



UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
de l'Université de Nice Sophia Antipolis
Spécialité : Mathématiques
par
Fabien HERBAUT

Cycles algébriques sur la jacobienne d'une courbe.

Thèse dirigée par Arnaud BEAUVILLE
soutenue le 12 décembre 2005 à 14 heures 30
Membres du jury et rapporteurs :

M. Arnaud BEAUVILLE	Professeur à l'Université de Nice	Directeur
M. Bert van GEEMEN	Professeur à l'Université de Milan	Rapporteur
M. André HIRSCHOWITZ	Professeur à l'Université de Nice	Membre du jury
M. Carlos SIMPSON	Directeur de recherche à l'Université de Nice	Membre du jury
Mme. Claire VOISIN	Directrice de recherche à l'Université Paris VI	Rapporteur
M. Charles WALTER	Professeur à l'Université de Nice	Membre du jury

Laboratoire J.-A. Dieudonné, Parc Valrose, 06108 NICE Cedex 2

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
de l'Université de Nice Sophia Antipolis
Spécialité : Mathématiques
par
Fabien HERBAUT

Cycles algébriques sur la jacobienne d'une courbe.

Thèse dirigée par Arnaud BEAUVILLE
soutenue le 12 décembre 2005 à 14 heures 30
Membres du jury et rapporteurs :

M. Arnaud BEAUVILLE	Professeur à l'Université de Nice	Directeur
M. Bert van GEEMEN	Professeur à l'Université de Milan	Rapporteur
M. André HIRSCHOWITZ	Professeur à l'Université de Nice	Membre du jury
M. Carlos SIMPSON	Directeur de recherche à l'Université de Nice	Membre du jury
Mme. Claire VOISIN	Directrice de recherche à l'Université Paris VI	Rapporteur
M. Charles WALTER	Professeur à l'Université de Nice	Membre du jury

Table des matières

Résumé	9
1 Cadre	15
1.1 Anneau de Chow et anneau des cycles modulo équivalence algébrique.	15
1.2 Cycles sur une variété abélienne.	17
1.3 Cycles sur la jacobienne d'une courbe.	18
1.4 Résultats connus de non nullité des $C_{(i)}$	19
1.4.1 Résultats génériques.	19
1.4.2 Résultats pour les courbes lisses planes	20
1.5 Théorème d'annulation pour les revêtements de \mathbb{P}^1	20
1.5.1 Théorème d'Elisabetta Colombo et Bert Van Geemen	20
1.6 Relations de Polishchuk dans l'anneau tautologique.	22
2 Calcul de la classe d'un système linéaire	25
2.1 Systèmes linéaires et systèmes linéaires tronqués.	25
2.1.1 Systèmes linéaires.	25
2.1.2 Systèmes linéaires tronqués.	26
2.2 Descriptions de quelques variétés et morphismes.	27
2.2.1 Variétés diagonales $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$	27
2.2.2 Morphisme Ψ de C^k dans C^n	27
2.2.3 Variété des points projectifs sur un même hyperplan $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$	28
2.3 Lien entre les ensembles $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ et G_k	29
2.4 Relation de récurrence entre les cycles $[G_k]$	30
2.4.1 Résultats préliminaires	31
2.4.2 Etude des espaces tangents	33
2.4.3 Conclusion	34
2.5 Calcul de la classe de G_k dans $CH(C_k)$	34
2.5.1 $i) \Rightarrow ii)$	35
2.5.2 Initialisation de la récurrence	36
2.5.3 Utilisation de la relation de récurrence	36
2.6 Calcul de la classe de G_k dans $A(C_k)$	39
3 Application au calcul de relations modulo équivalence algébrique	41
3.1 Relations déduites de l'existence du système linéaire dans le cas général	42
3.1.1 Projection de la relation sur les différents espaces propres	42
3.1.2 Etude de la première relation non triviale.	44
3.2 Méthode	47

4	Systèmes linéaires de dimension r et $(r - 2)$-plans $2r - 2$ sécants	49
4.1	Pinceaux déduits de l'existence d'un g_d^r par projection	50
4.2	Théorème d'annulation pour une courbe admettant un g_d^r	50
4.2.1	Nullité de $C_{(d-2r+1)}$	50
4.2.2	La nullité de $C_{(i)}$ entraîne celle de $C_{(i+1)}$	52
4.2.3	Egalité entre $\tilde{C}(r, d, g)$ et $C(r, d, g)$	52
5	Applications aux revêtements de \mathbb{P}^1, aux courbes planes et aux courbes gauches	55
5.1	Relations dans l'anneau tautologique et relations de I_g	55
5.1.1	Relations dans l'anneau tautologique	55
5.1.2	Détermination des sous-espaces liés aux relations de I_g	56
5.2	Revêtements de \mathbb{P}^1	57
5.3	Courbes planes	58
5.3.1	Nombre de nœuds d'une courbe plane	58
5.3.2	Relations déduites d'un g_d^2 et relations de I_g	58
5.3.3	Exemples de calculs de relations	59
5.3.4	Courbes planes de genre $g \leq 10$	60
5.4	Courbes gauches	62
5.4.1	Quadrisécantes à une courbe gauche	62
5.4.2	Courbes lisses de \mathbb{P}^3	62
5.4.3	Relations déduites d'un g_d^3 et relations de I_g	62
5.4.4	Courbes gauches lisses de genre $g \leq 10$	62
	Annexe	65
	Index des notations	69
	Bibliographie	73

J'aimerais remercier...

...très vivement mon directeur de thèse Arnaud Beauville. Son écoute, ses conseils, sa patience et ses encouragements ont été pour moi très importants. Le dynamisme des mathématiques qu'il m'a invité à découvrir était source de motivation.

...Claire Voisin et Bert van Geemen qui ont accepté de rapporter cette thèse. Les remarques qui ont suivi leurs lectures attentives du document m'ont été très précieuses. Elles ont permis de nombreuses améliorations.

...André Hirschowitz, Carlos Simpson et Charles Walter d'avoir accepté d'être membres du jury.

...Nikos Tzanakis pour sa compétence et sa gentillesse, même si notre collaboration n'aura pas cette fois porté ses fruits.

...Alexandru Dimca qui m'a aidé à me dépêtrer de tracasseries administratives.

...Bernard, Isabelle, Janine, Jean-Louis, Jean-Paul, Marie-Claude, Rosalba, et bien d'autres membres (ou ex-membres) du laboratoire qui y rendent la vie plus agréable. Merci à Jean-Marc qui est resté cet été !

...Angela, Marcello, Michele, Olivier, pour de nombreuses discussions,
...Alessandro, Marco et Samuel pour les derniers coups de main,
...Bahoa pour ses encouragements et ses sages points de vue,
...la jolie Carine qui a fait beaucoup pour m'aider,
...George pour de nombreuses discussions et pour son aide à la traduction,
...Marie pour beaucoup de choses dont de bons conseils,
...Maëlle qui sait toujours tout,
...Nicolas, Fanny, Pierre et Stéphane pour la cuisine et l'intendance,
...Stéphane (à nouveau) pour son aide en informatique.

...mes parents : le déroulement de mes études dans des conditions très favorables doit beaucoup à leur sponsoring.

...tous ceux qui m'ont aidé mais que j'ai oubliés, et qui ne se vexeront pas !

Résumé

Le cadre de cette thèse est l'étude de l'anneau des cycles algébriques de la jacobienne d'une courbe lisse, tensorisé par \mathbb{Q} . Les cycles sont étudiés sous l'angle de la décomposition de Beauville, c'est-à-dire celle en espaces propres pour les opérateurs k_* et k^* associés aux homothéties $k : x \mapsto kx$. Plus précisément, on s'intéresse aux cycles tautologiques, ceux dans le plus petit sous-anneau contenant (le plongement de) la courbe, stable par les opérations élémentaires : intersection, produit de Pontryagin, opérateurs k_* et k^* .

L'objectif de cette thèse est le calcul de relations nouvelles entre cycles modulo équivalence algébrique en fonction des systèmes linéaires admis par la courbe.

Le point de départ de ces calculs est une formule obtenue par Elisabetta Colombo et Bert van Geemen précisant la classe algébrique d'un pinceau (considéré comme sous-variété du produit symétrique de la courbe) dont ils déduisent de premiers résultats d'annulation. On étend cette formule aux systèmes linéaires de dimension supérieure (et à l'anneau de Chow) pour obtenir d'autres résultats d'annulation.

Mots clés : cycles algébriques, jacobienne, anneau tautologique.

The subject of this thesis is the study of the ring of algebraic cycles on the Jacobian variety of a smooth curve, tensored with \mathbb{Q} . The cycles are studied from the point of view of Beauville's decomposition into eigenspaces for the operators k_* and k^* associated to the homotheties $k : x \mapsto kx$. More precisely, we are interested in the tautological cycles : those in the smallest subring containing (an embedding of) the curve and closed under the basic operations of intersection, Pontryagin product and the operators k_* and k^* .

The goal of the thesis is the calculation of new relations between cycles modulo algebraic equivalence, depending on linear systems on the curve.

The point of departure for this work is a formula of Elisabetta Colombo and Bert van Geemen for the algebraic class of a pencil (considered as a subvariety of a symmetric product of the curve), from which they deduce certain vanishing results. We extend this formula to linear systems of higher dimension (and to the Chow ring) to obtain further vanishing results.

Key words : algebraic cycles, jacobian, tautological ring.

Introduction

Le cadre de cette thèse est l'étude de l'anneau des cycles algébriques associé à la jacobienne d'une courbe lisse. Plus précisément, on en considère un sous-anneau appelé "anneau tautologique". Après avoir décrit ce cadre et les principaux résultats connus, nous annoncerons les résultats obtenus dans ce travail, à savoir le calcul de relations nouvelles entre cycles modulo équivalence algébrique en fonction des systèmes linéaires admis par la courbe.

Cadre et principaux résultats connus

On considère C une courbe lisse projective de genre g . On note JC la variété jacobienne associée. Pour tout entier n positif, C_n désignera le produit symétrique de la courbe. A tout choix d'un point de C_n on peut associer un morphisme $u_n : C_n \rightarrow JC$. Pour tout k de \mathbb{Z} la variété abélienne JC admet des homothéties que l'on note également k :

$$\begin{aligned} k &: JC \longrightarrow JC \\ x &\longmapsto kx \end{aligned}$$

On utilise la notation $A(JC)$ pour l'anneau¹ des cycles modulo équivalence algébrique et $CH(JC)$ pour l'anneau de Chow. Ces anneaux seront toujours considérés *tensorisés par* \mathbb{Q} . Comme la jacobienne est une variété abélienne, ces anneaux sont naturellement munis d'un deuxième produit, le produit de Pontryagin. La transformation de Fourier réalise un isomorphisme de $A(JC)$ qui échange les deux produits. Elle est au cœur de la décomposition introduite par Arnaud Beauville dans [Bea86]. Appliquée dans ce cas, la décomposition s'écrit pour les cycles de codimension p :

$$A^p(JC) = \bigoplus_{i=p-g}^p A_{(i)}^p(JC)$$

où un cycle α est dans $A_{(i)}^p(JC)$ si et seulement si pour tout k on a $k^*\alpha = k^{2p-i}\alpha$, ou ce qui est équivalent : $k_*\alpha = k^{2g-2p+i}\alpha$.

Considérons par exemple le plongement de la courbe C dans JC . Il définit un cycle de $A^{g-1}(JC)$ que l'on note également C . On peut montrer que sa décomposition est la suivante :

$$C = C_{(0)} + \dots + C_{(g-1)} \quad \text{avec } C_{(i)} \in A_{(i)}^{g-1}(JC) \quad (1)$$

L'anneau tautologique est le plus petit sous-anneau de $A(JC)$ contenant C et stable pour les produits d'intersection, de Pontryagin, ainsi que pour les opérateurs k_* et k^* . On le note R . D'après Beauville ([Bea04]), l'anneau R muni du produit de Pontryagin est engendré par les

¹On notera toujours la dimension en indice ($A_i(X)$ et $CH_i(X)$) et la codimension en exposant ($A^i(X)$ et $CH^i(X)$).

composantes $C_{(i)}$. Par suite, R est de dimension finie, et admet la description :

$$R = \frac{\mathbb{Q}[C_{(0)}, \dots, C_{(g-1)}]}{\mathcal{R}}$$

où \mathcal{R} désigne les relations entre les composantes $C_{(i)}$ pour le produit de Pontryagin.

Mais discuter la nullité de cycles modulo équivalence algébrique est un problème difficile en général. Dans le cas particulier de $\mathbb{Q}[C_{(0)}, \dots, C_{(g-1)}]$, et même des composantes $C_{(i)}$, on connaît peu de résultats de non-nullité. Pour des genres suffisamment grands, et des courbes génériques, des théorèmes de Ceresa et de Fakhruddin donnent la non-nullité de $C_{(1)}$ et de $C_{(2)}$ ([Cer83] et [Fak96]). Plus récemment, Atsuchi Ikeda ([Ike03]) a montré pour une courbe lisse plane générique de degré d que la composante $C_{(i)}$ n'est pas nulle dans l'anneau de Chow lorsque i vérifie l'encadrement $0 \leq i \leq d - 3$.

On s'intéresse en fait dans ce travail à l'autre problème, celui de montrer la nullité de cycles. Alexander Polishchuk obtient dans ce sens un résultat universel : il calcule un idéal I_g de relations valables pour toutes les courbes de genre g . Cet idéal est stable par transformation de Fourier, ce qui amène l'auteur à penser que le jeu de relations est complet pour les courbes génériques. On sait en revanche qu'il n'est pas complet pour toutes les courbes. Le résultat principal obtenu pour les courbes non génériques est celui énoncé par Elisabetta Colombo et Bert van Geemen :

Théorème 1 *Si la courbe C admet un revêtement de \mathbb{P}^1 de degré d , la composante $C_{(i)}$ est nulle pour tout $i \geq d - 1$.*

Notons $\mathcal{G} \subset C_d$ le système linéaire associé au revêtement. On peut définir pour tout n vérifiant l'encadrement $1 \leq n \leq d$ le système linéaire tronqué :

$$G_n = \{D \in C_n \mid \exists E \in C_{d-n}, D + E \in \mathcal{G}\} \quad (2)$$

La formule suivante lie la classe algébrique de la courbe G_n aux classes des images par homothéties de C . Cet élément important de la preuve du théorème ci-dessus est le point de départ de notre travail :

$$u_{n*}[G_n] = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{d}{n-i} i_* C \quad (3)$$

Résultats obtenus dans la thèse

Bien sûr G_d est le système linéaire \mathcal{G} , et tous ses diviseurs sont linéairement équivalents. L'image par u_d de la courbe G_d est donc un point de la jacobienne. Comme les dimensions ne sont pas conservées, le cycle algébrique $u_{d*}[G_d]$ est nul. En remplaçant alors dans (3) le cycle C par sa décomposition (1), on redémontre le théorème précédent.

Ce raccourci à l'esprit, on étend dans cette thèse la formule (3) aux systèmes linéaires de dimension r et de degré d (expression que l'on abrègera par la suite en g_d^r) :

Théorème 2 *Si C admet un g_d^r sans point de base, on a l'égalité dans $A^{n-r}(C_n)$:*

$$[G_n] = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r} \binom{d}{n - \sum_{u=1}^r i_u} \left(\prod_{v=1}^r \frac{(-1)^{i_v-1}}{i_v} \right) [\delta_{i_1, \dots, i_r} + (n - \sum_{u=1}^r i_u) o]$$

où o est un point quelconque de C et δ_{i_1, \dots, i_r} la diagonale généralisée dans $C_{\sum i_u}$:

$$\delta_{i_1, \dots, i_r} = \{i_1 x_1 + \dots + i_r x_r \mid x_i \in C\}$$

En appliquant à nouveau le raisonnement du paragraphe précédent à la classe $[G_d]$ associée à tout système linéaire, on obtient les relations² dans l'anneau R :

Théorème 3 *Si la courbe C admet un g_d^r sans point de base, on a pour tout entier positif s la relation suivante dans $A_{(s)}^{g-d-r}(JC)$:*

$$\sum_{\substack{0 \leq a_1, \dots, a_r \\ a_1 + \dots + a_r = s}} \beta(d, a_1 + 1, \dots, a_r + 1) C_{(a_1)} * \dots * C_{(a_r)} = 0$$

où

$$\beta(d, a_1, \dots, a_r) = \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d (-1)^{i_1 + \dots + i_r} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r}$$

Expliquons rapidement comment sont calculées les classes $[G_n]$: par récurrence, et en considérant la sous-variété $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ de $(\mathbb{P}^r)^n$ des éléments dont toutes les composantes sont sur un même hyperplan projectif. Si le g_d^r induit le morphisme $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^r$, on considère le pullback de la classe $[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$ par $\Phi^{\times n}$. Il fait apparaître la classe $[G_n]$ recherchée ainsi que des cycles indésirables. On conclut en identifiant ces cycles (liés aux classes $[G_k]$ lorsque $k < n$) et en utilisant la connaissance de l'anneau de Chow de $(\mathbb{P}^r)^n$. Précisons que le résultat est en fait obtenu dans l'anneau de Chow $CH^{g-r}(JC)$. La formule du théorème 2 en est sa simplification modulo équivalence algébrique.

Les relations obtenues à partir d'un g_d^r le sont dans $R \cap A_{(i)}^a(JC)$ pour $a \geq d - r + 1$. En particulier, on obtient dans $R \cap A_{(d-2r+1)}^{d-2r+2}(JC)$ une relation monomiale :

$$C(r, d, g) C_{(d-2r+1)} = 0 \tag{4}$$

où pour tout entier r positif $C(r, d, g)$ est un polynôme de $\mathbb{Q}[d, g]$. Mais la nullité de $C_{(d-2r+1)}$ lorsque $C(r, d, g)$ est non nul n'est pas un résultat nouveau. On reconnaît en effet dans $C(r, d, g)$ le nombre de $r - 2$ plans $2r - 2$ sécants à la courbe considérée. L'existence d'un tel sous-espace garantit celle d'un g_{d-2r+2}^1 , et la nullité de $C_{(d-2r+1)}$ apparaît alors comme une conséquence du théorème 1. Si le résultat n'est pas nouveau, il peut laisser penser que la nullité de $C_{(d-1)}$ implique l'existence d'un g_d^1 .

On obtient en revanche des relations nouvelles entre cycles de R de dimension supérieure. Par exemple, dans le cas des courbes planes et gauches, on montre que pour g suffisamment grand il existe une courbe de degré d pour laquelle les relations obtenues ne se déduisent ni des relations de I_g ni du g_d^1 induit par le système linéaire. On précise quelles sont les relations obtenues pour les courbes de genre inférieur à 10.

²le théorème 3 est une reformulation du théorème 3.1 page 42

Organisation de la thèse

La thèse est organisée en cinq chapitres. On décrit dans le premier le cadre du travail. Mis à part le raccourci entre la formule (3) et le théorème 1 tous les résultats énoncés sont déjà connus.

L'objectif du deuxième chapitre est la démonstration du théorème 2. On donne une formule de récurrence liant pour tout n les cycles $[G_k]$ pour k variant de r à n et le cycle $[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$. On en déduit une expression des classes $[G_k]$ dans l'anneau de Chow et dans l'anneau des cycles modulo équivalence algébrique.

Les trois derniers chapitres sont consacrés à l'étude des relations que l'on peut en déduire. Le troisième chapitre détaille l'obtention de relations à partir de l'égalité $u_{d*}[G_d] = 0$ en projetant sur les différents espaces propres. On explique pourquoi les premières relations sont triviales, et donne une expression simple pour la première relation non triviale obtenue.

Le quatrième chapitre fait le lien entre les systèmes linéaires de dimension r et les $(r-2)$ plans $2r-2$ sécants à la courbe. Après avoir rappelé la formule de Castelnuovo, on montre comment elle apparaît dans la relation monomiale mettant en jeu $C_{(d-2r+1)}$.

On applique dans le cinquième et dernier chapitre les théorèmes démontrés aux courbes planes et gauches. On résume les résultats obtenus pour les courbes de genre $g \leq 10$ dans les tableaux 5.1 et 5.2.

Il peut être utile de consulter l'index des notations qui précède la bibliographie.

Chapitre 1

Cadre

1.1 Anneau de Chow et anneau des cycles modulo équivalence algébrique.

Définition de l'anneau de Chow

Soit X une variété projective complexe lisse de dimension g . Lorsqu'il y a besoin, nous utiliserons une notation en indice T_i pour faire référence à la dimension, et en exposant T^i pour la codimension. Ainsi, on notera $Z_i(X)$ le groupe des cycles de dimension i , c'est-à-dire le \mathbb{Z} -module libre engendré par les sous-variétés irréductibles de X de dimension i . Considérons le produit $X \times \mathbb{P}^1$ muni des projections

$$\begin{array}{ccc} & X \times \mathbb{P}^1 & \\ \swarrow \text{pr}_X & & \searrow \text{pr}_{\mathbb{P}^1} \\ X & & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Pour toute sous-variété irréductible V de $X \times \mathbb{P}^1$ de dimension $i + 1$ sur laquelle la projection $\text{pr}_{\mathbb{P}^1}$ est dominante, on note :

$$V[t] = \text{pr}_X(\text{pr}_{\mathbb{P}^1}^{-1}(t))$$

On appelle $\text{Rat}_i(X)$ le sous-groupe de $Z_i(X)$ engendré par les cycles $V[0] - V[\infty]$ (où V parcourt l'ensemble des sous-variétés décrites ci-dessus), et $\text{CH}_i(X)$ le quotient :

$$\text{CH}_i(X) = \frac{Z_i(X)}{\text{Rat}_i(X)} = \text{CH}^{g-i}(X)$$

Deux éléments de $Z_i(X)$ égaux dans le quotient sont dits rationnellement équivalents. L'anneau de Chow associé à X est alors défini comme la somme directe :

$$\text{CH}(X) = \bigoplus_{i=0}^g \text{CH}_i(X)$$

munie du produit d'intersection comme expliqué dans [Ful83]. L'anneau est alors gradué pour la codimension, c'est-à-dire qu'on a pour tous i et j les inclusions :

$$\text{CH}^i(X) \cdot \text{CH}^j(X) \subset \text{CH}^{i+j}(X)$$

Pour V sous-variété irréductible de X on note $[V]$ le cycle algébrique correspondant. Pour tout sous-schéma V admettant la décomposition V_1, \dots, V_n en composantes irréductibles, on note $[V] = \sum m_i [V_i]$, où la multiplicité m_i est définie comme la longueur de l'anneau \mathcal{O}_{V, V_i} .

