) + div(u_i u\rho) = L^*(u_i\rho), \\ \forall\, 1 \leq i \leq d,\ \rho(dx,t) \to \rho_0(dx), u_i(x,t)\rho(dx,t) \to v_i(x)\rho_0(dx) \\ \text{faiblement pour } \ t \to 0^+ \end{cases}$$

où L^* est l'opérateur adjoint formel de L.
Á notre connaissance, les méthodes d'équations aux derivées partielles ne permettent pas à donner une solution à ce système. Nous allons construire une solution unique en utilisant les équations différentielles stochastiques.

L'existence d'une solution sera donnée par l'existence d'une solution faible de l'équation différentielle stochastique (EDS) suivante :

$$dX_t = \Big(E\big[v(X_0)/X_t\big] + b(X_t)\Big)dt + \sigma(X_t)dB_t \tag{4.1}$$

où σ est une racine carrée de a, c'est-à-dire $a = \sigma\sigma^*$.
Nous montrons que la famille $\big(P(X_t \in dx), u(x,t) = E[v(X_0)/X_t = x], t > 0\big)$ est l'unique solution faible du système $\mathcal{S}(a,b)$.
Nous rappelons que ce travail a été publié dans Journal de Mathématiques Pures et Appliquées [10] 2004 .

4.1 Existence de la solution.

Dans cette section, on montre l'existence de la solution du système $\mathcal{S}(a,b)$

4.1.1 Théorème
L'EDS (4.1) a une solution faible.

4.1.2 Corollaire
On suppose que $\rho_0(dx) = \rho_0(x)dx$, et $\rho_0 \in L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, alors le système $\mathcal{S}(a,b)$ a une solution faible dans $\mathcal{U}_{||v||_\infty} \times C(\mathbf{R^d}, M(\mathbf{R^d}))$, l'espace des fonctions mesurable u bornées par $||v||_\infty$ et $(t \in \mathbb{R}_+ \to \rho(dx,t)) \in C(\mathbb{R}_+, M(\mathbb{R}^d))$.

On termine cette section par la preuve du corollaire.

Preuve du corollaire :
Soit $\rho(dx,t) = P(X_t \in dx)$ la loi de X_t solution de (4.1) et $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C^2 à support compact. En utilisant la formule de Itô,

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t L_s f(X_s) ds \qquad \text{est une martingale centrée.} \tag{4.2}$$

où

$$L_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^d (u(x,s) + b(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} \ .$$

D'où

$$E[f(X_t) - f(X_0)] = \int_0^t E[L_s f(X_s)] ds,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int f(x)[\rho(dx,t) - \rho_0(dx)] &= \int_0^t \int \sum_{j=1}^d \Big[b_j(x) + u_j(x,s) \Big] \partial_{x_j} f(x) \rho(dx,s) ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \partial^2_{x_j x_i} f(x) \rho(dx,s) ds \\
&= - \int_0^t \int f(x) \sum_{j=1}^d \partial_{x_j} \Big[(u_j(x,s) + b_j(x)) \rho(dx,s) \Big] ds \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^t \int f(x) \sum_{i,j=1} \partial^2_{x_i x_j} [a_{ij}(x) \rho(dx,s)] ds.
\end{aligned}$$

Ceci est exacment le sens d'une solution faible à la première équation du système $\mathcal{S}(a,b)$. Pour obtenir la deuxième équation du système $\mathcal{S}(a,b)$, il suffit de multiplier l'expression (4.2) par $v_k(X_0)$ et d'utiliser la définition de l'espérence conditionnelle.

4.2 La preuve de l'existence

Soit ϕ une densité de probabilité symétrique sur $\mathbb{R}^d$. Notons pour chaque $n \in \mathbb{N}_*$, $\phi^n(x) = n^d\phi(nx)$.
Soit $n, N \in \mathbb{N}_*$ et $X_t^{N,n} = (X_t^{i,N,n},\ 1 \leq i \leq N)$ la solution de l'équation différentielle stochastique N-dimensionnelle :

$$dX_t^{i,N,n} = \Big[\frac{\sum_{j\neq i} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})}{\sum_{j\neq i}\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})} + b(X_t^{i,N,n})\Big]dt + \sigma(X_t^{i,N,n})dB_t^i, \qquad (4.3)$$

L'existence d'une solution faible est assurée par le théorème 6.4.3 de [31], voir l'annexe pour plus de détails. Soient $\rho_{0,t}^n$ la loi de (X_0, X_t^n) et ρ_t^n la loi de X_t^n

4.2.1 Première étape : la tension

Nous allons fixer n et on faire tendre N vers l'infini.
Nous posons

$$A_t^{i,N,n} = \int_0^t \frac{\sum_{j\neq i} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})}{\sum_{j\neq i}\phi^n(X_t^{i,N,n} - X_t^{j,N,n})} + b(X_t^{i,N,n})ds, \qquad M_t^{i,N,n} = \int_0^t \sigma(X_s^{i,N,n})dB_s^i$$

D'où,

$$X_t^{i,N,n} = X_0^{i,N,n} + A_t^{i,N,n} + M_t^{i,N,n}.$$

En utilisant le critère de tension (voir l'annexe section 4.6), il est facile de voir que $t \to (X_t^{i,N,n}, A_t^{i,N,n}, M_t^{i,N,n})$ est C-tendue.
Soit $(X_\cdot^{i,n}, A_\cdot^{i,n}, M_\cdot^{i,n})$ une limite faible de la suite $(X_\cdot^{i,N,n}, A_\cdot^{i,N,n}, M_\cdot^{i,N,n})$. D'après le théorème de représentation de Skorohod (voir l'annexe section 4.8), on a pour chaque $t > 0$,

$$X_t^{i,n} = X_0^{i,n} + A_t^{i,n} + M_t^{i,n}, \qquad (4.4)$$

avec

$$A_t^{i,n} = \int_0^t \Big[\frac{R_s^{i,n}(1)}{R_s^{i,n}(0)} + b(X_s^{i,n})\Big]ds \qquad \text{et} \qquad M_t^{i,n} = \int_0^t \sigma(X_s^{i,n})dB_s^i.$$

Il nous reste à montrer que

$$R_t^{i,n}(1) = \int\int v(y)\phi^n(X_t^{i,n} - z)\rho_{0,t}^n(dy, dz) \qquad (4.5)$$

et

$$R_t^{i,n}(0) = \int \phi^n(X_t^{i,n} - z)\rho_t^n(dz).$$

Étape 1 :

$$E[|R_t^{1,n}(1) - \frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{1,n} - X_t^{j,n})|] \leq C(n, J)$$

et

$$E[|R_t^{1,n}(0) - \frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J}\phi^n(X_t^{1,n} - X_t^{j,n})|] \leq C(n,J)$$

avec $\lim_{J\to\infty} C(n,J) = 0$.
En effet, $(X_t^{i,n,K}, i \geq 1)$ est symétrique, d'où pour $J < K$,

$$\begin{aligned}
&E\Big[\Big|\frac{1}{J-1}\sum_{j=2}^{J} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{j,n,K}) - \frac{1}{K-1}\sum_{j=2}^{K} v(X_0^j)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{j,n,K})\Big|^2\Big] \\
&= \frac{1}{(J-1)^2(K-1)^2}\Big[\big((K-1)^2(J-1) + (J-1)^2(K-1) \\
&- 2(J-1)(K-1)(J-2)\big)E\big[v(X_0^2)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{2,n,K})\big]^2 \\
&+ \big((K-1)^2(J-2)(J-3) - 2(J-1)(K-1)(J-2)(K-3)\big) \\
&+ (J-1)^2(K-2)(K-3)E\big[v(X_0^2)v(X_0^3)\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{2,n,K})\phi^n(X_t^{1,n,K} - X_t^{3,n,K})\big]\Big].
\end{aligned}$$

En faisant tendre $K \to \infty$, on obtient nos deux estimations.
Étape 2 :
Nous allons utiliser la loi forte des grands nombres de la façon suivante.
On note $\mathcal{X} = C([0,T], \mathbb{R}^d)$. Il est clair que pour chaque (i,n) le processus $(X^{i,n}) \in \mathcal{X}$ et pour chaque N, $(X^{1,n}, ..., X^{N,n})$ et $(X^{i_1,n}, ..., X^{i_N,n})$ ont la même loi pour tout $1 \leq i_1 < ... < i_N$.
Soit $\pi : \mathbb{N}_* \to \mathbb{N}_*$ une bijection qui permute un nombre fini d'éléments. Soit Π l'ensemble de ces permutations. Nous désignons par $\mathcal{B}^\infty$ l'ensemble des boréliens de $\mathcal{X}^\infty$ et $X = (X^{i,n} : i \geq 1)$.
On note $\pi X = (X^{\pi(i),n} : i \geq 1)$. la tribu

$$\mathcal{S} = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}^\infty, P[X^{-1}(B)\Delta(\pi X)^{-1}(B)] = 0, \quad \forall \pi \in \Pi\}$$

est appelé l'ensemble des événements permutables de $\mathcal{X}^\infty$.

