

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Alice Barbara TUMPACH

pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Polytechnique

Spécialité MATHÉMATIQUES

Sujet :

Variétés kählériennes et
hyperkähleriennes de dimension infinie

Thèse présentée le mardi 26 juillet 2005,
devant la commission d'examen composée de :

| | | |
|----|--------------------|--------------------|
| MM | Anton ALEKSEEV | membre du jury |
| | Olivier BIQUARD | rapporteur |
| | Paul GAUDUCHON | directeur de thèse |
| | Tudor RATIU | rapporteur |
| | Alan WEINSTEIN | président du jury |
| | Tilmann WURZBACHER | rapporteur. |

Remerciements

Pour m'avoir ouvert son puits de science, c'est bien sûr Paul Gauduchon que je dois remercier en première place. Sa culture, son enthousiasme pour les mathématiques et sa gentillesse ont donné à ces quatre années une richesse particulière. Toujours disposé à parler de ses propres recherches mais aussi de tout autre sujet mathématique ou d'ordre général, il m'a consacré de nombreuses heures de discussions dont je tire encore beaucoup de matière aujourd'hui. Pendant quatre ans, il m'a permis de m'initier avec plaisir à la recherche tout en me laissant la liberté dont j'avais besoin pour mener à bien ce travail. Pour toutes ces raisons, je lui suis infiniment reconnaissante.

Je remercie chaleureusement Olivier Biquard pour les questions qu'ils a posées et les imprécisions qu'il a soulevées en rapportant cette thèse. Son regard fut précieux et le texte final lui doit de considérables améliorations. La discussion engagée avec lui autour de cette thèse durant les semaines qui ont précédé la soutenance m'a apporté un regain de motivation pour approfondir mon travail. Enfin, je lui sais gré d'avoir fait le déplacement le jour de la soutenance.

Je remercie sincèrement Tudor Ratiu pour son travail efficace et précis en tant que rapporteur et pour son déplacement le jour de la soutenance. L'intérêt qu'il a porté à mon travail et ses encouragements ont été d'un grand réconfort à cette étape critique qu'est la fin de thèse. Enfin, comme il m'accueillera à partir du mois d'octobre 2005 dans son laboratoire à Lausanne, je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude et l'impatience avec laquelle j'attends de pouvoir poursuivre mes travaux au sein de son équipe.

Vielen Dank an Tilmann Wurzbacher dafür, daß er mit solcher Aufmerksamkeit das Manuskript durchlas, und dabei sogar noch meine französischen Rechtschreibfehler entdeckte und verbesserte. Auch wegen der zu seltenen, trotzdem aber bereichernden Gespräche, die wir über die Jahre zusammen führen durften, bleibe ich ihm besonders dankbar.

Merci à Anton Alekseev pour avoir accepté de faire partie du jury, pour s'être déplacé et pour m'avoir fait travailler sur ma thèse bien après la soutenance.

Many thanks go to Alan Weinstein who agreed to preside over the thesis committee, and did so in flawless French.

Je me dois de remercier l'École Polytechnique pour m'avoir offert un cadre de travail idéal, ainsi que le CMLS pour avoir financé ma participation à de

nombreuses conférences, chose sans laquelle cette thèse n'aurait pas pu voir le jour. Je remercie également l'Université Paris 7 pour avoir financé trois années de cette thèse et l'Université d'Orsay pour avoir financé mon monitorat pendant trois ans ainsi qu'une année de 1/2 ATER.

Aux secrétaires et aux informaticiens du CMLS/CPHT j'exprime ma gratitude pour leur aide et leur accueil chaleureux.

Je remercie tous ceux, membres du jury, parents, amis, qui, malgré cette date estivale, ont pris la peine de venir assister à cette soutenance.

Děkuji mé rodině, že respektovala moje rozhodnutí věnovat se matematice, třebaže to bylo pro ni neočekávané. Haf, haf, slurp Kačence, haf.

Merci à François pour ses questions prétendument naïves auxquelles je ne sais toujours pas répondre, et pour avoir mis son talent et sa finesse au service de la rédaction de cette *vielsprachige Danksagung*.

Obrigado a Gérard, parceiro de cena, que contribuiu de várias maneiras : não só me aprendeu a sabedoria e a dominar o stress, mas também me deu uma ajuda logística essencial ao desenvolvimento da defesa e do copo.

Алексей, спасибо тебе за бесконечные дискуссии “ за жизнь ” вообще и о внутренней политике России в частности. *Grazie allo stupendissimo e affascinante Domenico per la simpatia, la maestria informatica, e la modestia.* Merci à Pascal pour son rire qui traverse les murs, sa bonne humeur à toute épreuve, et ses poissons.

Vielen Dank an Christian für seine einjährige Gesellschaft, unsere mathematische Gespräche und seine Musik.

Je remercie sincèrement Hua,ji pour sa sympathique compagnie, sa générosité et sa constante disposition à offrir son aide. Pour les discussions que nous avons eues, je lui sais gré.

Aux autres thésards — et tout spécialement aux thésardes ! — de maths et de physique qui ont accompagné ces quatre années passées au centre j'exprime ma sympathie.

À tous ceux que, pour une raison ou une autre, je ne peux nommer ici et qui ont contribué à leur manière à la rédaction de cette thèse, j'exprime ma gratitude. *Obrigado a todas as pessoas que por qualquer razão não pude nomear aqui.*

If...

(...)

If you can bear to hear the truth you've spoken
Twisted by knaves to make a trap for fools
Or watch the things you gave your life to, broken,
And stoop and build'em up with worn-out tools;

If you can make one heap of all your winnings
And risk it on one turn of pitch-and-toss,
And lose, and start again at your beginnings
And never breathe a word about your loss;
If you can force your heart and nerve and sinew
To serve your turn long after they are gone,
And so hold on when there is nothing in you,
Except the Will which says to them : "Hold on!"

(...)

If you can fill the unforgiving minute
With sixty seconds' worth of distance run,
Yours is the Earth and everything that's in it,
And – which is more – you'll be a man, my son!

Rudyard Kipling¹

¹ Extrait de la plaque commémorative en l'honneur de Raymond Croland (17.05.1913-08.04.1945), agrégé préparateur de zoologie (1938-1944), commandant des forces françaises combattantes, décoré à titre posthume, arrêté par la Gestapo au deuxième étage de l'École normale supérieure de Physique, rue Lhomond, le 14 février 1944, déporté et mort en Allemagne.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Quotients kählériens et hyperkähleriens dans le cadre banachique | 11 |
| 1.1 | Introduction | 11 |
| 1.2 | Généralités sur les quotients kählériens et hyperkähleriens dans le cadre banachique | 14 |
| 1.2.1 | Quotient kählérien | 14 |
| 1.2.2 | La variété stable | 17 |
| 1.2.3 | Potentiel kählérien sur le quotient | 22 |
| 1.2.4 | Exemple de la variété des p -plans ($p < +\infty$) | 28 |
| 1.2.5 | Quotient hyperkähleriens | 29 |
| 1.2.6 | Exemple de l'espace cotangent de la variété des p -plans ($p < +\infty$) | 31 |
| 1.3 | La Grassmannienne restreinte comme quotient kählérien | 37 |
| 1.3.1 | Introduction | 37 |
| 1.3.2 | Actions de groupes | 38 |
| 1.3.3 | Le quotient kählérien | 40 |
| 1.3.4 | Bases de Schauder | 45 |
| 1.3.5 | La variété stable \mathcal{M}_k^s | 52 |
| 1.3.6 | Potentiel kählérien de la grassmannienne restreinte | 56 |
| 1.4 | Structure hyperkählienne du cotangent de la Grassmannienne restreinte et de la complexification de la Grassmannienne restreinte | 59 |
| 1.4.1 | Introduction | 59 |
| 1.4.2 | La structure hyperkählienne de $T\mathcal{M}_k$ | 60 |
| 1.4.3 | Les trois applications moments | 62 |
| 1.4.4 | La surface de niveau \mathcal{W}_k | 63 |
| 1.4.5 | La réduction hyperkählienne | 67 |
| 1.4.6 | L'identification de la variété complexe $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ avec l'espace cotangent de Gr_{res}^0 | 70 |
| 1.4.7 | Calcul du potentiel kählérien associé à la structure complexe I_1 | 72 |
| 1.4.8 | L'identification de la variété complexe $\mathcal{W}_k^{s_3}/G^{\mathbb{C}}$ avec l'orbite complexifiée de Gr_{res}^0 | 76 |
| 1.4.9 | Calcul du potentiel kählérien K_3 associé à la structure complexe I_3 | 80 |
| 2 | Orbites coadjointes affines des L^*-groupes | 85 |
| 2.1 | Introduction | 85 |
| 2.2 | L^* -groupes et L^* -algèbres | 87 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.2.1 | Définitions, propriétés et exemples | 87 |
| 2.2.2 | Systèmes de racines des L^* -algèbres complexes | 91 |
| 2.2.3 | Classification des L^* -algèbres simples | 95 |
| 2.3 | Orbites coadjointes affines | 97 |
| 2.3.1 | Généralités sur les orbites coadjointes affines | 97 |
| 2.3.2 | Orbites kählériennes des L^* -groupes simples de type compact | 100 |
| 2.4 | Orbites hermitiennes symétriques | 102 |
| 2.4.1 | Introduction | 102 |
| 2.4.2 | Classification des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques irréductibles de type compact | 103 |
| 2.4.3 | Description des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques de type compact et de leurs injections dans une grassmannienne | 107 |
| 2.4.4 | Sous-algèbres abéliennes maximales et racines fortement orthogonales | 111 |
| 2.5 | Théorème de Mostow | 116 |
| 2.5.1 | Introduction | 116 |
| 2.5.2 | La variété \mathcal{P} des opérateurs auto-adjoints définis positifs de $Gl_2(H)$ | 116 |
| 2.5.3 | Sous-espaces totalement géodésiques de \mathcal{P} | 120 |
| 2.5.4 | Projection orthogonale de \mathcal{P} sur un sous-espace totalement géodésique | 123 |
| 2.5.5 | Preuve du théorème de Mostow pour $Gl_2(H)$ | 125 |
| 2.5.6 | Théorème de Mostow pour un L^* -groupe semi-simple | 127 |
| 2.6 | Structure hyperkählérienne de l'orbite complexifiée $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ d'une orbite coadjointe affine hermitienne symétrique \mathcal{O}_D d'un L^* -groupe semi-simple de type compact et de $T'\mathcal{O}_D$ | 129 |
| 2.6.1 | Fibration de l'orbite complexifiée au-dessus de l'orbite de type compact | 129 |
| 2.6.2 | Structure hyperkählérienne de l'orbite complexifiée | 132 |
| 2.6.3 | Identification de l'orbite complexifiée avec l'espace tangent de l'orbite de type compact | 134 |
| 2.6.4 | Expression de la métrique hyperkählérienne de l'espace tangent de l'orbite de type compact | 136 |
| A | Structures géométriques sur les variétés banachiques | 143 |
| A.1 | Géométrie différentielle dans le cadre banachique | 143 |
| A.1.1 | Différentielle d'une application entre deux espaces de Banach | 143 |
| A.1.2 | Variétés banachiques | 144 |
| A.1.3 | Morphismes de variétés, espace tangent et application tangente | 149 |
| A.1.4 | Les briques de la théorie | 150 |
| A.1.5 | Sous-variétés banachiques | 152 |
| A.1.6 | Groupes de Lie et algèbres de Lie banachiques | 157 |
| A.1.7 | Fibrés vectoriels et fibrés principaux | 158 |
| A.1.8 | Champs de vecteurs | 160 |
| A.1.9 | Formes différentielles | 163 |
| A.1.10 | Calcul de Lie | 164 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A.1.11 | Le théorème de Frobenius | 166 |
| A.1.12 | Connexions | 166 |
| A.2 | Variétés banachiques riemanniennes | 169 |
| A.2.1 | Définition et exemples | 169 |
| A.2.2 | Connexion de Levi-Civita | 170 |
| A.2.3 | Géodésiques | 171 |
| A.3 | Variétés banachiques symplectiques | 172 |
| A.3.1 | Définitions et exemples | 172 |
| A.3.2 | La structure symplectique canonique d'un cotangent | 174 |
| A.3.3 | La structure symplectique canonique d'une orbite coadjointe | 175 |
| A.3.4 | Exemples de $Gr^{(p)}$ et Gr_{res} | 176 |
| A.3.5 | Le Théorème de Darboux | 177 |
| A.3.6 | Application moment | 178 |
| A.4 | Variétés banachiques presque-complexes | 179 |
| A.4.1 | Définitions | 179 |
| A.4.2 | Le Théorème de Newlander-Nirenberg | 179 |
| A.4.3 | Fonctions analytiques et holomorphes sur un espace de Banach | 180 |
| A.4.4 | La connexion de Chern | 181 |
| A.5 | Variétés banachiques kählériennes | 184 |
| A.5.1 | Définitions et exemples | 184 |
| A.5.2 | Potentiel kählérien | 186 |
| A.6 | Variétés banachiques hyperkähleriennes | 187 |
| A.6.1 | Définitions et exemples | 187 |
| A.6.2 | Potentiel hyperkählierien | 189 |
| B | Géométrie des espaces homogènes | 191 |
| B.1 | Définitions | 191 |
| B.2 | Connexion homogène | 191 |
| B.3 | Exemples | 193 |

Chapitre 1

Quotients kählériens et hyperkähleriens dans le cadre banachique

1.1 Introduction

Une variété kählérienne de dimension finie est une variété riemannienne munie d'une structure complexe orthogonale parallèle pour la connexion de Levi-Civita. En associant la métrique riemannienne avec la structure complexe, on obtient une forme symplectique, appelée forme de Kähler. Une variété hyperkählienne de dimension finie est une variété munie d'une métrique riemannienne g et de trois structures complexes I, J, K telles que $IJK = -1$, et telles que g soit kählérienne par rapport à chacune des structures complexes. Une variété hyperkählienne est donc munie de trois formes de Kähler, ω_1, ω_2 , et ω_3 , et le choix d'une des structures complexes, par exemple I permet de définir une structure symplectique complexe par $\Omega = \omega_2 + i\omega_3$.

D. Kaledin et B. Feix ont montré indépendamment dans [Kal] et [Fei], que, une variété N munie d'une métrique kählérienne g_N étant donnée, il existe une métrique hyperkählienne g définie sur un voisinage de la section nulle de T^*N , compatible avec la structure symplectique holomorphe naturelle de l'espace cotangent, et telle que la restriction de g à N soit g_N , unique si l'on suppose que g est S^1 -invariante. D. Kaledin utilise pour sa démonstration la notion de variété de Hodge, alors que B. Feix utilise des techniques twistorielles. Cependant les exemples explicites de métriques hyperkähliennes sont peu nombreux.