Morphismes.

Une application propre $f : X \rightarrow Y$ induit un morphisme entre les anneaux de Chow : $f_* : CH(X) \rightarrow CH(Y)$. L'image de la classe $[V]$ d'une sous-variété irréductible de X est nulle si la dimension de $f(V)$ est strictement inférieure à celle de V . Si la dimension de l'image $f(V)$ égale celle de V , l'image de la classe est la classe de l'image à un coefficient entier près :

$$f_*([V]) = [C(V) : C(f(V))]$$

Ce coefficient peut s'écrire comme le degré d'une extension de corps. C'est également le nombre d'antécédents d'un point générique de $f(V)$ par f dans V .

Si X et Y sont deux variétés lisses projectives, notons à nouveau pr_X et pr_Y les projections du produit $X \times Y$ sur X et Y . Tout morphisme $f : X \rightarrow Y$ induit un pullback $f^* : CH(Y) \rightarrow CH(X)$. En considérant le graphe Γ_f de f comme un élément de $CH(X \times Y)$, on peut définir la classe du pullback d'une sous-variété irréductible V de Y par :

$$f^*([V]) = pr_{X*}(\Gamma_f \cdot pr_Y^{-1}(V))$$

On définit de façon similaire une autre classe de morphismes. Si X et Y sont deux variétés projectives lisses, on appellera correspondance entre X et Y tout élément Γ de l'anneau de Chow $CH(X \times Y)$. Un tel élément Γ définit un morphisme :

$$\begin{aligned} \Gamma_* : CH(X) &\longrightarrow CH(Y) \\ x &\longmapsto pr_{Y*}(pr_X^*x \cdot \Gamma) \end{aligned}$$

Equivalence algébrique.

Si on autorise à déformer non plus par \mathbb{P}^1 mais par toute courbe lisse projective, on parle d'équivalence algébrique entre cycles, et de l'anneau des cycles modulo équivalence algébrique. Précisément, pour toute courbe lisse projective T , et toute variété irréductible V de $X \times T$ se projetant de façon dominante sur T , on définit pour tout point t de T :

$$V[t] = pr_X(pr_T^{-1}(t))$$

On note $Alg_i(X)$ le sous-groupe de $Z_i(X)$ engendré par les cycles $V[t] - V[t']$ où T parcourt les courbes lisses projectives, V les sous-variétés décrites plus-haut, et t et t' les points de T . On définit :

$$A_i(X) = \frac{Z_i(X)}{Alg_i(X)} = (A^{g-i}(X))$$

et

$$A(X) = \bigoplus_{i=0}^g A_i(X)$$

l'anneau des cycles modulo équivalence algébrique. Cet anneau est décrit dans [Ful83] au paragraphe 10.3. Les pullback et les pushdown associés à des morphismes convenables décrits plus hauts induisent des morphismes entre anneaux des cycles modulo équivalence algébrique. On définit de même les correspondances et les applications qui leur sont associées.

Dans tout le document, l'anneau de Chow et l'anneau des cycles modulo équivalence algébrique seront considérés tensorisés par \mathbb{Q} , c'est-à-dire que l'on notera encore $CH(X)$ pour $CH(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et $A(X)$ pour $A(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

1.2 Cycles sur une variété abélienne.

Supposons à partir d'ici que X est une variété abélienne dont on note m le morphisme d'addition : $m : X \times X \rightarrow X$. On peut définir un deuxième produit sur $A(X)$, le produit de Pontryagin, qui sera noté $*$. Avec pr_1 et pr_2 les deux projections de $X \times X$ sur X , on le définit par la relation :

$$x * y = m_*(pr_1^*x.pr_2^*y)$$

Si V et V' sont deux sous-variétés irréductibles de X , le produit de Pontryagin correspond à l'addition en ce sens que :

$$[V] * [V'] = \deg m|_{V \times V'} [V + V']$$

Les homothéties $x \mapsto kx$ (également notées k) induisent des endomorphismes k_* et k^* de $CH(X)$. Arnaud Beauville a démontré dans [Bea86] que ces endomorphismes se diagonalisent simultanément :

Théorème 1.1 (Beauville 1986) *Pour tout entier p on a la décomposition de $CH^p(X)$ en espaces propres pour les opérateurs k^* et k_* :*

$$CH^p(X) = \bigoplus_{i=p-g}^{i=p} CH_{(i)}^p(X)$$

où $\alpha \in CH_{(i)}^p(X)$ si et seulement si pour tout k de \mathbb{Z} les relations équivalentes qui suivent sont vérifiées :

$$k^*\alpha = k^{2p-i}\alpha$$

$$k_*\alpha = k^{2g-2p+i}\alpha.$$

Pour éviter toute confusion avec la notation réservée à la dimension, l'indice relatif à la valeur propre est noté entre parenthèses (i). L'indexation des espaces propres a été choisie de façon telle que la conjecture suivante s'énonce simplement : seuls les espaces propres $CH_{(i)}^p(X)$ pour i positifs interviennent dans la décomposition.

Conjecture 4 $CH_{(i)}^p(X) = 0$ pour $i < 0$

La conjecture est vérifiée lorsque la codimension p vaut 0, 1, $g - 2$, $g - 1$ ou g (voir [Bea86] proposition 3).

La démonstration du théorème (1.1) donnée dans [Bea86] s'appuie sur la transformation de Fourier définie entre l'anneau de Chow d'une variété abélienne et celui de sa duale. Nous noterons \hat{X} la variété abélienne duale de X . On désignera par \mathcal{L} le fibré de Poincaré, élément de $Pic(X \times \hat{X})$, et par l sa classe dans $CH^1(X \times \hat{X})$. La transformation de Fourier que l'on notera \mathcal{F} est la correspondance associée au cycle $e^l = \sum_{i=0}^{2g} \frac{l^i}{i!}$, soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : CH(X) &\longrightarrow CH(\hat{X}) \\ x &\longmapsto pr_{\hat{X}*}(pr_X^*x.e^l) \end{aligned}$$

Les propriétés de cette transformation sont étudiées dans [Bea83]. Il y est par exemple démontré que \mathcal{F} échange les deux produits :

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x).\mathcal{F}(y) \text{ et}$$

$$\mathcal{F}(x.y) = (-1)^g \mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y)$$

Pour toute variété abélienne X , on a une identification entre \hat{X} et X . En suivant cet isomorphisme, on peut définir la transformée de Fourier de \hat{X} dans X : $\hat{\mathcal{F}} : \hat{X} \rightarrow X$. La composée des transformées de Fourier est une involution :

$$\hat{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = (-1)^g \circ (-1)_*$$

Enfin, la démonstration du théorème de décomposition (1.1) fait apparaître le résultat suivant :

$$\mathcal{F}(CH_{(s)}^i(X)) = CH_{(s)}^{g-i+s}(\hat{X})$$

D'après ce qui précède, la conjecture énoncée plus haut en termes d'annulation d'espace propres est équivalente à la conjecture F_p explicitée dans [Bea83] :

Conjecture 5 (*Conjecture F_p*) Pour tout entier p vérifiant $0 \leq p \leq g$ on a l'inclusion :

$$\mathcal{F}(CH^p(X)) \subset \bigoplus_{q \geq 0} CH^{g-p+q}(\hat{X})$$

Tous les résultats annoncés ci-dessus pour les anneaux de Chow de variétés abéliennes restent valables pour les anneaux des cycles modulo équivalence algébrique. On utilisera de même la notation $A_{(i)}^p(X)$ pour désigner les cycles algébriques α de $A^p(X)$ vérifiant pour tout k de \mathbb{Z} l'égalité $k^* \alpha = k^{2p-i} \alpha$.

1.3 Cycles sur la jacobienne d'une courbe.

Pour étudier la décomposition annoncée au théorème (1.1) nous considérerons dans ce travail le cas où X est la jacobienne d'une courbe lisse projective C de genre g supérieur ou égal à 1. Rappelons que la jacobienne JC d'une telle courbe est définie comme le noyau $Pic^0(C)$ de l'application degré définie sur le groupe de Picard de C . Autrement dit, la jacobienne de C correspond aux diviseurs de degré 0 modulo équivalence linéaire et elle paramètre, à isomorphisme près, les fibrés en droites sur C de degré 0. Les théorèmes d'Abel et de Jacobi assurent que la jacobienne est isomorphe au groupe $\frac{H^0(C, \omega_C)^*}{H_1(C, \mathbb{Z})}$, si ω_C désigne le fibré canonique et si on injecte le groupe $H_1(C, \mathbb{Z})$ dans $H^0(C, \omega_C)^*$ en intégrant sur les chemins :

$$\begin{aligned} i : H_1(C, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(C, \omega_C)^* \\ \gamma &\longmapsto (\omega \mapsto \int_\gamma \omega) \end{aligned}$$

Cette bijection fait apparaître la structure de tore complexe de la jacobienne. On sait depuis Riemann qu'elle est également une variété projective. La notation C_n sera réservée pour le produit symétrique de la courbe C . On représentera les éléments de C_n par des diviseurs effectifs de degré n . À un diviseur D de degré 0, on associera sa classe \overline{D} dans $Pic^0(C)$. Tout choix d'un point D_n de C_n induit alors un morphisme :

$$u_n : C_n \longrightarrow \frac{JC}{D \longmapsto \overline{D - D_n}}$$

Le morphisme u_1 induit un isomorphisme u_1^* entre la variété jacobienne d'une courbe et sa duale. En suivant cet isomorphisme, la transformée de Fourier devient un automorphisme :

$$\mathcal{F} : CH(JC) \longrightarrow CH(JC) \\ x \longmapsto \mathcal{F}x$$

On définit à translation près les variétés $W_i = W^{g-i}$ comme les images $u_i(C_i)$ dans JC . Le diviseur W_{g-1} est appelé theta-diviseur et également noté Θ . On note θ sa classe dans l'anneau

de Chow ou modulo équivalence algébrique selon le contexte, tout comme on note $w_i = w^{g-i}$ les classes des variétés W_i . On remarquera que modulo équivalence algébrique, les cycles correspondants ne dépendent pas du choix des morphismes u_i .

On sait que u_1 est un plongement. On notera encore C pour $u_1(C) = w_1$. Sa classe définit un élément de $CH^{g-1}(JC)$ auquel on peut appliquer la décomposition (1.1) en tenant compte du fait que pour les cycles de codimension $g-1$ seuls les espaces $CH_{(i)}^{g-1}(JC)$ pour $i \geq 0$ interviennent :

$$[C] = C_{(0)} + C_{(1)} + \dots + C_{(g-1)} \quad \text{où} \quad C_{(i)} \in CH_{(i)}^{g-1}(JC) \quad (1.1)$$

On notera de même la décomposition dans $\bigoplus_{i=0}^{g-1} A_{(i)}^{g-1}(C)$.

Cette décomposition conduit naturellement à la question de la nullité des $C_{(i)}$. Sont explicités dans le paragraphe qui suit (1.4) les résultats connus de non-nullité des $C_{(i)}$ lorsque i est petit ($i \leq 2$) valables pour les courbes génériques. Dans le paragraphe (1.5), on esquisse la démonstration d'un théorème d'Elisabetta Colombo et Bert Van Geemen établissant la nullité des composantes $C_{(i)}$ pour $i \geq d-1$ lorsque C est un revêtement de \mathbb{P}^1 de degré d .

Les espaces propres $CH_{(i)}^p$ sont en somme directe ; il n'existe donc pas de relation linéaire non triviale entre des composantes $C_{(i)}$ non nulles. La question se pose en revanche de déterminer les relations entre les produits de Pontryagin de ces composantes. On rappelle au paragraphe 1.6 qu'Alexander Polishchuk a calculé pour chaque genre possible un système de telles relations.

1.4 Résultats connus de non nullité des $C_{(i)}$.

1.4.1 Résultats génériques.

La composante $C_{(0)}$ est non nulle

Enonçons un premier résultat de non-nullité valable pour toute courbe :

Théorème 1.2 *Soit C une courbe lisse projective de genre $g \geq 1$. On a :*

$$C_{(0)} \neq 0 \quad \text{dans} \quad A_{(0)}^{g-1}(JC)$$

Rappelons que la classe d'homologie de $C_{(0)}$ égale celle de C , laquelle est non nulle. On peut également utiliser la transformation de Fourier. D'après [Bea04] on a l'égalité modulo équivalence algébrique :

$$\mathcal{F}(C_{(0)}) = -\theta$$

qui permet également de conclure.

La composante $C_{(1)}$ est génériquement non nulle

Théorème 1.3 *Pour une courbe C générique de genre $g \geq 3$ on a :*

$$C_{(1)} \neq 0 \quad \text{dans} \quad A_{(1)}^{g-1}(JC)$$

En suivant à nouveau [Bea04] on calcule la transformée de Fourier de $C_{(1)}$:

$$\mathcal{F}(C_{(1)}) = w_2 - \frac{1}{2}\theta^2$$

Si $C_{(1)}$ était nulle on aurait θ^2 proportionnel à $u_2(C_2)$. Comme θ est invariant par $(-1)_*$, w_2 le serait également. Or Ceresa démontre dans [Cer83] que pour tout entier k vérifiant $2 \leq k \leq g-2$ la classe w_k n'est pas proportionnelle à $(-1)_*w_k$ pour une courbe générique de genre $g \geq 3$.

La composante $C_{(2)}$ est génériquement non nulle

Najmuddin Fakhruddin énonce dans [Fak96] des résultats de non-nullité des groupes de Griffiths, groupes des cycles homologiquement nuls modulo équivalence algébrique. Le corollaire 4.6 de [Fak96] a pour conséquence le résultat suivant :

Théorème 1.4 *Pour une courbe C générique de genre $g \geq 11$ on a :*

$$C_{(2)} \neq 0 \quad \text{dans} \quad A_{(2)}^{g-1}(JC)$$

1.4.2 Résultats pour les courbes lisses planes

Théorème 1.5 *Soit C une courbe lisse plane générique de degré d . On a dans $CH^{g-1}(JC)$:*

$$C_{(i)} \neq 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq i \leq d-3$$

Ce théorème est une conséquence d'un résultat d'Atsuchi Ikeda énoncé dans [Ike03]. Les équations :

$$F_s = z_0^d + z_1^d + z_2^d + \sum_{i=1}^m s_i z_1^{d_i} z_2^{d-d_i}$$

$$\text{avec} \quad 2 \leq d_1 < d_2 \dots < d_m \leq d-2 \quad (\text{et donc } m \leq d-3)$$

définissent une famille de courbes planes lisses C_s de degré d . Des sous-variétés W_l de JC_s leur sont associées comme expliqué dans la sous-section 1.3. Si l'élément s de \mathbb{C}^m est choisi de façon telle que les s_i soient algébriquement indépendants sur \mathbb{Q} , alors pour tous ν et l vérifiant

$$1 \leq \nu \leq m \quad \text{et}$$

$$1 \leq l \leq d-2-\nu$$

le théorème 4.2 de [Ike03] implique que la composante de W_l dans $CH_{(\nu)}^{g-l}(JC_s)$ est non nulle. En particulier, la composante de C_s est non nulle dans $CH_{(\nu)}^{g-1}(JC_s)$ pour ν vérifiant l'encadrement $1 \leq \nu \leq d-3$. On en déduit le résultat annoncé.

1.5 Théorème d'annulation pour les revêtements de \mathbb{P}^1

1.5.1 Théorème d'Elisabetta Colombo et Bert Van Geemen

Les résultats précédents concernent les courbes génériques de genre g . Elisabetta Colombo et Bert Van Geemen donnent dans [CvG93] un résultat d'annulation pour les courbes en fonction du degré des revêtements qu'elles admettent :

Théorème 1.6 *Soit C un revêtement de \mathbb{P}^1 de degré d . On a dans $A^{g-1}(JC)$:*

$$C_{(i)} = 0 \quad \text{pour} \quad i \geq d-1.$$

Notons \mathcal{G} le système linéaire associé au revêtement Φ de \mathbb{P}^1 . C'est la partie de C_d dont les éléments sont les pullback par Φ des points de \mathbb{P}^1 . Pour tout entier n vérifiant $1 \leq n \leq d$ on peut considérer la partie de C_n des diviseurs subordonnés à un diviseur de \mathcal{G} (c'est-à-dire des diviseurs D de C_n que l'on peut compléter à l'aide d'un diviseur de C_{d-n} en un diviseur de \mathcal{G}). Les auteurs définissent les surfaces $S_n = G_n \times C$ sur lesquelles homologie et équivalence algébrique des cycles de dimension 1 coïncident (cf [Ful83] 19.3.1). Tout morphisme $\Psi : S_n \rightarrow JC$ permet alors de déduire à partir des relations entre cycles homologues de dimension 1 sur S_n des relations entre cycles dans $A^{g-1}(JC)$. Elisabetta Colombo et Bert Van Geemen calculent ainsi les classes algébriques des pushdown $u_{n*}[G_n]$ en fonction des images de C par les homothéties :

Théorème 1.7 *Pour tout entier n vérifiant $1 \leq n \leq d$ on a l'égalité dans $A^{g-1}(JC)$:*

$$u_{n*}[G_n] = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{d}{n-i} i_* C$$

On peut déduire de cette formule des relations entre les correspondances Γ_n , classes dans $A(JC \times JC)$ des graphes des homothéties $n : x \mapsto nx$. Notons π_i les classes des correspondances associées aux projecteurs sur les espaces propres $\bigoplus_{p=0}^g A_{(i)}^p$. Elisabetta Colombo et Bert van Geemen montrent la nullité des cycles $\pi_{i*}C$ pour $i \geq d-1$ en les exprimant en fonction des cycles $\Gamma_{n*}C$.

La théorie de Brill-Noether donne des conditions suffisantes pour qu'une courbe de genre g admette des systèmes linéaires de degré d et de dimension r (on peut par exemple consulter le chapitre V de [ACGH85]). Pour tout entier d supérieur ou égal à $\frac{g+1}{2}$, une courbe générique admet un revêtement de \mathbb{P}^1 de degré d . Avec ce qui précède :

Théorème 1.8 *Avec C de genre g et d le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{g+1}{2}$, on a dans $A_{(i)}^{g-1}(JC)$:*

$$C_{(i)} = 0 \text{ pour } i \geq d-1$$

Démonstration du théorème 1.6 à partir du théorème 1.7

Les raisonnements esquissés dans ce paragraphe seront détaillés dans le chapitre III. Le présent travail est articulé autour (d'une généralisation) de la formule 1.6. On propose dans ce texte une autre façon de calculer les classes des cycles $u_{n*}[G_n]$ et d'exploiter ces calculs pour en déduire des relations entre les cycles $C_{(i)}$.

Reconsidérons le cas d'une courbe C revêtement de \mathbb{P}^1 de degré d . On peut remarquer que l'image du système linéaire $G_d = \mathcal{G}$ par u_d est un point dans la jacobienne (en effet, tous les diviseurs de \mathcal{G} sont linéairement équivalents). Par définition du pushdown (1.1) on a $u_{d*}[G_d] = 0$. En utilisant la formule 1.6 on obtient :

$$\sum_{i=1}^d \frac{(-1)^{i-1}}{i} \binom{d}{i} i_* C = 0 \text{ dans } A^{g-1}(J) \quad (1.2)$$

En remplaçant C par sa décomposition, et en explicitant l'action des opérateurs sur celle-ci :

$$i_* C = i^2 C_{(0)} + \dots + i^{g+1} C_{(g-1)}$$

on obtient après regroupement des termes, projection sur les espaces propres et calculs la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^{g-1} \left((-1)^d d! \{d^{i+1}\} \right) C_{(i)} = 0$$

où l'expression $\{d^{i+1}\}$ désigne le nombre de Stirling de deuxième espèce, c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble à $i+1$ éléments en d parties non vides. Ce nombre est non nul dès que $i+1$ est supérieur ou égal à d , c'est-à-dire dès que $i \geq d-1$. On en déduit le résultat d'annulation du théorème 1.6

Dans le cas où C admet un système linéaire \mathcal{G} de plus grande dimension $r \geq 1$, nous proposons une expression de la classe $u_{d*}[\mathcal{G}]$ qui généralise 1.7. On calcule en fait par récurrence les expressions des classes $[G_n]$ dans $A^{n-r}(C_n)$ en fonction des diagonales généralisées. En écrivant à nouveau $u_{d*}[\mathcal{G}] = 0$ on en déduit des relations nouvelles entre les classes algébriques des composantes $C_{(i)}$.

1.6 Relations de Polishchuk dans l'anneau tautologique.

Définition de l'anneau tautologique.

On appelle anneau tautologique la plus petite sous-algèbre de $A(JC)$ contenant C qui soit stable par les produits d'intersection et de Pontryagin, ainsi que par les opérateurs k_* et k^* . On note R cet anneau, et $R_{(i)}^p$ pour les intersections : $R_{(i)}^p = R \cap A_{(i)}^p(JC)$. L'anneau tautologique est étudié par Arnaud Beauville dans [Bea04]. Il y démontre que R est le plus petit sous-espace vectoriel de $A(JC)$ contenant C et stable par le produit de Pontryagin. C'est également le plus petit sous-espace de $A(JC)$ contenant $C = w_1, w_2, \dots, w_g$ et stable par intersection (ce qui montre que R est de dimension finie).

Lien entre deux façons de décrire l'anneau tautologique.

Il est possible de relier les deux descriptions. Soit $\lambda^g - a_1\lambda^{g-1} + \dots + (-1)^g a_g$ un polynôme en une indéterminée λ sur un anneau A . Tout polynôme en ses racines λ_i invariant par l'action du groupe symétrique \mathcal{S}_g s'exprime à partir des polynômes symétriques élémentaires en les racines : $\lambda_1, \dots, \lambda_g$. On définit ainsi les polynômes de Newton :

$$N^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=1}^g \lambda_i^k$$

en les racines λ_i de

$$\lambda^g - \lambda^{g-1}w^1 + \dots + (-1)^g w^g$$

D'après ce qui précède, pour tout k la classe N^k est un polynôme en w^1, \dots et w^k , et réciproquement, w^k est un polynôme en N^1, \dots, N^k .