D'après le lemme 2.3.1 du chapitre 1 on peut appliquer la loi forte des grands nombre et on obtient

$$\frac{1}{J-1}\sum_{j\neq i}^{J} v(X_0^j)\phi^n(x - X_t^{j,n}) \longrightarrow \int\int v(y)\phi^n(x-z)\rho_{0,t}^n(dy,dz)$$

et

$$\frac{1}{J-1}\sum_{j\neq i}^{J} \phi^n(x - X_t^{j,n}) \longrightarrow \int\int \phi^n(x-z)\rho_t^n(dz).$$

On en déduit (4.5) en tenant compte de la première étape. Finalement pour chaque (i,n) fixé, on a

$$X_t^{i,n} = X_0^{i,n} + \int_0^t \Big(\frac{\int\int v(y)\phi^n(X_s^{i,n} - z)\rho_{0,s}^n(dy,dz)}{\int \phi^n(X_s^{i,n} - z)\rho_s^n(dz)} + b(X_s^{i,n})\Big)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s^{i,n})dB_s^i.$$

Nous allons tendre n vers l'infini pour chaque i fixé.
D'après le critère de tension $X^{i,n}_.$ est C-tendu. Si X^i est une limite de $X^{i,n}$ lorsque $n \to \infty$, alors il existe un processus b_* adapté tel que

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b_*(s)ds + \int_0^t \sigma(X_s^i)dB_s^i \quad \forall t > 0.$$

Le travail qui reste est d'identifier b_*.

4.2.2 Deuxième étape : identification de la dérive.

4.2.1 Lemme ([26], Chapitre 3)
On suppose que $a_0^i(x,t), a_{ij}(x,t), \nabla_x a_{ij}(x,t) \in L^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^d)$. *L'équation parabolique*

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x_j}(a_{ij}u) - div(a_0 u),$$

avec $u_0 \in L^2(\mathbf{R}^d, dx)$, *a une unique solution dans* $L^2([0,T], H^1)$ *où* $H^1 = \{f : f, \nabla f \in L^2(\mathbf{R}^d, dx)\}$. *De plus* $\forall K > 0$, $\int_0^T |\int_{[|z|\le K]} u(t+\eta, z) - u(t,z)dz|dt \to 0$ *lorsque* $\eta \to 0$.

Maintenant, nous allons montrer que $b_*(X_s) = E[v(X_0)|X_s] + b(X_s)$. La preuve est similaire à celle qu'on a donnée dans le chapitre 1. Mais il y a une difficulté supplémentaire. Afin d'illustrer cette difficulté , nous allons refaire la preuve.
Soit v_i la ième composante de v et v_i^+ sa partie positive. Soient $T_2 > T_1 > 0$ et

$$f_{n,i}^+ : (x,t) \to C \int\int v_i^+(y)\phi^n(x-z)\rho_{0,t}^n(dy,dz)\delta(t),$$

où $C^{-1} = (T_2 - T_1)\int v_i^+(y)\rho_0(dy)$ et $\delta(t) = 1_{[T_1,T_2]}(t)$.
La fonction $f_{n,i}^+$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$. Par conséquent la suite $(f_{n,i}^+, n > 0)$ vérifié la condition i) du lemme 2.3.2.
La convergence faible de $\rho_{0,t}^n$ vers $\rho_{0,t}(dy,dz)$ entraîne la condition iii) du lemme. En effet X_t a une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, alors la mesure $\int v_i^+(y)\rho_{0,t}(dy,dx)$ a aussi une densité notée $\int v_i^+(y)\rho_{0,t}(dy,x)$. Par conséquent, si

$$f_i^+(x,t) = C\int v_i^+(y)\rho_{0,t}(dy,x)\delta(t),$$

alors

$$\int\int f_{n,i}^+(x,t)\psi(x,t)dxdt \to \int\int f_i^+(x,t)\psi(x,t)dxdt,$$

pour $\psi \in C_b(\mathbb{R}^{d+1})$.
Maintenant, il nous reste à montrer que $(f_{n,i}^+, f_i^+)$ vérifient l'hypothèse ii) du lemme (2.3.2 chapitre 1).
Soient h, η deux réels positifs, et $p^n(s,x,t,y)$ les probabilités de transition du processus

de Markov $X^{i,n}$.
On a

$$\int\int |f^+_{n,i}(x+h,t+\eta)-f^+_{n,i}(x,t)|dx\ dt$$
$$= C[\int\int|\int\int v_1^+(y)\phi^n(x+h-z)\rho_0(dy)p^n(0,y;t+\eta,z)\delta(t+\eta)$$
$$-\phi^n(x-z)p^n(0,y;t,z)\rho_0(dy)dz\delta(t)|dxdt$$
$$\leq I_1+I_2,$$

avec

$$I_1 = C[\int\int|\int\int v_i^+(y)[\phi^n(x+h-z)-\phi^n(x-z)]\rho_0(dy)p^n(0,y;t+\eta,z)dz|\delta(t+\eta)dxdt,$$

et

$$I_2 = C[\int_0^T\int|\int\int v_i^+(y)\phi^n(x-z)\rho_0(dy)[\delta(t+\eta)p^n(0,y;t+\eta,z)-\delta(t)p^n(0,y;t,z)]dz|dxdt.$$

Nous allons montrer que $I_1, I_2 \to 0$ uniformément par rapport à n.
Pour le terme I_1, on a

$$I_1 = C[\int\int|\int\int v_i^+(y)\phi^n(z)\rho_0(dy)[p^n(0,y;t+\eta,z+x+h)-p^n(0,y;t+\eta,z+x)]dz|$$
$$\delta(t+\eta)dxdt.$$

On déduit, du lemme 2.3.3, qu'il existe une fonction Φ qui dépend de d, T_2, $\|v\|_\infty$ telle que

$$I_1 \leq C\|v_i^+\|_\infty\Phi(h)\to 0.$$

Pour I_2, il suffit de montrer que

$$I_3 = \sup_n\int_{T_1}^{T_2}\int|\int\int v_i^+(y)\phi^n(x-z)\rho_0(dy)[p^n(0,y;t+\eta,z)-p^n(0,y;t,z)]dz|dxdt,$$

converge vers 0 lorsque $\eta\to 0$.
Pour chaque $K>0$, le terme I_3 peut s'écrire sous la forme de la somme de deux termes I_4 et I_5 où

$$I_4 = \sup_n\int_{T_1}^{T_2}\int|\int\int_{[|z|\leq K]} v_i^+(y)\phi^n(x-z)\rho_0(dy)[p^n(0,y;t+\eta,z)-p^n(0,y;t,z)]\ dz|dx\ dt,$$

et

$$I_5 = \sup_n\int_{T_1}^{T_2}\int|\int\int_{[|z|>K]} v_i^+(y)\phi^n(x-z)\rho_0(dy)[p^n(0,y;t+\eta,z)-p^n(0,y;t,z)]dz|dxdt.$$

Le terme

$$I_4 \leq \int_{T_1}^{T_2} |\int_{[|z|\leq K]} w(t+\eta,z) - w(t,z)dz|dt,$$

ici

$$w(t,z) = \int v_i^+(y)\rho_0(dy)p^n(0,y,t,z).$$

D'où $t \to w(t)$ est la solution faible de l'équation parabolique

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \partial^2_{x_i x j}(a_{ij}(x)w(t)) - div(D^n(x,t)w(t)),$$

où

$$D^n(x) = b(x) + \frac{\int\int v(y)\phi^n(x-z)\rho^n_{0,t}(y,z)dydz}{\int \phi^n(x-z)\rho^n_t(z)dz}.$$

D'après le lemme 4.2.1, la fonction

$$t \to \int_{[|z|\leq K]} w(t,z)dz = \langle w(t), 1_{[|z|\leq K]}\rangle_{H^1,H^{-1}}$$

est dérivable. En appliquant le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\int_{T_1}^{T_2} |\int_{[|z|\leq K]} w(t+\eta,z) - w(t,z)dz|dt \to 0 \quad \text{lorsque} \quad \eta \to 0.$$

Pour le terme I_5, on a

$$I_5 \leq 2\|v_i^+\|_\infty \sup_{t\in[T_1,T_2+1]} \int \rho_0(dy)P(|X_t^y| \geq K),$$

où

$$X_t^y = y + \int_0^t D^n(s,X_s^y)ds + \int_0^t \sigma(X_s^y)dB_s.$$

La condition D^n uniformement borné, entraîne

$$P(|X_t^y| \geq K) \leq P(|\int_0^t \sigma(X_s^y)dB_s| \geq K/2) + P(|y| + t\|D^n\|_\infty \geq K/2).$$

D'où $\int P(|X_t^y| \geq K)\rho_0(dy) \to 0$ lorsque $K \to +\infty$ uniformément pour $t \in (T_1, T_2+1)$, $n > 1$.
Finalement $I_2 \to 0$. On en conclut que $f^+_{n,i} \to f^+_i$ dans $L^1(\mathbb{R}^{d+1})$. Donc on peut supposer que $f^+_{n,i}(x,t) \to f^+_i(x,t)$ $dxdt$-presque partout.
On en déduit que

$$\int\int v(y)\phi^n(x-z)\rho^n_{0,t}(dy,dz) \to \int v(y)\rho_{0,t}(dy,x) \quad \text{presque partout},$$

De la même manière on démontre que

$$\int \phi^n(x-z)\rho_t^n(dz) \to \rho_t(x) \qquad \text{presque partout.}$$

d'où l'identification

$$b_*(x,t) = b(x) + \frac{\int v(y)\rho_{0,t}(dy,x)}{\rho_t(x)}.$$

4.3 Unicité de la solution.

La preuve de l'unicté est basée sur les lemmes suivant.

4.3.1 Lemme ([15],[27],[19])

1) Pour chaque $T > 0$, il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que

$$t\sum_{i,j=1}^{d} |\partial^2_{x_i x_j} G(t,x,y)| + t^{1/2}\sum_{i=1}^{d} |\partial_{x_i} G(t,x,y)|$$

$$+G(t,x,y) \le c_1 t^{-d/2} \exp(-c_2 \frac{|x-y|^2}{2t})$$

2) Les fonctions $\partial_{y_j} G(t,x,y), \partial^2_{x_i y_j} G(t,x,y)$ existent et elles sont continues sur $(0,+\infty)\times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$. En plus pour tout $T > 0$, il existe $c_1, c_2 > 0$ tels que

$$t\sum_{i,j=1}^{d} |\partial^2_{x_i y_j} G(t,x,y)| + t^{1/2}\sum_{i=1}^{d} |\partial_{y_i} G(t,x,y)| \le c_1 t^{-d/2} \exp(-c_2 \frac{|x-y|^2}{2t}).$$

4.3.2 Lemme

Soit $G(t,x,y)$ les densités de probabilité de transition du processus de Markov $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$.