O. Biquard et P. Gauduchon construisent dans [BG1] la métrique hyperkählienne des espaces cotangents des espaces hermitiens symétriques, et dans [BG2] la métrique hyperkählienne des orbites coadjointes de type compact symétriques d'un groupe de Lie complexe semi-simple, et établissent des formules pour les potentiels kählériens, permettant d'obtenir une expression explicite de la métrique. Dans [BG3], ces mêmes auteurs identifient ces structures hyperkähliennes, montrant ainsi que l'espace cotangent et l'orbite complexe sont les deux facettes d'un même objet hyperkählierien qui apparaissent selon la structure complexe distinguée. Ces résultats reposent sur une théorie fine des

racines des espaces hermitiens symétriques, à savoir la théorie des racines fortement orthogonales, qui exprime les propriétés spécifiques de la courbure d'un espace hermitien symétrique.

La grassmannienne restreinte Gr_{res} est un exemple d'espace hermitien symétrique de dimension infinie. Nous montrons qu'il peut être obtenu comme quotient kählérien à partir d'une variété banachique non hilbertienne. La partie symplectique de ce résultat a été montrée indépendamment par T. Wurzbacher (non publié, mais exposé à plusieurs reprises, en particulier dans [Wur2]). Dans un second temps, nous construisons une structure hyperkählérienne sur l'espace (co-)tangent de Gr_{res} telle que la restriction à la section nulle soit la structure kählérienne de Gr_{res} . Pour cela un quotient hyperkählérien est utilisé.

La théorie du quotient symplectique a été initiée par J.E. Marsden et A. Weinstein dans [MW1]. Elle a été utilisée en dimension finie notamment pour construire de nouvelles variétés symplectiques. Des applications en dimension infinie sont fournies par J.E. Marsden et T. Ratiu dans [MR] qui développent l'idée de V.I. Arnold selon laquelle les équations du mouvement d'un fluide s'interprètent comme les équations des géodésiques d'un groupe de Lie de dimension infinie. Un autre exemple de réduction symplectique en dimension infinie est donné dans [MW3] en relation avec l'équation de Maxwell-Vlasov (un exposé extensif de l'histoire et des applications de la réduction symplectique est donné dans [MW2]). La réduction kählérienne et la réduction hyperkählérienne sont des raffinements de cette théorie. Une version de dimension infinie basée sur l'étude des *équations de Nahm* est utilisée par P.B. Kronheimer dans [Kro1] et [Kro2] pour établir la structure hyperkählérienne des orbites coadjointes semi-simples maximales et nilpotentes d'un groupe de Lie semi-simple complexe (de dimension finie), résultats qui furent ensuite généralisés par O. Biquard dans [Biq] et A.G. Kovalev dans [Kov] au cas d'une orbite générale.

Dans [Kac], V.G Kac regroupe les groupes et algèbres de Lie de dimension infinie en 4 classes (d'intersection non vide) :

- 1) les groupes de difféomorphismes d'une variété et les algèbres de Lie de champs de vecteurs associées;
- 2) les groupes (resp. algèbres) d'applications lisses d'une variété dans un groupe de Lie de dimension finie (resp. dans l'algèbre de Lie associée);
- 3) les groupes de Lie et algèbres de Lie classiques d'opérateurs sur un espace de Hilbert ou un espace de Banach;
- 4) les algèbres de Kac-Moody.

Les exemples de réduction en dimension infinie cités précédemment concernent les deux premières classes de groupes. Nous présentons un exemple de réduction kählérienne et un exemple de réduction hyperkählérienne mettant en jeu des groupes de la troisième classe.

Dans la section 1.2, nous exposons les généralités sur les quotients kählériens et hyperkählériens dans le cadre banachique en mettant l'accent sur la surface stable associée à une surface de niveau, ainsi que la théorie du potentiel kählérien sur un quotient issue de la théorie de préquantisation de Kostant-Souriau. Nous illustrons ces généralités par l'exemple de la grassmannienne $Gr^{(p)}$ des p -plans ($p < +\infty$) d'un espace de Hilbert pour le quotient kählérien et de l'espace cotangent de $Gr^{(p)}$ pour le quotient hyperkählérien. Ces exemples sont particulièrement simples car les métriques qui rentrent en jeu sont fortement riemanniennes, ce qui garantit l'existence d'un supplémentaire topologique à tout sous-espace vectoriel fermé.

Dans la section 1.3, nous réalisons chaque composante connexe de la grassmannienne restreinte Gr_{res} comme quotient kählérien d'un espace de Banach plat \mathcal{M}_k par un groupe de Lie banachique G , et nous retrouvons par ce biais la structure de variété hilbertienne de Gr_{res} (plus précisément la famille à un paramètre réel k de structures hilbertiennes proportionnelles de Gr_{res} issue des identifications possibles de Gr_{res} avec une orbite adjointe d'un groupe de Lie banachique), ainsi que le potentiel kählérien obtenu par injection de Plücker. La nécessité d'introduire un espace de Banach plutôt qu'un espace de Hilbert découle de l'expression de l'application moment, faisant intervenir la trace d'un opérateur. L'identification de l'espace quotient avec la grassmannienne restreinte (et non avec un sous-ensemble de celle-ci) repose sur l'existence d'une base canonique associée à chaque élément de Gr_{res} et définissant un élément de la surface stable. La résolution des équations définissant la surface stable est également présentée. Remarquons que l'action transitive d'un groupe de Lie banachique sur la surface de niveau permet d'obtenir à peu de frais l'existence des supplémentaires topologiques garantissant le caractère différentiable des variétés étudiées.

Dans la section 1.4, nous construisons le quotient hyperkählerien de l'espace tangent $T\mathcal{M}_k$ par le groupe G , et nous l'identifions soit à l'espace (co-)tangent de la grassmannienne restreinte, soit à l'orbite complexifiée de Gr_{res} , en fonction de la structure complexe choisie. L'identification se fait dans les deux cas par le biais de la surface stable associée à la structure complexe distinguée. Pour chaque valeur du paramètre k , la structure hyperkählerienne obtenue étend une des structures kählériennes de la grassmannienne restreinte. Notons que deux structures hyperkähleriennes de la famille obtenue sont essentiellement différentes (non proportionnelles). Signalons également que l'action naturelle du groupe de Lie banachique sur la surface de niveau n'est pas transitive. D'autre part, nous exprimons le potentiel kählérien associé à la structure complexe naturelle de l'espace cotangent de la grassmannienne restreinte en fonction de la courbure de Gr_{res} . Le potentiel kählérien associé à la structure complexe naturelle de l'orbite complexifiée est également explicité. Nous en donnons une expression en fonction de la courbure de Gr_{res} , et une autre en fonction des angles caractéristiques d'un couple de sous-espaces appartenant à l'orbite complexifiée. Ces formules de potentiels généralisent au cas de la dimension infinie les formules obtenues par O. Biquard et P. Gauduchon dans le cadre de la dimension finie.

1.2 Généralités sur les quotients kählériens et hyperkähleriens dans le cadre banachique

1.2.1 Quotient kählérien

Soit \mathcal{M} une variété banachique sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , munie d'une forme faiblement symplectique ω , et d'une action différentiable d'un groupe de Lie banachique G (sur \mathbb{K}) d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Définition 1.2.1 Une application moment pour l'action d'un groupe de Lie banachique G sur une variété banachique \mathcal{M} est une application différentiable μ définie sur \mathcal{M} à valeurs dans le dual continu \mathfrak{g}' de \mathfrak{g} satisfaisant la condition :

$$d\mu_x(\mathfrak{a}) = +i_{X^{\mathfrak{a}}}\omega,$$

pour tout x de \mathcal{M} et tout \mathfrak{a} de \mathfrak{g} , où $X^{\mathfrak{a}}$ désigne le champ de vecteurs engendré par l'élément \mathfrak{a} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} via l'action infinitésimale du groupe. L'action de G sur \mathcal{M} est dite *hamiltonienne* lorsqu'il existe une application moment G -équivariante, i.e. telle que pour tout x de \mathcal{M} et tout g de G ,

$$\mu(g.x) = \text{Ad}^*(g)(\mu(x)).$$

où Ad^* désigne l'action coadjointe de G sur \mathfrak{g}' .

Définition 1.2.2 Une valeur régulière de l'application moment est un élément ξ de \mathfrak{g}' tel que pour tout x appartenant à $\mu^{-1}(\xi)$, $d\mu_x : T_x\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}'$ est surjective, et telle que $\text{Ker } d\mu_x$ possède un supplémentaire topologique.

Remarque 1.2.3 Si ξ est une valeur régulière de μ alors $\mu^{-1}(\xi)$ est une sous-variété de \mathcal{M} , appelée surface de niveau ξ . Si, de plus, μ est G -équivariante et si ξ est un élément $\text{Ad}^*(G)$ -invariant de \mathfrak{g}' , alors la variété $\mu^{-1}(\xi)$ est stable sous l'action de G et on peut considérer l'espace quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$.

Dans la suite, ξ désigne une valeur régulière $\text{Ad}^*(G)$ -invariante d'une application moment μ associée à l'action de G sur \mathcal{M} . Rappelons quelques résultats classiques sur la topologie et la géométrie des espaces quotients. Les propositions 1.2.4, 1.2.5 et 1.2.6 sont respectivement la proposition 3 chap.III paragraphe 4.2 de [Bou2], la proposition 6 chap.III paragraphe 4.3 de [Bou2] et la proposition 10 chap.III paragraphe 1.5 de [Bou3], modulo changements de notations.

Proposition 1.2.4 ([Bou2]) *Si G agit proprement sur une variété \mathcal{N} , l'espace quotient \mathcal{N}/G muni de la topologie quotient est séparé.*

Proposition 1.2.5 ([Bou2]) *Si G agit librement sur \mathcal{N} , l'action de G sur \mathcal{N} est propre si et seulement si le graphe \mathcal{C} de la relation d'équivalence définie par G est fermé dans $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ et l'application canonique $\mathcal{C} \rightarrow G$ continue.*

Proposition 1.2.6 *Soit ξ est une valeur régulière $\text{Ad}^*(G)$ -équivariante de l'application moment. Si, pour tout x dans $\mu^{-1}(\xi)$, il existe un supplémentaire topologique H_x dans $T_x\mu^{-1}(\xi)$ de l'espace tangent à l'orbite de x , alors l'espace quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$ possède une unique structure de variété banachique telle que la projection sur le quotient $\pi : \mu^{-1}(\xi) \rightarrow \mu^{-1}(\xi)/G$ soit une submersion.*

Remarque 1.2.7 Soit b une forme bilinéaire anti-symétrique continue sur un espace de Banach B telle que b réalise une injection \tilde{b} de B dans son dual continu B' par $\tilde{b}(X) := b(X, \cdot)$, $X \in B$. Pour tout sous-espace vectoriel A de B on a l'inclusion :

$$\bar{A} \subset (A^{\perp b})^{\perp b},$$

mais pas l'égalité en général. L'égalité signifie que toute forme linéaire continue qui s'annule sur $A^{\perp b}$ est de la forme $\tilde{b}(X)$ pour un $X \in A$, ce qui constitue une propriété particulière de l'espace vectoriel A en question (cf [MW1]).

Proposition 1.2.8 Si $\mu^{-1}(\xi)/G$ est une variété banachique, la condition :

$$T_x G.x = (T_x G.x^{\perp \omega})^{\perp \omega}$$

pour tout $x \in \mu^{-1}(\xi)$ assure que $\mu^{-1}(\xi)/G$ est une variété faiblement symplectique.

□ **Preuve de la proposition 1.2.8 :**

Si $\mu^{-1}(\xi)/G$ est une variété banachique et si G agit par symplectomorphismes, on définit une 2-forme ω_{red} sur le quotient par :

$$\omega_{red,[x]}(X, Y) := \omega_x(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

pour tous X, Y appartenant à $T_{[x]}\mu^{-1}(\xi)$, où $\pi_*\tilde{X} = X$ et $\pi_*\tilde{Y} = Y$. Remarquons que pour tout $x \in \mu^{-1}(\xi)$ l'espace tangent $T_x\mu^{-1}(\xi)$ est exactement le noyau de la différentielle $d\mu_x$ de sorte que pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$, la 1-forme $i_{X^{\mathfrak{a}}}\omega$ est nulle sur $\mu^{-1}(\xi)$. Puisque l'espace tangent en x à l'orbite sous G , $T_x G.x$, est engendré par $\{X^{\mathfrak{a}}(x), \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}\}$, on en déduit que :

$$T_x\mu^{-1}(\xi) = T_x G.x^{\perp \omega}$$

et

$$T_x G.x \subset T_x\mu^{-1}(\xi)^{\perp \omega}.$$

On a alors $\pi^*\omega_{red} = \omega|_{\mu^{-1}(\xi)}$ et la fermeture de ω implique la fermeture de ω_{red} . Le noyau de ω_{red} en un point $[x]$ est $\pi_*T_x\mu^{-1}(\xi)^{\perp \omega}$. Pour que ω_{red} soit une forme symplectique, il faut que $T_x\mu^{-1}(\xi)^{\perp \omega} = T_x G.x$, c'est-à-dire que

$$T_x G.x = (T_x G.x^{\perp \omega})^{\perp \omega}.$$

□

Remarque 1.2.9 Si la variété \mathcal{M} est munie d'une métrique g faiblement riemannienne G -invariante, l'existence d'une tranche G -invariante H permet de définir une métrique faiblement riemannienne g_{red} sur le quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$ par :

$$g_{red,[x]} : \begin{array}{ccc} T_{[x]}\mu^{-1}(\xi)/G \times T_{[x]}\mu^{-1}(\xi)/G & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto & g_x(\tilde{X}, \tilde{Y}), \end{array}$$

pour tout $x \in \mu^{-1}(\xi)$, où \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) est l'unique vecteur de H_x tel que $\pi_*(\tilde{X}) = X$ (resp. $\pi_*(\tilde{Y}) = Y$). Remarquons que dans le cas faiblement riemannien, si $T_x G.x^{\perp g}$ désigne l'orthogonal de $T_x G.x$ dans $T_x\mu^{-1}(\xi)$, on a bien :

$$T_x G.x \cap T_x G.x^{\perp g} = \{0\},$$

mais en général pas :

$$T_x \mathcal{M} = T_x G.x \oplus T_x G.x^{\perp g}$$

Dans le cas où ω et g sont reliées par une structure complexe formellement intégrable I , i.e. si l'endomorphisme G -équivariant I défini par $g(IX, Y) = \omega(X, Y)$ vérifie $I^2 = -1$ et

$$N(X, Y) := [X, Y] + I[X, IY] + I[IX, Y] - [IX, IY] = 0,$$

pour tous X et Y appartenant à $T_x\mathcal{M}$, où N désigne le tenseur de Nijenhuis, on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.10 *Soit \mathcal{M} une variété banachique kählérienne munie d'une action propre et hamiltonienne d'un groupe de Lie banachique G respectant la structure kählérienne. Si l'espace tangent à l'orbite d'un point x appartenant à la surface de niveau $\mu^{-1}(\xi)$ d'une valeur régulière $Ad^*(G)$ -invariante de l'application moment μ vérifie :*

$$T_x G.x \oplus T_x G.x^{\perp_g} = T_x \mu^{-1}(\xi),$$

alors le quotient kählérien $\mathcal{M}/G := \mu^{-1}(\xi)/G$ est une variété kählérienne lisse.