Le résultat :

$$\mathcal{F}(C_{(k)}) = -N^{k+1}$$

est démontré dans [Bea04] Il est également montré que l'anneau R est bigradué, c'est-à-dire que :

$$R = \bigoplus_{\substack{0 \leq p \leq g \\ 0 \leq i \leq p}} R_{(i)}^p$$

D'après ce qui précède, l'anneau R peut être décrit à partir du produit de Pontryagin :

$$R = \frac{\mathbb{Q}[C_{(0)}, \dots, C_{(g-1)}]}{\mathcal{R}}$$

ou à partir du produit d'intersection :

$$R = \frac{\mathbb{Q}[N^1, \dots, N^g]}{\mathcal{FR}}$$

avec \mathcal{R} qui désigne les relations entre les composantes $C_{(i)}$ pour le produit de Pontryagin et \mathcal{FR} les relations entre les N^i pour le produit d'intersection.

Relations d'Alexander Polishchuk

Alexander Polishchuk propose dans [Pol] pour chaque entier g un système de relations valable pour toutes les courbes de genre g dans $A(JC)$. L'espace vectoriel qu'elles engendrent est un idéal qu'il note I_g . Cet idéal est également stable par transformation de Fourier, ce qui amène

l'auteur à penser qu'il est complet pour les courbes génériques.

La description de ces relations nécessite quelques notations. Pour tous les entiers $1 \leq k$, $0 \leq d \leq k-1$ et n_1, \dots, n_k supérieurs à 1, et pour toutes les partitions $\{I_1, \dots, I_m\}$ de $\{1, \dots, k\}$ avec m tel que $-d+k \leq m \leq g-d+k - \sum_{i=1}^k n_i$, il note :

$$b(I) = \frac{(n_{i_1} + \dots + n_{i_s})!}{n_{i_1}! \dots n_{i_s}!} \quad \text{et}$$

$$d(I) = n_{i_1} + \dots + n_{i_s} - s + 1$$

Il utilise également la notation p_i pour décrire les cycles de l'anneau tautologique :

$$p_i = \mathcal{F}(C_{(i-1)}) \text{ c'est-à-dire que } p_i = -N^i$$

On a alors :

$$R = \frac{\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g]}{\mathcal{FR}}$$

Théorème 1.9 (Polishchuk, Théorème 0.1) *Pour tous les entiers vérifiant les conditions données ci-dessus, on a la relation suivante dans $A(JC)$, où la somme est prise sur les partitions de $\{1, \dots, k\}$ sans tenir compte de l'ordre :*

$$\sum_{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m = \{1, \dots, k\}} \binom{m-1}{d+m-k} \frac{b(I_1) \dots b(I_m)}{(g-d+m+k - \sum_{i=1}^k n_i)!} p_1^{g-d+m+k - \sum_{i=1}^k n_i} p_{d(I_1)} \dots p_{d(I_m)} = 0$$

Alexander Polishchuk calcule également l'action de la transformée de Fourier sur les monômes :

Théorème 1.10 (Polishchuk, Théorème 0.4) *La formule ci-dessous décrit l'action de la transformation de Fourier sur les monômes en les p_i . La somme est prise comme ci-dessus sur les partitions non ordonnées de $\{1, \dots, k\}$:*

$$\mathcal{F}(p_1^n p_{n_1} \dots p_{n_k}) = (-1)^n n! \sum_{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m = \{1, \dots, k\}} \frac{b(I_1) \dots b(I_m)}{(g-d-m+k - \sum_{i=1}^k n_i)!} p_1^{g-d+m+k - \sum_{i=1}^k n_i} p_{d(I_1)} \dots p_{d(I_m)}$$

On a vu plus haut (1.8) que le théorème 1.6 impliquait la nullité des $C_{(i)}$ pour $i \geq \frac{g+1}{2}$. Cette annulation se déduit en fait des relations ci-dessus.

Chapitre 2

Calcul de la classe d'un système linéaire

Supposons que la courbe C admette un système linéaire de dimension r et de degré d , sans point de base. L'objectif de ce chapitre est le calcul de la classe de ce système linéaire considéré comme sous-variété du produit symétrique C_d . Ce calcul peut s'effectuer en calculant successivement les classes des systèmes linéaires tronqués G_k . Les théorèmes 2.8 et 2.10 expriment ces classes respectivement dans l'anneau de Chow et l'anneau des cycles modulo équivalence algébrique.

Les deux premières sections de ce chapitre introduisent le vocabulaire nécessaire pour exprimer et démontrer la formule de récurrence. Quelques calculs de classes sont également effectués. Les troisième et quatrième sections exposent la démonstration de la formule de récurrence entre les classes $[G_k]$. On en déduit dans la cinquième section une expression de ces classes en fonction de celles des diagonales généralisées. Enfin, on simplifie cette expression dans $A(JC)$ à la sixième section.

2.1 Systèmes linéaires et systèmes linéaires tronqués.

2.1.1 Systèmes linéaires.

Pour tout diviseur D sur C , le système linéaire complet $|D|$ est l'ensemble des diviseurs effectifs linéairement équivalents à D . Ces diviseurs sont les zéros (comptés avec multiplicités) des sections globales du fibré en droites naturellement associé à D . Comme C est compacte, deux sections définissent le même diviseur si et seulement si elle sont proportionnelles. Le système linéaire complet $|D|$ est alors paramétré par un espace projectif :

$$|D| \simeq \mathbb{P}H^0(C, \mathcal{O}(D))$$

Toute partie de $|D|$ correspondant à un sous-espace projectif de dimension r est appelée système linéaire de dimension r . Le degré du système linéaire est le degré de chacun de ses diviseurs. La notation g_d^r permettra d'abréger l'expression "système linéaire de dimension r et de degré d ". Un point p de C est dit point de base d'un système linéaire s'il apparaît dans chacun de ses diviseurs.

Soit \mathcal{G} un g_d^r sans point de base associé à un sous-espace projectif $\mathbb{P}V$ de $\mathbb{P}H^0(C, \mathcal{O}(D))$. On peut associer à tout point p de C l'hyperplan projectif de $\mathbb{P}V$ des sections s'annulant en p , et obtenir ainsi une application :

$$\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}(V)^*$$

A tout choix d'une base (s_0, \dots, s_r) de V on peut associer naturellement une base de $\mathbb{P}(V^*)$, et exprimer Φ à l'aide des coordonnées homogènes dans cette base :

$$\begin{aligned} \Phi : C &\longrightarrow \mathbb{P}^r \\ p &\longmapsto [s_0(p) : \dots : s_r(p)] \end{aligned}$$

Réciproquement, tout morphisme Φ de la courbe C dans l'espace projectif \mathbb{P}^r dont l'image n'est contenue dans aucun hyperplan définit un système linéaire de dimension r sans point de base. Les diviseurs en sont les pullback par Φ des hyperplans projectifs de \mathbb{P}^r .

Pour tout diviseur E de C_k avec $1 \leq k \leq d$ on peut également considérer la partie $\mathcal{G}(-E)$ de C_{d-k} des diviseurs auxquels il manque le diviseur E pour appartenir à \mathcal{G} :

$$\mathcal{G}(-E) = \{ D \in C_{d-k} \mid D + E \in \mathcal{G} \} \quad (2.1)$$

Ces diviseurs sont linéairement équivalents et correspondent à un sous-espace projectif de $\mathbb{P}V$, celui des sections s'annulant sur E .

2.1.2 Systèmes linéaires tronqués.

Soit \mathcal{G} un \mathcal{G}_d^r sur une courbe C . On peut considérer \mathcal{G} comme une partie de C_d . On peut également pour tout entier n vérifiant $r \leq n \leq d$ considérer la partie de C_n des diviseurs du système linéaire tronqué :

Définition 1 Pour tout entier n tel que $r \leq n \leq d$, on note :

$$G_n = \{ D \in C_n \mid \exists E \in C_{d-n}, D + E \in \mathcal{G} \}$$

Les parties G_n sont munies d'une structure de variété déterminantale de dimension r . On peut lire la description de cette structure dans [ACGH85] (lemme VIII.3.2).

Bien sûr, G_d est le système linéaire \mathcal{G} . Ce chapitre a pour objet de calculer la classe de \mathcal{G} dans $CH^{g-r}(C_d)$ en fonction de celles de diagonales généralisées δ_{i_1, \dots, i_r} c'est-à-dire des variétés :

$$\{i_1 x_1 + \dots + i_r x_r + o_1 + \dots + o_{d-\sum i_k}\}$$

La méthode proposée s'appuie sur la formule de récurrence 2.3 liant pour tout n les classes $[G_k]$ pour k variant de r à n .

Morphisme d'addition σ_n

On note pour tout n entier strictement positif $\sigma_n : C^n \rightarrow C_n$ le morphisme naturel d'addition. Il sera en fait plus simple de calculer les classes $\sigma_k^*[G_k]$. Comme les σ_k sont des morphismes finis de degré $k!$, on conclura avec la formule de projection : $\sigma_{k*} \sigma_k^* = k! \text{id}_{CH(C^k)}$

Variétés G_k pour k plus petit que r

Pour tout k entier vérifiant $1 \leq k \leq r$ on a $G_k = C_k$. En effet, considérons $x_1 + \dots + x_k$ un élément de C_k tel que les éléments du support x_i soient deux à deux distincts. Il existe un hyperplan H de \mathbb{P}^r passant par les images de ces k points par Φ . Le pullback Φ^*H est un diviseur de \mathcal{G} . Le diviseur $x_1 + \dots + x_k$ lui est subordonné, et définit donc bien un élément de G_k . Un élément générique de C_k est donc dans G_k . En passant à l'adhérence on a l'égalité voulue entre les deux ensembles.

2.2 Descriptions de quelques variétés et morphismes.

On définit dans le premier paragraphe les variétés $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$ en fonction de la classe desquelles on souhaite exprimer la classe du système linéaire \mathcal{G} (théorème 2.8). L'intérêt est que leur image (par u_n) dans la jacobienne s'écrit en fonction des produits de Pontryagin des images par les homothéties i_*C de la courbe C .

On définit dans les autres paragraphes les morphismes et les variétés nécessaires pour énoncer la relation de récurrence 2.3. Il s'agit des morphismes de copie $\Psi_{\mathcal{P}}$ et de la variété $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ des n -uplets de points de \mathbb{P}^r sur un même hyperplan. Dans l'optique de la démonstration du théorème 2.8 on calcule la classe de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ dans l'anneau de Chow.

2.2.1 Variétés diagonales $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$

Si A est une partie de $\{1, \dots, n\}$, on note Δ^A la sous-variété des x de C^n tels que $x_a = x_{a'}$ pour tout couple (a, a') de A^2 . Pour tout point o de C , on notera O_o^A la sous-variété des x de C^n tels que $x_a = o$ pour tout a de A . Pour des parties disjointes $I_1, \dots, I_r, A_1, \dots, A_s$ de $\{1, \dots, n\}$, et des points o_1, \dots, o_s on notera $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$ pour l'intersection des variétés $\Delta^{A_1}, \dots, \Delta^{A_k}$ et $O_{o_1}^{A_1}, \dots, O_{o_s}^{A_s}$.

On associera à des entiers i_1, \dots, i_r de somme m la sous-variété δ_{i_1, \dots, i_r} de C_m des diviseurs de la forme $i_1 x_1 + \dots + i_r x_r$ où les x_i sont dans C .

2.2.2 Morphisme Ψ de C^k dans C^m .

Il sera commode d'appeler k -partition de X toute partition de X en k parties non vides. Lorsqu'on ordonne ces k parties, on parle de k -partitions ordonnées. Lorsqu'on ne précise pas, une partition est considérée sans ordre.

Associons à une partition ordonnée (A_1, \dots, A_k) de $\{1, \dots, n\}$ le morphisme :

$$\Psi_{(A_1, \dots, A_k)} : C^k \longrightarrow C^n \\ x \longmapsto y$$

où $y_i = x_j$ pour l'unique j tel que $i \in A_j$. Par exemple, on a les morphismes :

$$\Psi_{\{1,2\}} : C \longrightarrow C^2 \\ x \longmapsto (x, x)$$

et

$$\Psi_{(\{1,2\}, \{3\})} : C^2 \longrightarrow C^3 \\ (x, y) \longmapsto (x, x, y)$$

Si une partie V de C^k est stable par \mathcal{S}_k , on peut définir pour toute partition (A_1, \dots, A_k) de $\{1, \dots, n\}$ son image par $\Psi_{(A_1, \dots, A_k)}$ indépendamment de l'ordre des A_i , c'est-à-dire que pour toute permutation $\tau \in \mathcal{S}_k$, on a :

$$\Psi_{(A_1, \dots, A_k)}(V) = \Psi_{(A_{\tau,1}, \dots, A_{\tau,k})}(V) \quad (2.2)$$

L'image ne dépend que de la partition $\mathcal{P} = \{A_1, \dots, A_k\}$ choisie, et on peut convenir de la noter $\Psi_{\mathcal{P}}(V)$. Pour autant, $\Psi_{\mathcal{P}}$ ne définit pas un morphisme, et on ne peut a priori pas écrire $\Psi_{\mathcal{P}*}[V]$. Mais comme à toute partition \mathcal{P} on peut associer $k!$ partitions ordonnées \mathcal{P}' qui sont telles que $\Psi_{\mathcal{P}}V = \Psi_{\mathcal{P}'}V$, et comme $\Psi_{\mathcal{P}'}$ est un isomorphisme sur son image, on a les égalités entre cycles :

$$[\Psi_{\mathcal{P}}V] = \Psi_{\mathcal{P}'*}[V] \text{ et}$$

$$[\Psi_{\mathcal{P}}V] = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mathcal{P}' \text{ k-partition ordonnées} \\ \text{associées à } \mathcal{P}}} \Psi_{\mathcal{P}'*}[V] \tag{2.3}$$

En particulier pour les sous-variétés $\sigma_k^{-1}G_k$ de C^k , on peut définir pour toute partition \mathcal{P} de $\{1, \dots, n\}$ en k parties non vides son image par $\Psi_{\mathcal{P}}$ et utiliser les formules pour les cycles ci-dessus.

2.2.3 Variété des points projectifs sur un même hyperplan $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$

On notera $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ l'ensemble des éléments de $(\mathbb{P}^r)^n$ dont les composantes sont sur un même hyperplan projectif. (Si $r = 1$, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}^n$ correspond à la diagonale dans $(\mathbb{P}^1)^n$.) On calcule dans ce numéro sa classe dans l'anneau de Chow. Rappelons que l'anneau de Chow de l'espace projectif \mathbb{P}^r s'exprime en fonction de la classe h d'un hyperplan projectif quelconque : $CH(\mathbb{P}^r) = \frac{\mathbb{Q}[h]}{(h^{r+1})}$ (on consultera par exemple la proposition 8.4 à la page 145 de [Ful83]). On sait également décrire l'anneau de Chow du produit d'une variété non-singulière X avec un tel espace projectif : $CH(X \times \mathbb{P}^r) \simeq CH(X) \otimes CH(\mathbb{P}^r)$ (proposition 8.3.7 à la page 141 de [Ful83]). On en déduit :

$$CH((\mathbb{P}^r)^n) \simeq \frac{\mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n]}{(h_1^{r+1}, \dots, h_n^{r+1})}$$

où h_i correspond à la classe d'un hyperplan dans l'espace projectif en position i . On peut alors énoncer le

Théorème 2.1 *Pour tous r et n entiers non nuls vérifiant $r \leq n$, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ est une sous-variété irréductible de $(\mathbb{P}^r)^n$. Avec l'identification $CH((\mathbb{P}^r)^n) \simeq \frac{\mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n]}{(h_1^{r+1}, \dots, h_n^{r+1})}$ sa classe algébrique vaut :*

$$[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n] = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I = n-r}} \left(\prod_{a \in I} h_a \right)$$

Soit (x^1, \dots, x^n) un élément de $(\mathbb{P}^r)^n$. Si on note $(x_j^i)_{j \in \{1, \dots, r\}}$ les coordonnées homogènes de x^i , on a (x^1, \dots, x^n) dans $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^k$ si et seulement si la matrice $(x_j^i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq r}}$ est de rang inférieur ou égal à r . C'est le cas si et seulement si tous ses mineurs $r \times r$ sont nuls, et $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ est donc bien une partie fermée de $(\mathbb{P}^r)^n$. Notons $\mathcal{M}_{r+1, r+1}^{rg \leq r}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_{r+1, r+1}$ de rang inférieur ou égal à r . Si on note J la matrice de $\mathcal{M}_{n, r+1}$:

$$J = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{r+1, r+1}^{rg \leq r}$ est exactement l'image de l'application

$$\begin{matrix} \mathcal{M}_{n, n} \times \mathcal{M}_{r+1, r+1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n, r+1} \\ (A, B) & \longmapsto & AJB \end{matrix}$$

et est donc une variété irréductible. Notons alors π la surjection naturelle $\pi : \mathbb{C}^{r+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^r$ et F le fermé de $\mathcal{M}_{r+1, r+1}^{rg \leq r}$ ensemble des matrices dont au moins une colonne est nulle. $\mathcal{M}_{r+1, r+1}^{rg \leq r} \setminus F$ est irréductible (car tout ouvert d'une variété irréductible est irréductible). Enfin, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^k$ est irréductible car image par $\pi^{\times n}$ de $\mathcal{M}_{r+1, r+1}^{rg \leq r} \setminus F$.

La méthode utilisée dans le calcul de la classe de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ qui suit m'a été communiquée par Claire Voisin. Considérons la variété d'incidence $\mathcal{I} = \{(x, H) \in \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r*} \mid x \in H\}$. A toute

base \mathcal{B} de \mathbb{C}^{r+1} on peut associer une base duale \mathcal{B}^* . De telles bases induisent des systèmes de coordonnées de \mathbb{P}^r et \mathbb{P}^{r*} respectivement. Si $([x_0 : \dots : x_r], [a_0 : \dots : a_r])$ représente un élément de $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r*}$ dans ces systèmes de coordonnées, \mathcal{I} a pour équation $\sum a_i x_i = 0$. L'hypersurface \mathcal{I} de $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r*}$ est donc de bidegré $(1, 1)$.

Considérons maintenant la variété d'incidence $I = \{(x_1, \dots, x_n, H) \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} x_i \in H\}$, la projection π sur $(\mathbb{P}^r)^n$ et pour tout i de $\{1, \dots, n\}$ la projection pr_i sur l'espace $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^{r*}$ qui à (x_1, \dots, x_n, H) associe (x_i, H) :

$$\begin{array}{ccc} & I \subset (\mathbb{P}^r)^n \times \mathbb{P}^{r*} & \\ \pi \swarrow & & \searrow pr_i \\ (\mathbb{P}^r)^n & & \mathbb{P}^r \end{array}$$

On a $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n = \pi(I)$ et I est l'intersection transverse $\bigcap_{i=1}^n pr_i^{-1}(\mathcal{I})$. Si on suit l'isomorphisme :

$$CH((\mathbb{P}^r)^n \times \mathbb{P}^{r*}) \simeq \frac{\mathbb{Q}[h_1, \dots, h_n, h]}{(h_1^{r+1}, \dots, h_n^{r+1}, h^{r+1})}$$

où h_i correspond à la classe d'un hyperplan de l'espace projectif en position i , et h à la classe d'un hyperplan de \mathbb{P}^{r*} , on a dans $CH_{nr-n+r}((\mathbb{P}^r)^n \times \mathbb{P}^{r*})$ l'égalité :

$$[I] = \prod_{i=1}^n (h_i + h) \quad (2.4)$$

Enfin, pour tous sous espaces projectifs V_1, \dots, V_n de \mathbb{P}^r et W de \mathbb{P}^{r*} , on a l'image par π de $V_1 \times \dots \times V_n \times W$ qui est $V_1 \times \dots \times V_n$. La dimension est conservée si et seulement si W est un point projectif. Prendre le pullback par π_* revient donc à extraire le coefficient en h^r dans le produit (2.4), et on en déduit la formule annoncée.

2.3 Lien entre les ensembles $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ et G_k .

On notera désormais Φ^n pour le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} \Phi^n : & C^n & \longrightarrow & (\mathbb{P}^r)^n \\ & (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (\Phi(x_1), \dots, \Phi(x_n)) \end{array}$$

On établit dans ce paragraphe un lien entre l'image réciproque de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ par l'application Φ^n et les G_k pour k variant de 1 à n :

Théorème 2.2

$$(\Phi^n)^{-1} \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n = \bigcup_{k=r}^n \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ k-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(\sigma_k^{-1} G_k)$$

Cette relation permettra à la section suivante de déterminer par récurrence la classe du cycle $[G_n]$ dans $CH(C^n)$. On décrit en 2.3 l'image réciproque ensembliste $(\Phi^n)^{-1} \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ et on explique en 2.4.3 pourquoi les multiplicités qui apparaissent dans le pullback $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$ valent 1.