On pose

$$\lambda_g = \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \inf_{|\eta|=1} \langle g(x)\eta, \eta\rangle \qquad \text{et} \quad \Lambda_g = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{|\eta|=1} \langle g(x)\eta, \eta\rangle.$$

1) Si $2\lambda_g > \Lambda_g$, alors il existe $T > 0$ et $c_T > 0$ tels que

$$|\partial_x G(t,x,y)| \le \frac{c_T}{\sqrt{t}} G(2t,x,y) \quad \forall\, 0 < t \le T, x, y \in \mathbf{R^d}. \tag{4.6}$$

2) Si $2\lambda_g^2 > \Lambda_g^2$, alors (4.6) est vérifié pour tout T.

4.3.3 Lemme

On suppose que pour tout $0 < t < T$, il existe $c > 0$ tel que

$$|\nabla_x G(t,x,y)| \le ct^{-1/2} G(2t,x,y) \tag{4.7}$$

quelque soit $x, y \in \mathbb{R}^d$.
Soit $B : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. Soit $t \in [0,T] \to \rho_t \in M(\mathbb{R}^d)$ solution de l'équation,

$$\int f(t,x)\rho_t(dx) - \int f(0,x)\rho_0(dx) \tag{4.8}$$

$$= \int_0^t \int \Big[B(x,s)\nabla f(s,x) + Lf(x) + \partial_s f(s,x)\Big]\rho_s(dx)ds, \tag{4.9}$$

pour tout $f \in C_b^{1,2}([0,t]\times\mathbb{R}^d)$ et tout $t > 0$. Alors
1)$\forall t > 0$, $\rho_t(dx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ de densité $\rho_t(x)$,
2) Il existe c une constante qui dépend uniquement de d, $\|D\|_\infty$, T telle que

$$\begin{aligned}
&a)\ \ \|\rho_t(x)\|_\infty \le c(t^{-d/2}+1), \quad \forall t \in]0,T]\\
&b)\ \ |\rho_t(x)-\rho_s(x)| \le c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1)\ \ |t-s|^{1/5}, \quad \forall s,t \in]0,T]\\
&c)\ \ |\rho_t(x)-\rho_t(y)| \le c(t^{-(d+1)/2}+1)\ \ |x-y|^{1/2}. \ \ \forall t \in]0,T]
\end{aligned}$$

4.3.4 Théorème (A. Dermoune, S. Filali 2004 [10])
On suppose que $\rho_0(dx) = \rho_0(x)dx$, et $\rho_0 \in L^2(\mathbf{R^d}, dx)$.
1) Sous la première condition du lemme 4.3.2, le système $\mathcal{S}(a,b)$ a une unique solution faible dans l'espace $\mathcal{U}_{||v||_\infty} \times C([0,T], M(\mathbf{R^d}))$ pour T petit.
2) Sous la deuxième condition du lemme 4.3.2, le système $\mathcal{S}(a,b)$ a une unique solution faible dans $\mathcal{U}_{||v||_\infty} \times C(\mathbf{R}_+, M(\mathbf{R^d}))$.

4.3.1 Preuve de l'unicité

La preuve ressemble à celle donnée dans le chapitre 1, mais il faut utiliser le noyau $G(t,x,y)$ à la place du noyau gaussien. Ceci complique un peu la preuve.
Soit $(\rho(x,t)dx, u(x,t) : t > 0)$ une solution faible du système $S(a,b)$ et de condition initiale (ρ_0, v) ayant la représentation suivante :

$$q_i(x,t) := u_i(x,t)\rho(x,t) = \int v_i(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy, \tag{4.10}$$

où $p(0,y;t,x)$ est la solution fondamentale de l'équation parabolique

$$\partial_t(\rho) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(b+u)\rho = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_i x_j}(a_{ij}\rho).$$

Nous allons montrer qu'une telle solution est unique.
Soit $q_0(x,t) = q_0(x,t,+) = q_0(x,t,-) = \rho(x,t)$,

$$q_i(x,t,+) = \int v_i^+(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy,$$

et

$$q_i(x,t,-) = \int v_i^-(y)\rho_0(y)p(0,y;t,x)dy.$$

Ainsi $q_i(x,t) = q_i(x,t,+) - q_i(x,t,-)$. Pour $\varepsilon = +,-$ et $1 \leq i \leq d$ si on pose $\frac{1}{c_i^\varepsilon} = \int v_i^\varepsilon(y)\rho_0(dy)$, alors $(t \to c_i^\varepsilon q_i(\cdot,t,\varepsilon) := m(\cdot,t))$ est une famille de densités de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ solution de

$$\partial_t(m) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(F(q)+b)\ m = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_ix_j}(a_{ij}m), \tag{4.11}$$

où

$$F(q) = \frac{1}{q_0(x,t)}(q_1(x,t),...,q_d(x,t)).$$

D'après le lemme 4.3.3, il existe une constante c qui dépend uniquement de $\|v\|_\infty$ et d telle que pour $i = 0,...,d$, $\varepsilon = +,-$

$$\|q_i(.,t,\varepsilon)\|_\infty \leq c(t^{-d/2}+1),$$

$$|q_i(y,t,\varepsilon) - q_i(y,s,\varepsilon)| \leq c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1) \quad |t-s|^{1/5},$$
$$|q_i(y,t,\varepsilon) - q_i(y',t,\varepsilon)| \leq c(t^{-(d+1)/2}+1) \quad |x-y|^{1/2}.$$

Nous allons maintenant considérer $q = (q_0(x,t), q_1(x,t,+), q_1(x,t,-), ..., q_d(x,t,+), q_d(x,t,-)) := (q_i(\varepsilon) : 0 \leq i \leq d, \varepsilon = +,-)$, solution faible du système :

$$\begin{cases} \partial_t(q_i(\varepsilon)) + \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}(q_i(\varepsilon)F(q)+b) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \partial^2_{x_ix_j}(a_{ij}q_i(\varepsilon)) \\ \forall 1 \leq i \leq d \quad, \varepsilon = +,- \\ \ q_i(\varepsilon,dx,t) \to q_i(\varepsilon,dx,0) \ \text{ faiblement pour } t \to 0^+ \end{cases}$$

Soit deux solution faibles $(q_i^1, 0 \leq d)$, $(q_i^2, 0 \leq d)$ de $S(a,b)$ avec la même condition initiale ρ_0, v. On se propose de montrer que

$$q_0^1(x,t) = q_0^2(x,t), q_i^1(x,t,+) = q_i^2(x,t,+), q_i^1(x,t,-) = q_i^2(x,t,-) \ \forall\ 1 \leq i \leq d.$$

On a pour tous $t > 0$, $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d \times [0,t])$ et $i = 0,..,d$,

$$\begin{aligned} \int f(t,x)q_i^1(x,t,+)dx - \int f(0,x)q_i^1(dx,0) \\ = \int_0^t \Big(\int \Big[(F(q)+b)\nabla f(s,x) + \partial_s f(s,x)\Big]q_i^1(x,t,+)dxds \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d \int a_{ij}(x)\partial_{x_ix_j}f(s,x)q_i^1(x,t,+)dx\Big)ds. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Soit

$$f_h(s,x) := \int \gamma(y)G(t+h-s,x,y)\ dy$$

avec $\gamma \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $h > 0$. En utilisant l'équation

$$\partial_s G(s,x,y) = \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\partial_{x_i} G(s,x,y) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\partial^2_{x_i x_j} G(s,x,y),$$

on obtient

$$\int f_h(t,x) q_i^1(x,t,+)dx - \int f_h(0,x) q_i^1(dx,0) = \int_0^t \int (F(q^1))\nabla f_h(s,x) q_i^1(x,t,+)dx\ ds$$

et

$$\int f_h(t,x) q_i^2(x,t,+)dx - \int f_h(0,x) q_i^2(dx,0) = \int_0^t \int (F(q^2))\nabla f_h(s,x) q_i^2(x,t,+)dx\ ds.$$

En faisant la différence membre à membre, on obtient

$$\begin{aligned}&\int f_h(t,x)(q_i^1(x,t,+) - q_i^2(x,t,+))dx = \\ &\int_0^t \int \nabla f_h(s,x)(F(q^1)q_i^1 - F(q^2)q_i^2)dx\ ds\end{aligned}$$

En replaçant f_h par son expression et en faisant varier γ, on obtient

$$\begin{aligned}&\int G(h,x,y)(q_i^1(x,t,+) - q_i^2(x,t,+))dx = \\ &\int_0^t \int \nabla_z G(t-s+h,z,y)(F(q^1(z,s)q_i^1(z,s,+) - F(q^2(z,s))q_i^2(z,s,+)dz\ ds\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers 0, on a

$$\begin{aligned}&q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+) = \\ &\int_0^t \int \nabla_z G(t-s,z,y)\Big(F(q^1(z,s)q_i^1(z,s,+) - F(q^2(z,s))q_i^2(z,s,+)\Big)dz\ ds.\end{aligned}$$