■ **Preuve du théorème 1.2.10 :**

La condition

$$T_x G.x \oplus T_x G.x^{\perp_g} = T_x \mu^{-1}(\xi)$$

implique que

$$\left(T_x G.x^{\perp_\omega} \right)^{\perp_\omega} = T_x G.x,$$

ce qui est équivalent à

$$\left(T_x G.x^{\perp_g} \right)^{\perp_g} = T_x G.x.$$

Dans le cas où ces conditions sont vérifiées, l'orthogonal $H_x := T_x G.x^{\perp_g}$ de $T_x G.x$ dans $T_x \mu^{-1}(\xi)$ fournit une tranche G -équivariante qui permet de définir une structure de variété différentiable sur le quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$, qu'une métrique faiblement riemannienne. Pour définir la structure complexe sur le quotient, remarquons que :

$$IH_x = I(T_x G.x)^{\perp} \subset T_x \mu^{-1}(\xi) = (T_x G.x)^{\perp_\omega}.$$

D'autre part, IH_x est orthogonal à $T_x G.x$. Ainsi l'espace H_x est stable par I et permet de définir une structure presque-complexe I_{red} sur le quotient par :

$$I_{red} : \begin{array}{ccc} T_{[x]}\mu^{-1}(\xi)/G & \rightarrow & T_{[x]}\mu^{-1}(\xi)/G \\ X & \mapsto & \pi_* I_x \tilde{X}, \end{array}$$

où π est la projection sur le quotient et où \tilde{X} est l'unique élément de H_x qui se projète sur X . De plus, pour tous champs de vecteurs X et Y sur $\mu^{-1}(\xi)/G$, la projection π vérifie :

$$[X, Y] = \pi_* \left([\tilde{X}, \tilde{Y}] \right),$$

où \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) est le champ de vecteur horizontal (i.e. vérifiant $\tilde{X}(x) \in H_x$) tel que $\pi_*(\tilde{X}) = X$ (resp. $\pi_*(\tilde{Y}) = Y$), et la définition de I_{red} s'écrit :

$$I_{red} \pi_* \tilde{X} = \pi_* I \tilde{X}.$$

L'intégrabilité formelle de I implique alors l'intégrabilité formelle de I_{red} car le tenseur de Nijenhuis de I_{red} a pour expression :

$$\begin{aligned} N(X, Y) &:= [X, Y] + I_{red}[X, I_{red}Y] + I_{red}[I_{red}X, Y] - [I_{red}X, I_{red}Y] \\ &= \pi_*[\tilde{X}, \tilde{Y}] + I_{red}\pi_*[\tilde{X}, I\tilde{Y}] + I_{red}\pi_*[I\tilde{X}, \tilde{Y}] - \pi_*[I\tilde{X}, I\tilde{Y}] \\ &= \pi_*(N(\tilde{X}, \tilde{Y})). \end{aligned}$$

pour tous X, Y appartenant à $T_{[x]}\mu^{-1}(\xi)$ et tous relèvements horizontaux \tilde{X} et \tilde{Y} . ■

Définition 1.2.11 La variété $\mu^{-1}(\xi)/G$ munie des structures riemanniennes g_{red} , symplectique ω_{red} et complexe I_{red} obtenues par ce procédé est appelée quotient kählérien de la variété initiale \mathcal{M} par le groupe G .

1.2.2 La variété stable

Définition et propriétés de la variété stable

Soit $(\mathcal{M}, \omega, g, I)$ une variété banachique (faiblement) kählérienne, munie d'une action hamiltonienne d'un groupe de Lie banachique G préservant ω, g et I , et ξ une valeur régulière de l'application moment μ , telles que le quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$ possède une structure naturelle de variété (faiblement) kählérienne.

Définition 1.2.12 Si l'action de G sur \mathcal{M} s'étend en une action holomorphe d'un groupe de Lie banachique complexe $G^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$, alors on peut définir la variété stable \mathcal{M}^s associée à la surface de niveau $\mu^{-1}(\xi)$ par :

$$\mathcal{M}^s := \{ x \in \mathcal{M} \mid \exists g \in G^{\mathbb{C}}, g.x \in \mu^{-1}(\xi) \}.$$

Remarque 1.2.13 Toute algèbre de Lie banachique n'est pas l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, comme le montre par exemple W. Van Est et Th.J. Korshagen dans [EK].

On supposera dans la suite que :

$$T_x\mathcal{M} = T_x(\mu^{-1}(\xi)) \oplus I.T_xG.x.$$

C'est une hypothèse naturelle qui sera vérifiée dans les exemples que nous étudions dans cette thèse. Elle implique en particulier que l'espace tangent à \mathcal{M}^s en x est $T_x\mathcal{M}$ et donc que \mathcal{M}^s est un ouvert de \mathcal{M} . En général, \mathcal{M}^s ne recouvre pas \mathcal{M} . Des exemples où $\mathcal{M}^s = \mathcal{M}$ sont donnés dans [Kro1], [Kro2] et [Biq].

Proposition 1.2.14 Si $G^{\mathbb{C}}$ possède une décomposition polaire de la forme $G^{\mathbb{C}} = \exp(i\mathfrak{g}).G$, alors, pour tout $x \in \mu^{-1}(\xi)$, on a :

$$G^{\mathbb{C}}.x \cap \mu^{-1}(\xi) = G.x.$$

□ **Preuve de la proposition 1.2.14 :**

Supposons qu'il existe $g \in G^{\mathbb{C}}$ tel que $g.x \in \mu^{-1}(\xi)$. Comme $\mu^{-1}(\xi)$ est G -invariant et que $G^{\mathbb{C}} = \exp i\mathfrak{g}.G$, il suffit de considérer le cas où $g = \exp ia$,

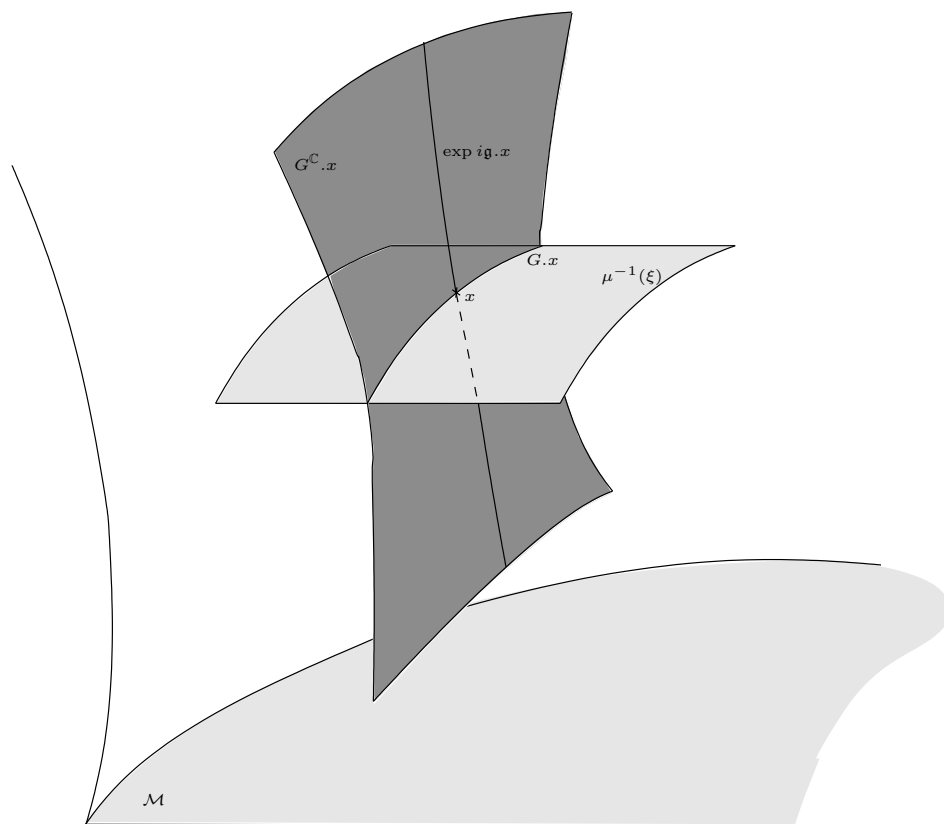


FIG. 1.1 – L'orbite de x sous $G^{\mathbb{C}}$ intersecte la surface de niveau selon $G.x$

$\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$. Considérons la fonction $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \mu((\exp it\mathfrak{a}).x)(\mathfrak{a})$. On a $h(0) = h(1) = \xi(\mathfrak{a})$. D'après le théorème de Rolle, il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que :

$$0 = h'(t_0) = d_y \mu(i\mathfrak{a}.y)(\mathfrak{a}) = -\omega_y(i\mathfrak{a}.y, \mathfrak{a}.y) = \|\mathfrak{a}.y\|^2,$$

où $y = \exp(it_0\mathfrak{a}).x$. Ainsi $\mathfrak{a}.y = 0$ et $\exp(i\mathfrak{a}\mathbb{R})$ fixe y , donc également x . On en déduit que $\exp(i\mathfrak{a}\mathbb{R}).x \cap \mu^{-1}(\xi) = \{x\}$. \square

Dans toute la suite on supposera que $G^{\mathbb{C}}$ possède une décomposition polaire.

Proposition 1.2.15 *Si G agit librement sur $\mu^{-1}(\xi)$, alors $G^{\mathbb{C}}$ agit librement sur \mathcal{M}^s .*

□ **Preuve de la proposition 1.2.15 :**

Soient $x \in \mu^{-1}(\xi)$, $u \in G$ et $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ tels que $\exp(i\mathfrak{a})u.x = x$. Comme :

$$\exp(i\mathfrak{a}\mathbb{R}).(ux) \cap \mu^{-1}(\xi) = \{ux\},$$

on a $ux = x$, et $u = e$. De plus, d'après la démonstration de la proposition 1.2.14, la condition $\exp(i\mathfrak{a}).x = x$ implique que $\exp(i\mathfrak{a}\mathbb{R})$ stabilise x , d'où $\mathfrak{a}.x = 0$ et $\mathfrak{a} = 0$. □

Proposition 1.2.16 *Si G agit librement sur $\mu^{-1}(\xi)$, pour tout y de \mathcal{M}^s , il existe un unique élément $g(y)$ de $\exp i\mathfrak{g}$ tel que $g(y).y$ appartienne à $\mu^{-1}(\xi)$. L'application $g : \mathcal{M}^s \rightarrow \exp i\mathfrak{g}$ est lisse et permet de définir une projection lisse q de la surface stable \mathcal{M}^s sur la surface de niveau $\mu^{-1}(\xi)$ par :*

$$q(y) = g(y).y.$$

De plus, si ξ est Ad^*G -invariante, la projection q est G -équivariante.

□ **Preuve de la proposition 1.2.16 :**

• Soit $y \in \mathcal{M}^s$ et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{g}$ tels que $\exp i\mathfrak{a}.y$ et $\exp i\mathfrak{b}.y$ appartiennent à $\mu^{-1}(\xi)$. D'après la proposition 1.2.14, il existe $u \in G$ tel que $\exp i\mathfrak{a}.y = u \exp i\mathfrak{b}.y$. D'après la proposition 1.2.15, $G^{\mathbb{C}}$ agit librement sur \mathcal{M}^s . On en déduit que $\exp i\mathfrak{a} = u \exp i\mathfrak{b}$. Par unicité de la décomposition polaire, il en découle que $\exp i\mathfrak{a} = \exp i\mathfrak{b}$ et $u = \text{Id}$, d'où la définition de g et q .

• Montrons que l'application :

$$\begin{aligned} g : \mathcal{M}^s &\rightarrow \exp i\mathfrak{g} \\ y &\mapsto g(y) \end{aligned}$$

est lisse. Puisque $G^{\mathbb{C}}$ agit de manière différentiable sur \mathcal{M}^s , on en déduira que q est lisse également. Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi : \exp i\mathfrak{g} \times \mathcal{M}^s &\rightarrow \mathcal{M} \\ (\exp i\mathfrak{a}, y) &\mapsto \exp i\mathfrak{a}.y, \end{aligned}$$

qui envoie $\exp i\mathfrak{g} \times \mathcal{M}^s$ sur \mathcal{M}^s . (Rappelons que $\exp i\mathfrak{g}$ hérite d'une structure de variété banachique de son identification avec l'espace homogène $G^{\mathbb{C}}/G$.) Nous allons montrer que ϕ est transverse à $\mu^{-1}(\xi)$ (voir paragraphes 5.11.6 et 5.11.7 de [Bou3] pour une définition de cette notion), il en découlera que le sous-ensemble

$$\phi^{-1}(\mu^{-1}(\xi)) = \{ (g(y), y), y \in \mathcal{M}^s \}$$

est une variété lisse de $\exp i\mathfrak{g} \times \mathcal{M}^s$. La différentiabilité de l'application g sera alors conséquence de la différentiabilité de la projection $p_1 : \exp i\mathfrak{g} \times \mathcal{M}^s \rightarrow \exp i\mathfrak{g}$ sur le premier facteur. La différentielle de ϕ au point $(\exp i\mathfrak{a}, y)$ de $\exp i\mathfrak{g} \times \mathcal{M}^s$ est :

$$(d\phi)_{(\exp i\mathfrak{a}, y)} \left(((R_{\exp i\mathfrak{a}})_*(i\mathfrak{b}), Z) \right) := i\mathfrak{b} \cdot (\exp i\mathfrak{a} \cdot y) \oplus (\exp i\mathfrak{a})_*(Z).$$