Preuve

- Par définition de $\Psi_{\mathcal{P}}$, σ_k et G_k , le terme de droite est inclus dans celui de gauche.
- Soit $x \in (\Phi^n)^{-1}\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$. Pour i et j deux éléments de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, nous noterons $i \sim j$ si et seulement si $x_i = x_j$. On définit ainsi une relation d'équivalence. On en déduit une partition \mathcal{P} de $\{1, \dots, n\}$ dont on notera k le cardinal. Si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont des représentants de ces k parties, on a les x_{α_i} distincts et d'images par Φ sur un même hyperplan. Donc $(x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_k})$ est un élément de $\sigma_k^{-1}G_k$, et x est dans $\Psi_{\mathcal{P}}(\sigma_k^{-1}G_k)$. On a alors la première égalité :

$$(\Phi^n)^{-1}\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n = \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(\sigma_k^{-1}G_k)$$

Mais on peut montrer que pour tout $k < r$ on a l'inclusion :

$$\bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(\sigma_k^{-1}G_k) \subset \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ } r\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(\sigma_k^{-1}G_k) \quad (2.5)$$

- En effet, pour $k \leq r$, on sait que $G_k = C_k$ (voir 2.1.2), et donc que $\sigma_k^{-1}G_k = C^k$. Comme

$$\bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(C^k)$$

est l'ensemble des éléments de C^n avec au plus k composantes distinctes, on a pour tout $k \leq r$ l'inclusion

$$\bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(C^k) \subset \bigcup_{\substack{\mathcal{P} \text{ } r\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}}(C^r)$$

d'où l'égalité annoncée dans le théorème 2.2

2.4 Relation de récurrence entre les cycles $[G_k]$

On démontre ici une relation de récurrence entre les cycles $[G_k]$ valable dans l'anneau de Chow. Cette formule permet le calcul des cycles de la section suivante.

Théorème 2.3 *Pour tout entier $n \geq r$ on a les égalités suivantes dans $CH(C^n)$*

$$\begin{aligned} \Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n] &= \sum_{k=r}^n \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition} \\ \text{de } \{1, \dots, n\}}} [\Psi_{\mathcal{P}}(\sigma_k^{-1}G_k)] \\ \Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n] &= \sum_{k=r}^n \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition} \\ \text{ordonnée de } \{1, \dots, n\}}} \Psi_{\mathcal{P}*}(\sigma_k^*[G_k]) \end{aligned}$$

On montre d'abord que l'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ est réduite (dans les sous-sections 2.4.1 et 2.4.2) en considérant les espaces tangents, avant de montrer que l'image réciproque par Φ^n est réduite également (dans la sous-section 2.4.3).

Pour montrer que l'intersection est réduite, on étudie dans la sous-section 2.4.2 les espaces tangents à $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ et à $\Phi(C)^n$, ainsi que leur somme. L'étude préliminaire de la sous-section 2.4.1 permet de vérifier qu'un point générique de l'intersection est un point lisse de chacune des deux variétés considérées.

La première égalité du théorème 2.3 se déduit alors du théorème 2.2. La deuxième égalité du théorème 2.3 se déduit de la première en comptant $k!$ façons d'ordonner un ensemble à k éléments.

2.4.1 Résultats préliminaires

Dimension de l'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$

Théorème 2.4 *L'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ est pure de dimension r .*

Preuve :

Les composantes irréductibles de l'intersection dans $(\mathbb{P}^r)^n$ de deux variétés projectives de dimensions $nr - (n - r)$ et n sont de dimensions supérieures ou égales à r . Considérons alors la variété d'incidence $I = \{(y_1, \dots, y_n, H) \in \Phi(C)^n \times (\mathbb{P}^r)^* \mid \forall i y_i \in H\}$ et les projections :

$$\begin{array}{ccc}
 & I \subset \Phi(C)^n \times \mathbb{P}^{r*} & \\
 \swarrow \scriptstyle pr_1 & & \searrow \scriptstyle pr_2 \\
 \Phi(C)^n & & \mathbb{P}^{r*}
 \end{array}$$

Comme la courbe $\Phi(C)$ est non dégénérée, la fibre $pr_2^{-1}(H)$ au dessus d'un point H de \mathbb{P}^{r*} est de dimension 0. On majore ainsi la dimension de toute composante irréductible de I par r , et donc de toute composante irréductible de $pr_1(I) = \Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$.

Espace engendré par les composantes d'un point générique de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$

Théorème 2.5 *Pour un point $p = (p_1, \dots, p_n)$ générique de l'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ les composantes p_i engendrent un espace projectif de dimension $r - 1$.*

Preuve :

Si r vaut 1, la variété $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^1}^n$ est la diagonale $\{(x, \dots, x) \in (\mathbb{P}^1)^n \mid x \in \mathbb{P}^1\}$. Comme l'image de C par Φ est \mathbb{P}^1 , l'intersection étudiée est cette diagonale. L'espace projectif engendré par les composantes de tout élément de cette diagonale est un point projectif, donc de dimension 0. Si la

dimension r est supérieure ou égale à 2, considérons V une composante irréductible de la variété d'incidence I définie dans le numéro précédent. L'image par pr_2 de V est \mathbb{P}^{r*} (sinon V serait de dimension strictement inférieure à r). On peut trouver r composantes qui sont distinctes deux à deux sur un ouvert U de V , sinon on majorerait strictement la dimension de V par r . Citons le théorème de position général comme il est énoncé dans la première section du troisième chapitre de [ACGH85] :

Théorème de position générale. Soit $\Gamma \subset \mathbb{P}^r$ une courbe de degré d , irréductible, non dégénérée, éventuellement singulière. Alors un hyperplan général rencontre Γ en d points, et r d'entre eux sont linéairement indépendants.

Soit alors W un ouvert de \mathbb{P}^{r*} correspondant à de tels hyperplans pour la courbe $\Phi(C) \subset \mathbb{P}^r$. Sur l'ouvert $U \cap pr_2^{-1}(W)$, les r composantes génériquement distinctes citées plus haut sont linéairement indépendantes.

Transversalité de $\Phi(C)$ et de l'hyperplan associé à un point de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$

Théorème 2.6 Pour un point $p = (p_1, \dots, p_n)$ générique de l'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'espace projectif tangent $\mathbb{T}_{p_i} \Phi(C)$ qui coupe transversalement l'hyperplan projectif engendré par les composantes p_i .

Preuve :

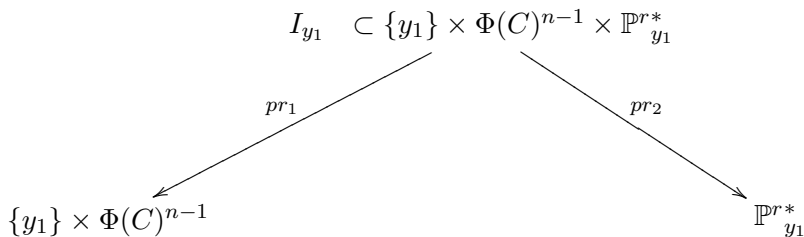
L'ouvert $U \cap pr_2^{-1}(W)$ d'une composante irréductible V de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$, déterminé à la question précédente convient. En effet, les hyperplans cités dans le théorème de position générale coupent la courbe $\Phi(C)$ en d points distincts, donc transversalement.

Sur chaque composante irréductible de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ aucune projection n'est constante

Théorème 2.7 Pour toute composante irréductible V de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$, et tout entier i de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, la i^{eme} projection $pr_i : (\mathbb{P}^r)^n \rightarrow \mathbb{P}^r$ n'est pas constante sur V .

Preuve :

Soit V une telle composante, et supposons $pr_1(V) = y_1$. Montrons que la dimension de V est majorée par $r - 1$, ce qui contredit le résultat du théorème 2.4. On note $\mathbb{P}_{y_1}^{r*}$ l'ensemble des hyperplans de \mathbb{P}^r passant par y_1 . On considère la variété d'incidence $I_{y_1} = \{(y_1, \dots, y_n, H) \in \{y_1\} \times \Phi(C)^{n-1} \times \mathbb{P}_{y_1}^{r*} \mid \forall i y_i \in H\}$ ainsi que les projections :



La dimension de toute variété irréductible de I_{y_1} est majorée par $r - 1$, car la fibre au dessus d'un point de $\mathbb{P}_{y_1}^{r*}$ est de dimension 0. La composante V qui est l'image par pr_1 d'une composante irréductible de I_{y_1} est donc également majorée par $r - 1$.

2.4.2 Etude des espaces tangents

Déterminons tout d'abord l'espace tangent à la variété $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ en un point $p = (p_1, \dots, p_n)$ de $(\mathbb{P}^r)^n$. Comme les p_i sont sur un même hyperplan projectif, on peut choisir un système de coordonnées tel que celles des points p_i s'écrivent comme les colonnes de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1^1 & v_1^n \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ v_{r-1}^1 & v_{r-1}^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sur un voisinage de (p_1, \dots, p_r) , les coordonnées du n -uplet s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v_1^1 + \epsilon_1^1 & v_1^n + \epsilon_1^n \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ v_{r-1}^1 + \epsilon_{r-1}^1 & v_{r-1}^n + \epsilon_{r-1}^n \\ \epsilon_r^1 & \epsilon_r^n \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Elles correspondent à un élément de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ si et seulement si tous les mineurs $(r + 1) \times (r + 1)$ de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs ci-dessus sont nuls. Les termes de degré 1 en les ϵ_j^i sont donnés par les déterminants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ v_1^{\sigma(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & v_1^{\sigma(r+1)} \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ v_{r-1}^{\sigma(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{r-1}^{\sigma(r+1)} \\ \epsilon_r^{\sigma(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \epsilon_r^{\sigma(n)} \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

pour toutes les applications injectives $\sigma : \{1 \dots r + 1\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.

Les éléments de l'espace tangent correspondent aux vecteurs $(\epsilon_j^i)_{\substack{i \in \{1 \dots n\} \\ j \in \{1 \dots r\}}}$ de \mathbb{C}^{nr} avec comme condition sur les ϵ_{r+1}^i que pour tout choix de $r + 1$ points $p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(r+1)}$ parmi p_1, \dots, p_n , les points modifiés associés (c'est à dire ceux qui correspondent aux colonnes du déterminant 2.7) restent sur un même hyperplan projectif.

Si les points p_1, \dots, p_n engendrent en fait un espace projectif de dimension strictement inférieure à $r - 1$, la dernière condition est automatiquement vérifiée. On a alors l'espace tangent $T_p \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ qui est $T_p(\mathbb{P}^r)^n$ tout entier, et p est point singulier de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$.

Supposons maintenant que ces points engendrent un espace projectif de dimension $r - 1$, par exemple les r premiers. On a pour tout choix de j dans l'ensemble $\{r + 1 \dots n\}$ la nullité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 1 \\ v_1^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & v_1^r & v_1^j \\ & & & \dots & & & \\ & & & \dots & & & \\ v_{r-1}^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & v_{r-1}^r & v_{r-1}^j \\ \epsilon_r^1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \epsilon_r^{r_r} & \epsilon_r^j \end{vmatrix}$$

On obtient une relation entre $\epsilon_r^1, \dots, \epsilon_r^r$ et ϵ_r^j . Dans cette relation, le coefficient devant ϵ_r^j est non nul car il s'agit du mineur $(r - 1) \times (r - 1)$ supérieur gauche. Ces $n - r$ conditions étant indépendantes, la dimension de l'espace tangent est inférieure ou égale à $nr - (n - r)$. Mais comme il s'agit de la dimension de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$, on a égalité et p est un point lisse de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$.

On a donc identifié les points lisses de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ qui sont exactement les points $p = (p_1, \dots, p_n)$ dont les composantes p_i engendrent un espace projectif de dimension $r - 1$. D'après le théorème 2.5, un point générique de l'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ est un point lisse de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$.

Les points singuliers de $\Phi(C)^n$ sont les points (p_1, \dots, p_n) tels qu'au moins une des composante p_i soit un point singulier de $\Phi(C)$. D'après le théorème 2.7, sur chacune des composantes irréductibles de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^k$ aucune projection n'est constante. Les points générique de l'intersection sont donc des points lisses de $\Phi(C)^n$.

Soit alors p un point lisse de $\Phi(C)^n$ et de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$. D'après le calcul de l'espace tangent à $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ en p , il suffit pour que la somme des espaces tangents en p des deux variétés soient $T_p(\mathbb{P}^r)^n$ tout entier que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ l'espace tangent projectif $\mathbb{T}_{p_i} \Phi(C)$ coupe transversalement l'espace engendré par les composantes p_i . C'est le cas génériquement pour un point p de l'intersection $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ d'après le théorème 2.6

2.4.3 Conclusion

On considère la corestriction $\Phi^n : C^n \rightarrow \Phi(C)^n$ qui est un morphisme fini. Son lieu de ramification correspond aux n -uplets (p_1, \dots, p_n) dont au moins une des composantes est dans le lieu de ramification de Φ . D'après le théorème 2.7, aucune des sous-variétés irréductibles de $\Phi(C)^n \cap \mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ n'est incluse dans le lieu de ramification. L'image réciproque schématique de l'intersection est donc réduite, et on peut conclure à la première égalité du théorème 2.3.

2.5 Calcul de la classe de G_k dans $CH(C_k)$

Le résultat énoncé dans cette section concerne une courbe C admettant un g_d^r sans point de base noté \mathcal{G} . On fixe $D = p_1 + \dots + p_d$ un diviseur de \mathcal{G} .

On donne ci-dessous les classes des systèmes linéaires tronqués $[G_k]$ et $\sigma_k^*[G_k]$ dans $CH^{g-r}(C_k)$ et $CH^{g-r}(C^k)$. Dans l'énoncé qui suit les sommes sont prises :

- (pour la première somme) sur les parties disjointes I_1, \dots, I_r de $\{1, \dots, n\}$ pour lesquelles

on ne tient pas compte de l'ordre, si ce n'est pour les ranger par cardinaux croissants. Si on note i_u le cardinal de I_u , on doit donc avoir $i_1 \leq \dots \leq i_r$.

- (pour la première somme) pour tout choix des parties I_1, \dots, I_r on note $a_1, \dots, a_{n-\sum i_u}$ les éléments de $\{1, \dots, n\} \setminus \bigcup I_k$ rangés par ordre croissant.

- les choix de $n - \sum i_u$ points distincts $o_1, \dots, o_{n-\sum i_u}$ pris dans le support de D . Ces points sont considérés ordonnés dans le cas de la première somme *i*), et non ordonnés dans le cas de la seconde somme *ii*) .

Théorème 2.8 *On a les égalités suivantes valables dans $CH^{g-r}(C^n)$ et $CH^{g-r}(C_n)$ respectivement :*

$$i) \quad \sigma_n^*[G_n] = \sum_{\substack{I_1, \dots, I_r \subset \{1, \dots, n\} \\ o_1, \dots, o_{n-\sum i_u} \text{ distincts}}} \left(\prod_{u=1}^r (-1)^{i_u-1} (i_u - 1)! \right) [\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_{n-\sum i_u}}^{\{a_{n-\sum i_u}\}}]$$

$$ii) \quad [G_n] = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \\ o_1, \dots, o_{n-\sum i_u} \text{ distincts}}} \left(\prod_{u=1}^r \frac{(-1)^{i_u-1}}{i_u} \right) [\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_{n-\sum i_u}]$$

2.5.1 $i) \Rightarrow ii)$

Notons s pour $n - \sum i_u$. L'image par σ_n d'une diagonale généralisée $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_s}^{\{a_s\}}$ est $\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s$. Si les cardinaux i_l sont distincts deux à deux, on trouve au dessus d'un point générique de $\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s$ un unique antécédent par σ_n . Sinon, notons d_1, \dots, d_t les uniques entiers tels que $i_1 = \dots = i_{d_1}$, $i_{d_1} \neq i_{d_1+1}$, $i_{d_1+1} = \dots = i_{d_1+d_2}$, $i_{d_1+d_2} \neq i_{d_1+d_2+1}$, \dots , $i_{d_1+\dots+d_{t-1}+1} = \dots = i_{d_1+\dots+d_t}$. Soit alors x un point générique de $\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s$. Aux d_1 éléments x_1, \dots, x_{d_1} qui apparaissent chacun avec la multiplicité $i_1 = \dots = i_{d_1}$, correspondent $d_1!$ façons de les associer aux d_1 ensembles I_1, \dots, I_{d_1} . On dénombre ainsi $d_1! \dots d_t!$ antécédents de x par σ_n dans $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_s}^{\{a_s\}}$. On a donc :

$$\sigma_{n*}[\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_s}^{\{a_s\}}] = d_1! \dots d_t! [\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s]$$

Comptons combien la somme du théorème 2.8 comporte de diagonales $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_s}^{\{a_s\}}$ d'image $\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s$ par σ_n . Le nombre de façons de partitionner $\{1, \dots, n\}$ en d_1 parties à i_1 éléments, \dots , d_r parties à i_r éléments et une partie marquée à $(n - (i_1 + \dots + i_r))$ éléments vaut :

$$\frac{1}{d_1! \dots d_r!} \binom{d}{i_1, i_2, \dots, i_r, n-s} \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{d_1! \dots d_t!} \frac{d!}{i_1! \dots i_r! (n-s)!}$$

Enfin, il existe $(n-s)!$ façons de permuter les $n-s$ points de D choisis, car pour toute permutation τ de \mathcal{S}_{n-s} on a :

$$\sigma_n \Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_{\tau,1}}^{\{a_1\}} \dots O_{o_{\tau,s}}^{\{a_s\}} = \delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s$$

Le morphisme σ_n est de degré $n!$. On conclut en utilisant la relation $\sigma_{n*} \circ \sigma_n^* = \text{deg}(\sigma_n) \cdot \text{Id}_{A(C_n)}$.

2.5.2 Initialisation de la récurrence

On a déjà montré (cf (2.1.2)) que $\sigma_r^{-1}G_r = C^r$. On en déduit :

$$\sigma_r^*[G_r] = (-1)^{r+\epsilon}[C^r]$$

avec $\epsilon = 1$ si r est impair, et $\epsilon = 0$ sinon, ce qui correspond au théorème au rang r .

2.5.3 Utilisation de la relation de récurrence

Supposons le théorème 2.8 vrai jusqu'au rang $n-1$. D'après le théorème 2.3 on a :

$$[G_n] = (\Psi_1, \dots, \Psi_k)^*[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \sum_{\mathcal{P} \text{ } k\text{-partition ordonnée de } \{1, \dots, n\}} \Psi_{\mathcal{P}*}(\sigma_k^*[G_k]) \quad (2.8)$$

Le théorème 2.1 donne la classe de $\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$ dans $CH(\mathbb{P}^n)$:

$$[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n] = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ \#I = n-r}} \left(\prod_{a \in I} h_a \right)$$

Par définition, $D = p_1 + \dots + p_d$ est le pullback de la classe d'un hyperplan de \mathbb{P}^r . On a alors :

$$\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n] = \sum_{\substack{o_1, \dots, o_{n-r} \in \{p_1, \dots, p_d\} \\ 1 \leq a_1 < \dots < a_{n-r} \leq n}} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_r}^{\{a_r\}} \quad (2.9)$$

où les o_i sont choisis dans le support de D (et ne sont pas nécessairement distincts). D'après l'hypothèse de récurrence les classes $\sigma_k^*[G_k]$ sont sommes de classes de variétés de la forme $\Delta^{J_1} \dots \Delta^{J_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}}$ où $(J_1, \dots, J_r, \{o_1\}, \dots, \{o_r\})$ est une partition de $\{1, \dots, k\}$. Par définition des morphismes $\Psi_{\mathcal{P}}$, les classes

$$\Psi_{\mathcal{P}*}[\Delta^{J_1} \dots \Delta^{J_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}}]$$

sont à nouveau des classes de la forme

$$[\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}]$$

avec $(I_1, \dots, I_r, A_1, \dots, A_s)$ une partition de $\{1, \dots, n\}$. Le cycle $\sigma_n^*[G_n]$ s'exprime donc comme une combinaison linéaire de telles classes.

Fixons une partition $(I_1, \dots, I_r, A_1, \dots, A_s)$ de $\{1, \dots, n\}$ et cherchons pour quels k de $\{r \dots n\}$, et quelles partitions $(J_1, \dots, J_r, \{b_1\}, \dots, \{b_s\})$ de $\{1, \dots, k\}$ il existe une k -partition ordonnée \mathcal{P} de $\{1, \dots, n\}$ telle que :

$$\Psi_{\mathcal{P}*}[\Delta^{J_1} \dots \Delta^{J_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}}] = \Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$$

et quels sont les coefficients associés dans la somme (2.8).

Comme toute renumérotation σ des parties J_1, \dots, J_r correspond à la même variété :

$$\Delta^{J_1} \dots \Delta^{J_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}} = \Delta^{J_{\sigma(1)}} \dots \Delta^{J_{\sigma(r)}} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$$

on peut ne considérer que celles telles que pour tout u de $\{1, \dots, r\}$:

$$\Psi_{\mathcal{P}} \Delta^{J_u} = \Delta^{I_u}$$

En notant i_u et j_u les cardinaux des parties I_u et J_u , on doit avoir par définition des variétés Δ et des morphismes $\Psi_{\mathcal{P}}$ les encadrements :

$$1 \leq j_u \leq i_u \quad \text{pour tout } u \text{ de } \{1, \dots, r\}$$

Les classes $\Delta^{J_1} \dots \Delta^{J_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}}$ proviennent de cycles $\sigma_k^*[G_k]$ avec $k = \sum_{u=1}^r j_u + s$.

Interviennent les cycles $\sigma_k^*[G_k]$ lorsque k vérifie l'inégalité :

$$r \leq k \leq n \quad \text{soit} \quad r \leq \sum_{u=1}^r j_u + s \leq \sum_{u=1}^r i_u + \sum_{v=1}^s \#A_v$$

Toutes ces contributions issues de $\sigma_k^*[G_k]$ sont associées au coefficient :

$$-\frac{1}{(\sum j_u + s)!} \prod_{u=1}^r (j_u - 1)! (-1)^{j_u - 1} \quad (\text{a})$$

que l'on voit apparaître dans la somme (2.8). Choisir $J_1, \dots, J_r, \{b_1\}, \dots, \{b_s\}$ revient à choisir dans $\{1, \dots, \sum j_u + s\}$ un premier ensemble à j_1 éléments, un deuxième disjoint à j_2 éléments, ..., un $r^{\text{ième}}$ à j_r éléments disjoints des $r - 1$ premiers, et ordonner les s singletons restants. On compte :

$$\frac{(\sum j_u + s)!}{j_1! \dots j_r!} \text{ telles façons.} \quad (\text{b})$$

Il reste ensuite à choisir une partition ordonnée \mathcal{P} de $\{1, \dots, n\}$ telle que pour tout u de $\{1, \dots, r\}$ on ait $\Psi_{\mathcal{P}}[\Delta^{J_u}] = \Delta^{I_u}$ et pour tout v $\Psi_{\mathcal{P}}\Delta^{b_v} = \Delta^{A_v}$, ce qui revient à choisir des partitions ordonnées des ensembles I_u en j_u parties non vides. Notons $\{a_b\}$ le nombre de Stirling de deuxième espèce, c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble à a éléments en b parties sans tenir compte de l'ordre. Le nombre de partitions ordonnées en b parties est alors $b!\{a_b\}$. Dans notre cas, on compte :

$$\prod_{u=1}^r j_u! \{j_u\} \quad (\text{c})$$

façons satisfaisantes de choisir \mathcal{P} .