L'estimation suivante découle de cette dernière egalité,

$$\begin{aligned}&\int |q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)|G(h,y,x)dy \\ &\leq \int_0^t \int\int \Big|\big[F(q^1(z,s))q_i^1(z,s,+) - F(q^2(x,s))q_i^2(z,t,+)\big]\Big| \\ &\qquad\qquad |\nabla_z G(t-s,z,y)|G(h,y,x)dz\ dy\ ds.\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 4.3.3 et le faite que $q \to q_i(\varepsilon)F(q)$ est lipschitzienne sur le domaine

$$D = \{q \in \mathbb{R}^{2d}\times\mathbb{R}_+ : |q_i(+) \leq \|v\|_\infty q_0,\quad |q_i(-) \leq \|v\|_\infty q_0|,\quad \forall 1 \leq i \leq d\}$$

on a

$$\int |q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)|G(h,x,y)dy$$
$$\leq c \int_0^t \int \Big|q^1(z,s) - q^2(x,s)\Big|(t-s)^{-1/2} G(2(t-s),z,x)|G(h,y,x)dz \ \ ds.$$

La propriété

$$\int G(t,z,y)G(s,y,x)dy = G(t+s,z,x)$$

entraîne

$$\int |q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)|G(h,y,x)dy$$
$$\leq c \int_0^t \int \Big|q^1(z,s) - q^2(z,s)\Big|(t-s)^{-1/2} G(2(t-s)+h,z,x)|dz \ \ ds.$$

On obtient de la même façon, pour $0 \leq i \leq d$, les estimations

$$\int |q_i^1(y,t,-) - q_i^2(y,t,-)|G(h,y,x)dy$$
$$\leq c \int_0^t \int \Big|q^1(z,s) - q^2(z,s)\Big|(t-s)^{-1/2} G(2(t-s)+h,z,x)|dz \ \ ds.$$

On en déduit

$$\int |q^1(y,t) - q^2(y,t)|G(h,y,x)dy$$
$$\leq c \int_0^t \int \int \Big|q^1(z,s) - q^2(z,s)\Big|(t-s)^{-1/2} G(2(t-s)+h,z,y)|dz \ dy \ ds$$

où $|q| = |q_0| + \sum_{1\leq i\leq d} |q_i(+)| + |q_i(-)|$, quelque soit

$$q = (q_0, q_1(+), ..., q_d(+), q_1(-), ..., q_d(-)) \in \mathbb{R}^{2d+1}.$$

Si on pose

$$Q(h,t,x) = \int |q^1(y,t) - q^2(y,t)|G(h,y,x)dy,$$

alors

$$Q(h,t,x) \leq \int_0^t Q(2(t-s)+h,s,x)(t-s)^{-1/2}ds. \qquad (4.13)$$

D'autre part, de l'estimation $G(h,y,x) \leq c\ h^{-d/2}$, on en déduit

$$Q(h,t,x) \leq c\ h^{-d/2}.$$

On insère cette inégalité dans (4.13). On obtient

$$\begin{aligned}
Q(h,t,x) &\leq \int_0^t (t-s)^{-1/2}(2(t-s)+h)^{-d/2}ds \\
&\leq c\Big(\int_0^{t-h}(t-s)^{-(d+1)/2}ds + \int_{t-h}^t (t-s)^{-1/2}h^{-d/2}ds\Big) \\
&\leq c(h^{-(d-1)/2} + \delta_d^1|\log h| + 1).
\end{aligned}$$

On recommence la même opération et on obtient

$$Q(h,t,x) \leq c(h^{-(d-2)/2} + \delta_d^2|\log h| + 1).$$

Finalement, en répétant ce procédé $(d+1)$ fois, on arrive au résultat suivant :

$$Q(h,t,x) \leq c \qquad \text{uniformément pour } h>0, t\in(0,T], x\in\mathbb{R}^d$$

D'autre part

$$\lim_{h\to 0} Q(h,t,x) = |q^1(x,t) - q^2(x,t)|$$

implique

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T]} |q^1(x,t)-q^2(x,t)| < c.$$

En utilisant l'estimation (4.7), nous avons pour $t\in(0,T]$ et $0\leq i\leq d$

$$\begin{aligned}
&\Big|q_i^1(y,t,+) - q_i^2(y,t,+)\Big| \\
&= \Big|\int_0^t\int \nabla_z G(t-s,z,y)(F(q^1(z,s))q_i^1(z,s,+) - F(q^2(z,s)q_i^2(z,s,+)dz\ ds\Big| \\
&\leq c\int_0^t \sup_{z\in\mathbb{R}^d, s\leq T}|q^1(z,s)-q^2(z,s)|(t-s)^{-1/2}ds \\
&\leq c\sup_{z\in\mathbb{R}^d, s\leq T}|q^1(z,s)-q^2(z,s)|\sqrt{T}
\end{aligned}$$

uniformément pour $t\in(0,T]$, $y\in\mathbb{R}^d$. D'où

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T]}|q^1(z,t)-q^2(z,t)| \leq c\sup_{z\in\mathbb{R}^d, v\in(0,T]}|q^1(z,v)-q^2(z,v)|\sqrt{T}.$$

Pour $T' < c^{-2}$, on applique cette inégalité pour $T=T'$ on a

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T']}|q^1(z,t)-q^2(z,t)| = 0.$$

Par itération pour $[T', 2T']$, on arrive enfin au résultat désiré c'est-à-dire

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^d, t\in(0,T]}|q^1(z,t)-q^2(z,t)| = 0 \ \ \forall T>0.$$

Ceci termine la preuve de l'unicité.

Nous terminons ce chapitre par donner la preuve des deux lemmes 4.3.2 et 4.3.3.

Preuve du lemme 4.3.2
Pour obtenir l'inégalité (4.6), il suffit de montrer que
pour tout $T > 0$, il existe $c_T > 0$ tel que pour tous $1 \leq i \leq d$, $0 < t \leq T, x, y \in \mathbf{R}^d$

$$|\partial_{x_i}(\ln(G(t,x,y))|\frac{G(t,x,y)}{G(2t,x,y)} \leq \frac{c_T}{\sqrt{t}}.$$

D'après le théorème 3.1.1 chapitre 2, il suffit de montrer que

$$I_b(t,x,y)^{1/2}\frac{G(t,x,y)}{G(2t,x,y)} \leq c_T \quad \forall\, 0 < t \leq T, x, y \in \mathbf{R}^d \tag{4.14}$$

On va donner tout d'abord une estimation de $I_b(t,x,y)$ par $I_0(t,x,y)$. Nous avons

$$\begin{aligned} g_{ij}(\varphi(t))(\dot\varphi(t) - b(\varphi(t))_i(\dot\varphi(t) - b(\varphi(t))_j &= g_{ij}(\varphi(t))\dot\varphi_i(t)\dot\varphi_j(t) - g_{ij}(\varphi(t))\dot\varphi_i(t)b_j(\varphi(t)) \\ &+ g_{ij}(\varphi(t))b_i(\varphi(t))b_j(\varphi(t)). \end{aligned}$$

En utilisant cette égalité et l'inégalité de Cauchy-schwarz, on a

$$I_0(t,x,y) - ||b||_\infty\sqrt{t}I_0^{1/2}(t,x,y) - \Lambda_g t||b||_\infty^2 \leq$$

$$I_b(t,x,y) \leq I_0(t,x,y) + ||b||_\infty\sqrt{t}I_0^{1/2}(t,x,y) + \Lambda_g t||b||_\infty^2.$$

Maintenant, on rappelle le résultat élémentaire suivant : pour $\delta > 0$ il existe $c(\delta) > 0$ tel que $\alpha^{1/2} \leq \delta\alpha + c(\delta)$ pour tout $\alpha > 0$. En utilisant ce résultat $\forall \varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tels que

$$(1-\varepsilon)I_0(t,x,y) - ct \leq I_b(t,x,y) \leq (1+\varepsilon)I_0(t,x,y) + ct$$

Par conséquent, en utilisant de nouveau le théorème 3.1.1 du chapitre 2, on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{det\ a(y)}(2\pi t)^{d/2}}k_2(t)\exp(-c_2(t)(1+\varepsilon)I_0(t,x,y)) \leq G(t,x,y) \tag{4.15}$$

$$G(t,x,y) \leq \frac{1}{\sqrt{det\ a(y)}(2\pi t)^{d/2}}k_1(t)\exp(-c_1(t)[(1-\varepsilon)I_0(t,x,y)]) \tag{4.16}$$

D'autre part, un calcul facile donne

$$I_0(2t,x,y) = \frac{1}{2}I_0(t,x,y). \tag{4.17}$$

Donc, de (4.17), (4.15), (4.16) une condition suffisante pour obtenir (4.14) est

$$I_b(t,x,y)^{1/2}\exp([c_2(2t)(1+\varepsilon)I_0(2t,x,y) - c_1(t)(1-\varepsilon)I_0(t,x,y)]) < c$$

pour tous $t < T, x, y \in \mathbf{R}^d$.
Ce qui est équivalent à montrer l'existence de $k_T > 0$, telle que

$$[c_2(2t) - 2c_1(t)] < -k_T < 0 \tag{4.18}$$

pour tous $0 < t \leq T, x, y \in \mathbf{R}^d$.

D'après le théorème 3.1.2 du chapitre précèdent

$$c_1(t) = \delta(t) + \lambda_g \Lambda_g^{-1} \tag{4.19}$$

et

$$c_2(t) = 1 + c(||a||_\infty, |g_{x_i x_j}|_\infty)\lambda_g^{-1} t \tag{4.20}$$

où pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\sup_{t\in[0,T]} \delta(t, \varepsilon) \leq \varepsilon$ Il s'en suit que (4.18) est vérifiée lorsque T est petit et $2\lambda_g \Lambda_g^{-1} > 1$, ceci termine la démonstration de la première partie du lemme.