Remarquons que, pour tout élément $(\exp i\mathbf{a}, y)$ de $\phi^{-1}(\mu^{-1}(\xi))$, on a :

$$(d\phi)_{(\exp i\mathbf{a}, y)}(0 \times T_y\mathcal{M}^s) = T_x\mathcal{M}^s$$

où $x := \exp i\mathbf{a} \cdot y$, ainsi $(d\phi)_{(\exp i\mathbf{a}, y)}$ est surjective. Il reste à montrer que le sous-espace

$$(d\phi)_{(\exp i\mathbf{a}, y)}^{-1}(T_x(\mu^{-1}(\xi)))$$

admet un supplémentaire fermé. Pour cela, notons que l'espace tangent $T_y\mathcal{M}^s$ est isomorphe à

$$(\exp(-i\mathbf{a}))_*(T_x(\mu^{-1}(\xi))) \oplus (\exp(-i\mathbf{a}))_*(i\mathfrak{g} \cdot x).$$

Ainsi l'espace tangent

$$T_{(\exp i\mathbf{a}, y)}(\exp i\mathfrak{g} \times \mathcal{M}^s) = T_{\exp i\mathbf{a}}(\exp i\mathfrak{g}) \times T_y\mathcal{M}^s$$

est isomorphe à $\mathfrak{g} \times T_x(\mu^{-1}(\xi)) \times \mathfrak{g}$ grâce à l'isomorphisme j suivant :

$$\begin{aligned} j : \mathfrak{g} \times T_x(\mu^{-1}(\xi)) \times \mathfrak{g} &\rightarrow T_{\exp i\mathbf{a}}(\exp i\mathfrak{g}) \times T_y\mathcal{M}^s \\ (\mathbf{b}, W, \mathbf{c}) &\mapsto ((R_{\exp i\mathbf{a}})_*(i\mathbf{b}), (\exp(-i\mathbf{a}))_*(W) + (\exp(-i\mathbf{a}))_*(i\mathbf{c} \cdot x)). \end{aligned}$$

L'élément $j(\mathbf{b}, W, \mathbf{c})$ appartient à $(d\phi)_{(\exp i\mathbf{a}, y)}^{-1}$ dès que $i\mathbf{b} \cdot x + W + i\mathbf{c} \cdot x \in T_x(\mu^{-1}(\xi))$. Puisque G agit librement sur \mathcal{M} , on en déduit que le sous-espace

$$(d\phi)_{(\exp i\mathbf{a}, y)}^{-1}(T_x(\mu^{-1}(\xi)))$$

est

$$\{ j(\mathbf{b}, W, -\mathbf{b}), \mathbf{b} \in \mathfrak{g}, W \in T_x(\mu^{-1}(\xi)) \}.$$

Par conséquent,

$$\{ j(\mathbf{b}, 0, \mathbf{b}), \mathbf{b} \in \mathfrak{g} \}$$

est un supplémentaire topologique qui convient.

• Soit $y \in \mathcal{M}^s$ et $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}$ tel que $\exp i\mathbf{a} = g(y)$. La G -équivariance de μ et la G -invariance de ξ implique :

$$\mu(u \cdot \exp i\mathbf{a} \cdot y) = \text{Ad}^*(u)(\xi) = \xi,$$

pour tout u appartenant à G . Comme $u \cdot \exp i\mathbf{a} = \exp \text{Adu}(i\mathbf{a}) \cdot u$, on a :

$$q(u \cdot y) = u \cdot q(y).$$

□

Proposition 1.2.17 *Si G agit librement et proprement sur $\mu^{-1}(\xi)$, alors $G^{\mathbb{C}}$ agit (librement et) proprement sur \mathcal{M}^s .*

□ **Preuve de la proposition 1.2.17 :**

D'après la proposition 1.2.15, $G^{\mathbb{C}}$ agit librement sur \mathcal{M}^s . D'après la proposition 1.2.5, $G^{\mathbb{C}}$ agit proprement sur \mathcal{M}^s si et seulement si le graphe $\tilde{\mathcal{C}}$ de la relation d'équivalence définie par $G^{\mathbb{C}}$ est fermé dans $\mathcal{M}^s \times \mathcal{M}^s$ est l'application canonique $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $G^{\mathbb{C}}$ est continue.

- Montrons que $\tilde{\mathcal{C}}$ est fermé dans $\mathcal{M}^s \times \mathcal{M}^s$. Notons \mathcal{C} le graphe de la relation d'équivalence définie par l'action de G sur $\mu^{-1}(\xi)$. Soit $\{(y_n, v_n \cdot y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\tilde{\mathcal{C}}$, qui converge vers un élément (y_∞, z_∞) de $\mathcal{M}^s \times \mathcal{M}^s$. D'après la proposition 1.2.14 et la continuité de la projection q , la suite $\{(q(y_n), q(v_n \cdot y_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à \mathcal{C} et converge vers $(q(y_\infty), q(z_\infty))$. Comme \mathcal{C} est fermé dans $\mu^{-1}(\xi) \times \mu^{-1}(\xi)$, on en déduit que $q(z_\infty) = u_\infty \cdot q(y_\infty)$ pour un u_∞ dans G . Alors $z_\infty = g(z_\infty)^{-1} u_\infty g(y_\infty) \cdot y_\infty$. Ainsi $\tilde{\mathcal{C}}$ est fermé dans $\mathcal{M}^s \times \mathcal{M}^s$.
- Montrons que l'application canonique $\tilde{\iota}$ de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans $G^{\mathbb{C}}$ est continue. Soit ι l'application canonique de \mathcal{C} dans G . On a :

$$\tilde{\iota}(y, z) \mapsto g(z)^{-1} \circ \iota(q(y), q(z)) \circ g(y),$$

et la continuité de $\tilde{\iota}$ est conséquence de la continuité des applications ι , g et q .
□

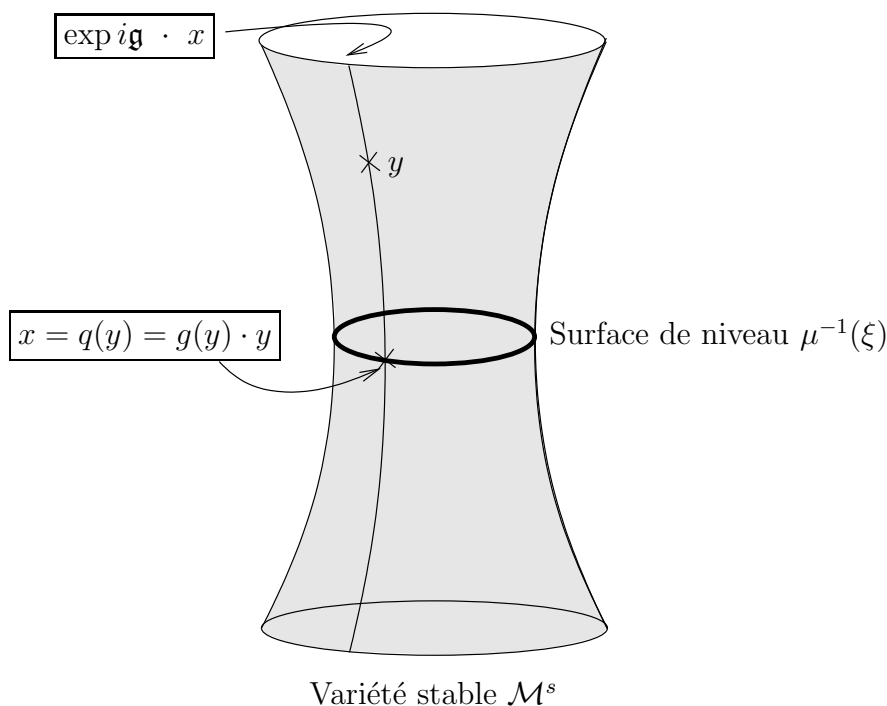


FIG. 1.2 – Il existe une projection G -équivariante q de la variété stable \mathcal{M}^s sur la surface de niveau $\mu^{-1}(\xi)$ (proposition 1.2.16).

Théorème 1.2.18 Soit \mathcal{M} une variété banachique kählérienne munie d'une action lisse et hamiltonienne d'un groupe de Lie banachique G , agissant librement et proprement sur \mathcal{M} en préservant la structure kählérienne. Supposons que l'action de G sur \mathcal{M} s'étende en une action holomorphe d'un groupe de Lie complexe $G^{\mathbb{C}} = G \cdot \exp i\mathfrak{g}$. Soit ξ une valeur régulière $Ad^*(G)$ -invariante de l'application moment μ . Si pour tout x de $\mu^{-1}(\xi)$, l'orthogonal $(T_x G \cdot x)^{\perp_g}$ de $T_x G \cdot x$ dans $T_x(\mu^{-1}(\xi))$ satisfait

$$T_x \mathcal{M} = T_x G \cdot x \oplus (T_x G \cdot x)^{\perp_g} \oplus I(T_x G \cdot x),$$

alors l'espace quotient $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$ est une variété banachique complexe isomorphe à la variété kählérienne lisse $\mathcal{M}/G := \mu^{-1}(\xi)/G$ comme variété complexe. De plus, l'existence d'un atlas holomorphe sur \mathcal{M} implique l'existence d'un atlas holomorphe sur $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$, donc sur \mathcal{M}/G .

■ **Preuve du théorème 1.2.18 :**

D'après les propositions 1.2.15 et 1.2.17, $G^{\mathbb{C}}$ agit librement et proprement sur \mathcal{M}^s . La différentiabilité de l'application g et la tranche G -equivariante H de $\mu^{-1}(\xi)$ donnée par $H_x := (T_x G.x)^{\perp_s}$, permettent de définir une tranche G -equivariante de \mathcal{M}^s , également montée H , par :

$$H_y := g(y)_*^{-1} (H_{q(y)}) \subset T_y \mathcal{M}^s,$$

pour tout y dans \mathcal{M}^s . L'espace tangent $T_y \mathcal{M}^s$ admet la décomposition suivante :

$$T_y \mathcal{M}^s = H_y \oplus T_y (G^{\mathbb{C}}.y).$$

D'après la proposition 1.2.6, il suit que $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$ admet une unique structure de variété banachique (réelle) telle que l'application quotient soit une submersion.

Puisque pour tout élément y de \mathcal{M}^s , $H_{q(y)}$ est I -invariant, et puisque l'action de $G^{\mathbb{C}}$ sur \mathcal{M} est holomorphe, pour tout y de \mathcal{M}^s , le sous-espace H_y de $T_y \mathcal{M}^s$ est I -invariant et $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$ hérite d'une structure de variété complexe.

De plus, puisque la structure complexe du quotient $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$ provient de la structure complexe de \mathcal{M} , l'injection naturelle $\mu^{-1}(\xi) \hookrightarrow \mathcal{M}^s$ induit un isomorphisme de variétés complexes entre $\mu^{-1}(\xi)/G$ et $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$.

Enfin, \mathcal{M}^s étant un ouvert de \mathcal{M} , l'existence de cartes holomorphes sur \mathcal{M} permet d'appliquer la proposition 1.2.6 au quotient holomorphe $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$, et d'en déduire l'existence de cartes holomorphes sur $\mathcal{M}^s/G^{\mathbb{C}}$. ■

1.2.3 Potentiel kählérien sur le quotient

Soit $(\mathcal{M}, \omega, g, I)$ une variété kählérienne banachique, munie d'une action d'un groupe de Lie banachique G , d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , préservant ω, g et I et qui s'étend en une action holomorphe d'un groupe de Lie complexe $G^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. Supposons qu'il existe sur \mathcal{M} un potentiel kählérien G -invariant globalement défini, c'est-à-dire une fonction K définie sur \mathcal{M} telle que $\omega = dd^c K$, où l'opérateur d^c est défini par $d^c := IdI^{-1}$ et où I agit sur les n -formes différentielles ϕ par :

$$(I\phi)_x(X_1, \dots, X_n) := (-1)^n \phi(IX_1, \dots, IX_n).$$

pour tout x de \mathcal{M} , et tous X_1, \dots, X_n de $T_x \mathcal{M}$. Alors l'action de G est hamiltonienne (cf Appendice) d'application moment μ définie par :

$$\mu(x)(\mathfrak{a}) := +dK_x(IX^{\mathfrak{a}}),$$

où x appartient à \mathcal{M} et \mathfrak{a} appartient à \mathfrak{g} . En outre μ est G -equivariante.

Lemme 1.2.19 *Si K est un potentiel kählérien globalement défini sur (\mathcal{M}, ω, I) , alors le fibré trivial (holomorphe) $L = \mathcal{M} \times \mathbb{C}$ muni de la connexion de Chern ∇ associée au produit scalaire hermitien h sur L donné par $h(\sigma(x), \sigma(x)) := e^{-2K(x)}$, où σ est la section canonique $\sigma(x) = (x, 1)$, préquantifie \mathcal{M} au sens où $R^{\nabla} = i\omega$.*

△ **Preuve du lemme 1.2.19 :**

Etant donnée une section holomorphe σ , l'expression de la courbure de la connexion de Chern est donnée par :

$$R^\nabla = \frac{1}{2i} dd^c \log h(\sigma, \sigma),$$

(cf appendice). Ainsi le produit scalaire hermitien vérifie $dd^c \log h(\sigma, \sigma) = -2\omega = -2dd^c K$ c'est-à-dire $\log h = -2K + \phi$, où ϕ est un élément du noyau de dd^c que l'on a pris nul ici. △

Dans la suite, on se donne une valeur régulière ξ de l'application moment μ , telle que le quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$ possède une structure naturelle de variété kählérienne.

Le but de ce paragraphe est d'expliciter un potentiel kählérien sur le quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$ en construisant un fibré holomorphe hermitien en droites complexes (\hat{L}, \hat{h}) au dessus de $\mu^{-1}(\xi)/G$ à partir du fibré (L, h) , qui préquantifie $\mu^{-1}(\xi)/G$. Le lemme précédent établit le lien entre un produit scalaire hermitien sur un fibré trivial et un potentiel globalement défini. Si le pull-back du fibré quantifiant (\hat{L}, \hat{h}) sur la variété stable \mathcal{M}^s est un fibré hermitien trivial, alors le pull-back du produit scalaire hermitien \hat{h} permet d'écrire un potentiel globalement défini sur \mathcal{M}^s .

L'idée de la quantification induite est de définir le fibré sur le quotient comme l'ensemble des classes d'équivalence du fibré initial restreint à la surface de niveau sous une action adéquate du groupe G . Pour définir une connexion sur le quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$, on a besoin d'une connexion auxiliaire sur le fibré $\pi : \mu^{-1}(\xi) \rightarrow \mu^{-1}(\xi)/G$ afin de pouvoir relever un champ de vecteurs tangents au quotient en un champ de vecteurs tangents à la surface de niveau. La distribution horizontale H_x , $x \in \mathcal{M}$, utilisée pour définir la structure de variété de $\mu^{-1}(\xi)/G$ fournit une telle connexion, que l'on notera $\tilde{\nabla}$. La dérivée covariante par rapport à un vecteur tangent X d'une section du fibré sur le quotient sera alors définie comme la dérivée covariante de la section G -invariante correspondante par rapport au relèvement horizontal de X . Le point important dans cette construction est que l'action du groupe sur l'espace total du fibré initial est dictée par le covecteur choisi pour définir la surface de niveau.