Distinguons 4 cas dans notre décompte, selon que les I_u sont tous des singletons (auquel cas $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$ intervient) ou pas, et selon que tous les A_v sont des singletons ou pas.

1^{er} cas : les parties I_u et A_v sont des singletons.

De telles classes ne peuvent provenir que de $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$, et d'après (2.9) avec un coefficient égal à 1, ce qui correspond bien au produit :

$$\prod_{u=1}^r (i_u - 1)! (-1)^{i_u - 1}$$

lorsque tous les i_u valent 1.

2^{ème} cas : les parties I_u sont des singletons ; une des parties A_v n'est pas un singleton

On compte comme dans le cas précédent une contribution avec un coefficient égal à 1 provenant de $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$. Avec les cardinaux i_1, \dots, i_r égaux à 1, les autres contributions ne peuvent provenir d'après les explications qui précèdent que des cycles $\sigma_{r+s}^*[G_{r+s}]$, de classes $\Delta^{j_1} \dots \Delta^{j_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}}$ avec $j_1 = \dots = j_r = 1$. En utilisant les coefficients (a), (b) et (c) déterminés plus hauts, on trouve une contribution de :

$$-\frac{(r+s)!}{(r+s)!} = -1$$

qui compense la contribution de $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$.

3^{ème} cas : une des parties I_u n'est pas un singleton ; les parties A_v sont des singletons

Dans ce cas, le pullback $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$ ne contribue pas. On compte en revanche des contributions des cycles $\sigma_{\sum j_u+s}^*[G_{\sum j_u+s}]$ pour tous les entiers j_u vérifiant les encadrements $1 \leq j_u \leq i_u$ et $\sum j_u + s < n$. La dernière égalité est en fait équivalente à $\sum j_u < \sum i_u$. La somme est alors prise sur tous les j_u vérifiant l'encadrement $1 \leq j_u \leq i_u$ tels qu'il existe u de $\{1, \dots, r\}$ tel que j_u soit différent de i_u . On peut de façon équivalente considérer la somme sur tous les j_u vérifiant $1 \leq j_u \leq i_u$ et soustraire la contribution correspondant au terme pour lequel $i_u = j_u$ pour tout u . La contribution totale vaut alors :

$$-\left(\sum_{j_1=1}^{i_1} \dots \sum_{j_r=1}^{i_r} \prod_{u=1}^r (-1)^{j_u-1} (j_u - 1)! \{j_u^{i_u}\} - \prod_{u=1}^r (-1)^{i_u-1} (i_u - 1)! \{j_u^{i_u}\} \right)$$

On peut mettre dans la première somme la somme

$$\sum_{j_1=1}^{i_1} (-1)^{j_1-1} (j_1 - 1)! \{j_1^{i_1}\}$$

en facteur, qui est nulle d'après 2.9. La classe $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$ apparaît donc avec le coefficient :

$$(-1)^{\sum i_u+r} (i_1 - 1)! \dots (i_r - 1)!$$

ce qui correspond bien à l'hypothèse de récurrence au rang n .

4^{ème} cas : une des parties I_u n'est pas un singleton ; une des parties A_v n'est pas un singleton

De même le cycle $\Phi^{n*}[\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n]$ ne contribue pas, alors que contribuent les cycles $\Psi_{\mathcal{P}^*} \Delta^{j_1} \dots \Delta^{j_r} O_{o_1}^{\{b_1\}} \dots O_{o_s}^{\{b_s\}}$ des pushdown $\sigma_{\sum j_u+s}^*[G_{\sum j_u+s}]$ lorsqu'on a les inégalités $1 \leq j_u \leq i_u$ et $\sum j_u + s < n$. Mais n vaut $\sum i_u + \sum \#B_v$ avec au moins une des parties B_v de cardinal strictement supérieur ou égal à 1. La deuxième inégalité est donc une conséquence de la première, et la classe $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$ apparaît avec le coefficient :

$$\sum_{j_1=1}^{i_1} \dots \sum_{j_r=1}^{i_r} \prod_{u=1}^r (-1)^{j_u-1} (j_u - 1)! \{j_u^{i_u}\}$$

qui est nul comme expliqué au paragraphe précédent.

Etude d'une somme intermédiaire

Montrons une égalité qui a servi à calculer avec quels coefficients apparaissent les classes $\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{A_1} \dots O_{o_s}^{A_s}$ dans $\sigma_n^*[G_n]$:

Théorème 2.9 *Pour tout i entier supérieur ou égal à 2 on a la nullité de la somme suivante :*

$$G(i) = \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} (j-1)! \{j\}^i$$

On utilise la relation :

$$\{j\}^i = j \{j\}^{i-1} + \{j-1\}^i$$

Elle se comprend en considérant un des i éléments de l'ensemble à partager. Il existe des partitions telles qu'il soit seul. Il en existe $\{j-1\}^{i-1}$, autant que de partitions en $j-1$ parties d'un ensemble à $i-1$ éléments. Dans les autres cas, il existe $\{j\}^{i-1}$ façons de choisir les partitions, puis j façons de choisir la partie à laquelle incorporer l'élément restant. Il vient alors en remplaçant dans la définition de $G(i)$

$$\begin{aligned} G(i) &= \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} j! \{j\}^{i-1} + \sum_{j=1}^i (-1)^{j-1} (j-1)! \{j-1\}^i \\ G(i) &= \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1} j! \{j\}^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^j (j)! \{j\}^{i-1} = 0 \end{aligned}$$

2.6 Calcul de la classe de G_k dans $A(C_k)$

Le théorème 2.8 donne les classes des variétés G_k et $\sigma^{-1}G_k$ en fonction de celles de translatsés des diagonales généralisées $\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_s$ dans $CH(C_k)$. On en déduit les classes dans $A(C_k)$ des mêmes variétés :

Théorème 2.10 *Pour tout choix d'un point o de C , on a dans les anneaux $A^{g-r}(C^n)$ et $A^{g-r}(C_n)$ les égalités suivantes modulo équivalence algébrique, où la première somme est prise sur les partitions en $r+1$ ensembles non vides I_1, \dots, I_r et A de $\{1, \dots, n\}$. On ne tient pas compte de l'ordre pour les parties I_1, \dots, I_r sauf pour les ranger par cardinaux croissants $i_1 \leq \dots \leq i_r$.*

$$i) \quad \sigma_n^*[G_n] = \sum_{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_r \sqcup A = \{1, \dots, n\}} \binom{d}{n - \sum i_u} \left(\prod_{u=1}^r (-1)^{i_u-1} (i_u-1)! \right) [\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_o^A]$$

$$ii) \quad [G_n] = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r} \binom{d}{n - \sum i_u} \left(\prod_{u=1}^r \frac{(-1)^{i_u-1}}{i_u} \right) [\delta_{i_1, \dots, i_r} + (n - \sum i_u) o]$$

Preuve

Les simplifications découlent des égalités dans $A_n(C^{k+1})$ entre les classes $[W \times \{o\}]$ et $[W \times \{o'\}]$ si W est une sous-variété de dimension n de C^k , o et o' deux points de C . Par suite, on a pour tout choix d'une partition $(I_1, \dots, I_r, A = \{a_1, \dots, a_{n-\sum i_u}\})$ de $\{1, \dots, n\}$ et de $n - \sum i_u$ points $o_1, \dots, o_{n-\sum i_u}$ les égalités dans $A_r(C^n)$ et $A_r(C_n)$:

$$[\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_{o_1}^{\{a_1\}} \dots O_{o_{n-\sum i_u}}^{\{a_{n-\sum i_u}\}}] = [\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} O_o^A]$$

$$\text{et } [\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_{n - \sum i_u}] = [\delta_{i_1, \dots, i_r} + (n - \sum i_u)o]$$

pour tout point o de C . On conclut en comptant le nombre de façons de choisir $n - \sum i_u$ points distincts dans le support d'un élément de \mathcal{G} , c'est-à-dire parmi un ensemble à d éléments : $\binom{d}{n - \sum i_u}$.

Chapitre 3

Application au calcul de relations modulo équivalence algébrique

Tous les diviseurs d'un système linéaire \mathcal{G} sont linéairement équivalents et s'envoient donc par u_d sur un même point de la jacobienne $J\mathcal{C}$. Comme les dimensions ne sont pas conservées on a pour les classes :

$$u_{d*}[\mathcal{G}] = 0 \quad \text{dans } CH^{g-r}(J\mathcal{C})$$

On a calculé au chapitre précédent la classe de \mathcal{G} dans l'anneau de Chow en fonction des translatés des diagonales généralisées :

$$\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_m = \{i_1 x_1 + \dots + i_r x_r + o_1 + \dots + o_{n-\sum i_u} \mid x_i \in C\}$$

Les classes $u_{d*}[\delta_{i_1, \dots, i_r} + o_1 + \dots + o_m]$ s'expriment à partir des produits de Pontryagin $i_{1*}C * \dots * i_{r*}C * o_1 * \dots * o_{n-\sum i_u}$. En remplaçant C par sa décomposition :

$$C = C_{(0)} + \dots + C_{(g-1)}$$

on obtient une relation entre produits de Pontryagin des translatés des composantes $C_{(i)}$.

Pour simplifier le problème, on peut considérer la relation obtenue non plus modulo équivalence rationnelle mais modulo équivalence algébrique. Les translations correspondent alors à l'identité. La relation devient une combinaison linéaire de produits de Pontryagin des composantes $C_{(i)}$.

En projetant sur les espaces propres $A_{(s)}^{g-r}(J\mathcal{C})$ pour tout entier s positif, on obtient autant de relations. Les premières de ces relations sont triviales. Par exemple, la relation obtenue pour $s = 0$ est une relation monomiale avec $C_{(0)}^{*(g-r)}$ qui ne saurait être non triviale, pour ne pas aboutir à la nullité d'une petite puissance du thêta diviseur. Pour s grand, les relations sont difficiles à calculer, c'est-à-dire qu'on ne sait pas donner une formule fermée pour la relation obtenue en projetant $u_{d*}[\mathcal{G}]$ dans $A_{(s)}^{g-r}(J\mathcal{C})$. On peut en donner en revanche si on fixe s .

Dans ce chapitre, on donne via le théorème 3.1 une expression de ces relations faisant intervenir une somme difficile à simplifier (3.1). On montre que pour une courbe admettant un g_d^r , la première relation non triviale est obtenue dans $R_{(d-2r+1)}^{g-r}$, et on en donne une forme simple (3.2). Enfin, on explique quelles autres relations on peut espérer déduire à partir d'une première relation connue dans $R_{(j)}^i$, de multiplications par d'autres éléments de R et de transformations de Fourier. Ces relations et ces méthodes sont exploitées dans les chapitres 4 et 5.

3.1 Relations déduites de l'existence du système linéaire dans le cas général

A partir de maintenant, tout cycle considéré le sera modulo équivallence algébrique. On sait calculer des relations entre les produits de Pontryagin des composantes de la courbe à partir de la relation 2.10. Convenons de noter $\beta(d, a_1, \dots, a_r)$ pour la somme

$$\beta(d, a_1, \dots, a_r) = \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d (-1)^{i_1+\dots+i_r} \binom{d}{i_1+\dots+i_r} i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \quad (3.1)$$

A toute suite d'entiers i_1, \dots, i_r on associe comme dans la partie 2.5.1 les entiers d_1, \dots, d_s tels que

$$\begin{aligned} i_1 &= \dots = i_{d_1}, i_{d_1} \neq i_{d_1+1} \\ i_{d_1+1} &= \dots = i_{d_1+d_2}, i_{d_1+d_2} \neq i_{d_1+d_2+1} \\ &\dots \\ i_{d_1+\dots+i_{d_s-1}+1} &= \dots = i_{d_1+\dots+i_{d_s}} \text{ et } d_1 + \dots + d_s = r \end{aligned} \quad (3.2)$$

et on note γ pour le produit :

$$\gamma(d, i_1, \dots, i_r) = d_1! \dots d_s! \quad (3.3)$$

On a les relations :

Théorème 3.1 *Si C admet un g_d^r sans point de base, on a pour tout entier positif s la relation suivante dans $A_{(s)}^{g-r}(JC)$:*

$$\sum_{\substack{0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \\ a_1 + \dots + a_r = s}} \frac{\beta(d, a_1 + 1, \dots, a_r + 1)}{\gamma(d, a_1, \dots, a_r)} C_{(a_1)} * \dots * C_{(a_r)} = 0$$

ou de façon équivallente avec les notations de Polishchuk :

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \\ a_1 + \dots + a_r = s-r}} \frac{\beta(d, a_1, \dots, a_r)}{\gamma(d, a_1, \dots, a_r)} p_{a_1} \dots p_{a_r} = 0$$

On sait préciser pour chaque système linéaire quelle est la première relation non triviale parmi les relations précédemment décrites. On démontre dans la section 3.1.2 les résultats suivants :

Théorème 3.2

$$\begin{aligned} \beta(d, a_1, \dots, a_r) &= 0 & \text{si } a_1 + \dots + a_r < d - r + 1 & \text{ et} \\ \beta(d, a_1, \dots, a_r) &= (-1)^d a_1! \dots a_r! & \text{si } a_1 + \dots + a_r = d - r + 1 \end{aligned}$$

3.1.1 Projection de la relation sur les différents espaces propres

D'une part, tous les diviseurs d'un système linéaire \mathcal{G} ont par u_d une même image dans la jacobienne de la courbe. Comme la dimension n'est pas préservée, et par définition du pushdown, on a :

$$u_{d*}[\mathcal{G}] = 0$$

D'autre part, le résultat (2.10) appliqué au cas où $n = d$ donne :

$$u_{d*}[\mathcal{G}] = u_{d*}[G_d] = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \frac{(-1)^{i_1+\dots+i_r+\epsilon}}{i_1 \dots i_r} \binom{d}{i_1+\dots+i_r} [\delta_{i_1, \dots, i_r} + (d - \sum_{u=1}^r i_u) o] \quad (3.4)$$

L'image de la variété $\delta_{i_1, \dots, i_r} + (d - \sum i_u) o$ par u_d est un translaté de la variété $i_1 C + \dots + i_r C$ de JC , si l'on note iC l'image dans JC de C par i . De la définition du produit de Pontryagin, on tire $i_{1*} C * \dots * i_{r*} C = n [i_1 C + \dots + i_r C]$ où n est le degré du morphisme naturel d'addition :

$$\begin{array}{c} i_1 C \times \dots \times i_r C \\ \downarrow m \\ i_1 C + \dots + i_r C \end{array}$$

Le nombre d'antécédents au-dessus d'un point générique de $i_1 C + \dots + i_r C$ (c'est-à-dire un point $x = i_1 x_1 + \dots + i_r x_r$ avec les x_i distincts) dépend du nombre de fois qu'un coefficient i_k se répète dans la liste (i_1, \dots, i_r) . Associons à nouveau les entiers (d_1, \dots, d_s) à (i_1, \dots, i_r) comme en (3.2). On compte $d_1! \dots d_s!$ antécédents de x par m , correspondant aux $d_1!$ façons d'associer $i_1 x_1, i_1 x_2, \dots$ et $i_1 x_{d_1}$ aux d_1 copies de $i_1 C$, etc. On a alors :

$$i_{1*} C * \dots * i_{r*} C = d_1! \dots d_s! [i_1 C + \dots + i_r C]$$

et en remplaçant dans (3.4) :

$$u_{d*}[G_d] = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_r + \epsilon}}{i_1 \dots i_r} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} \frac{1}{d_1! \dots d_s!} i_{1*} C * \dots * i_{r*} C \quad (3.5)$$

On peut faire apparaître un deuxième coefficient multinomial :

$$u_{d*}[G_d] = \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r \leq n} \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_r + \epsilon}}{i_1 \dots i_r} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} \binom{r}{d_1, \dots, d_s} i_{1*} C * \dots * i_{r*} C$$

Comme à chaque choix d'entiers vérifiant $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r$ il existe $\binom{r}{d_1, \dots, d_s}$ r -uplets (j_1, \dots, j_r) obtenus par permutation des i_k , on peut réécrire l'égalité précédente :

$$u_{d*}[G_d] = \frac{1}{r!} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d \frac{(-1)^{i_1 + \dots + i_r + \epsilon}}{i_1 \dots i_r} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} i_{1*} C * \dots * i_{r*} C \quad (3.6)$$

Ecrivons

$$C = C_{(0)} + \dots + C_{(g)}$$

la décomposition de C selon 1.1 :

$$A^{g-1}(JC) = \bigoplus_{i=0}^g A_{(i)}^{g-1}(JC)$$

On connaît l'action des endomorphismes i_* sur les composantes de C :

$$i_* C = i^2 C_{(0)} + \dots + i^{2+g} C_{(g)}$$

Avec la multilinéarité :

$$i_{1*} C * \dots * i_{r*} C = \sum_{a_1=1}^g \dots \sum_{a_r=1}^g i_1^{a_1+2} \dots i_r^{a_r+2} C_{(a_1)} * \dots * C_{(a_r)}$$

Si on fixe une liste d'entiers $1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r$ à laquelle on associe une deuxième liste $(e_1, \dots, e_{s'})$ (de la même façon qu'en (3.2) et le produit $\gamma(a_1, \dots, a_r) = e_1! \dots e_{s'}!$ (comme en (3.3)), on

compte $\binom{r}{e_1, \dots, e_{s'}}$ r -uplets (b_1, \dots, b_r) obtenus après permutation des a_i . Dans l'expression (3.6), le terme $C_{(a_1)} * \dots * C_{(a_r)}$ apparaît avec le coefficient :

$$\frac{1}{\gamma(a_1, \dots, a_r)} \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d (-1)^{i_1 + \dots + i_r + \epsilon} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} i_1^{a_1+1} \dots i_r^{a_r+1}$$

ou encore :

$$\frac{(-1)^\epsilon}{\gamma(a_1, \dots, a_r)} \beta(d, a_1 + 1, \dots, a_r + 1)$$

si l'on note :

$$\beta(d, a_1, \dots, a_r) = \sum_{i_1=1}^d \dots \sum_{i_r=1}^d (-1)^{i_1 + \dots + i_r} \binom{d}{i_1 + \dots + i_r} i_1^{a_1} \dots i_r^{a_r} \quad (3.7)$$

Les espaces propres d'un endomorphisme étant en somme directe, et compte tenu des inclusions $A_{(s)}^p * A_{(t)}^q \subset A_{(s+t)}^{p+q-g}$, on a pour tout entier s , en projetant (3.6) sur $A_{(s)}^{g-r}(JC)$ la relation suivante :

$$\sum_{\substack{0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \\ a_1 + \dots + a_r = s}} \frac{\beta(d, a_1 + 1, \dots, a_r + 1)}{\gamma(d, a_1, \dots, a_r)} C_{(a_1)} * \dots * C_{(a_r)} = 0$$

Nous adopterons pour la suite la notation de Polishchuk $p_i = \mathcal{F}(C_{(i-1)})$ pour laquelle les relations calculées seront plus lisibles. Le dernier résultat se réécrit alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \\ a_1 + \dots + a_r = s-r}} \frac{\beta(d, a_1, \dots, a_r)}{\gamma(d, a_1, \dots, a_r)} p_{a_1} \dots p_{a_r} = 0$$

3.1.2 Etude de la première relation non triviale.

Procédons au changement de variables $s = i_1 + \dots + i_r$:

$$\beta(d, a_1, \dots, a_r) = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{d}{s} \sum_{i_1=0}^s \sum_{i_2=0}^{s-i_1} \dots \sum_{i_{r-1}=0}^{s-i_1-\dots-i_{r-1}} i_1^{a_1} \dots i_{r-1}^{a_{r-1}} (s - i_1 - \dots - i_{r-1})^{a_r}$$

Développons $(s - i_1 - \dots - i_{r-1})^{a_r}$ à l'aide de la formule du multinôme de Newton :

$$(s - i_1 - \dots - i_{r-1})^{a_r} = \sum_{\substack{b, b_1, \dots, b_{r-1} \\ b + b_1 + \dots + b_{r-1} = a_r}} \binom{a_r}{b, b_1, \dots, b_{r-1}} (-1)^{b_1 + \dots + b_{r-1}} s^b i_1^{b_1} \dots i_{r-1}^{b_{r-1}}$$

pour obtenir

$$\beta(d, a_1, \dots, a_r) = \sum_{s \geq 0} (-1)^s \binom{d}{s} \sum_{\substack{b, b_1, \dots, b_{r-1} \\ b + b_1 + \dots + b_{r-1} = a_r}} (-1)^{b_1 + \dots + b_{r-1}} \binom{a_r}{b, b_1, \dots, b_{r-1}} s^b \sum_{i_1=0}^s \sum_{i_2=0}^{s-i_1} \dots \sum_{i_{r-1}=0}^{s-i_1-\dots-i_{r-1}} i_1^{a_1+b_1} \dots i_{r-1}^{a_{r-1}+b_{r-1}}$$

D'après (3.3), la partie de la somme précédente à la ligne est un polynôme en s de degré $\sum_{i=1}^{r-1} a_i + \sum_{i=1}^{r-1} b_i + b + r - 1$, soit $\sum_{i=1}^r a_i + r - 1$ et de coefficient dominant $\frac{\prod_{i=1}^{r-1} (a_i + b_i)!}{(\sum_{i=1}^{r-1} a_i \sum_{i=1}^{r-1} b_i + r - 1)!}$.

On sait également que $\sum_{s=0}^d (-1)^s (-1)^s \binom{d}{s} s^a$ vaut $d! \{a_d\} (-1)^d$ (cf [GKP89], résultat (6.19) p251), où $\{a_d\}$ est le nombre de Stirling de deuxième espèce. En particulier, $\{a_d\}$ est nul pour $a < d$, et

vaut 1 si $a = d$. On en déduit la nullité de $\beta(d, a_1, \dots, a_r)$ si la somme $\sum_{i=1}^r a_i$ est strictement inférieure à $d - r + 1$.