Pour la preuve de la deuxième partie du lemme, on utilise la deuxième expression de la constante $c_2(t)$ c'est-à-dire

$$c_2(t) = \Lambda_g \lambda_g^{-1} + \delta(t, \varepsilon). \tag{4.21}$$

où pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\sup_{t\in[0,T]} \delta(t, \varepsilon) \leq \varepsilon$, d'où

$$\lambda_g \Lambda_g^{-1} - \frac{\lambda_g^{-1} \Lambda_g}{2} > 0.$$

Ceci termine la preuve du lemme 4.3.2.

Preuve du lemme 4.3.3

Nous notons comme dans la preuve du théorème 4.3.4

$$f_h(s, x) = \int \gamma(y) G(t - s + h, x, y)\, dy \quad \forall \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$$

. 1) Montrons le point a) du lemme :

D'après (4.9) et $\partial_x G(t, x, y) = LG(t, x, y)$, nous avons

$$\int f_h(t, x)\rho_t(dx) - \int f_h(h, x)\rho_h(dx) = \int_h^t \int B(x, s)\nabla f_h(s, x)\rho_s(dx)ds. \tag{4.22}$$

D'où en utilisant de nouveau lemme 4.3.3

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int f_h(t,x)\rho_t(dx)\Big| = \Big|\int\int G(h,x,y)\gamma(y)\rho_t(dx)dy\Big| \\
&\le \int\int G(t+h,x,y)|\gamma(y)|\rho_0(dx)dy \\
&+ c\int_0^t\int\int |\nabla_x G(t+h-s,x,y)||\gamma(y)|\rho_s(dx)dyds \\
&\le c\int\int |\gamma(y)|\ (t+h)^{-d/2}\ \exp(-c_2\frac{|x-y|^2}{t+h})\rho_0(dx)dy \\
&+ c\int_0^t\int\int |\phi(y)||\nabla_x G(t-s+h,x,y)|\rho_s(dx)dyds \\
&\le c\Big[(t-s)^{-d/2}\|\gamma\|_1 + \int_0^t\int\int (t+h-s)^{-1/2}G(2(t-s+h),x,y)|\gamma(y)|dy\rho_s(dx)ds\Big].
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Ainsi, en appliquant le lemme 4.3.1, on a la majoration suivante :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t\int (t+h-s)^{-1/2}G(2(t-s+h),x,y)|\gamma(y)|dy\rho_s(dx)ds \\
&\le c\int_0^t\int (t+h-s)^{-1/2}(t+h-s)^{-d/2}|\gamma(y)|dy\rho_s(dx)ds \\
&\le c\|\gamma\|_1\int_0^t (t+h-s)^{-(d+1)/2}ds \\
&\le c\|\gamma\|_1[h^{-(d-1)/2} + \delta_d^1|ln(h)|\ ].
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\Big|\int\int G(h,x,y)\phi(y)\rho_t(dx)dy\Big| \le c\|\phi\|_1[t^{-d/2} + h^{-(d-1)/2} + \delta_d^1|ln(h)| + 1\ ]. \tag{4.24}
$$

En insérant cette majoration dans (4.23) on trouve,

$$
\begin{aligned}
\Big|\int\int \gamma(y)G(h,x,y)\rho_t(dx)dy\Big| &\le c\|\gamma\|_1\Big[(t+h)^{-d/2} + \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}((t+h-s)^{-(d-1)/2} \\
&+ (s+2(t+h-s))^{-d/2} + \delta_d^1|ln(t+h-s)| + 1)ds \\
&\le c\|\gamma\|_1[(t+h)^{-d/2} + h^{-(d-2)/2} + \delta_d^2|ln(h)| + 1\Big].
\end{aligned}
$$

L'itération de la $d^{\text{ème}}$ étape donne

$$
\int\int |\gamma(y)|G(h,x,y)\rho_t(dx)dy \le c\|\phi\|_1\big[t^{-d/2} + |ln(h)| + 1\big].
$$

En itérant de nouveau, on obtient

$$\int\int|\gamma(y)|G(h,x,y)\rho_t(dx)dy \leq c\|\phi\|_1[t^{-d/2}$$
$$+\int_0^t (t+h-s)^{-1/2}[|ln(t+h-s)|+(t+2(t+h-s))^{-d/2}+1]ds$$
$$\leq c\|\gamma\|_1[t^{-d/2}+I_1+I_2],$$

ici

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}[ln(t+h-s)+1]\ ds \\ &= [-2(t+h-s)^{1/2}(ln(t+h-s)+1)]_0^t - 2\int_0^t (t+h-s)^{-1/2}ds \\ &\leq 2(t+h)^{1/2}ln(t+h) - 2h^{1/2}ln(h) - 4((t+h)^{1/2}-h^{1/2}) \\ &\leq c \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}(t+2(t+h-s))^{-d/2}\ ds \\ &\leq ct^{-d/2}. \end{aligned}$$

D'où uniformément par rapport à h

$$\int\int|\gamma(y)|G(h,x,y)dy\rho_t(dx) \leq c(t^{-d/2}+1).$$

et

$$\|\int G(h,x,.)\rho_t(dx)\|_\infty \leq c(t^{-d/2}+1)$$

car $\int G(h,x,y)\rho_t(dy)$ tend faiblement vers $\rho_t(dx)$ lorsque $h \to 0_+$.
Maintenant nous allons obtenir l'estimation sur $\rho_t(dx)$.
Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $\lambda(A) < \infty$.

La convergence faible nous donne

$$\begin{aligned} \langle\rho_t(dx), 1_A\rangle &\leq \liminf_{h\to 0}\langle\int G(h,.,y)\rho_t(dy), 1_A\rangle \\ &= \liminf_{h\to 0}\langle\rho_t(dx), \int G(h,.,y)dy\rangle \\ &\leq c(t^{-d/2}+1)\lambda(A). \end{aligned}$$

Ainsi $\rho_t(dx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de lebesgue et de densité $\rho_t(x)$ qui vérifie pour tout $t \in (0,T]$

$$\|\rho_t(.)\|_\infty \leq c(t^{-d/2}+1).$$

Sinon, soit $\varepsilon > 0$ tel que

$$B_{\varepsilon,t} = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho_t(x) > c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)\}.$$

Si $\lambda(B_{\varepsilon,t}) > 0$, alors il existe un ouvert A tel que

$$B_{\varepsilon,t} \subset A, \qquad \lambda(A \backslash B_{\varepsilon,t}) \leq \lambda(A)\varepsilon/2$$

or

$$\begin{aligned}
\lambda(A)c(t^{-d/2}+1) &< \lambda(A)c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon/2)\\
&= c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)(\lambda(A)-\lambda(A)/2)\\
&\leq c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)(\lambda(A)-\lambda(A\backslash B_{\varepsilon,t}))\\
&= c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)\lambda(B_{\varepsilon,t})\\
&\leq \int_{B_{\varepsilon,t}} \rho_t(x)dx \leq \int_A \rho_t(x)dx\\
&\leq \lambda(A)c(t^{-d/2}+1).
\end{aligned}$$

Ceci est absurde.
Ce qui achève la preuve du premier point du lemme.
2) Prouvons maintenant le point b).
Soit $p = t/2$, $y, y^{'} \in \mathbb{R}^d$ avec $\delta = |y - y^{'}| < 1 \wedge t$, on a d'après (4.22),

$$\begin{aligned}
&|\int \rho_t(x)G(h,x,y)dx - \int \rho_t(x)G(h,x,y')dx|^2\\
&= |\int \rho_p(x)[G(t-p+h,x,y) - G(t-p+h,x,y')]dx\\
&+ \int_p^t \int \rho_s(x)B(x,s)[\nabla_x G(t-s+h,x,y) - \nabla_x G(t-s+h,x,y')]dxds|^2\\
&\leq 3|\int \rho_p(x)[G(t-p+h,x,y) - G(t-p+h,x,y')]dx|^2\\
&+ 3|\int_p^{t-\delta} \int \rho_s(x)B(x,s)[\nabla_x G(t-s+h,x,y) - \nabla_x G(t-s+h,x,y')]dxds|^2\\
&+ 3|\int_{t-\delta}^t \int \rho_s(x)B(x,s)[\nabla_x G(t-s+h,x,y) - \nabla_x G(t-s+h,x,y')]dxds|^2
\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant les estimations de $G(t,x,y)$ (voir le lemme 4.3.1) et l'estimation de ρ donnée dans a), on a

$$|\int \rho_p(x)[G(t-p+h,x,y) - G(t-p+h,x,y')]dx|^2 \leq c(t^{-(d+1)/2}+1)^2|y-y'|^2.$$

Il nous reste à estimer les deux autres termes.
En utilisant l'estimation de $\partial^2_{x_ix_j}G(t,x,y)$ (voir lemme 4.3.1) et l'estimation $\|\rho_t(x)\|_\infty \leq c(t^{-d/2}+1)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&|\int_p^{t-\delta}\int \rho_s(x)B(x,s)[\nabla_x G(t-s+h,x,y)-\nabla_x G(t-s+h,x,y')]dxds|^2\\
&\leq c\Big((t^{-(d+1)/2}+1)|y-y'|\int_p^{t-\delta}(t+h-s)^{-1}ds\Big)^2
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&|\int_{t-\delta}^{t}\int \rho_s(x)B(x,s)[\nabla_x G(t-s+h,x,y)-\nabla_x G(t-s+h,x;t,y')]dxds|^2\\
&\leq c\Big(\int_{t-\delta}^{t}\int|\rho_s(x)\nabla_x G(t-s+h,x,y)|+\int_{t-\delta}^{t}\int|\rho_s(x)\nabla_x G(t-s+h,x,y')]dxds|\Big)^2\\
&\leq c\Big((t^{-(d+1)/2}+1)\int_{t-\delta}^{t}(t+h-s)^{-1/2}ds\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Par conséquent

$$
\begin{aligned}
&|\int \rho_t(x)G(h,x,y)dx-\int \rho_t(x)G(h,x,y')dx|^2\\
&\leq c(t^{-(d+1)/2}+1)(|y-y'|^2+|y-y'|^2(\int_p^{t-\delta}(t+h-s)^{-1}ds)^2\\
&+(\int_{t-\delta}^{t}(t+h-s)^{-1/2}ds)^2)\\
&\leq c(t^{-(d+1)/2}+1)^2(|y-y'|^2(1+(ln\delta)^2)+\delta)\\
&\leq c(t^{-(d+1)/2}+1)^2|y-y'|.
\end{aligned}
$$

Ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&\int \rho_t(x)G(h,x,y)dx-\int \rho_t(x)G(h,x,y')dx\\
&\leq \Big|\int \rho_t(x)G(h,x,y)dx-\int \rho_t(x)G(h,x,y')dx\Big|\\
&\leq c(t^{-(d+1)/2}+1)|y-y'|^{1/2}.
\end{aligned}
$$

On peut supposer que

$$
\lim_{h\to 0}\int \rho_t(x)G(h,x,y)dx=\rho(y)\quad\text{et}\quad\lim_{h\to 0}\int \rho_t(x)G(h,x,y')dx=\rho(y').
$$

On en déduit

$$
|\rho_t(y)-\rho_t(y')|\leq c(t^{-(d+1)/2}+1)|y-y'|^{1/2}.
$$

Ceci fini la preuve de b).

3) L'estimation c) .

Montrons la dernière estimation, c'est-à-dire

$$|\rho_t(x) - \rho_s(x)| \leq c((t \wedge s)^{-(d+1)/2} + 1) \quad |t - s|^{1/5}. \tag{4.25}$$

Si $0 < s < t$, $h = |t - s|^{4/5}$, on a

$$\begin{aligned}|\rho_t(y) - \rho_s(y)| &\leq |\rho_t(y) - \int \rho_t(x)G(h,x,y)dx| + |\int [\rho_t(x) - \rho_s(x)]G(h,x,y)dx| \\ &+ |\int [\rho_s(x) - \rho_s(y)]G(h,x,y)dx| \leq I_1 + I_2 + I_3,\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}I_1 &= |\rho_t(y) - \int \rho_t(x)G(h,x,y)dx| \\ &\leq c(t^{-(d+1)/2} + 1)| \int |y - x|^{1/2} G(h,x,y)dx| \\ &\leq c(t^{-(d+1)/2} + 1) \int |y - x|^{1/2} h^{-d/2} \exp(-c\frac{|x - y|^2}{2h})dx \\ &\leq c(t^{-(d+1)/2} + 1)h^{1/4}.\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne

$$I_3 \leq c(s^{-(d+1)/2} + 1)h^{1/4}.$$

Pour le terme I_2, on a

$$\begin{aligned}I_2 &= |\int [\rho_t(x) - \rho_s(x)]G(h,x,y)dx| \\ &= \int_s^t \int \rho_r(x)[B(x,r).\nabla_x G(h,x,y) + LG(h,x,y)]dxdr| \\ &\leq c|t - s|(s^{-d/2} + 1)[h^{-1/2} + h^{-1}] \\ &\leq c|t - s|h^{-1}(s^{-(d+1)/2} + 1) \\ &\leq c|t - s|^{1/5}(s^{-(d+1)/2} + 1) \quad \text{par définition de } h.\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve du lemme.

Annexe

Dans cette annexe, nous rappelons quelques résultats importants utilisés dans cette thèse.

4.4 Formule de Itô

Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré muni d'un mouvement brownien (B_t) sur $\mathbb{R}^d$. Un processus X est dit de Itô s'il existe deux processus adaptés u, v tels que

$$X(t) = X_0 + \int_0^t u(s)ds + \int_0^t v(s)dB_s, t \geq 0, \tag{4.26}$$

où X_0 est une variable aléatoire F_0-mesurable.
Pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$, ayant la régularité suivante : f, $\partial_x f$, $\partial_{xx} f$, $\partial_t f$, $\partial_{tx} f$ sont continues. Le processus $f(X_t, t)$ est aussi de Itô et sa différentielle est donnée par

$$df(X_t,t) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} f(B_s, s) dX_s^i + \sum_{1 \leq i,j \leq d} \frac{1}{2} \partial_{x_i x_j} f(X_t, t) dX_t^{(i)} dX_t^{(j)} + \partial_t f(B_t, t) dt, \tag{4.27}$$

avec les règles de calculs suivantes :

$$dB_t^{(i)} dB_t^{(j)} = dt \delta_i^j, \quad dt dB_t^i = 0, \quad \forall i, j.$$

4.5 Équations différentielles stochastiques

4.5.1 Solution forte

4.5.1 Définition
Soit $(\Omega, (\mathcal{F}_t), P)$ un espace probabilisé filtré muni d'un mouvement brownien (B_t) sur $\mathbb{R}^d$. On dit qu'un processus X est solution forte de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt$ sur l'intervalle $[0, T]$, si
1) X est $\mathcal{F}$-adapté
2) Les foctions σ et b vérifient

$$\int_0^T |\sigma(t, X_t)|^2 dt < +\infty \quad \int_0^T |b(t, X_t)| dt < +\infty$$

3) X vérifie :

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + b(t, X_t)dt.$$

Le théorème qui suit donne des conditions suffisantes sur σ et b pour qu'une équation différentielle stochastique admette une solution forte.

4.5.2 Théorème ([37])
On se donne $b : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \to M(n, d)$,($M(n, d)$ est l'espace des matrices (n, d)), deux fonctions mesurables. On suppose que pour tout entier N et pour tout $T > 0$, il existe une constante $K(T, N)$ et $C(T)$ telle que $\forall |x|, |y| \leq N$ et $\forall t \leq T$,

$$|b(x, t) - b(y, t)| \leq K(T, N)|x - y|$$

$$|\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \leq K(T, N)|x - y|$$

et

$$|b(x, t)| + |\sigma(x, t)| \leq C(T)(1 + |x|)$$

Pour tout $(\mathcal{F}_t)$- mouvement brownien (B_t), l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t \;\; \text{avec } X_0 - F_0 \text{ mesurable donnée}$$

a une solution unique dans l'espace des processus adaptés de carré integrable.

4.5.2 Solution faible

4.5.3 Définition
On dit que l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \tag{4.28}$$

a une solution faible de loi initiale μ s'il existe un espace probabilisé filtré$(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbf{P})$ qui satisfait les conditions usuelles, X et B deux semi-martingales continues à valeurs dans $\mathbb{R}^d$:

- *B est un $\{\mathcal{F}_t\}$-mouvement brownien*
- *μ est la loi de X_0*
- *$E\Big(\int_0^t \big[|\sigma(s, X_s)|^2 + |b(s, X_s)|\big] ds\Big) < \infty$ pour tout $t > 0$,*
- *$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s + \int_0^t b(s, X_s)ds \; \forall t \geq 0$*

Le théorème suivant nous donne des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité en loi de la solution faible de l'équation différentielle stochastique (4.28)

4.5.4 Théorème ([31], Théorème 6.4.3)
Soit $b : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ deux fonctions mesurables bornées, on suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\langle \theta, \sigma\sigma^*(x, s)\theta \rangle \geq \lambda |\theta|^2 \quad (s, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \;\; \text{et} \;\; \theta \in \mathbb{R}^d.$$

Alors, il existe une solution faible à l'EDS (4.28), en plus cette solution est unique en loi.

4.6 Critère de tension

On rappelle dans cette section le critère de tension qui se trouve dans Zheng [34]

4.6.1 Théorème
Soit $(X_t^n)_n$ une suite de semimartingales continues avec la décomposition canonique suivante :

$$X_t^n = X_0^n + M_t^n + A_t^n$$

On suppose que $U_t^n = \langle M^n, M^n\rangle_t = \int_0^t u_s^n ds$, $A_t^n = \int_0^t a_s^n ds$ et pour tout $p > 1$, les variables aléatoires $(X_0^n)^p$, $\int_0^1 |u_s^n|^p ds$ et $\int_0^1 |a_s^n|^p ds$ sont uniformement intégrable. Alors la suite $t \to (X_t^n, M_t^n, A_t^n, U_t^n)$ est C-tendue. Chaque limite $(X., M., A., U.)$ vérifie les propriétés suivantes :

i) (A_t) est un processus continu à variation finie, (U_t) est un processus continu croissant et (M_t) est une martingale continue et

$$X_t = X_0 + M_t + A_t \qquad \text{et} \quad \langle M, M\rangle_t = U_t \ \forall t \geq 0.$$

ii) (A_t) et (U_t) sont absolument continues de densités respectives a_s, u_s telles que $E\big[\int_0^1 |a_s|^p ds\big] < \infty$, $E\big[\int_0^1 (u_s)^p ds\big] < \infty$.

4.7 Inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

Nous donnons l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy utile pour trouver les estimations de la densité de X_t dans le chapitre 2.