On pourrait en effet penser que l'action de G sur le fibré trivial $L = \mathcal{M} \times \mathbb{C}$ donnée par :

$$g.(x, z_x) = (g.x, z_{g.x}),$$

convient. Pour cette action, la dérivée par rapport à un vecteur vertical X^a , $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}$, d'une section G -invariante σ est :

$$\begin{aligned} \nabla_{X^a} \sigma &= \partial_{X^a} \log h(\sigma, \sigma) \sigma \\ &= -2\partial_{X^a} K(x) \cdot \sigma \\ &= -(dK_x(X^a) + idK_x(IX^a)) \cdot \sigma \\ &= -i\mu^a(x) \cdot \sigma. \end{aligned}$$

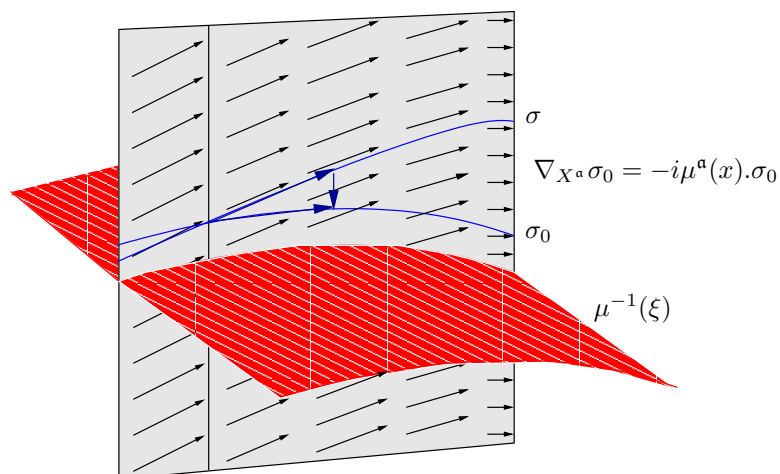


FIG. 1.3 – La section canonique σ_0 possède une dérivée covariante non nulle sur la surface de niveau $\xi \neq 0$.

Si l'on essaie d'expliciter la courbure de la connexion obtenue par le procédé précédemment décrit, on obtient :

$$\begin{aligned}
 R_{\tilde{X}, \tilde{Y}}^{\tilde{\nabla}} \hat{\sigma} &= \nabla_{\tilde{X}} \nabla_{\tilde{Y}} \sigma - \nabla_{\tilde{Y}} \nabla_{\tilde{X}} \sigma - \nabla_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \sigma \\
 &= R_{\tilde{X}, \tilde{Y}}^{\tilde{\nabla}} \sigma + \nabla_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \sigma - \nabla_{[\tilde{X}, \tilde{Y}]} \sigma \\
 &= i\omega(\tilde{X}, \tilde{Y})\sigma + \nabla_{[\tilde{X}, \tilde{Y}] - [\tilde{X}, \tilde{Y}]} \sigma \\
 &= i\omega_{red}(X, Y)\sigma + \nabla_{X^a} \sigma \quad (\text{pour un } \mathbf{a} \in \mathfrak{g}) \\
 &= i\omega_{red}(X, Y)\sigma - i\mu^a \sigma.
 \end{aligned}$$

L'action de G sur le fibré total précédente permet de quantifier le quotient dans le cas où la surface de niveau est l'image réciproque de 0 par μ . Si ce n'est pas le cas, il faut adapter l'action du groupe G pour que la dérivée covariante d'une section G -invariante au-dessus de la surface de niveau $\mu^{-1}(\xi)$ soit nulle. L'action de \mathfrak{g} sur $\Gamma(L)$ adéquate est :

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma \in \Gamma(L), \forall \mathbf{a} \in \mathfrak{g}, \\
 \mathbf{a} \cdot \sigma = -\nabla_{X^a} \sigma - i\mu^a \sigma + i\xi(\mathbf{a}) \cdot \sigma.
 \end{aligned}$$

Elle correspond à l'action de l'algèbre de Lie sur l'espace total du fibré donnée par l'application qui à un élément $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}$ associe le champ de vecteurs \hat{X}^a sur L dont la valeur en un point $\zeta \in L$ au dessus de $x \in \mathcal{M}$ est :

$$\hat{X}^a(\zeta) = \tilde{X}^a(\zeta) + i\mu^a(x) \cdot T(\zeta) - i\xi(\mathbf{a}) \cdot T(\zeta),$$

où $\tilde{X}^a(\zeta)$ est le relèvement horizontal en ζ de X^a pour la connexion triviale et T est le champ de vecteur vertical donné par $T(\zeta) = \zeta$.

Cependant cette action ne s'intègre pas toujours en une action du groupe G . La condition d'intégrabilité est que l'application $\mathbf{a} \mapsto \xi(\mathbf{a})$ soit (à i près) la dérivée d'un caractère de G . Supposons que tel est le cas, et notons χ l'homomorphisme de G dans S^1 tel que la différentielle $d\chi(e)$ en l'élément neutre e de

G soit $-i\xi$. L'homomorphisme χ s'étend en un homomorphisme de groupe de $G^{\mathbb{C}}$ dans \mathbb{C}^* , noté également χ . L'action correspondante de G et $G^{\mathbb{C}}$ sur L est donnée par :

$$g.(x, z_x) = (g.x, \chi(g)^{-1}.z_x), \quad (1.1)$$

ce qui permet d'obtenir une action sur $\Gamma(L)$ par :

$$(g.\sigma)(x) := g(\sigma(g^{-1}.x)),$$

où $\sigma \in \Gamma(L)$, $g \in G^{\mathbb{C}}$, et $x \in \mathcal{M}$. Dans le cas où $i\xi$ est la différentielle d'un caractère χ , on a la définition suivante :

Définition 1.2.20 On définit le fibré en droites complexes \hat{L} de base $\mu^{-1}(\xi)/G$ en restreignant le fibré trivial L à la sous-variété réelle $\mu^{-1}(\xi)$ et en quotientant par l'action de G donnée par 1.1. La fibre de \hat{L} au-dessus d'un élément $[x] \in \mu^{-1}(\xi)$ est :

$$\hat{L}([x]) = [(x, z_x)],$$

où $(x, z_x) \sim (g.x, \chi(g)^{-1}.z_x)$. Les sections de \hat{L} s'identifient aux sections G -invariantes de $L|_{\mu^{-1}(\xi)}$:

$$\Gamma(\hat{L}) = \Gamma(L)^G,$$

c'est-à-dire aux sections $\sigma(x) = (x, z_x)$ du fibré trivial $\Gamma(L|_{\mu^{-1}(\xi)})$ vérifiant :

$$z_{g.x} = \chi(g)^{-1}.z_x.$$

Le potentiel K étant G -invariant, il en est de même du produit scalaire hermitien h , qui permet donc de définir un produit scalaire hermitien sur le quotient :

Définition 1.2.21 On définit un produit scalaire hermitien \hat{h} sur \hat{L} par :

$$\hat{h}(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

où $\sigma_i, i = 1, 2$ est la section G -invariante de $L|_{\mu^{-1}(\xi)}$ relevant $\hat{\sigma}_i$.

De plus on a la proposition-définition suivante :

Proposition 1.2.22 *Etant donnée une section G -invariante σ du fibré $L|_{\mu^{-1}(\xi)}$ définissant un élément $\hat{\sigma} \in \Gamma(\hat{L})$, et un champ de vecteurs X sur $\mu^{-1}(\xi)/G$ dont le relèvement horizontal par rapport à la connexion G -invariante $\tilde{\nabla}$ est noté \tilde{X} , l'identité :*

$$\hat{\nabla}_X \hat{\sigma} := \nabla_{\tilde{X}} \sigma,$$

définit une connexion sur \hat{L} , respectant \hat{h} , et indépendante de la connexion G -invariante $\tilde{\nabla}$.

□ **Preuve de la proposition 1.2.22 :**

On a bien : $\hat{\nabla}_X \hat{h} = \nabla_{\tilde{X}} h = 0$, car ∇ préserve h . Soit \tilde{X}_1 le relèvement de X par rapport à une autre connexion G -invariante. On a : $\tilde{X}_1 = \tilde{X} + X^{\mathfrak{a}}$, avec $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$. Si σ est G -invariante, alors :

$$\nabla_{X^{\mathfrak{a}}} \sigma = -\mathfrak{a}.\sigma - i\mu^{\mathfrak{a}}\sigma + i\xi(\mathfrak{a}).\sigma = 0,$$

de sorte que $\nabla_{\tilde{X}}\sigma = \nabla_{\tilde{X}_1}\sigma$. Vérifions que pour toute section G -invariante σ l'élément $\nabla_{\tilde{X}}\sigma$ est bien G -invariant. Pour tout $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}$ on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}.\nabla_{\tilde{X}}\sigma &= -\nabla_{X^{\mathbf{a}}}\nabla_{\tilde{X}}\sigma - i\mu^{\mathbf{a}}\nabla_{\tilde{X}}\sigma + i\xi(\mathbf{a})\nabla_{\tilde{X}}\sigma \\ &= -\nabla_{\tilde{X}}\nabla_{X^{\mathbf{a}}}\sigma - \nabla_{[X^{\mathbf{a}},\tilde{X}]}\sigma - R_{X^{\mathbf{a}},\tilde{X}}\sigma \\ &= -i\omega(X^{\mathbf{a}},\tilde{X})\sigma = 0. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.2.23 *Le fibré hermitien en droites complexes $(\hat{L}, \hat{h}, \hat{\nabla})$ préquantifie $\mu^{-1}(\xi)/G$ au sens où $R^{\hat{\nabla}} = i\omega_{red}$.*

□ **Preuve de la proposition 1.2.23 :**

Pour tous X et Y champs de vecteurs sur $\mu^{-1}(\xi)/G$, et toute section $\hat{\sigma}$ de \hat{L} définissant une section G -invariante σ de $L|_{\mu^{-1}(\xi)}$, on a :

$$\begin{aligned} R_{\tilde{X},\tilde{Y}}^{\hat{\nabla}}\hat{\sigma} &= \nabla_{\tilde{X}}\nabla_{\tilde{Y}}\hat{\sigma} - \nabla_{\tilde{Y}}\nabla_{\tilde{X}}\hat{\sigma} - \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}]}\hat{\sigma} \\ &= i\omega(\tilde{X},\tilde{Y})\hat{\sigma} + \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}] - [\widetilde{X},\widetilde{Y}]}\hat{\sigma} \\ &= i\omega_{red}(X,Y)\hat{\sigma}, \end{aligned}$$

car $[\tilde{X},\tilde{Y}] - [\widetilde{X},\widetilde{Y}]$ est un élément tangent à l'orbite de G et, pour tout $\mathbf{a} \in \mathfrak{g}$, l'identité

$$\mathbf{a}.\hat{\sigma} = -\nabla_{X^{\mathbf{a}}}\hat{\sigma} - i\mu^{\mathbf{a}}\hat{\sigma} + i\xi(\mathbf{a}).\hat{\sigma} = 0$$

implique que la dérivée covariante de $\hat{\sigma}$ par rapport à tout vecteur vertical est nulle. □

Corollaire 1.2.24 *Le fibré en droite complexe hermitien (\hat{L}, \hat{h}) est formellement intégrable et la connexion $\hat{\nabla}$ est la connexion de Chern.*

□ **Preuve du corollaire 1.2.24 :**

La courbure de \hat{L} étant de type $(1,1)$, le fibré est formellement intégrable pour la structure complexe définie par l'opérateur $\bar{\partial} := \hat{\nabla}^{0,1}$. De plus, $\hat{\nabla}$ est \mathbb{C} -linéaire et préserve \hat{h} . C'est donc la connexion de Chern associée. □

Il s'agit maintenant de ramener le fibré quantifiant (\hat{L}, \hat{h}) défini sur $\mu^{-1}(\xi)$ sur la variété stable \mathcal{M}^s . Rappelons que l'on a une submersion holomorphe :

$$p : \mathcal{M}^s \rightarrow \mu^{-1}(\xi)/G$$

et une projection :

$$q : \mathcal{M}^s \rightarrow \mu^{-1}(\xi),$$

ainsi qu'une application :

$$g : \mathcal{M}^s \rightarrow \exp i\mathfrak{g}$$

telle que pour tout x de \mathcal{M}^s , $g(x).x = q(x)$.

Proposition 1.2.25 La 2-forme $p^*\omega_{red}$ est la courbure de la connexion de Chern du fibré $(L|_{\mathcal{M}^s}, \bar{h})$, où \bar{h} est défini par :

$$\bar{h}(\zeta, \zeta) = h(g(x).\zeta, g(x).\zeta).$$

pour tout x de \mathcal{M}^s et tout ζ de la fibre L_x au-dessus de x .