Dans le cas d'égalité, $\beta(d, a_1, \dots, a_r)$ vaut :

$$(-1)^d d! \sum_{\substack{b, b_1, \dots, b_{r-1} \\ b+b_1+\dots+b_{r-1}=a_r}} \binom{a_r}{b, b_1, \dots, b_{r-1}} (-1)^{b_1+\dots+b_{r-1}} \frac{\prod_{i=1}^{r-1} (a_i + b_i)!}{(\sum_{i=1}^{r-1} a_i + \sum_{i=1}^{r-1} b_i + r - 1)!}$$

On calcule plus bas la somme sur $b, b_1 \dots$ et b_r qui vaut :

$$\frac{\prod_{i=1}^r a_i!}{(\sum_{i=1}^r a_i + r - 1)!}$$

soit, puisque la somme des a_i vaut $d - r + 1$:

$$\frac{\prod_{i=1}^r a_i!}{(d!)}$$

et donc :

$$\beta(d, a_1, \dots, a_r) = (-1)^d \prod_{i=1}^n a_i!$$

Une somme de monômes prise entre 0 et s est un polynôme en s

Théorème 3.3 Pour tout choix de n entiers positifs a_1, a_2, \dots, a_r , la somme

$$\sum_{\substack{0 \leq i_1, \dots, i_n \\ i_1 + \dots + i_n \leq s}} i_1^{a_1} \dots i_n^{a_n}$$

est un polynôme en s de degré $a_1 + \dots + a_n + n$. Le coefficient du terme de tête vaut

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i!}{(n + \sum_{i=1}^n a_i)!}$$

On peut le démontrer par récurrence sur n :

• Supposons la propriété vraie au rang n . En écrivant la somme sur $n + 1$ termes de la façon suivante :

$$\sum_{i_1=0}^s i_1^{a_1} \left(\sum_{\substack{0 \leq i_2, \dots, i_{n+1} \\ i_2 + \dots + i_{n+1} \leq s - i_1}} i_2^{a_2} \dots i_{n+1}^{a_{n+1}} \right) \quad (3.8)$$

D'après l'hypothèse de récurrence, le terme entre parenthèses dans l'expression précédente (3.8) est un polynôme en $s - i_1$ de degré $(a_2 + \dots + a_{n+1} + n)$ de coefficient dominant $\frac{a_2! \dots a_{n+1}!}{(a_2 + \dots + a_{n+1} + n)!}$. Notons-le P . Il existe un polynôme Q de degré strictement inférieur à $a_2 + \dots + a_{n+1} + n$ tel que

$$P(s) = \frac{a_2! \dots a_{n+1}!}{(a_2 + \dots + a_{n+1} + n)!} s^{a_2 + \dots + a_{n+1}} + Q(s)$$

Alors :

$$\sum_{i_1=0}^s P(s - i_1) = \frac{a_2! \dots a_{n+1}!}{(a_2 + \dots + a_{n+1} + n)!} \sum_{i_1=0}^s (s - i_1)^{a_2 + \dots + a_{n+1} + n} i_1^{a_1} + \sum_{i_1=0}^s Q(s - i_1) i_1^{a_1} \quad (3.9)$$

Pour la lisibilité, notons $N = a_2 + \dots + a_{n+1} + n$ et développons $(s - i_1)^N$ à l'aide du binôme de Newton. La première somme de l'expression précédente devient :

$$\sum_{i_1=0}^s \left(\sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} i_1^k s^{N-k} \right) i_1^{a_1}$$

ou, si l'on somme d'abord sur i_1 :

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k s^{N-k} \binom{N}{k} \left(\sum_{i_1=0}^s i_1^{a_1+k} \right)$$

D'après l'hypothèse de récurrence au rang 1 le terme entre parenthèses dans l'expression précédente est un polynôme en s de degré $a_1 + k + 1$ de coefficient dominant $\frac{1}{a_1+k+1}$. La somme est donc un polynôme en s de degré $a_1 + N + 1$, de coefficient dominant :

$$\sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{N}{k} \frac{1}{a_1 + k + 1}$$

On peut simplifier cette somme en $\frac{N!a_1!}{(a_1+N+1)!}$ (voir l'égalité (5.51) dans [GKP89], à la page 188), autrement dit le coefficient dominant vaut :

$$\frac{(a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + n)!a_1!}{(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + n)!}$$

et finalement, le premier terme dans (3.9) est un polynôme en s de degré $a_1 + \dots + a_{n+1} + n + 1$, de coefficient dominant $\frac{a_1! \dots a_n!}{(a_1 + \dots + a_{n+1} + n + 1)!}$. On montre de même que le deuxième terme de (3.9) est un polynôme en s de degré inférieur.

Etude d'une somme intermédiaire

Théorème 3.4 Avec r entiers a_1, a_2, \dots, a_r , on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{b, b_1, \dots, b_{r-1} \\ b+b_1+\dots+b_{r-1}=a_r}} \binom{a_r}{b, b_1, \dots, b_{r-1}} (-1)^{b_1+\dots+b_{r-1}} \frac{\prod_{i=1}^{r-1} (a_i + b_i)!}{(\sum_{i=1}^{r-1} a_i + \sum_{i=1}^{r-1} b_i + r - 1)!} \\ = \frac{\prod_{i=1}^r a_i!}{(\sum_{i=1}^r a_i + r - 1)!} \end{aligned}$$

Preuve

- On peut réécrire la somme précédente :

$$\sum_{\substack{b, b_1, \dots, b_{r-1} \\ b+b_1+\dots+b_{r-1}=a_r}} \prod_{i=1}^{r-1} \left((-1)^{b_i} \frac{(a_i + b_i)!}{b_i!} \right) \left(\frac{1}{b! (\sum_{i=1}^r a_i + r - 1 - b)!} \right)$$

- Puis, pour tout i de $\{1, \dots, r-1\}$, on a les égalités

$$\sum_{b_i \geq 0} \frac{(-1)^{b_i} (a_i + b_i)!}{b_i!} X^{b_i} = a_i! \sum_{b_i \geq 0} \binom{a_i + b_i}{b_i} (-X)^{b_i} = \frac{a_i!}{(1+X)^{a_i+1}} \quad (3.10)$$

Comme référence pour la deuxième égalité de 3.10 on peut consulter [GKP89], à la page 321.

- On a également :

$$\begin{aligned} \sum_{b \geq 0} \frac{1}{b! (\sum_{i=1}^r a_i + (r-1) - b)!} X^b &= \frac{1}{(\sum_{i=1}^r a_i + r - 1)!} \sum_{b \geq 0} \binom{\sum_{i=1}^r a_i + r - 1}{b} X^b \\ &= \frac{(1+X)^{\sum_{i=1}^r a_i + r - 1}}{\sum_{i=1}^r a_i + r - 1!} \end{aligned} \quad (3.11)$$

- La somme cherchée est au terme $\frac{\prod_{i=1}^r a_i!}{(\sum_{i=1}^r a_i + r - 1)!}$ près le coefficient de X^{a_r} dans la série formelle définie par le produit :

$$\frac{1}{(1+X)^{a_1+1}} \cdots \frac{1}{(1+X)^{a_{r-1}+1}} (1+X)^{a_1+\dots+a_r+r-1}$$

soit le coefficient de X^{a_r} dans $(1+X)^{a_r}$. Ce coefficient vaut 1.

3.2 Méthode

Supposons connue une relation dans $R_{(i)}^d$, par exemple de la forme :

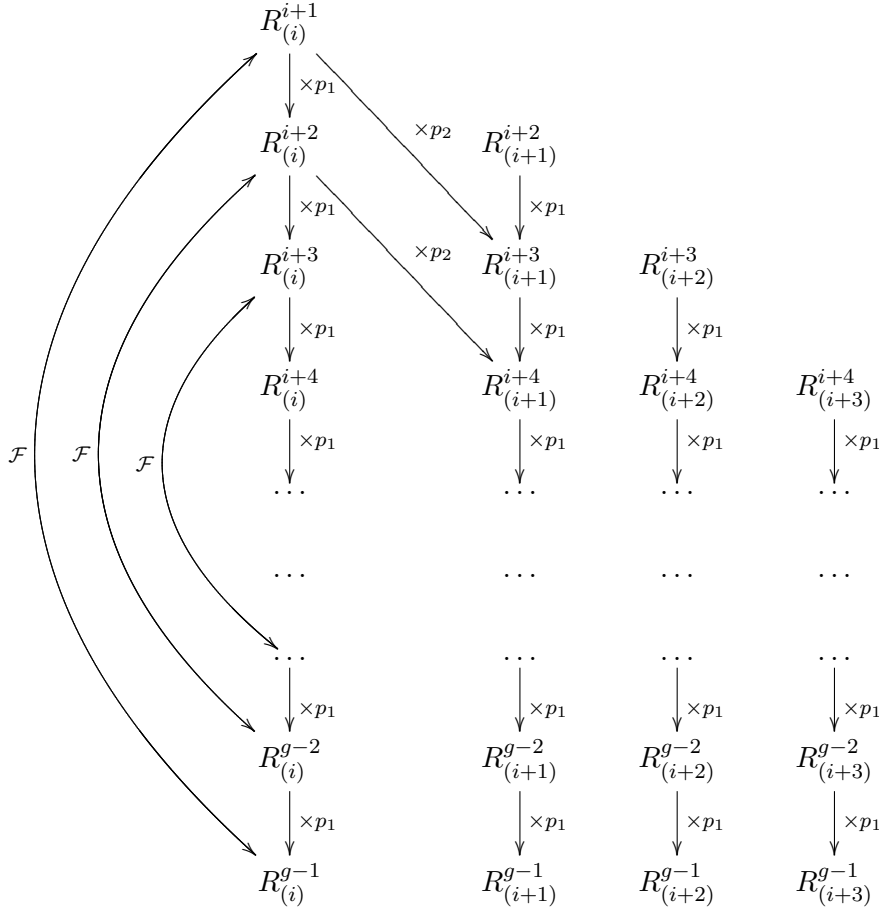
$$\sum_{\substack{a_1+\dots+a_t=d \\ a_1+\dots+a_t-t=i}} C(a_1, \dots, a_t) p_{a_1} \cdots p_{a_t} = 0 \quad (3.12)$$

On se propose ici d'expliquer quelles autres relations on peut en déduire dans R et quels sous-espaces $R_{(j)}^e$ sont concernés. Il n'est énoncé dans cette section aucun résultat nécessaire dans la suite du travail, mais on espère que sa lecture rendra plus clairs les calculs des deux chapitres suivants.

Rappelons que muni du produit d'intersection, l'anneau R est engendré par les cycles p_i pour i variant de 1 à $g-1$, que p_i est élément de $R_{(i-1)}^i$ et que $R_{(i)}^d \cdot R_{(j)}^e \subset R_{(i+j)}^{d+e}$. Un monôme $p_{a_1} \cdots p_{a_t}$ produit de t cycles p_i est donc un élément de $R_{(a_1+\dots+a_t-t)}^{a_1+\dots+a_t}$. On en déduit la nullité de $R_{(i)}^d$ pour $d \leq i$, et comme $R^g = R_{(0)}^g$, on a pour tout $i > 0$:

$$R \cap A_{(i)} = \bigoplus_{d=i+1}^{g-1} R_{(i)}^d \quad (3.13)$$

On peut alors représenter R sous la forme d'un trapèze dont les blocs correspondent aux sous-espaces $R_{(i)}^d$, et dont les colonnes représentent les sous-espaces de même indice $i : \bigoplus_{d=i+1}^{g-1} R_{(i)}^d$.



Les flèches droites correspondent aux multiplications par les monômes p_i , les flèches courbes aux isomorphismes induits par la transformation de Fourier \mathcal{F} . Rappelons que la transformation de Fourier induit un isomorphisme entre $R_{(i)}^d$ et $R_{(i)}^{g-d+i}$. En particulier, les sous-espaces $R_{(i)}^{g-1}$ et $R_{(i)}^{i+1}$ sont isomorphes. Comme $R_{(i)}^{i+1}$ est engendré par p_i , $R_{(i)}^{g-1}$ est de dimension au plus 1. pour tout $i > 0$, on a $p_1 R_{(i)}^d \subset R_{(i)}^{d+1}$, et donc la multiplication par p_1 préserve $\bigoplus_{d=i+1}^{g-1} R_{(i)}^d$. En revanche, pour tout $k > 1$, on a l'inclusion $p_k R_{(i)}^d \subset R_{(i+k-1)}^d$.

Les seules opérations autorisées pour obtenir à partir d'une relation dans $R_{(i)}^d$ d'autres relations dans $\bigoplus_{d=i+1}^{g-1} R_{(i)}^d$ sont donc la multiplication par p_1 et la transformation de Fourier.

Pour obtenir à partir d'une relation dans $R_{(i)}^d$ des relations dans $\bigoplus_{d=i+k+1}^{g-1} R_{(i+k)}^d$, on peut autoriser les multiplications par p_1 , les transformations de Fourier, et une multiplication par chacun des monômes p_{a_1}, \dots et p_{a_s} s'ils sont choisis tels que $a_1 + \dots + a_s - s = k$.

On peut donc obtenir à partir d'une relation dans $R_{(i)}^d$ des relations dans les sous-espaces $R_{(j)}^e$ pour $j \geq i$ et $e \geq j + 1$. On obtient donc à partir d'un g_d^r des relations dans les sous-espaces $R_{(j)}^e$ si e et j vérifient $d - 2r + 2 \leq j \leq e - 1$.

Chapitre 4

Systèmes linéaires de dimension r et $(r - 2)$ -plans $2r - 2$ sécants

Supposons qu'une courbe C admette un g_d^r sans point de base. D'après le théorème (3.1), la première relation non triviale déduite du calcul de la classe du système linéaire dans $A^{g-r}(C_d)$ est obtenue dans $R_{(d-2r+1)}^{d-r+1}$. Les méthodes décrites dans la section 3.2 permettent d'en déduire des relations dans les sous-espaces $R_{(i)}^a$ lorsque a et i vérifient $d - 2r + 2 \leq i \leq a - 1$ et $a \geq i + 1$. Nous nous intéressons dans ce chapitre à savoir si on peut en déduire la nullité du cycle $C_{(d-2r+1)}$. En multipliant la première relation obtenue par une puissance convenable de p_1 et en utilisant les relations de Polishchuk (1.9), on déduit une relation monomiale :

$$C(r, d, g) C_{(d-2r+1)} = 0$$

dont le coefficient $C(r, d, g)$ est pour tout r un polynôme de $\mathbb{Q}[d, g]$ dont on a une expression :

$$C(r, d, g) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i}{r-i} \binom{d-r-i+1}{r-1-i} \binom{d-r-i}{r-1-i} \binom{g}{i}$$

En utilisant des relations de I_g , on montre que la nullité de $C_{(i)}$ entraîne celle de $C_{(i+1)}$. On énonce alors le :

Théorème 4.1 *Soit C une courbe de degré g admettant un g_d^r sans point de base.*

Si $C(r, d, g) \neq 0$, on a $C_{(i)} = 0$ dans $A_{(i)}^{g-1}$ pour $i \geq d - 2r + 1$.

Mais la nullité de $C_{(d-2r+1)}$ n'est pas dans ce cas un résultat nouveau. Le polynôme $C(r, d, g)$ correspond en effet au nombre de sous-espaces projectifs de \mathbb{P}^r de dimension $r - 2$ coupant la réalisation $\Phi(C)$ de la courbe en $2r - 2$ points dans le cas où ce nombre est fini. Si on note D le diviseur déduit de l'intersection de l'un de ces espaces avec la courbe, le système linéaire $\mathcal{G}(-D)$ est un g_{d-2r+2}^1 . La nullité de $C_{(d-2r+1)}$ est alors une conséquence du résultat de Colombo et de van Geemen (1.6).

Il n'est donc pas donné dans ce chapitre de nouveaux résultats d'annulation. L'obstruction à un résultat d'annulation de $C_{(d-2r+1)}$ constituée par l'absence de $r - 2$ plans coupant la courbe en $2r - 2$ points est mise en avant. Elle suggère que l'annulation de $C_{(d-2r+1)}$ puisse être assujettie à l'existence d'un g_{d-2r+2}^1 , et que la gonality de la courbe détermine en fait l'annulation des composantes $C_{(i)}$.

Dans la première partie du chapitre, on cite une expression du nombre $C(r, d, g)$ de $r - 2$ plans coupant en $2r - 2$ points la courbe. Elle est due à Castelnuovo. On en déduit une courte démonstration du théorème 4.1. On explique dans la seconde section du chapitre comment déduire ce théorème du calcul de la classe du g_d^r dans $A(C_d)$.

4.1 Pinceaux déduits de l'existence d'un g_d^r par projection

Soit \mathcal{G} un g_d^r . Si un sous-espace projectif V de \mathbb{P}^r de dimension $k \leq r - 1$ coupe C en l points p_1, \dots, p_l , on peut considérer le système linéaire $\mathcal{G}(-p_1 \dots - p_l)$ qui est un g_{d-l}^{r-k-1} . Par exemple, pour tout point p de C , $\mathcal{G}(-p)$ est un g_{d-1}^{r-1} , et en considérant l points en position générale, $\mathcal{G}(-p_1 \dots - p_l)$ est un g_{d-l}^{r-l} . Avec $k = r - 1$ on obtient un g_{d-r+1}^1 . On peut en fait obtenir par ce procédé un revêtement de \mathbb{P}^1 de degré inférieur. Il s'agit de couper la courbe par un sous-espace de dimension $r - 2$ en un plus grand nombre de points.

La grassmanienne $\mathbb{G}(r - 1, r + 1)$ qui paramètre les sous-espaces projectifs de dimension $r - 2$ de \mathbb{P}^r est une variété de dimension $2r - 2$. Les espaces passant par un point de la courbe en forment une sous-variété de codimension 1. Aussi, on peut espérer qu'un nombre fini de tels sous-espaces coupe la courbe en $2r - 2$ points. Lorsque ce nombre est effectivement fini, la formule suivante le calcule :

$$C(r, d, g) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i}{r-i} \binom{d-r-i+1}{r-1-i} \binom{d-r-i}{r-1-i} \binom{g}{i} \quad (4.1)$$

Dans [ELMS89], Eisenbud, Lange, Martens et Schreyer retrouvent la formule de Castelnuovo à partir d'un résultat plus général de MacDonal. Celui-ci déduit de la description de la cohomologie du produit symétrique C_d le nombre de diviseurs d'un degré donné qui imposent un certain nombre de conditions à un g_d^r . On peut consulter le quatrième paragraphe du chapitre VII de [ACGH85] par exemple.

Le résultat d'annulation du théorème (3.1) est une conséquence du théorème d'E.Colombo et de B.van Geemen (1.6) appliqué au g_{d-2r+2}^1 déduit du g_d^r .

4.2 Théorème d'annulation pour une courbe admettant un g_d^r

On montre dans un premier temps (4.2.1) comment obtenir une relation monomiale impliquant $C_{(d-2r+1)}$. Son coefficient s'exprime comme une somme de produits de coefficients binomiaux. On relie ensuite (4.2.2) ce coefficient au nombre de $(r - 2)$ -plans $2r - 2$ sécants à une courbe. Enfin (4.2.3), on explique comment déduire de la nullité d'une composante $C_{(i)}$ la nullité des composantes suivantes, c'est-à-dire des composantes $C_{(j)}$ pour $j \geq i$.