4.7.1 Proposition ([28])
Soit M une martingale continue, notons $M_t^* = \sup_{s\leq t}(M_s)$. Pour tout $p \in]1, \infty[$, il existe deux constantes c_p et C_p telles que,

$$c_p E\big[< M, M >_t^{p/2} \big] \leq E\big[(M_t^*)^p\big] \leq C_p E\big[< M, M >_t^{p/2} \big]. \tag{4.29}$$

4.8 Théorème de Skorohod

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé sur lequel est défini une suite de variables aléatoires $(X, X_n, n \geq 0)$ à valeurs dans un espace de Banach. On suppose que X_n converge vers X en loi.
Il existe un espace $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ sur lequel on construit une suite $(\tilde{X}, \tilde{X}_n, n \geq 0)$ telle que $(\tilde{X}_n)$ converge presque sûrement vers $\tilde{X}$ et $loi(X, X_n, n \geq 0) = loi(\tilde{X}, \tilde{X}_n, n \geq 0)$.

4.9 Résultat d'Oelshläger

Nous terminons cette annexe par rappeler la preuve d'Oelshläger du résultat suivant :

4.9.1 Théorème
Soit m une fonction mesurable bornée de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}^d$ et $t \geq 0$, et $t \to \rho_t$ solution de l'équation :

$$\int f(t,x)\rho_t(dx) - \int f(0,x)\rho_0(dx)$$
$$= \int_0^t \Big(\int \Big[\sum_{j=1}^d m(x,s)\partial_{x_j} f(s,x) + \partial_s f(s,x) \Big] \rho_s(dx) + \frac{\nu^2}{2} \int \Delta f(s,x)\rho_s(dx) \Big) ds. \tag{4.30}$$

$f \in C_b^{1,2}([0,t] \times \mathbb{R}^d)$. Alors

1)*pour toutt > 0, $\rho_t(dx)$ est absolument continue, de densité $\rho_t(x)$, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$,*
2)*Il existe c une constante qui dépend uniquement de d, $\|m\|_\infty$, T et ν, telle que :*

$$i)\ \|\rho_t(.)\|_\infty \leq c(t^{-d/2} + 1) \quad \forall t \leq T, \tag{4.31}$$
$$ii)\ |\rho_t(x) - \rho_s(x)| \leq c((t \wedge s)^{-(d+1)/2} + 1) \quad |t-s|^{1/5}, \tag{4.32}$$
$$\forall s \leq t \leq T,\ \forall x \in \mathbb{R}^d$$
$$iii)\ |\rho_t(x) - \rho_t(y)| \leq c(t^{-(d+1)/2} + 1) \quad |x-y|^{1/2}\ \forall t \leq T, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d. \tag{4.33}$$

Preuve du théorème :
Nous allons reprendre la preuve de la proposition 3.4 telle qu'elle figure dans [25], en y apportant les quelques modifications nécessaires.
Soit $t \to \rho_t$ solution de (4.30). Pour tous $\gamma \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $t \in [0,T]$ et $h > 0$, la fonction $(x,s) \to (\gamma * \sigma_{t+h-s})(x)$ appartient $C_b^2(\mathbb{R}^d \times [0,t])$.
a. Montrons le point 1) du théorème.
A partir de (4.30) et en appliquant

$$\frac{\partial}{\partial s}\sigma_s - \frac{\nu^2}{2}\Delta\sigma_s = 0,$$

on a l'équation

$$\int \sigma_h * \gamma(x)\rho_t(dx) - \int \sigma_{t+h} * \gamma(x)\rho_0(dx) = \int_0^t \int m(x,s).\nabla\sigma_{t+h-s} * \gamma(x)\rho_s(dx)ds.$$

D'où la majoration suivante en utilisant le lemme 2.3.4 :

$$
\begin{aligned}
&|\int \sigma_h * \gamma(x)\rho_t(dx)| \\
&\leq \int \sigma_{t+h} * |\gamma|(x)\rho_0(dx) + \int_0^t \int |m(x,s).\nabla\sigma_{t+h-s} * \gamma(x)|\rho_s(dx)ds \\
&\leq c_2\Big((t+h)^{-d/2}\|\gamma\|_1 + \int_0^t \int |\sigma_{2(t+h-s)} * |\gamma|(t+h-s)^{-1/2}\rho_s(dx)ds\Big) \qquad (4.34) \\
&\leq c_3\|\gamma\|_1\Big((t+h)^{-d/2} + \int_0^t (t+h-s)^{-(d+1)/2}ds\Big) \\
&\leq c_4\|\gamma\|_1((t+h)^{-d/2} + h^{-(d-1)/2} + \delta_{d,1}|logh| + 1).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\int \sigma_h * |\gamma(x)|\rho_t(dx) \leq c_4\|\gamma\|_1((t+h)^{-d/2} + h^{-(d-1)/2} + \delta_{d,1}|logh| + 1).
$$

Lorsqu'on insère cette inégalité dans l'équation (4.34), on trouve

$$
\begin{aligned}
\int \sigma_h * |\gamma(x)|\rho_t(dx) \leq c_3\Big((t+h)^{-d/2}\|\gamma\|_1 \\
&+ \int_0^t c_2c_4\|\gamma\|_1((s+2(t+h-s))^{-d/2} + (2(t+h-s))^{-(d-1)/2} \\
&+ \delta_{d,1}|log(t+h-s)|(t+h-s)^{-1/2}ds\Big) \\
&\leq c_5\|\gamma\|_1((t+h)^{-d/2} + h^{-(d-2)/2} + \delta_{d,2}|logh| + 1).
\end{aligned}
$$

Ainsi de suite, on obtient à la d-iéme étape :

$$
\int \sigma_h * |\gamma|(x)\rho_t(dx)dy \leq c_6\|\gamma\|_1[(t+h)^{-d/2} + |ln(h)| + 1].
$$

Enfin

$$
\begin{aligned}
\int \sigma_h * |\gamma|(x)\rho_t(dx) &\leq c_7\|\gamma\|_1[(t+h)^{-d/2} + \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}[|ln(t+h-s)| \\
&+ (t+2(t+h-s))^{-d/2} + 1]ds \\
&\leq I_1 + I_2.
\end{aligned}
$$

Or

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}[ln(t+h-s)+1] \\
&= [-2(t+h-s)^{1/2}(ln(t+h-s)+1)]_0^t - 2\int_0^t (t+h-s)^{-1/2}ds \\
&\leq 2(t+h)^{1/2}ln(t+h) - 2h^{1/2}ln(h) - 4((t+h)^{1/2} - h^{1/2}) \\
&\leq c_8
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^t (t+h-s)^{-1/2}(t+2(t+h-s))^{-d/2} \\ &\leq c_9(t+h)^{-d/2}, \end{aligned}$$

d'où

$$|\int \sigma_h * \gamma(x)\rho_t(dx)| \leq c_{10}\|\gamma\|_1(t^{-d/2}+1)$$

uniformément en h, et puisque $\sigma_h * \rho_t$ converge faiblement vers ρ_t lorsque h tend vers 0_+.
On a pour tout ouvert A de $\mathbb{R}^d$ tel que $\lambda(A) < \infty$, λ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \langle \rho_t(dx), 1_A \rangle &\leq \liminf_{h\to 0} \langle \rho_t * \sigma_h, 1_A \rangle \\ &= \liminf_{h\to 0} \langle \rho_t, 1_A * \sigma_h \rangle \\ &\leq c_{11}(t^{-d/2}+1)\lambda(A). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\rho_t(dx)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité $\rho_t(x)$.
b. Prouvons maintenant le point i) du théorème.
On va montrer par l'absurde que $\rho_t(x) \leq c(t^{-d/2}+1)$.
Pour $\varepsilon > 0$, on considère

$$B_{\varepsilon,t} = \{x \in \mathbb{R}^d : \rho_t(x) > c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)\}.$$

On suppose que $\lambda(B_{\varepsilon,t}) > 0$, alors il existe un ouvert A tel que $B_{\varepsilon,t} \subset A$, $\quad \lambda(A \backslash B_{\varepsilon,t}) \leq \lambda(A)\varepsilon/2$, or

$$\begin{aligned} \lambda(A)c(t^{-d/2}+1) &< \lambda(A)c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)(1-\varepsilon/2) \\ &= c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)(\lambda(A)-\lambda(A)/2) \\ &\leq c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)(\lambda(A)-\lambda(A\backslash B_{\varepsilon,t})) \\ &= c(t^{-d/2}+1)(1+\varepsilon)\lambda(B_{\varepsilon,t}) \\ &\leq \int_{B_{\varepsilon,t}} \rho_t(x)dx \leq \int_A \rho_t(x)dx \\ &\leq \lambda(A)c(t^{-d/2}+1). \end{aligned}$$

On aboutit à une contradiction, par suite on peut affirmer (4.31).
c. Prouvons maintenant le point ii).