□ **Preuve de la proposition 1.2.25 :**

Puisque dp est C -linéaire, le pull-back par p de la connexion de Chern de \hat{h} est la connexion de Chern de $p^*\hat{L}$ pour $p^*\hat{h}$. Ainsi $R^{p^*\hat{\nabla}} = ip^*\omega_{red}$. De plus, la fibre en $x \in \mathcal{M}^s$ du fibré $p^*\hat{L}$ est :

$$(p^*\hat{L})_x = (x, \hat{L}_{p(x)}) = (x, [L_{q(x)}]),$$

et l'élément $q(x)$ dans la classe $[q(x)]$ étant naturellement distingué, la fibre $(x, [L_{q(x)}])$ s'identifie à la fibre $(x, L_{q(x)})$. On construit ainsi un isomorphisme de fibrés complexes :

$$\begin{aligned} \Phi : L|_{\mathcal{M}^s} &\longrightarrow p^*\hat{L} \\ \zeta \in L_x &\longmapsto (x, g(x).\zeta). \end{aligned}$$

On a clairement : $\Phi^*\hat{h} = \bar{h}$. Soit $\bar{\nabla}$ la connexion de Chern du fibré (trivial) holomorphe hermitien $(L|_{\mathcal{M}^s}, \bar{h})$. La courbure associée est :

$$R^{\bar{\nabla}} = \Phi^{-1} \circ R^{p^*\hat{\nabla}} \circ \Phi.$$

Le fibré étant un fibré en droites, il vient alors :

$$R^{\bar{\nabla}} = R^{p^*\hat{\nabla}} = ip^*\omega_{red}.$$

□

Théorème 1.2.26 La 2-forme $p^*\omega_{red}$ sur \mathcal{M}^s vérifie :

$$p^*\omega_{red} = dd^c \hat{K},$$

où pour tout $x \in \mathcal{M}^s$,

$$\hat{K}(x) := K(g(x).x) + \frac{1}{2} \log |\chi(g(x))|^2.$$

■ **Preuve du théorème 1.2.26 :**

La courbure de la connexion de Chern du fibré hermitien $(L|_{\mathcal{M}^s}, \bar{h})$ est donnée par :

$$R = \frac{1}{2i} dd^c \log \bar{h}(\sigma, \sigma),$$

où σ est la section canonique. De plus :

$$\bar{h}(\sigma, \sigma) = h(g(x).\sigma, g(x).\sigma) = |\chi(g(x))|^{-2} h(\sigma, \sigma).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} p^*\omega_{red}(x) &= -\frac{1}{2} dd^c \log |\chi(g(x))|^{-2} h(\sigma, \sigma) \\ &= dd^c K(g(x).x) + \frac{1}{2} dd^c \log |\chi(g(x))|^2. \end{aligned}$$

■

1.2.4 Exemple de la variété des p -plans ($p < +\infty$)

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $Gr^{(p)}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de H . L'espace $Gr^{(p)}$ est naturellement muni d'une structure de variété fortement kählérienne (cf Appendice A), les expressions de la métrique g , de la structure complexe I et de la forme symplectique ω en l'espace tangent en un point $P \in Gr^{(p)}$ identifié à $L(P, P^\perp)$ étant :

$$\begin{aligned} g_{Gr}(X, Y) &:= \Re \operatorname{Tr} (X^*Y) \\ IX &:= iX \\ \omega_{Gr}(X, Y) &:= -\Im \operatorname{Tr} (X^*Y), \end{aligned}$$

pour tous X, Y de $L(P, P^\perp)$. De plus l'injection de Plücker définie par :

$$\begin{aligned} i_p : Gr^{(p)} &\rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^p H) \\ W = \operatorname{vect}\{w_1, w_2, \dots, w_p\} &\mapsto [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p] \end{aligned}$$

est un plongement holomorphe. Soit \mathcal{M} l'espace de Hilbert $L(\mathbb{C}^p, H)$ muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle X, Y \rangle := \operatorname{Tr} (X^*Y),$$

vu comme variété fortement kählérienne avec pour métrique $g := \Re \langle \cdot, \cdot \rangle$ et forme symplectique $\omega := -\Im \langle \cdot, \cdot \rangle$. \mathcal{M} possède un potentiel kählérien K globalement défini dont la valeur en un point $x \in \mathcal{M}$ est :

$$K(x) := \frac{1}{4} \langle x, x \rangle = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} (x^*x).$$

Le groupe unitaire de \mathbb{C}^p , $U(p)$, agit sur \mathcal{M} par :

$$g.x = x \circ g^{-1},$$

où $g \in U(p)$ et $x \in \mathcal{M}$, en préservant le produit scalaire hermitien, donc la structure kählérienne, et le potentiel K . On en déduit que l'action de $U(p)$ est hamiltonienne, d'application moment μ définie par :

$$\begin{aligned} \mu^a(x) &:= +d_x K(ix^a) \\ &= +\frac{1}{2} \Re \operatorname{Tr} (ix^*x a) = -\frac{1}{2} \Im \operatorname{Tr} (x^*x a) \\ &= +\frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x^*x a), \end{aligned}$$

où $x \in \mathcal{M}$, et $a \in \mathfrak{u}(p)$. Pour tout $k \in \mathbb{R}^{+*}$, le covecteur $\xi_k := +\frac{i}{2} k \operatorname{Tr}$ est une valeur régulière de l'application moment. Par compacité de $U(p)$, l'action de $U(p)$ sur \mathcal{M} est propre et l'espace quotient $\mu^{-1}(\xi_k)/U(p)$ est séparé. De plus, puisque la métrique g réalise un isomorphisme entre \mathcal{M} et son dual continu, l'espace tangent à l'orbite en un point $x \in \mu^{-1}(\xi_k)$, noté $T_x U(p).x$, vérifie :

$$T_x U(p).x \oplus (T_x U(p).x)^\perp = \mathcal{M}.$$

En tout point $x \in \mu^{-1}(\xi_k)$ l'orthogonal dans $\mu^{-1}(\xi_k)$ de l'espace tangent à l'orbite de x fournit donc une tranche $U(p)$ -équivariante et permet de définir une structure de variété kählérienne (g, I, ω) sur $\mu^{-1}(\xi_k)/U(p)$.

La variété stable \mathcal{M}^s est l'ensemble des applications injectives de \mathbb{C}^p dans H . Pour $y \in \mathcal{M}^s$, $g(y)$ est l'élément auto-adjoint de $Gl(p)$ vérifiant :

$$(yg(y)^{-1})^* yg(y)^{-1} = \text{kid},$$

i.e. $g(y) = \frac{1}{\sqrt{k}}(y^*y)^{\frac{1}{2}}$. L'application :

$$\begin{aligned} \rho : \mu^{-1}(\xi_k)/U(p) &\rightarrow Gr^{(p)} \\ [x] &\mapsto \text{Im } x \end{aligned}$$

est un difféomorphisme holomorphe tel que :

$$g(X, Y) = k^2 g_{Gr}(\rho_*(X), \rho_*(Y)),$$

$$\omega(X, Y) = k^2 \omega_{Gr}(\rho_*(X), \rho_*(Y)).$$

pour tous $X, Y \in T_x \mu^{-1}(\xi_k)/U(p)$.

Lorsque $\frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$, l'élément $-i\xi_k = \frac{k}{2} \text{Tr}(\cdot)$ de $\mathfrak{u}'(p)$ est la différentielle du caractère $\chi_{\frac{k}{2}}$ de $U(p)$ donné par $\chi_{\frac{k}{2}}(g) = (\det g)^{\frac{k}{2}}$. Si $\tilde{\pi}$ désigne la projection de \mathcal{M}^s sur $\mathcal{M}^s/Gl(p)$, alors $\tilde{\pi}^*\omega$ vérifie : $\tilde{\pi}^*\omega = dd^c K_{k,p}$, avec :

$$\begin{aligned} K_{k,p}(y) &= \frac{1}{2} \log |(\det g(y))^{\frac{k}{2}}|^2 = \frac{1}{2} \log |(\det g(y))|^k \\ &= \frac{1}{4} \log |(\det \frac{1}{k}(y^*y))|^k = \frac{k}{4} \log \det(\frac{1}{k}y^*y). \end{aligned}$$

Remarquons que la structure kählérienne de $Gr^{(p)}$ est induite par celle de l'espace projectif complexe de H via l'injection de Plücker i_P , de sorte que : $K_{k,p}(y) = K_{k,1}(i_P(y))$.

1.2.5 Quotient hyperkählérien

Soient \mathcal{M} une variété banachique munie d'une structure faiblement hyperkählérienne de métrique g , de formes de Kähler ω_1, ω_2 et ω_3 , et de structures complexes I_1, I_2 , et I_3 , et G un groupe de Lie banachique, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , agissant sur \mathcal{M} en préservant la structure hyperkählérienne. Supposons qu'il existe une application moment G -équivariante μ_i pour chacune des formes symplectique, ou de manière équivalente une application moment $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}' \otimes \mathbb{R}^3$, avec $\mu = \mu_1 \oplus \mu_2 \oplus \mu_3$.

Proposition 1.2.27 *Soit $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ une valeur régulière $\text{Ad}^*(G)$ -invariante de μ . Si G agit proprement sur $\mu^{-1}(\xi)$ et si pour tout $x \in \mu^{-1}(\xi)$ l'orthogonal H_x de $T_x G.x$ dans $\mu^{-1}(\xi)$ vérifie :*

$$T_x \mathcal{M} = T_x G.x \oplus H_x \oplus I_1 T_x G.x \oplus I_2 T_x G.x \oplus I_3 T_x G.x,$$

alors $\mu^{-1}(\xi)/G$ est une variété hyperkählérienne lisse.

□ **Preuve de la proposition 1.2.27 :**

Puisque la tranche déterminée par H_x est invariante par I_1, I_2 et I_3 , l'espace quotient $\mu^{-1}(\xi)/G$ possède une structure de variété hyperkählérienne induite par celle de \mathcal{M} . □

Pour chacune des structures complexes I_k , $k = 1, 2, 3$, on peut définir une action \cdot_k de \mathfrak{ig} sur \mathcal{M} par : $\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}, \forall x \in \mathcal{M}$,

$$i\mathfrak{a} \cdot_k x = I_k(\mathfrak{a} \cdot x).$$

Si $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie banachique complexe $G^{\mathbb{C}}$, et si pour tout $k = 1, 2, 3$, l'action \cdot_k s'intègre en une action I_k -holomorphe de $G^{\mathbb{C}}$ sur \mathcal{M} , on peut définir trois variétés stables \mathcal{M}^{s_1} , \mathcal{M}^{s_2} , \mathcal{M}^{s_3} de \mathcal{M} (distinctes en général) relativement à chacune de ces actions, ainsi que trois projections $q_k : \mathcal{M}^{s_k} \rightarrow \mu^{-1}(\xi)$ et trois applications $g_k : \mathcal{M}^{s_k} \rightarrow \exp i\mathfrak{g}$ avec $g_k(y) \cdot_k y = q_k(y)$.

Théorème 1.2.28 *Si $\mu^{-1}(\xi)/G$ est une variété hyperkählérienne lisse, alors \mathcal{M}^{s_1} , \mathcal{M}^{s_2} , \mathcal{M}^{s_3} sont des sous-variétés complexes lisses de \mathcal{M} respectivement pour les structures complexes I_1 , I_2 , et I_3 , et, pour $k = 1, 2, 3$, l'espace quotient \mathcal{M}^{s_k}/G est une variété I_k -complexe lisse isomorphe à la variété I_k -complexe $\mu^{-1}(\xi)/G$.*

■ **Preuve du théorème 1.2.28 :**

L'espace tangent à \mathcal{M} en un point $y \in \mathcal{M}^{s_1}$ se décompose en :

$$T_y \mathcal{M} = T_y G \cdot y \oplus I_1 T_y G \cdot y \oplus H_{1,y} \oplus g_1(y)_*^{-1} (I_2 T_y G \cdot y \oplus I_3 T_y G \cdot y),$$

où $H_{1,y} = g_1(y)_*^{-1} H_{q_1(y)}$ est stable par I_1 . L'espace tangent en y à \mathcal{M}^{s_1} est :

$$T_y \mathcal{M}^{s_1} = T_y G \cdot y \oplus I_1 T_y G \cdot y \oplus H_y,$$

et \mathcal{M}^{s_1} possède une structure naturelle de sous-variété I_1 -complexe de \mathcal{M} , un supplémentaire topologique de $T_y \mathcal{M}^{s_1}$ dans $T_y \mathcal{M}$ étant fourni par

$$g_1(y)_*^{-1} (I_2 T_y G \cdot y \oplus I_3 T_y G \cdot y).$$

Remarquons que pour tout $y \in \mathcal{M}$ et pour tout $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{g}$:

$$d\mu_2(I_1 X^{\mathfrak{a}})(\mathfrak{b}) = i_{X^{\mathfrak{b}}} \omega_2(I_1 X^{\mathfrak{a}}) = \omega_3(X^{\mathfrak{a}}, X^{\mathfrak{b}}) = d\mu_3^{\mathfrak{a}}(X^{\mathfrak{b}}) = 0$$

car μ est G -invariante, et :

$$d\mu_3(I_1 X^{\mathfrak{a}})(\mathfrak{b}) = \omega_2(X^{\mathfrak{b}}, X^{\mathfrak{a}}) = d\mu_2^{\mathfrak{b}}(X^{\mathfrak{a}}) = 0.$$

Ainsi \mathcal{M}^{s_1} est contenue dans $\mu_2^{-1}(\xi_2) \cap \mu_3^{-1}(\xi_3)$.

De même \mathcal{M}^{s_2} et \mathcal{M}^{s_3} sont des sous-variétés banachiques complexes de \mathcal{M} pour les structures complexes I_2 et I_3 respectivement, contenues respectivement dans $\mu_1^{-1}(\xi_2) \cap \mu_3^{-1}(\xi_3)$ et $\mu_1^{-1}(\xi_2) \cap \mu_2^{-1}(\xi_3)$.

Pour $k = 1, 2, 3$, le sous-fibré H_k de $T\mathcal{M}^{s_k}$ définit par : $\forall y \in \mathcal{M}^{s_k}$,

$$H_k(y) := g_k(y)_*^{-1} H_{q_k(y)}$$

est $G^{\mathbb{C}}$ -équivariant pour l'action \cdot_k de $G^{\mathbb{C}}$ sur \mathcal{M}^{s_k} , et permet de définir une structure de variété I_k -complexe sur le quotient $\mathcal{M}^{s_k}/G^{\mathbb{C}}$. Les applications naturelles de $\mu^{-1}(\xi)/G$ dans $\mathcal{M}^{s_k}/G^{\mathbb{C}}$ induites par les inclusions de $\mu^{-1}(\xi)$ dans \mathcal{M}^{s_k} sont des difféomorphismes I_k -holomorphes. ■

Remarque 1.2.29 Si une variété banachique hyperkählérienne \mathcal{M} possède deux structures complexes I_1, I_2 orthogonales et intégrables (au sens fort), alors chaque structure complexe appartenant à la sphère S^2 déterminée par la structure hyperkählérienne est intégrable. En effet, puisque la variété (\mathcal{M}, I_1) possède des changements de cartes holomorphes, elle est analytique et l'opérateur I_1 est analytique réel. De même I_2 est analytique réel. On en déduit que $I_3 := I_1 I_2$ est également analytique réel, ainsi que $I := aI_1 + bI_2 + cI_3$ où $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Le théorème de Newlander-Nirenberg s'applique donc dans ce contexte.

1.2.6 Exemple de l'espace cotangent de la variété des p -plans ($p < +\infty$)

Introduction

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'espace cotangent de la variété des p -plans, avec $p < +\infty$, est une variété fortement hyperkählérienne et s'obtient par quotient hyperkählérien de l'espace plat $\mathcal{M} := L(\mathbb{C}^p, H) \oplus L(H, \mathbb{C}^p)$. La simplicité de cet exemple repose sur le fait \mathcal{M} est une variété fortement hyperkählérienne, ce qui assure l'existence d'un supplémentaire topologique à n'importe quel sous-espace fermé de \mathcal{M} . Cet exemple sera adapté en section 1.4 pour montrer l'existence d'une structure hyperkählérienne sur l'espace cotangent T^*Gr_{res} de la grassmannienne restreinte par le biais d'un quotient hyperkählérien d'une variété *faiblement* hyperkählérienne plate. Les difficultés rencontrées dans ce dernier cas sont essentiellement techniques, et l'esprit de l'exemple ci-dessous sera préservé.