4.2.1 Nullité de $C_{(d-2r+1)}$

D'après (3.1) et (3.2), la première relation non triviale obtenue pour une courbe admettant un g_d^r sans point de base est obtenue dans $A_{(d-2r+1)}^{d-r+1}(JC)$:

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \\ a_1 + \dots + a_r = d - r + 1}} \frac{a_1! \dots a_r!}{\gamma(a_1, \dots, a_r)} p_{a_1} \dots p_{a_r} \quad (4.2)$$

On multiplie (4.2) par $p_1^{g+r-d-2}$ pour obtenir une relation dans $A_{d-2r+1}^{g-1}(JC)$:

$$\sum_{\substack{1 \leq a_1 \leq \dots \leq a_r \\ a_1 + \dots + a_r = d-r+1}} \frac{a_1! \dots a_r!}{\gamma(a_1, \dots, a_r)} p_1^{g+r-d-2} p_{a_1} \dots p_{a_r} \quad (4.3)$$

Distinguons les termes de (4.3) en fonction des puissances de p_1 . On introduit t , le nombre de fois que la suite a_i prend la valeur 1. On a donc : $a_1 = \dots = a_t = 1$ et $a_{t+1} > 1$. Par définition, $\gamma(a_1, \dots, a_t) = t!$.

$$\sum_{t=0}^{r-1} \sum_{\substack{1 < a_{t+1} \leq \dots \leq a_r \\ a_{t+1} + \dots + a_r = d-r+1-t}} \frac{a_{t+1}! \dots a_r!}{t! \gamma(a_{t+1}, \dots, a_r)} p_1^{t+g+r-2-d} p_{a_{t+1}} \dots p_{a_r} = 0 \quad (4.4)$$

Le sous-espace $R_{(d-2r+1)}^{g-1}$ est isomorphe par la transformation de Fourier à $R_{(d-2r+1)}^{d-2r+2}$ lequel est engendré par p_{d-2r+2} , donc de dimension au plus 1. Les relations obtenues par Polishchuk (1.9) permettent d'exprimer $p_1^{t+g+r-2-d} p_{a_{t+1}} \dots p_{a_r}$ pour tout t en fonction de $p_1^{g+2r-d-3} p_{d-2r+2}$. On utilisera comme lui la notation $p_i^{[a]}$ pour $\frac{p_i^a}{a!}$ pour alléger l'écriture de :

$$p_1^{[g-1-\sum_{i=1}^k n_i]} p_{n_1} \dots p_{n_k} = (-1)^{k-1} \frac{(\sum n_i)!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{[g+k-2-\sum n_i]} p_{1-k+\sum n_i}$$

Cette égalité est valable pour des entiers n_i strictement supérieurs à 1 et de somme inférieure à $g-1$. Elle est donnée comme corollaire du théorème 0.3 dans l'article [Pol]. On applique cette égalité pour chaque valeur prise par t , avec $k = r-t$, $n_1 = a_{t+1}, \dots$, et $n_k = a_r$. On a $\sum n_i$ qui vaut alors $a_{t+1} + \dots + a_r$. La somme (4.4) devient alors :

$$\sum_{t=0}^{r-1} \sum_{\substack{1 < a_{t+1} \leq \dots \leq a_r \\ a_{t+1} + \dots + a_r = d-r+1-t}} (-1)^{r+t} \frac{(t+g+r-d-2)!(d-r+1-t)!}{t! \gamma(a_{t+1}, \dots, a_r)} p_1^{[g+2r-d-3]} p_{d-2r+2} = 0$$

et on peut réécrire le coefficient devant $p_1^{[g+2r-d-3]} p_{d-2r+2}$:

$$\sum_{t=0}^{r-1} (-1)^{r+t} \frac{(t+g+r-d-2)!(d-r+1-t)!}{t!(r-t)!} \left(\sum_{\substack{1 < a_{t+1} \leq \dots \leq a_r \\ a_{t+1} + \dots + a_r = d-r+1-t}} \frac{(r-t)!}{\gamma(a_{t+1}, \dots, a_r)} \right)$$

Réindexons la somme entre parenthèses, en remarquant que

$$\gamma(a_{t+1}, \dots, a_r) = \gamma(a_{t+1}-1, \dots, a_r-1)$$

Il vient alors :

$$\sum_{\substack{1 < a_{t+1} \leq \dots \leq a_r \\ a_{t+1} + \dots + a_r = d-r+1-t}} \frac{(r-t)!}{\gamma(a_{t+1}, \dots, a_r)} = \sum_{\substack{0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{r-t} \\ b_1 + \dots + b_{r-t} = d-3r+1+t}} \frac{(r-t)!}{\gamma(b_1, \dots, b_{r-t})}$$

Puis, $\frac{(r-t)!}{\gamma(b_1, \dots, b_{r-t})}$ correspond au nombre de $r-t$ uplets que l'on peut former à partir des éléments $\{b_1\}, \{b_2\}, \dots$ et $\{b_{r-t}\}$. La somme correspond donc au nombre de $(r-t)$ -uplets d'entiers strictement positifs de somme $d-3r+1+t$. Si on considère la série formelle :

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + \dots$$

l'entier cherché apparaît comme le coefficient de $X^{d-3r+1+t}$ dans $\left(\frac{1}{1-X}\right)^{r-t}$. Mais on sait que le coefficient de X^n dans $\left(\frac{1}{1-X}\right)^c$ est $\binom{c+n-1}{n}$. On peut par exemple consulter la table 321 du chapitre 7.2 de [GKP89]. On a donc :

$$\sum_{t=0}^{r-1} (-1)^{r+t} \frac{(t+g+r-d-2)!(d-r+1-t)!}{(r-t)!t!} \binom{d-2r}{d-3r+1+t} p_1^{[g+2r-d-3]} p_{d-2r+2} = 0$$

Mettons en facteur $(g+r-d-2)!(d-2r+2)!$ pour obtenir :

$$\sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i}{d-2r+2} \binom{i+g+r-d-2}{i} \binom{d-2r}{r-1-i} \binom{d-r+1-i}{r-i} p_1^{[g+2r-d-3]} p_{d-2r+2} = 0$$

On note $\tilde{C}(r, d, g)$ le coefficient de cette relation monomiale :

$$\tilde{C}(r, d, g) = \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i}{d-2r+2} \binom{i+g+r-d-2}{i} \binom{d-2r}{r-1-i} \binom{d-r+1-i}{r-i} \quad (4.5)$$

mais on montre dans la sous-section (4.2.3) qu'il est égal à $C(r, d, g)$. Lorsque ce coefficient n'est pas nul, on a la nullité du monôme $p_1^{[g+2r-d-3]} p_{d-2r+2}$ et donc la nullité des espaces isomorphes :

$$R_{(d-2r+1)}^{g-1} = R_{(d-2r+1)}^{d-2r+2} = 0$$

En particulier, on a la nullité de p_{d-2r+2} et donc de $C_{(d-2r+1)}$. Le théorème (4.1) est alors une conséquence du résultat de la sous-section suivante.

4.2.2 La nullité de $C_{(i)}$ entraîne celle de $C_{(i+1)}$

On démontre ici que la nullité d'une des composantes $C_{(i)}$ de la courbe entraîne celle des composantes suivantes :

Théorème 4.2 *Pour tout entier i , la nullité de $C_{(i)}$ dans $A_{(i)}^{g-1}$ implique celle de $C_{(i+1)}$ dans $A_{(i+1)}^{g-1}$.*

Preuve :

Il est équivalent de montrer la proposition pour les transformées de Fourier des cycles $C_{(i)}$, c'est-à-dire pour les cycles p_i . Supposons $i \leq g-3$, et considérons le cycle $p_1^{g-i-3} p_2 p_i$ de $A_{(i)}^{g-1}$. D'après l'exemple 0.3 du corollaire (0.3) de [Pol], on a une relation non triviale entre $p_1^{g-i-3} p_2 p_i$ et $p_1^{g-i-2} p_{i+1}$. La nullité de p_i entraîne celle de $p_1^{g-i-2} p_{i+1}$, qui d'après le même corollaire engendre $R_{(i+1)}^{g-1}$. Puis, la transformation de Fourier réalise un isomorphisme entre $R_{(i+1)}^{g-1}$ et $R_{(i+1)}^{i+2}$. Comme ce dernier sous-espace de $A(J)$ est engendrée par p_{i+1} , on a la nullité de ce cycle algébrique. L'implication $(p_{g-2} = 0) \Rightarrow (p_{g-1} = 0)$ est garantie par la nullité de p_{g-1} pour toutes les courbes de genre supérieur ou égal à 4 (cette nullité est une conséquence du théorème 1.8). Pour les courbes de genre 2 ou 3, seules interviennent p_1 et p_2 . L'implication est vraie car l'annulation de p_1 n'est pas permise, comme expliqué dans le théorème 1.2.

4.2.3 Egalité entre $\tilde{C}(r, d, g)$ et $C(r, d, g)$

On démontre ici que les expressions (4.1) et (4.5) définissent pour tout $r \geq 1$ le même polynôme de $\mathbb{Q}[d, g]$. Pour tout $r \geq 2$, l'expression (4.1) définit un polynôme à coefficients

rationnels en d et g . L'expression (4.5) définit une fraction rationnelle en d et g . L'algorithme de Zeilberger permet de démontrer des égalités entre de telles sommes. On trouvera des explications concernant l'algorithme de Zeilberger dans [PWZ96]. Pour appliquer l'algorithme, on utilise le logiciel Mathematica et le package ZW développé par Peter Paule et Markus Schorne. On procède au changement de variables suivant :

$$\begin{cases} n = r - 1 \\ a = d - r \end{cases}$$

pour appliquer l'algorithme aux sommes :

$$B_1(n, a, g) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{n+1-i} \binom{a-i+1}{n-i} \binom{a-i}{n-i} \binom{g}{i} \quad (4.6)$$

$$B_2(n, a, g) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{a-n+1} \binom{i+g-a-2}{i} \binom{a-n-1}{n-i} \binom{a+1-i}{n+1-i} \quad (4.7)$$

L'algorithme de Zeilberger renvoie une relation de récurrence linéaire double vérifiée par $B_1(n, a, g)$ et $B_2(n, a, g)$ considérées comme des suites indexées par $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_2(n, a, g)B(n+2, a, g) + Q_1(n, a, g)B(n+1, a, g) + Q_0(n, a, g)B(n, a, g) = 0 \quad (4.8)$$

On peut consulter le détail de cette relation dans l'annexe. Les coefficients Q_i sont des polynômes en n , a et g . Le changement de variables effectué permet en fait d'obtenir des polynômes Q_i de plus petits degrés. En utilisant à nouveau les variables r , d et g , on obtient une relation de récurrence linéaire double vérifiée par C et \tilde{C} considérées comme des suites indexées par $r \in \mathbb{N}^*$:

$$Q'_2(r, d, g)C(r+2, d, g) + Q'_1(r, d, g)C(r+1, d, g) + Q'_0(r, d, g)C(r, d, g) = 0 \quad (4.9)$$

avec

$$Q'_2(r, d, g) = (r+2)(r+1)(d-2r+1)(d-2r)$$

Pour r supérieur ou égal à 1, ce coefficient n'est pas nul. On en déduit par récurrence sur r l'égalité cherchée après avoir vérifié l'égalité des deux premiers termes :

$$C(1, d, g) = \tilde{C}(1, d, g) = 1$$

$$C(2, d, g) = \tilde{C}(2, d, g) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$$

Chapitre 5

Applications aux revêtements de \mathbb{P}^1 , aux courbes planes et aux courbes gauches

On applique les résultats du troisième chapitre aux systèmes linéaires de dimension inférieure ou égale à 3. Dans le cas des pincesaux, on retrouve le résultat de Colombo et van Geemen. Pour les g_d^2 et les g_d^3 , on compare les relations obtenues avec celles de I_g . On met en avant l'existence pour tout genre suffisamment grand de courbes planes et gauches pour lesquelles les méthodes employées donnent des résultats nouveaux.

On introduit dans la première section de ce chapitre le formalisme utilisé pour situer les relations déduites d'un g_d^r par rapport à celles de I_g et à celles déduites du g_d^1 induit par le g_d^r . On rappelle brièvement dans la deuxième section comment retrouver le résultat de Colombo et van Geemen. On étudie dans les troisième et quatrième sections les cas des courbes planes et gauches respectivement. Les résultats nouveaux pour de telles courbes de genre inférieur ou égal à 10 y sont récapitulés. On peut consulter les tableaux (5.1) et (5.2).

5.1 Relations dans l'anneau tautologique et relations de I_g

5.1.1 Relations dans l'anneau tautologique

Nous noterons de la même façon le cycle modulo équivalence algébrique p_i et l'indéterminée de l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g]$. L'un est l'image de l'autre par la surjection :

$$\pi : \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g] \longrightarrow R$$

Le noyau de π est noté \mathcal{R} . Ses éléments sont appelés les relations de R . On définit deux degrés sur \mathcal{R} en donnant leurs valeurs sur les monômes :

$$d_1(p_i) = i \text{ et } d_2(p_i) = i - 1$$

Pour tout entier positif a on note \mathcal{R}^a la partie de \mathcal{R} des éléments dont tous les monômes m vérifient $d_1(m) = a$. De même, pour tout entier positif i on note $\mathcal{R}_{(i)}$ la partie de \mathcal{R} des éléments dont tous les monômes m vérifient $d_2(m) = i$. On définit ainsi deux graduations. On note également $\mathcal{R}_{(i)}^a$ pour l'intersection $\mathcal{R}_{(i)}^a = \mathcal{R}^a \cap \mathcal{R}_{(i)}$.

On peut définir une application \mathbb{Q} -linéaire sur $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g]$, que l'on notera également \mathcal{F} , dont la valeur sur chaque monôme est donnée par la formule du théorème 1.10. Cette définition est cohérente avec celle de la transformation de Fourier de R , c'est-à-dire on a $\mathcal{F} \circ \pi = \pi \circ \mathcal{F}$.

Rappelons que Polishchuk définit I_g comme le \mathbb{Q} -espace vectoriel engendré par les polynômes cités au théorème 1.9 et par ceux de degré d_1 supérieur ou égal à g . Il démontre que I_g est un idéal stable par \mathcal{F} . Polishchuk conjecture que le système de relations I_g est complet pour une courbe générique de genre g , c'est à dire que $\mathcal{R} = I_g$. On connaît en revanche des courbes de genre g pour lesquelles \mathcal{R} est différent de I_g . C'est le cas par exemple si C a un g_d^1 avec d strictement inférieur à $\frac{g}{2} + 1$. On a dans ce cas la relation $p_d = 0$ qui ne correspond pas à un élément de I_g .

5.1.2 Détermination des sous-espaces liés aux relations de I_g

Nous déterminons dans cette sous-section à quels sous-espaces $\mathcal{R}_{(i)}^a$ appartiennent les relations qui engendrent I_g .

Théorème 5.1 *Les éléments de I_g donnés par le théorème 1.9 appartiennent à un des sous-espaces $\mathcal{R}_{(i)}^{g-d}$ où $0 \leq d \leq \frac{g}{2} - 1$ et $d + 1 \leq i \leq g - d - 1$. Réciproquement, le théorème 1.9 donne pour chacun de ces sous-espaces une relation non triviale.*

Preuve :

Rappelons que les relations du théorème 1.9 sont données pour un entier positif k , un entier d vérifiant $0 \leq d \leq k - 1$ et un n -uplet d'entiers supérieurs ou égaux à 2 : (n_1, \dots, n_k) . La relation associée à ces paramètres est :

$$\sum_{I_1 \sqcup \dots \sqcup I_m = \{1, \dots, k\}} \binom{m-1}{d+m-k} \frac{b(I_1) \dots b(I_m)}{(g-d+m+k - \sum_{i=1}^k n_i)!} p_1^{g-d-m+k - \sum_{i=1}^k n_i} p_{d(I_1)} \dots p_{d(I_m)} = 0 \quad (5.1)$$

où la somme est prise sur les partitions de $\{1, \dots, k\}$ sans tenir compte de l'ordre. Comme p_1^a est nul si $a < 0$, la condition

$$m \leq (g - \sum_{i=1}^k n_i) + k - d \quad (5.2)$$

est nécessaire pour que la relation soit non triviale. Egalement, pour que le coefficient binomial soit non nul, on a la condition nécessaire :

$$k - d \leq m \quad (5.3)$$

De (5.2) et (5.3) on déduit $\sum_{i=1}^k n_i \leq g$. Comme tous les coefficients n_i sont supérieurs ou égaux à 2, on doit avoir $k \leq \frac{g}{2}$ et donc $d \leq \frac{g}{2} - 1$. Réciproquement, si les paramètres vérifient les relations $0 \leq d \leq k - 1$ et $\sum n_i \leq g$, la relation associée est non triviale car les coefficients de la somme (5.1) sont strictement positifs.

Supposons g et d fixés. La relation (5.1) correspond à un élément de $\mathcal{R}_{(\sum n_i - k)}^{g-d}$. Pour k fixé, $\sum_{i=1}^k n_i$ parcourt l'ensemble $\{2k \dots g\}$ lorsque le n -uplet (n_1, \dots, n_k) parcourt les valeurs autorisées par $n_i \geq 2$ et $\sum n_i \leq g$. Enfin, quand k parcourt l'ensemble $\{d + 1 \dots \frac{g}{2}\}$, la quantité $\sum n_i - k$ parcourt $\{d + 1 \dots g - d - 1\}$, ce qui achève la démonstration.

On peut représenter ces sous-espaces $\mathcal{R}_{(i)}^{g-d}$ en convenant d'interpréter l'indice i comme abscisse et la dimension d comme ordonnée. Les relations non triviales de I_g correspondent à un triangle lorsque g est pair :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}\right)}^{\frac{g}{2}+1} \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}-1\right)}^{\frac{g}{2}+2} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}\right)}^{\frac{g}{2}+2} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}+1\right)}^{\frac{g}{2}+2} \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}-2\right)}^{\frac{g}{2}+3} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}-1\right)}^{\frac{g}{2}+3} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}\right)}^{\frac{g}{2}+3} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}+1\right)}^{\frac{g}{2}+3} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g}{2}+2\right)}^{\frac{g}{2}+3} \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

et à une pyramide si g est impair :

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & \mathcal{R}_{\left(\frac{g-1}{2}\right)}^{\frac{g+3}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g+1}{2}\right)}^{\frac{g+3}{2}} \\
 & & & & & \\
 & & & & & \\
 & & & & & \mathcal{R}_{\left(\frac{g-3}{2}\right)}^{\frac{g+5}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g-1}{2}\right)}^{\frac{g+5}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g+1}{2}\right)}^{\frac{g+5}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g+3}{2}\right)}^{\frac{g+5}{2}} \\
 & & & & & \\
 & & & & & \mathcal{R}_{\left(\frac{g-5}{2}\right)}^{\frac{g+7}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g-3}{2}\right)}^{\frac{g+7}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g-1}{2}\right)}^{\frac{g+7}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g+1}{2}\right)}^{\frac{g+7}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g+3}{2}\right)}^{\frac{g+7}{2}} & \mathcal{R}_{\left(\frac{g+5}{2}\right)}^{\frac{g+7}{2}} \\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

5.2 Revêtements de \mathbb{P}^1

On peut déduire de l'existence d'un g_d^1 sans point de base et du théorème (3.1) la nullité des cycles suivants pour a variant entre 0 et $g - 1$:

$$\beta(d, a + 1) C_{(a)} = 0$$

Les coefficients $\beta(d, a)$ s'expriment en fonction des nombres de Stirling de deuxième espèce (on peut consulter le résultat (6.19) à la page 251 de [GKP89]) :

$$\beta(d, a) = \sum_{i=1}^d (-1)^i (-1)^i \binom{d}{i} i^a = d! \{d\}^a (-1)^d$$

Comme $\{d\}^a$ est différent de zéro si et seulement si $0 \leq d \leq a + 1$, on a la nullité de $C_{(a)}$ pour $a \geq d - 1$. On retrouve le résultat de Colombo et Van Geemen.

5.3 Courbes planes

5.3.1 Nombre de nœuds d'une courbe plane

Par définition, $C(2, d, g)$ est le nombre de points doubles de la courbe $\Phi(C)$. L'égalité qui suit est un résultat connu qui peut se retrouver par le calcul de (4.1) :

$$C(2, d, g) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - g$$

Comme expliqué dans le chapitre précédent, on peut si la courbe n'est pas lisse considérer le pinceau des droites passant par un des points singuliers pour obtenir un g_{d-2}^1 . On en déduit la nullité de p_{d-2} par (1.6). On note dans ce cas $d' = d - 2$. Si la courbe est lisse, on n'obtient en considérant un point de la courbe qu'un g_{d-1}^1 et la nullité de p_{d-1} . On note dans ce cas $d' = d - 1$.

Rappelons que l'inégalité suivante est vérifiée pour toute courbe plane :

$$0 \leq g \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} \quad (5.4)$$

et que pour tout couple d'entiers (d, g) vérifiant cette inégalité, il existe une courbe de tel genre et de tel degré. Pour $g \geq 2$ et $d \geq 0$, (5.4) est équivalent à :

$$\frac{\sqrt{8g+1}+3}{2} \leq d \quad (5.5)$$

5.3.2 Relations déduites d'un g_d^2 et relations de I_g

Le théorème 3.1 permet pour de nombreuses courbes de calculer à partir de l'existence d'un g_d^2 des relations qui ne pourraient se déduire des relations de I_g et de la relation $p_{d'} = 0$. Par déduire, on entend obtenir à l'aide d'additions, de multiplications et de transformations de Fourier \mathcal{F} . Plus précisément, on énonce le :

Théorème 5.2 *Pour g suffisamment grand il existe un entier d et une courbe C plane de degré d tels que $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{I}$, où \mathcal{I} est le plus petit idéal de $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g]$ stable par \mathcal{F} contenant I_g et $p_{d'}$.*

Preuve :

- Pour g suffisamment grand, on peut trouver d tel que

$$\frac{\sqrt{8g+1}+3}{2} \leq d < \frac{g}{2} + 2 \quad (5.6)$$

et d'après la remarque du paragraphe précédent, il existe une courbe plane de genre g et de degré d . On note P la relation de $\mathcal{R}_{(d-3)}^{d-1}$ donnée par le théorème 3.1 :

$$P = \sum_{\substack{1 \leq a, b \\ a+b=d-1}} a!b! p_a p_b \quad (5.7)$$

On va montrer que P n'est pas élément de \mathcal{I} .

- On définit la suite d'idéaux \mathcal{I}_n par son premier terme qui est l'idéal engendré par les $p_i p_{d'}$ pour $i > 2$:

$$\mathcal{I}_1 = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g] p_2 p_{d'} + \dots + \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g] p_g p_{d'}$$

et par la relation de récurrence :

$$\mathcal{I}_{n+1} = \mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g] \mathcal{F}(\mathcal{I}_n)$$

On a alors :

$$\mathcal{I} = I_g + \mathbb{Q}p_{d'} + \mathbb{Q}p_1 p_{d'} + \dots + \mathbb{Q}p_1^{g-1-d'} p_{d'} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n \quad (5.8)$$

En effet, le terme de droite définit un idéal contenant I_g et $p_{d'}$. On calcule

$$\mathcal{F}(p_1^n p_{d'}) = (-1)^n \frac{n!}{(g-n-d)!} p_1^{g-n-d} p_{d'}$$

ce qui prouve que $\mathbb{Q}p_{d'} + \mathbb{Q}p_1 p_{d'} + \dots + \mathbb{Q}p_1^{g-1-d'} p_{d'}$ est stable par \mathcal{F} . On sait que I_g est stable par \mathcal{F} , et par définition $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n$ l'est également. Le terme de droite de (5.8) est donc stable par \mathcal{F} . Enfin, le plus petit idéal contenant I_g et $p_{d'}$ et stable par \mathcal{F} doit contenir le terme de droite de (5.8), d'où l'égalité.

- Supposons que $C(2, d, g) = 0$, et donc que $d' = d - 1$. Le monôme $p_{d'}$ est un élément de $\mathcal{R}_{(d-2)}^{d-1}$. Si P est dans \mathcal{I} , comme

$$\mathbb{Q}p_{d'} + \dots + \mathbb{Q}p_1^{g-1-d'} p_{d'} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n \subset \bigoplus_{i \geq d-2} \mathcal{R}_{(i)}$$

on a $P \in I_g$. D'après le choix de d (voir l'inégalité (5.4)), on a $P \in \bigoplus_{a \leq \frac{g}{2}} \mathcal{R}^a$. Mais d'après le théorème 5.1 les éléments non nuls de I_g sont dans les sous-espaces $\bigoplus_{a \geq \frac{g}{2}+1} \mathcal{R}^a$ et on aboutit à une contradiction.