Pour cela on pose $p = t/2$ et $y, y' \in \mathbb{R}^d$ avec $\delta = |y - y'| < 1 \wedge t$, on a

$$\begin{aligned}
&|\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx|^2 \\
&= |\int \rho_p(x)[\sigma_{t+h-p}(x-y) - \sigma_{t+h-p}(x-y')]dx \\
&+ \int_p^t \int \rho_s(x)b^{'}(x,s)[\nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y) - \nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y')]dxds|^2 \\
&\leq 3\int \rho_p(x)[\sigma_{t+h-p}(x-y) - \sigma_{t+h-p}(x-y')]dx|^2 \\
&+ 3|\int_p^{t-\delta} \int \rho_s(x)b^{'}(x,s)[\nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y) - \nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y')]dxds|^2 \\
&+ 3|\int_{t-\delta}^t \int \rho_s(x)b^{'}(x,s)[\nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y) - \nabla_x\sigma_{t+h-s}(x-y')]dxds|^2.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 2.3.4 on trouve

$$\begin{aligned}
&\int \rho_p(x)[\sigma_{t+h-p}(x-y) - \sigma_{t+h-p}(x-y')]dx|^2 \leq c_{10}\Big(|y-y'|\int \rho_p(x)(t-p)^{-(d+1)/2}dx\Big)^2 \\
&+ \Big(\frac{|x-y'|}{(t+h-s)^{1/2}}\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{4(t+h-s)}\big)\exp\big(-\frac{(x-y')^2}{4(t+h-s)}\big)(2\pi(t+h-s)^{-d/2})\Big)^2 \\
&\leq c_{13}|y-y'|(t^{-(d+1)/2}+1).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&|\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx|^2 \leq c_{12}\Big[|y-y'|^2 \\
&+ |y-y'|^2\Big(\int_p^{t-\delta}(t+h-s)^{-1}ds\Big)^2 + \Big(\int_p^{t-\delta}(t+h-s)^{-1/2}ds\Big)^2\Big](t^{-(d+1)/2}+1) \\
&\leq c_{13}|y-y'|(t^{-(d+1)/2}+1)
\end{aligned}$$

puisque $\sup_{x\geq 0}\; x \quad \exp(-x^2) < +\infty$. D'autre part

$$\lim_{h\to 0}\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx = \rho_t(y) \qquad \text{et} \qquad \lim_{h\to 0}\int \rho_t(x)\sigma_h(x-y')dx = \rho_t(y').$$

Conclusion

$$|\rho_t(y) - \rho_t(y')| \leq c_{14}(t^{-(d+1)/2}+1)|y-y'|^{1/2}.$$

d. On peut maintenant achever la démonstration du théorème.
Montrons la dernière estimation, c'est-à-dire

$$|\rho_t(x) - \rho_s(x)| \leq c((t\wedge s)^{-(d+1)/2}+1) \;\; |t-s|^{1/5}.$$

Pour $0 < s < t$ et $h = |t-s|^{4/5}$, on obtient

$$\begin{aligned}|\rho_t(y) - \rho_s(y)| &\leq |\rho_t(y) - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx| + |\int [\rho_t(x) - \rho_s(x)]\sigma_h(x-y)dx| \\ &+ |\int [\rho_s(x) - \rho_s(y)]\sigma_h(x-y)dx| \\ &\leq I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}I_1 &= |\rho_t(y) - \int \rho_t(x)\sigma_h(x-y)dx| \\ &\leq c_{15}(t^{-(d+1)/2} + 1)|\int |y-x|^{1/2}\sigma_h(x-y)dx| \\ &\leq c_{16}(t^{-(d+1)/2} + 1)h^{1/4}.\end{aligned}$$

En procédant de la même façon, on obtient

$$I_3 \leq c(s^{-(d+1)/2} + 1)h^{1/4}.$$

Passant maintenant au dernier terme,

$$\begin{aligned}I_2 &= |\int [\rho_t(x) - \rho_s(x)]\sigma_h(x-y)dx| \\ &= \int_s^t \int \rho_r(x)[m(x,r).\nabla_x \sigma_h(x-y) + \frac{1}{2}\Delta_x \sigma_h(x-y)dxdr|.\end{aligned}$$

Donc, d'après le point i) du théorème :

$$\begin{aligned}I_2 \leq c(s^{-d/2} + 1) \int_s^t \int \Big(\frac{|x-y|}{h} + \frac{1}{2}\Big(\frac{(x-y)^2}{h^2} + \frac{d}{h}\Big)\Big) \\ \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{2\nu^2 h}\Big)(2\pi\nu^2 h)^{-d/2} du \\ \leq c(s^{-d/2} + 1)||t-s|[h^{-1/2} + h^{-1}](2\pi\nu^2 h)^{-d/2} \int \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4\nu^2 h}\Big)dx \\ \leq c|t-s|h^{-1}(s^{-(d+1)/2} + 1) \\ \leq c|t-s|^{1/5}(s^{-(d+1)/2} + 1) \qquad \text{par définition de } h.\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Aronson, D. G. : Bounds on the fundamental solution of parabolic equation. Bull. Amer. Math. Soc. 73, (1967), 890-896.

[2] R. K. Agarwal and D.W. Halt :A modified CUSP scheme in wave/particle split from for unstructured grid Euler flows. (In 'Frontiers of computational Fluif Dynamics, D.A. Caughey and M.M. Hafos, eds., Wiley) 1994

[3] R. Baraille, G. Bourdin F. Dubois, A. Y. Le Roux : Une version à pas fractionnaires du schèma de Godunov pour l'hydrodynamique. C. R. Acad. Sci. Paris, t.314 ; Vol 1. 1992 ; pp 147-152.

[4] Bouchut, F. James :Differentiability with respect to initial data for a scalar conservation law. International Series Num. Math. 129, Birkhauser, pp 113-118 (1999).

[5] Bouchut, F. James :Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness. Commun. In PDE, 24 (11 and 12), pp. 2173-2189 (1999).

[6] Bismut, J. M. (1984) : Large deviations and the Malliavin Calculus. Birkhäuser, Boston.

[7] Y. Brenier, E. Grenier : Sticky particles and scalar conservation laws. SIAM J. Numer. Anal. 35 (1998) 2317-2328.

[8] Y.S. Chow, H. Teicher : Probability Theory. Springer, New York 1978.

[9] Dermoune, A., Filali, S. : Diffusion with interactions between two types of particles and Pressureless gas equations. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser . 2003.

[10] Dermoune, A., Filali, S. : Estimates of the transition density of a gas system. J. Math. Pures Appl. 83 (2004) 1353-1371.

[11] Dermoune, A. : Propagation and conditional propagation of chaos for pressureless gas equations. Probab. Theory Relat. Fields 126, 459-476, (2003).

[12] Dermoune, A., Probabilistic interpretation of sticky particle model. The Annals of Probability (1999), Vol. 27, No. 3, pp. 1357-1367 (1999).

[13] Dermoune, A., Djehiche, B. : Pressureless gas equations with viscosity and nonlinear diffusion, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I (2001), p. 741-750.

[14] Dermoune, A., Djehiche, B. : Global solution of pressureless gas equation with viscosity, Physica D 163 (2002) 184-190.

[15] Eidel'man, S.D., Ivasisen, S.D., Investigation of the green matrix for a homogeneous parabolic boundary value problem. Trans. Moscow Math. Soc., Vol.23 (1970), p. 153-201.

[16] Eidelman, S. D. (1956) : On the fundamental solutions of parabolic systems. Soviet Math. Sbornik 38, 51-92. [English translation Amer. Math. Soc. Transl. 41 (1964), 1- 48.

[17] Eidelman, S. D. (1964) : Parabolic systems. Nauka, Moscow.

[18] Fleming, W. H. : Logarithmic transformations and stochastic control. Lecture Notes in Control and Inform. Sci. 42, 131-141, Springer, New York.

[19] Freidman, A. (1964) : Partial differential equations of parabolic type. Prentice-Hall, Englewood Cilffs, NJ.

[20] Freidlin M. I., Ventsel' A. D. : On small random perturbations of dynamical systems, Russian Math. Surveys, 25 (1970), pp1-55.

[21] Kusuoka, S., Stroock, D. : Application of the Malliavin calculus. III. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA Math. 34, 391-442.

[22] Kusuoka, S., Stroock, D. : Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator. Ann. of Math. (2) 127 (1988) 165-189.

[23] Malliavin, P., Stroock, D. : Short time behavior of the heat kernel and its logarithmic derivatives. J. Differential Geometry, Vol. 44, (1996) 550-570.

[24] Li, Y., Cao, Y. : Large particle difference method with second order accuracy in gas dynamics. Scientific Sinica (A) **28**, 1024-1035 (1985).

[25] Oelshläger K. : A law of large numbers for moderately interacting diffusion processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Gebiete 69, 279-322 (1985).

[26] Pardoux, E. : Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées, École d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX-1989, Lect. Notes in Math. 1464.

[27] Pardoux, E., Veritenekov, A. Y. : On Poisson equation and diffusion approximation. The Annals of Probability 2003, Vol. 31, 1166-1192.

[28] Revuz, Yor, Continuous martingales and Brownian motion. Springer 1994.

[29] Rykov, Y., E, W., Sinai, Y. : Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. Comm. Math. Phys. 177, 349-380 (1996)

[30] Sheu, S. J. : Some estimates of the transition density of a nondegenerate diffusion Markov process, The Annals of Probability, 1991, Vol.19, No. 2, 538-561.

[31] Stroock, D. W., Varadhan, S. R. S. : Mutidimensional diffusion Processes, Springer New York, 1979.

[32] Stroock, D. : Diffusion semi-groups corresponding to uniformly elliptic divergence form operators. Lecture Notes in Math. 1321, 316-348. Springer, New York.

[33] Stroock, D. : An estimate on the Hessian of the heat kernel. 355-371, Ikeda, Watanabe, Fukushima, Kunita,Eds. 1996, Springer-Verlag Tokyo.

[34] Zheng, W. A., Tightness results for laws of diffusion processes application to stochastic mechanics, Ann. Inst. Henri Poincaré, 1985, Vol. 21, No. 2, p. 103-124.

[35] Zheng, W., Conditional propagation of chaos and a class of quasilinear PDE'S. The Annals of Probability, 1995, Vol. 23, No. 3, 1389-1413.

[36] Zeldovich, Ya. B.,Gravitational instability ; an approximation theory for large density pertubations. Astron. Astrophus., 5, pp. 84-89 (1970).

[37] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales, Vol 2 : Itô Calculus. John Willey and Sons.

[38] M. Sever,, An existence theorem in the large for zero-pressure gas dynamics. Differential Integral Equations 14 (9) (2001) 1077-1092.

[39] Yu. I. Kiffer : On the asymptotics of the transition density of processes with small diffusion. Theory of probability and its applications, Vol XXI (1976) N°3