L'espace hyperkählérien $L(\mathbb{C}^p, H) \oplus L(H, \mathbb{C}^p)$

Soit H un espace de Hilbert et $L(\mathbb{C}^p, H)$ l'espace de Hilbert des applications linéaires de \mathbb{C}^p dans H muni du produit scalaire \langle, \rangle défini par :

$$\langle X, Y \rangle := \text{Tr } X^* Y,$$

pour tous $X, Y \in L(\mathbb{C}^p, H)$. Le dual continu de $L(\mathbb{C}^p, H)$ s'identifie à $L(H, \mathbb{C}^p)$ via la trace. L'espace $\mathcal{M} := L(\mathbb{C}^p, H) \oplus L(H, \mathbb{C}^p)$ possède une structure naturelle de variété fortement symplectique complexe pour la 2-forme de Liouville Ω définie par :

$$\Omega_{(x, \zeta)}((X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})) := \text{Tr } \mathcal{X} Y - \text{Tr } \mathcal{Y} X,$$

pour tout (x, ζ) de \mathcal{M} et tous $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ de $T_{(x, \zeta)} \mathcal{M}$. D'autre part, \mathcal{M} est un espace de Hilbert sur \mathbb{C} de sorte que \mathcal{M} est naturellement muni d'une métrique fortement riemannienne g et d'une forme fortement symplectique réelle ω_1 définies par :

$$g((X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})) := \Re \text{Tr } X^* Y + \Re \text{Tr } \mathcal{X} \mathcal{Y}^*.$$

$$\omega_1((X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})) := -\Im \text{Tr } X^* Y - \Im \text{Tr } \mathcal{X} \mathcal{Y}^*,$$

pour tout (x, ζ) de \mathcal{M} et tous $(X, \mathcal{X}), (Y, \mathcal{Y})$ de $T_{(x, \zeta)} \mathcal{M}$. La métrique g ainsi que les trois formes symplectiques réelles $\omega_1, \omega_2 := \Re \Omega$ et $\omega_3 := \Im \Omega$, munissent \mathcal{M} d'une structure de variété hyperkählérienne avec pour structures complexes :

$$\begin{aligned} I_1((X, \mathcal{X})) &:= (iX, i\mathcal{X}) \\ I_2((X, \mathcal{X})) &:= (\mathcal{X}^*, -X^*) \\ I_3((X, \mathcal{X})) &:= (i\mathcal{X}^*, -iX^*). \end{aligned}$$

La variété kählérienne (\mathcal{M}, g, I_1) possède un potentiel kählérien ρ_1 globalement défini :

$$\rho_1((x, \zeta)) := \frac{1}{4}(\operatorname{Tr} x^*x + \operatorname{Tr} \zeta\zeta^*),$$

où (x, ζ) appartient à \mathcal{M} . Le groupe unitaire $G = U(p)$ de \mathbb{C}^p agit sur \mathcal{M} par :

$$g.(x, \zeta) := (x \circ g^{-1}, g \circ \zeta),$$

pour tout $g \in G$, et tout $(x, \zeta) \in \mathcal{M}$, en préservant la structure complexe I_1 et le potentiel ρ_1 . On en déduit que l'action de G sur (\mathcal{M}, g, I_1) est hamiltonienne, d'application moment :

$$\begin{aligned} \mu_1 : \mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{u}(p)' \\ (x, \zeta) &\mapsto (\mathfrak{a} \mapsto \frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x^*x - \zeta\zeta^*)\mathfrak{a}). \end{aligned}$$

La 1-forme de Liouville θ définie par : $\theta((x, \zeta)) = \operatorname{Tr} \zeta x$ induit sur $(\mathcal{M}, I_1, \Omega)$ une application moment complexe $\mu^{\mathbb{C}}$ définie par :

$$\begin{aligned} \mu^{\mathbb{C}} : \mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{u}(p)' \oplus i\mathfrak{u}(p)' \\ (x, \zeta) &\mapsto (\mathfrak{a} \mapsto \operatorname{Tr} \zeta \mathfrak{a}.x). \end{aligned}$$

Le dual continu $\mathfrak{u}(p)'$ de $\mathfrak{u}(p)$ s'identifiant à $\mathfrak{u}(p)$ via la trace, on définit une application moment μ pour l'action tri-hamiltonienne de G sur $(\mathcal{M}, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ à valeurs dans $\mathfrak{u}(p) \otimes \mathbb{R}^3$ par :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M} &\rightarrow \mathfrak{u}(p) \otimes \mathbb{R}^3 \\ (x, \zeta) &\mapsto (\frac{i}{2}(x^*x - \zeta\zeta^*), \frac{i}{2}(x^*\zeta^* - \zeta x), \frac{i}{2}(\zeta x + x^*\zeta^*)) \end{aligned}$$

Le quotient hyperkählérien

Théorème 1.2.30 *Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2\operatorname{id}, 0, 0))/G$ est une variété lisse fortement hyperkählérienne qui s'identifie naturellement à l'espace cotangent $T^*Gr^{(p)}$ de la variété des p -plans et permet de définir une famille de structures hyperkählériennes sur $T^*Gr^{(p)}$ paramétrée par $k^2 \in \mathbb{R}^{+*}$.*

Lemme 1.2.31 *Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2\operatorname{id}, 0, 0))$ est une sous-variété banachique de \mathcal{M} , stable par G .*

Δ **Preuve du lemme 1.2.31 :**

L'élément $(\frac{i}{2}k^2\operatorname{id}, 0, 0)$ de $\mathfrak{u}(p) \otimes \mathbb{R}^3$ étant $\operatorname{Ad}(G)$ -invariant et μ étant G -équivariante, $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2\operatorname{id}, 0, 0))$ est stable par G . L'ensemble $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2\operatorname{id}, 0, 0))$ est l'image réciproque de $(0, k^2 \operatorname{id})$ par l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathcal{M} &\longrightarrow L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p) \times \operatorname{Sym}(\mathbb{C}^p) \\ (x, \zeta) &\longmapsto (\zeta x, x^*x - \zeta\zeta^*), \end{aligned}$$

où $\operatorname{Sym}(\mathbb{C}^p)$ désigne les opérateurs hermitiens de \mathbb{C}^p , dont la différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} d_{(x, \zeta)}\mathcal{F} : T_{(x, \zeta)}\mathcal{M} &\longrightarrow L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p) \times \operatorname{Sym}^1(\mathbb{C}^p) \\ (Z, T) &\longmapsto (\zeta Z + Tx, x^*Z + Z^*x - \zeta T^* - T\zeta^*). \end{aligned}$$

Montrons qu'en tout point (x, ζ) de $\mathcal{F}^{-1}((0, k^2 \text{id}))$, la différentielle $d_{(x, \zeta)}\mathcal{F}$ est surjective. On décompose \mathbb{C}^p en :

$$\mathbb{C}^p = \text{Im}(\zeta)^\perp \oplus \text{Im}(\zeta).$$

Puisque $x^*x = k^2 \text{id} + \zeta\zeta^*$, x est injectif et réalise une bijection sur son image. De plus, $\zeta x = 0$ implique que $\text{Im}x \subset \text{Ker} \zeta$. On introduit la décomposition de H en :

$$H = \text{Ker}(\zeta)^\perp \oplus \text{Ker}(\zeta) \cap \text{Im}x^\perp \oplus \text{Im}x_{|\text{Im}(\zeta)^\perp} \oplus \text{Im}x_{|\text{Im}(\zeta)}.$$

Relativement à ces décompositions de \mathbb{C}^p et H en somme directe de sous-espaces vectoriels fermés, x , ζ , Z et T s'écrivent :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_{31} & 0 \\ 0 & x_{42} \end{pmatrix} \quad \zeta^* = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{31} & Z_{32} \\ Z_{41} & Z_{42} \end{pmatrix} \quad T^* = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix},$$

où x_{31} et x_{42} sont des isomorphismes et ζ_{12} est injectif. Ainsi relativement à la décomposition de \mathbb{C}^p en $\text{Im}(\zeta)^\perp \oplus \text{Im}(\zeta)$, $\zeta Z + Tx$ a pour expression :

$$\zeta Z + Tx = \begin{pmatrix} T_{31}x_{31} & T_{41}x_{42} \\ \zeta_{12}Z_{11} + T_{32}x_{31} & \zeta_{12}Z_{12} + T_{42}x_{42} \end{pmatrix},$$

et $x^*Z + Z^*x - \zeta T^* - T\zeta^*$ a pour expression :

$$\begin{pmatrix} x_{31}^*Z_{31} + Z_{31}^*x_{31} & x_{31}^*Z_{32} + Z_{41}^*x_{42} - T_{11}\zeta_{12}^* \\ x_{42}^*Z_{41} + Z_{32}^*x_{31} - \zeta_{12}T_{11}^* & x_{42}^*Z_{42} + Z_{42}^*x_{42} - T_{12}\zeta_{12}^* - \zeta_{12}T_{12}^* \end{pmatrix}.$$

Soit $(U, V) \in L(\mathbb{C}^p, \mathbb{C}^p) \times \text{Sym}(\mathbb{C}^p)$ dont les décompositions relativement à la somme directe $\mathbb{C}^p = \text{Im}(\zeta)^\perp \oplus \text{Im}(\zeta)$ sont :

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

Un antécédent de (U, V) est fourni par le couple (Z, T) suivant :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_{31}^{-1*}V_{11} & \frac{1}{2}x_{31}^{-1*}V_{12} \\ \frac{1}{2}x_{42}^{-1*}V_{21} & \frac{1}{2}x_{42}^{-1*}V_{22} \end{pmatrix} \quad T^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_{31}^{-1*}U_{11}^* & x_{31}^{-1*}U_{21}^* \\ x_{42}^{-1*}U_{12}^* & x_{42}^{-1*}U_{22}^* \end{pmatrix}.$$

Ainsi $d_{(x, \zeta)}\mu(X, \mathcal{X})$ est surjective. De plus, g étant une métrique fortement riemannienne sur \mathcal{M} , le noyau de la différentielle possède un supplémentaire topologique. \triangle

Lemme 1.2.32 *Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2 \text{id}, 0, 0))/G$ possède une structure de variété fortement hyperkählérienne.*

\triangle **Preuve du lemme 1.2.32 :**

Le groupe G étant compact, l'espace quotient $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2 \text{id}, 0, 0))/G$ est séparé. De plus, en tout point (x, ζ) de $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2 \text{id}, 0, 0))$, l'orthogonal H_x de

$$T_{(x, \zeta)}G.(x, \zeta) \oplus I_1 T_{(x, \zeta)}G.(x, \zeta) \oplus I_2 T_{(x, \zeta)}G.(x, \zeta) \oplus I_3 T_{(x, \zeta)}G.(x, \zeta)$$

fournit une tranche G -équivariante, stable par I_1, I_2, I_3 et permet de définir une structure de variété fortement hyperkählérienne sur $\mu^{-1}((\frac{i}{2}k^2 \text{id}, 0, 0))/G$. \triangle

Lemme 1.2.33 *La variété stable \mathcal{M}^{s_1} associée à la structure complexe I_1 est l'ensemble des couples (x, ζ) de \mathcal{M} tels que x est injectif et $\zeta(x) = 0$. L'application $q : \mathcal{M}^{s_1} \rightarrow \mu^{-1}(\xi)$ est donnée par $q((x, \zeta)) = g_{(x, \zeta)}(x, \zeta)$ où :*

$$g_{(x, \zeta)}^{-1} := \left(\frac{k^2}{2}(x^*x)^{-1} + \frac{k^2}{2}(x^*x)^{-\frac{1}{2}} \left(Id + \frac{4}{k^4}(x^*x)^{\frac{1}{2}}\zeta\zeta^*(x^*x)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} (x^*x)^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

△ **Preuve du lemme 1.2.33 :**

Notons temporairement :

$$\mathcal{A} = \{(x, X) \in \mathcal{M} \text{ t.q. } \zeta(x) = 0 \text{ et } x \text{ injectif}\}.$$

• Montrons tout d'abord que $\mathcal{M}^{s_1} \subset \mathcal{A}$:

Soient $(x, \zeta) \in \mathcal{M}^{s_1}$ et $g \in G^{\mathbb{C}}$ tel que $g.(x, \zeta) \in \mu^{-1}(\frac{i}{2}k^2\text{id}, 0, 0)$. On a :

$$g \circ \zeta x \circ g^{-1} = 0,$$

ce qui implique que $\zeta(x) = 0$. Soit $g = u.|g|$ la décomposition polaire de g . L'égalité :

$$(x \circ g^{-1})^*(x \circ g^{-1}) - (g \circ \zeta)(g \circ \zeta)^* = k^2 Id_{H_+},$$

se réduit à :

$$|g|^{-1}x^*x|g|^{-1} - |g|\zeta\zeta^*|g| = k^2 Id_{H_+}.$$

Ainsi $|g|^{-1}x^*x|g|^{-1} = k^2 Id_{H_+} + |g|\zeta\zeta^*|g|$ est un opérateur hermitien défini positif, et il en est de même de x^*x . On en déduit que x est injectif.

• Montrons que $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}^{s_1}$:

Soit $(x, X) \in \mathcal{A}$. Montrons qu'il existe un opérateur hermitien défini positif $g_{(x, X)}$ tel que :

$$g_{(x, X)}^{-1}x^*xg_{(x, X)}^{-1} - g_{(x, X)}\zeta\zeta^*g_{(x, X)} = k^2 Id_{H_+}.$$

L'opérateur x étant injectif, x^*x est défini positif et sa racine carrée $(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur inversible de H_+ dans H_+ . Il suffit donc de trouver un opérateur défini positif $\gamma := (x^*x)^{\frac{1}{2}}g_{(x, X)}^{-1}$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma^*\gamma - \gamma^{-1}(x^*x)^{\frac{1}{2}}\zeta\zeta^*(x^*x)^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1*} &= k^2 Id_{H_+} \\ \Leftrightarrow (\gamma\gamma^*)^2 - k^2(\gamma\gamma^*) - (x^*x)^{\frac{1}{2}}\zeta\zeta^*(x^*x)^{\frac{1}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit une unique solution définie positive :

$$\gamma\gamma^* = \frac{k^2}{2} \left(Id_{H_+} + \left(Id_{H_+} + \frac{4}{k^4}(x^*x)^{\frac{1}{2}}\zeta\zeta^*(x^*x)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Ainsi :

$$g_{(x, X)}^{-2} := (x^*x)^{-\frac{1}{2}}\gamma\gamma^*(x^*x)^{-\frac{1}{2}}$$

est auto-adjoint défini positif et sa racine carrée convient. De plus, l'équation $\zeta x = 0$ étant invariante sous $G^{\mathbb{C}}$, on obtient bien un élément de \mathcal{M}^{s_1} . △

Lemme 1.2.34 *L'application :*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{M}^{s_1} &\longrightarrow T^*Gr^{(p)} \\ (x, \zeta) &\longmapsto (\text{Im } x, \frac{1}{k^2}x \circ \zeta), \end{aligned}$$

est une submersion holomorphe, dont les fibres sont les orbites sous le groupe complexifié $G^{\mathbb{C}} = Gl(p)$.