- Supposons que $C(2, d, g) \neq 0$, et donc que $d' = d - 2$. Le monôme $p_{d'}$ est alors un élément de $\mathcal{R}_{(d-3)}^{d-2}$. Si P est un élément de $\mathcal{R}_{(d-3)}^{d-1}$, comme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{I}_n \subset \bigoplus_{i \geq d-2} \mathcal{R}_{(i)}$$

on a $P \in I_g + \mathbb{Q}p_{d'} + \dots + \mathbb{Q}p_1^{g-1-d'} p_{d'}$. Comme $I_g \subset \bigoplus_{a \geq \frac{g}{2}+1} \mathcal{R}^a$, on a $P \in \mathbb{Q}p_{d'} + \dots + \mathbb{Q}p_1^{g-1-d'} p_{d'}$ ce qui n'est pas le cas d'après l'expression de P donnée en (5.7).

Remarque :

Il existe de petites valeurs de g pour lesquelles aucun g_d^2 n'apporte de relation non contenue dans I_g . C'est le cas par exemple lorsque g vaut 5 ou 7 comme on peut le voir à la sous-section précédente.

5.3.3 Exemples de calculs de relations

Cas où les relations se déduisent de I_g et de la gonality

- Si on tire les droites passant par l'unique nœud d'une quintique plane de genre 5, on construit un g_3^1 . Avec (1.6), on a $p_3 = 0$, puis avec la relation de $I_5 : p_2^2 = -6p_1 p_3$, on a $p_2^2 = p_1 p_3 = 0$. La relation obtenue à partir du g_5^2 qui est $3p_1 p_3 + p_2^2 = 0$ n'apporte donc aucune information supplémentaire.

- Une sextique plane de genre 7 a trois points singuliers. On peut en déduire l'existence d'un g_4^1 et la nullité de p_4 . De la relation $p_2p_3 = -5p_1p_4$ de I_7 on déduit la nullité de p_2p_3 . La relation $2p_1p_4 + p_2p_3 = 0$ qui découle de l'existence du g_7^2 se déduisait donc des relations de I_7 et de la nullité de p_4 .

Nouvelles relations pour une courbe lisse plane

Considérons la quintique plane lisse qui est de genre 6. En considérant les droites passant par un point quelconque de la courbe, on montre qu'elle est tétragonale, et donc avec (1.6) que $p_4 = 0$. Cette relation est de toute façon déjà dans I_6 . L'existence du g_6^2 apporte **une unique relation nouvelle** dans $\mathcal{R}_{(2)}^4$ qui est $3p_1p_3 + p_2^2 = 0$. En la multipliant par p_1 , on retombe sur une relation de I_6 .

Nouvelles relations pour une courbe plane singulière

Si une courbe de genre 8 admet un g_7^2 , les g_5^1 qu'on en déduit n'apportent pas de relations qui ne soient dans I_8 . En revanche, on déduit du g_7^2 la relation $8p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$ qui avec la relation $10p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$ de I_8 entraîne **la nullité de p_2p_4 et p_3^2** .

5.3.4 Courbes planes de genre $g \leq 10$

On récapitule ici quelles sont les relations données par le théorème (3.1) pour les courbes de genre inférieur ou égal à 10. On considère tous les g_d^1 autorisés, et vérifie que pour ceux admis automatiquement¹ par les courbes de genre g , les relations déduites sont contenues dans I_g . Il s'agit donc d'après (5.5) à g fixé de préciser les relations déduites d'un g_d^1 pour d vérifiant :

$$\frac{\sqrt{8g+1}+3}{2} \leq d \leq \frac{2}{3}g+2$$

Pour chacun de ces systèmes linéaires, on précise quel g_d^1 il induit en général. On indique **en gras** toutes les relations qui se déduisent du théorème (3.1), mais qui ne peuvent se déduire de I_g et de la nullité de p_d . Justifions brièvement les résultats du tableau ci-dessous. Sauf pour les courbes de genre 10 admettant un g_6^2 , la première relation obtenue dans $\mathcal{R}_{(d-3)}^{d-1}$ combinée éventuellement avec une relation de I_g donne les résultats nouveaux. Dans le cas restant, on utilise les relations données dans $\mathcal{R}_{(3)}^5$ et $\mathcal{R}_{(4)}^6$ par (3.1) : $2p_1p_4 + p_2p_3 = 0$ et $4p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$. Si on les multiplie respectivement par p_2 et p_1 , et si on considère une troisième relation donnée par I_{10} , on obtient le système :

$$\begin{cases} 4p_1p_2p_4 & +3p_1p_3^2 & = 0 \\ 2p_1p_2p_4 & +p_2^2p_3 & = 0 \\ 10p_1p_2p_4 & +p_2^2p_3 & +3p_1p_3^2 & = 0 \end{cases}$$

dont découle la nullité des trois monômes $p_1p_2p_4$, $p_2^2p_3$ et $p_1p_3^2$. En utilisant l'égalité $p_2^4+24p_1p_2^2p_3+18p_1^2p_3^2+60p_1^3p_5$, et l'annulation de p_5 (due à l'existence d'un g_5^1), on a $p_2^4 = 0$. Comme les monômes p_2^4 , $p_1p_2^2p_3$, $p_1^2p_3^2$ et $p_1^3p_5$ engendrent $\mathcal{R}_{(4)}^8$, on a la nullité de ce dernier sous-espace. Enfin, l'utilisation de la transformation de Fourier permet de conclure à la nullité de p_2p_4 et p_3^2 .

¹c'est-à-dire pour ceux tels que $d \geq \frac{2}{3}g+2$

TAB. 5.1 – Utilisation du théorème (3.1) pour les courbes planes de genre $g \leq 10$

Genre	g_d^2	$g_{d'}^1$ déduit du g_d^2	Relations déduites du g_d^2 à partir du th. (3.1)	Conséquences
$g = 5$	g_5^2	g_3^1	$3p_1p_3 + p_2^2 = 0$	
$g = 6$	g_5^2	g_4^1	$3p_1p_3 + p_2^2 = 0$	
$g = 7$	g_6^2	g_4^1	$2p_1p_4 + p_2p_3 = 0$	
$g = 8$			$8p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$	$p_2p_4 = p_3^2 = 0$ $p_1p_2p_4 = p_1p_3^2 = 0$
	g_7^2	g_5^1		
	g_6^2	g_4^1	$p_2p_3 = 0$	$p_2p_3 = 0$ $p_1p_2p_3 = p_3^3 = 0$
$g = 9$	g_7^2	g_5^1	$8p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$	$p_2p_4 = p_3^2 = 0$ $p_2^2p_3 = 0$
			$p_2p_3 = 0$	$p_2p_3 = 0$ $p_1p_2p_3 = 0$ $p_1^2p_2p_3 = p_1p_2^3 = 0$
	g_6^2	g_4^1		
$g = 10$	g_8^2	g_6^1	$5p_2p_5 + 3p_3p_4 = 0$	
				$6p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$ $6p_1p_2p_4 + 3p_1p_3^2 = 0$ $6p_1^2p_2p_4 + 3p_1^2p_3^2 = 0$
	g_7^2	g_5^1		
			$2p_1p_4 + p_2p_3 = 0$ $4p_2p_4 + 3p_3^2 = 0$	$2p_1^{m+1}p_4 + p_1^m p_2p_3 = 0$ pour $m \in \{0 \dots 3\}$ $p_1^n p_2p_4 = p_1^n p_3^2 = 0$ pour $n \in \{0 \dots 2\}$ $p_2^2p_3 = p_1p_2^2p_3 = 0$ $p_2^4 = 0$
	g_6^2	g_5^1		

5.4 Courbes gauches

5.4.1 Quadrisécantes à une courbe gauche

Par définition, $C(3, d, g)$ est le nombre de quadrisécantes à la courbe $\Phi(C)$ lorsque ce nombre est fini². L'expression (4.1) permet de retrouver la formule de Cayley :

$$C(3, d, g) = \frac{(d-2)(d-3)^2(d-4)}{12} - \frac{g(d^2 - 7d + 13 - g)}{2} \quad (5.9)$$

On a lorsque cette quantité est non nulle l'existence d'un g_{d-4}^1 et donc la nullité de p_{d-4} . On note alors $d' = d - 4$. Sinon, on déduit de l'existence d'un g_{d-3}^1 la nullité de p_{d-3} , et on note $d' = d - 3$.

5.4.2 Courbes lisses de \mathbb{P}^3

Gruson et Peskine déterminent dans [GP78] à quels couples degré-genre correspondent les courbes lisses de \mathbb{P}^3 . On peut également lire [Har82] pour un panorama du problème. Les courbes lisses de \mathbb{P}^3 se répartissent en trois classes. La courbe peut être contenue dans un plan de \mathbb{P}^3 ; on a alors $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$. Si des entiers positifs g et d vérifient cette relation, il existe une telle courbe. La courbe peut être contenue dans une surface quadratique : il existe alors deux entiers strictement positifs a et b tels que $d = a + b$ et $g = (a-1)(b-1)$. Pour tout couple d'entiers strictement positifs (a, b) une telle courbe existe. Enfin, si la courbe n'est pas contenue dans une surface quadratique, on a $0 \leq g \leq \frac{d(d-3)}{6} + 1$, et pour tous $d > 0$ et $g \geq 0$ vérifiant cette inégalité, une telle courbe existe. Autrement dit, si d et g vérifient l'inégalité :

$$\frac{\sqrt{24g - 15} + 3}{2} \leq d \quad (5.10)$$

il existe une courbe de degré d et de genre g .

5.4.3 Relations déduites d'un g_d^3 et relations de I_g

On peut énoncer un théorème similaire au théorème 5.2 pour les courbes gauches :

Théorème 5.3 *Pour g suffisamment grand il existe un entier d et une courbe gauche lisse C de degré d et de genre g telle que $\mathcal{R} \subsetneq \mathcal{I}$, où \mathcal{I} est le plus petit idéal de $\mathbb{Q}[p_1, \dots, p_g]$ contenant I_g et p_d stable par \mathcal{F} .*

On peut suivre la preuve du théorème 5.2 pour montrer que le polynôme P de $\mathcal{R}_{(d-5)}^{d-2}$ donné par le théorème 3.1 n'est pas dans \mathcal{I} . On considère les deux valeurs $d - 4$ et $d - 3$ que peut prendre d' , et on conclut en remarquant que pour g suffisamment grand, on peut choisir d tel que :

$$\frac{\sqrt{24g - 15} + 3}{2} \leq d \leq \frac{g}{2} + 3$$

5.4.4 Courbes gauches lisses de genre $g \leq 10$

Pour toute courbe de genre g , la théorie de Brill-Noether assure l'existence d'un g_d^3 si

$$\frac{3}{4}g + 3 \leq d$$

²comme le fait remarquer Le Barz dans [LB87], au numéro 7, il existe des courbes de \mathbb{P}^3 de degré 6 et de genre 3 admettant une infinité de quadrisécantes alors que la formule (5.9) donne 0.

TAB. 5.2 – Utilisation du théorème (3.1) pour les courbes gauches lisses de genre $g \leq 10$

Genre	g_d^3	$g_{d'}^1$ déduit du g_d^3	Relations déduites du g_d^3 à partir du th. (3.1)	Conséquences
$g = 6$	g_7^3	g_3^1	$p_1 p_2^2 = 0$	
$g = 7$	g_8^3	g_4^1	$9p_1 p_2 p_3 + p_2^3 = 0$	
$g = 8$	g_8^3	g_4^1	$9p_1 p_2 p_3 + p_2^3 = 0$	$p_2 p_3 = 0$ $p_2^3 = p_1 p_2 p_3 = 0$
$g = 9$	g_9^3	g_5^1	$8p_1 p_2 p_4 + 3p_1 p_3^2$ $+ 2p_2^2 p_3 = 0$	$p_1 p_2 p_4 = p_1 p_3^2 = p_2^2 p_3 = 0$ $p_2 p_4 = p_3^2 = 0$
	g_8^3	g_4^1	$9p_1 p_2 p_3 + 2p_2^3 = 0$	$p_2 p_3 = 0$ $p_1^m p_2 p_3 = 0$ pour $m \in \{0 \dots 2\}$ $p_1^n p_2^3 = 0$ pour $n \in \{0, 1\}$
$g = 10$	g_{10}^3	g_6^1	$20p_1 p_2 p_5 + 12p_1 p_3 p_4$ $+ 4p_2^2 p_4 + 3p_2 p_3^2 = 0$	
	g_9^3	g_6^1	$10p_1^2 p_5 + 8p_1 p_2 p_4$ $+ 3p_1 p_3^2 + 2p_2^2 p_3 = 0$	$20p_1^{m+1} p_5 + 4p_1^m p_2 p_4 + p_1^m p_3^2 = 0$ si $m \in \{0 \dots 3\}$ $10p_1^{n+2} p_5 + 8p_1^{n+1} p_2 p_4 + 3p_1^{n+1} p_3^2$ $+ 2p_1^n p_2^2 p_3 = 0$ si $n \in \{0 \dots 2\}$

Pour les courbes de genre g inférieur ou égal à 10, on vérifie que ces systèmes linéaires n'apportent pas de relations qui ne soient pas déjà dans I_g . Pour les courbes admettant des g_d^3 pour lesquels le nombre de Brill-Noether est négatif, on calcule quelles sont les relations données par le théorème (3.1). A nouveau, on écrit **en gras** dans le tableau (5.2) les relations déduites d'un g_d^3 qui ne découlent pas de la connaissance de I_g couplée avec celle d'en $g_{d'}^1$ induit par le g_d^3 . On liste les systèmes linéaires à étudier à l'aide du théorème de Clifford et de la sous-section 5.4.2.

Annexe

Premierere page de l'annexe.

Deuxieme page de l'annexe.

Troisieme page de l'annexe.

Index des notations

C	18	désigne une courbe lisse projective de genre g
g	25	désigne le genre de la courbe C
r	25	désigne la dimension du système linéaire \mathcal{G}
d	25	désigne le degré du système linéaire \mathcal{G}
C_n	18	produit symétrique de la courbe (ses éléments s'identifient aux diviseurs effectifs de degré n)
σ_n	26	$\sigma_n : C^n \rightarrow C_n$ désigne le morphisme naturel d'addition
u_n	18	tout choix d'un diviseur D de C_n induit un morphisme $u_n : C_n \rightarrow JC$
g_d^r	25	abréviation pour système linéaire de degré d et de dimension r (ils seront toujours considérés sans points de base)
\mathcal{G}	26	\mathcal{G} est un g_d^r ; il induit le morphisme $\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^r$
G_n	26	désigne le système linéaire tronqué associé à \mathcal{G} (pour $r \leq n \leq d$) $G_n = \{D \in C_n \mid \exists E \in C_{d-n}, D + E \in \mathcal{G}\}$
Φ	26	$\Phi : C \rightarrow \mathbb{P}^r$ est le morphisme naturellement associé à \mathcal{G} un g_d^r
k	17	pour tout k de \mathbb{Z} , on note également k pour le morphisme $x \mapsto kx$ défini sur une variété abélienne
Θ	18	désigne le diviseur thêta dans JC
θ	18	désigne la classe du diviseur thêta dans $A^1(JC)$ ou $CH^1(JC)$
\bar{D}	18	pour D diviseur de degré 0, correspond à la classe de D dans JC
$CH^{g-i}(X)$	17	(= $CH_i(X)$) lorsque X est une variété de dimension g , désigne les cycles algébriques de dimension i modulo équivalence rationnelle
$CH(X)$	15	anneau de Chow associé à la variété X tensorisé par \mathbb{Q}

$CH_{(s)}^i(X)$	15	espace propre relatif à la décomposition de Beauville α de $CH^i(X)$ est dans $CH_{(s)}^i(X)$ si et seulement si pour tout k entier on a $k^*\alpha = k^{2p-i}\alpha$ ou de façon équivalente $k_*\alpha = k^{2g-2p+i}\alpha$
$A^{g-i}(X)$	16	(= $A_i(X)$) lorsque X est une variété de dimension g , désigne le \mathbb{Q} -ev des cycles de dimension i modulo équivalence algébriques
$A(X)$	16	anneau des cycles modulo équivalence algébrique associé à la variété X tensorisé par \mathbb{Q}
$A_{(s)}^i(X)$	17	espace propre relatif à la décomposition de Beauville pour les cycles modulo équivalence algébrique α de $A^i(X)$ est dans $A_{(s)}^i(X)$ si et seulement si pour tout k entier on a $k^*\alpha = k^{2p-i}\alpha$ ou de façon équivalente $k_*\alpha = k^{2g-2p+i}\alpha$
$[V]$	15	on note entre crochets la classe dans $CH(X)$ ou $A(X)$ d'une sous-variété V de X
\sqcup	23	union disjointe ; on écrit $A = I_1 \sqcup \dots \sqcup I_n$ pour une partition de A
R	22	anneau des cycles tautologiques (plus petite sous-algèbre de $A(JC)$ ou de $CH(JC)$ qui soit stable par produit d'intersection, de de Pontryagin ainsi que par les opérateurs k_* et k^*)
$R_{(i)}^p$	22	intersection de R et de $A_{(i)}^p$
I_g	22	idéal de relations entre cycles de R pour une courbe de genre g il est calculé par Polishchuk dans [Pol]
$\Delta^{I_1} \dots \Delta^{I_r} \dots O_{o_s}^{A_s}$	27	désigne la sous variété de C^n des x tels que pour tout t de $\{1, \dots, r\}$, i et j de I_t , $x_i = x_j$ et pour tout t de $\{1, \dots, s\}$, a de A_t , on ait $x_t = o_t$
δ_{i_1, \dots, i_r}	27	désigne la classe dans $A(C_n)$ ou $CH(C_n)$ de $\{i_1 x_1 + \dots + i_r x_r \mid x_i \in C\}$ lorsque $n = i_1 + \dots + i_r$
$\Psi_{\mathcal{P}}$	27	il s'agit du morphisme de copie $\Psi_{\mathcal{P}} : C^k \rightarrow C^n$ décrit en détail page 27
$\mathcal{H}_{\mathbb{P}^r}^n$	28	désigne la sous-variété de $(\mathbb{P}^n)^r$ des r -uplets dont les composantes sont sur un même hyperplan projectif de \mathbb{P}^r
JC	18	jacobienne de la courbe C
$*$	17	désigne le produit de Pontryagin
\mathcal{F}	17	désigne la transformation de Fourier sur $CH(X)$ ou $A(X)$ selon le contexte (Polishchuk la note S)

- $C_{(i)}$ 19 désigne la composante dans $CH_{(s)}^{g-1}(J)$ ou $A_{(s)}^{g-1}(J)$ (du plongement) de la courbe C considérée comme cycle dans la jacobienne
on a donc : $k_* C_{(s)} = k^{2g-2-s}C_{(s)}$ et $k^* C_{(s)} = k^{2+s}C_{(s)}$
- p_i 23 pour $i \geq 0$, Polishchuk note p_{i+1} l'image de $C_{(i)}$ par la transformation de Fourier ;
- $p_i^{[a]}$ 51 Polishchuk note $p_i^{[a]}$ pour $\frac{p_i}{a!}$ si $a \geq 0$; $p_i^{[a]}$ vaut 0 si $a < 0$
- N^i 22 Beauville note $N_i = -\mathcal{F}(C_{(i-1)})$ pour $i \geq 1$
on a donc $N^i = -p_i$ avec la notation de Polishchuk

Bibliographie

- [ACGH85] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of algebraic curves*. Springer, 1985.
- [Bea83] A. Beauville. Quelques remarques sur la transformation de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne. In *Algebraic Geometry (Tokyo/Kyoto 1982)*, volume **1016** of *Lect. Notes Math*, pages 238–260. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [Bea86] A. Beauville. Sur l'anneau de Chow d'une variété abélienne. *Math. Ann.*, **273**(no.4) :647–651, 1986.
- [Bea04] A. Beauville. Algebraic cycles on Jacobian varieties. *Compos. Math.*, **140**(no.3) :683–688, 2004.
- [Cer83] G. Ceresa. C is not algebraically equivalent to C^- in its Jacobian. *Ann. Math.*, **117** :285–291, 1983.
- [CvG93] E. Colombo and B. van Geemen. Note on curves in a Jacobian. *Compositio Math.*, **88**(no.3) :333–353, 1993.
- [ELMS89] D. Eisenbud, H. Lange, G. Martens, and F.-O. Schreyer. The clifford dimension of a projective curve. *Compositio Math.*, **72** :173–204, 1989.
- [Fak96] N. Fakhruddin. Algebraic cycles on generic abelian varieties. *Compositio Math.*, **100**(no.1) :101–119, 1996.
- [Ful83] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1983.
- [GKP89] R. Graham, D. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics - A foundation for computer science*. Addison-Wesley Publishing Compagny, 1989.
- [GP78] L. Gruson and C. Peskine. Genre des courbes de l'espace projectif. In *Algebraic geometry (Proc. Sympos., Univ. Tromsø, Tromsø, 1977)*, volume **687** of *Lecture Notes in Math.*, pages 31–59. Springer, Berlin, (1978).
- [Har82] R. Hartshorne. Genre des courbes algébriques dans l'espace projectif (d'après L. Gruson et C. Peskine). *Séminaire Bourbaki*, pages 301–313, 34^{ième} année (1981-1982). Astérisque 92-93.
- [Ike03] A. Ikeda. Algebraic cycles and infinitesimal invariants on Jacobian varieties. *J. Algebraic Geom.*, **12**(no.3) :573–603, 2003.
- [LB87] P. Le Barz. Formules pour les triséchantes des surfaces algébriques. *Enseign. Math.* (2), **33**(no. 1-2) :1–66, Janvier-Juin 1987.
- [Pol] A. Polishchuk. Universal algebraic equivalences between tautological cycles on Jacobians of curves (à paraître). *Math. Zeitschrift*. arXiv :math.AG/0309160.
- [PWZ96] M. Petkovsek, H. Wilf, and D. Zeilberger. *A=B*. A K Peters,Ltd., 1996.