Δ **Preuve du lemme 1.2.34 :**

• Puisque pour tout (x, ζ) appartenant à \mathcal{M}^{s_1} , x est injectif, $\text{Im } x$ définit un espace de dimension p de H . De plus la condition $\zeta(x) = 0$ implique que $\xi := \frac{1}{k^2}x \circ \zeta$ vérifie $\xi|_{\text{Im } x} = 0$, donc peut être considéré comme élément de $L((\text{Im } x)^\perp, \text{Im } x) = T_{\text{Im } x}^*Gr^{(p)}$.

• Ψ est surjective, un antécédent de $(P, V) \in T^*Gr^{(p)}$ est donné par le couple $(x, \frac{k^2}{\sqrt{2}}x^{-1} \circ V)$, où x est un isomorphisme de \mathbb{C}^p dans P .

• Montrons que deux éléments (x_1, ζ_1) et (x_2, ζ_2) de \mathcal{M}^{s_1} ont la même image par Ψ si et seulement si ils appartiennent à la même orbite sous $G^{\mathbb{C}}$. On a :

$$\text{Im } x_1 = \text{Im } x_2 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \circ g^{-1}$$

avec $g^{-1} \in G^{\mathbb{C}}$, d'où :

$$x_2 \circ \zeta_2 = x_1 \circ \zeta_1 = x_2 \circ g \circ \zeta_1,$$

ce qui équivaut à : $\zeta_2 = g \circ \zeta_1$ car x_2 est injectif.

• Exprimons la différentielle de Ψ en (x, ζ) . Soient $P = \text{Im } x$, $\mathcal{U}_P \subset Gr^{(p)}$ l'ouvert formé des éléments $P' \in Gr^{(p)}$ tels que la projection orthogonale de P' sur P soit un isomorphisme et φ_P l'application carte de \mathcal{U}_P dans $L(P, P^\perp)$ qui à P' associe l'unique application $U \in L(P, P^\perp)$ dont P' est le graphe. Soient :

$$(Z, T) \in T_{(x, \zeta)}\mathcal{M}^{s_1}$$

et

$$(x(t), \zeta(t)) \in \mathcal{C}^1(] - \epsilon, \epsilon[, \mathcal{M}^{s_1})$$

telle que :

$$(x(0), \zeta(0)) = (x, \zeta)$$

et

$$\dot{x}(0) = Z \text{ et } \dot{\zeta}(0) = T.$$

Posons :

$$\varphi_P \circ \Psi((x(t), \zeta(t))) = (U(t), V(t)).$$

Comme

$$\text{Im } x(t) = \text{Im} (\text{Id} + U(t))$$

et $U(0) = 0$, il existe $g(t) \in \mathcal{C}^1(] - \epsilon, \epsilon[, G^{\mathbb{C}})$ tel que :

$$x(t) \circ g(t)^{-1} = \text{Id} + U(t) \text{ et } x(0) \circ g(0)^{-1} = \text{Id}.$$

En décomposant H selon $P \oplus P^\perp$, on a : $g(t) = pr_P \circ x(t)$, où pr_P désigne la projection orthogonale sur P . Ainsi $U(t) = pr_{P^\perp} x(t) \circ (pr_P \circ x(t))^{-1}$ et :

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} U(t) = pr_{P^\perp} Z \circ x(0)^{-1}.$$

De plus : $V(t) = \frac{1}{k^2} pr_P \circ x(t) \circ \zeta(t)|_{P^\perp}$ et :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} V(t) = \frac{1}{k^2} (pr_P(Z) \circ \zeta + x \circ T \circ pr_{P^\perp}).$$

Ainsi :

$$d\phi_P \circ d\Psi_{(x,\zeta)}((Z, T)) = (pr_{P^\perp} \circ Z \circ x^{-1}, \frac{1}{k^2} (pr_P(Z) \circ \zeta + x \circ T \circ pr_{P^\perp})).$$

On a bien :

$$d\phi_P \circ d\Psi_{(x,\zeta)}(I_1(Z, T)) = id\phi_P \circ d\Psi_{(x,\zeta)}((Z, T))$$

ce qui prouve que Ψ est holomorphe. De plus, $d\phi_P \circ d\Psi_{(x,\zeta)}$ est surjective, un antécédent de $(U, V) \in L(P, P^\perp) \times L(P^\perp, P)$ étant donné par : $(U \circ x, k^2 x^{-1} V)$.
 Δ

Lemme 1.2.35 *L'espace quotient $\mathcal{M}^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ est difféomorphe à l'espace cotangent $T^*Gr^{(p)}$ de la grassmannienne des p -plans de H via l'application :*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{M}^{s_1}/G^{\mathbb{C}} &\longrightarrow T^*Gr^{(p)} \\ [(x, \zeta)] &\longmapsto (Im x, \frac{1}{k^2} x \circ \zeta), \end{aligned}$$

Δ **Preuve du lemme 1.2.35 :**

Simple corollaire du lemme 1.2.34. Δ

■ Preuve du théorème 1.2.30 :

Le théorème 1.2.30 est maintenant une simple conséquence des lemmes 1.2.32 à 1.2.34. **■**

Remarque 1.2.36 En particulier, pour $p = 1$, on obtient une structure hyperkählérienne sur l'espace cotangent de l'espace projectif d'un espace de Hilbert complexe.

1.3 La Grassmannienne restreinte comme quotient kählérien

1.3.1 Introduction

La grassmannienne restreinte $Gr_{res}(H)$ d'un espace de Hilbert polarisé $H = H_+ \oplus H_-$, où H_+ et H_- sont deux sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie de H en somme directe orthogonale, étudiée par A. Pressley et G. Segal dans [PS], et par T. Wurzbacher dans [Wur1] est définie comme suit :

$$Gr_{res}(H) = \left\{ \begin{array}{ll} W & \text{s.e.v. fermé de } H \quad \text{t.q.} \\ pr_+ : W & \rightarrow H_+ \in \text{Fred}(W, H_+) \\ pr_- : W & \rightarrow H_- \in L^2(W, H_-) \end{array} \right\}$$

où pr_{\pm} est la projection orthogonale sur H_{\pm} , $\text{Fred}(W, H_+)$ désigne l'ensemble des opérateurs de Fredholm de W dans H_+ et $L^2(W, H_-)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt de W dans H_- . C'est une variété hilbertienne (cf Annexe A) et un espace homogène sous le groupe unitaire restreint :

$$\mathcal{U}_{res} = \left\{ \left(\begin{array}{cc} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{array} \right) \in U(H) \mid U_{-+} \in L^2(H_-, H_+), U_{+-} \in L^2(H_+, H_-) \right\},$$

le stabilisateur de H_+ étant $\mathcal{U}(H_+) \times \mathcal{U}(H_-)$. Gr_{res} possède une structure de variété fortement kählérienne invariante sous l'action du groupe \mathcal{U}_{res} . L'expression en l'espace tangent en H_+ identifié à $L^2(H_+, H_-)$ de la métrique g_{Gr} , de la structure complexe I_{Gr} et de la forme symplectique ω_{Gr} est :

$$\begin{aligned} g_{Gr}(X, Y) &= \Re \text{Tr } X^*Y \\ I_{Gr}Y &= iY \\ \omega_{Gr}(X, Y) &= g_{Gr}(X, iY) = -\Im \text{Tr } X^*Y. \end{aligned}$$

où X et Y appartiennent à $L^2(H_+, H_-) = T_{H_+}Gr_{res}$. Les composantes connexes de Gr_{res} sont indexées par l'indice de Fredholm de la projection orthogonale sur H_+ . Le but de cette section est de montrer le théorème suivant où $L^1(H_+)$ désigne l'ensemble des opérateurs à trace de H_+ :

Théorème 1.3.1 *La composante connexe $Gr_{res}^0(H)$ de Gr_{res} contenant H_+ s'obtient comme quotient kählérien à partir de l'espace banachique affine paramétré par $k \in \mathbb{R}^*$:*

$$\mathcal{M}_k = \left\{ x \in B(H_+, H) \mid \begin{array}{l} pr_+ \circ x - k.Id_{H_+} \in L^1(H_+) \\ pr_- \circ x \in L^2(H_+, H_-) \end{array} \right\},$$

via l'action hamiltonienne du groupe de Lie banachique :

$$G = \mathcal{U}(H_+) \cap \{ Id_{H_+} + L^1(H_+) \}.$$

La partie symplectique de ce résultat a été montrée indépendamment par T. Wurzbacher et exposé en particulier dans [Wur2]. L'organisation de cette section est la suivante. Dans le paragraphe 1.3.2, nous définissons les groupes et actions de groupes intervenants, en particulier le groupe $\mathcal{U}_{1,2}$ dont l'action transitive sur la surface de niveau simplifie considérablement la démonstration. Dans le

paragraphe 1.3.3, nous vérifions que les conditions techniques nécessaires à ce que l'espace quotient possède une structure de variété fortement kählérienne. Dans le paragraphe 1.3.4, nous définissons la notion de bases de Schauder, et utilisons la variété stable associée à la surface de niveau pour identifier l'espace quotient à la grassmannienne restreinte. Dans 1.3.5, nous explicitons les trajectoires du système dynamique défini par la norme de l'application moment, ce qui nous permet d'identifier la projection de la variété stable sur la surface de niveau à la limite du flot de ce champ de vecteurs. Enfin dans 1.3.6, nous explicitons le potentiel kählérien obtenu par la théorie de préquantification de Kostant-Souriau.

1.3.2 Actions de groupes

Le groupe banachique produit $\mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H_+)$ agit naturellement sur l'ensemble des opérateurs bornés $B(H_+, H)$ par :

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H_+)) \times B(H_+, H) &\longrightarrow B(H_+, H) \\ ((U, V), x) &\longmapsto U \circ x \circ V^{-1}. \end{aligned}$$

On notera \mathcal{U}_{res}^0 la composante connexe de l'identité de \mathcal{U}_{res} , caractérisée par la propriété que l'indice de l'opérateur de Fredholm U_+ est nul.

Proposition 1.3.2 *Le plus grand sous-groupe de $\mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H_+)$ laissant stable le sous-ensemble $\mathcal{M}_k \subset B(H_+, H)$ est :*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{U}} = \{(U, V) \in \mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H_+) \mid U \in \mathcal{U}_{res}^0, U_+ - V \in L^1(H_+)\}.$$

□ **Preuve de la proposition 1.3.2 :**

• Soit $x_k = \begin{pmatrix} k.Id & \\ & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k$.

Pour $(U, V) \in \mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H_+)$ avec : $U = \begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix}$, on a :

$$(U, V).x_k = k. \begin{pmatrix} U_+ V^{-1} & \\ & U_{+-} V^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi (U, V) envoie $x_k \in \mathcal{M}_k$ sur un élément de \mathcal{M}_k ssi :

$$U_+ V^{-1} \in Id_{H_+} + L^1(H_+)$$

et

$$U_{+-} V^{-1} \in L^2(H_+, H_-).$$

La première condition implique en particulier :

$$U_+ \in Fred(H_+),$$

et est équivalente à :

$$U_+ - V \in L^1(H_+).$$

La seconde équivaut à :

$$U_{+-} \in L^2(H_+, H_-).$$

Comme U est unitaire, on a :

$$U_+^* U_{-+} + U_{+-}^* U_- = 0.$$

L'ensemble des opérateurs de Fredholm étant stable par la prise de l'adjoint, $U_+^* \in \text{Fred}(H_+)$. De plus, tout opérateur de Fredholm étant inversible modulo des opérateurs de rangs finis, il existe $C \in B(H_+)$ tel que $C U_+^* - \text{Id}_{H_+} := F$ soit de rang fini. On en déduit que :

$$U_{-+} = -F U_{-+} - U_{+-}^* U_-$$

est un opérateur de Hilbert-Schmidt. Les équations :

$$U_- U_-^* = \text{Id}_{H_-} - U_{+-} U_{+-}^*$$

et :

$$U_-^* U_- = \text{Id}_{H_-} - U_{-+}^* U_{-+},$$

expriment alors le fait que U_- est inversible modulo des opérateurs de Hilbert-Schmidt, c'est-à-dire que $U_- \in \text{Fred}(H_-)$. Ainsi $U \in \mathcal{U}_{res}$. De plus,

$$\text{ind}(U_+) = \text{ind}(V) = 0$$

car V est inversible, donc $U \in \mathcal{U}_{res}^0$. On vérifie aisément que ces conditions suffisent pour que tout élément de \mathcal{M}_k soit envoyé sur un élément de \mathcal{M}_k .

• Il reste à vérifier que la condition imposée définit bien un groupe. Si le couple $(U, V) \in \mathcal{U}(H) \times \mathcal{U}(H_+)$ vérifie $U_+ - V = T \in L^1(H_+)$, alors le couple (U^{-1}, V^{-1}) vérifie :

$$(U^{-1})_+ - V^{-1} = (U^*)_+ - V^* = U_+^* - V^* = T^* \in L^1(H_+),$$

d'où la stabilité par inverse. De plus, étant donnés $(U, V), (U', V') \in \mathcal{E}_U$, avec :

$$U_+ - V = T \text{ et } U'_+ - V' = T'$$

où $T, T' \in L^1(H_+)$, il vient :

$$\begin{aligned} (UU')_+ - VV' &= U_+ U'_+ + U_{-+} U'_{+-} - VV' \\ &= (V + T)(V' + T') + U_{-+} U'_{+-} - VV' \in L^1(H_+). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.3.3 L'action de \mathcal{E}_U sur \mathcal{M}_k se restreint en une action libre du groupe $G = \mathcal{U}(H_+) \cap \{ \text{Id}_{H_+} + L^1(H_+) \}$, qui apparaît comme un sous groupe de \mathcal{E}_U via l'injection canonique :

$$\begin{aligned} G &\hookrightarrow \mathcal{E}_U \\ U &\mapsto (\text{Id}_H, U), \end{aligned}$$

et on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow G \rightarrow \mathcal{E}_U \rightarrow \mathcal{U}_{res}^0 \rightarrow 1.$$

La restriction de l'action de \mathcal{E}_U sur \mathcal{M}_k au premier facteur fait naturellement apparaître le sous-groupe $\mathcal{U}_{1,2}$ de \mathcal{U}_{res}^0 suivant :

$$\mathcal{U}_{1,2} = \left\{ U = \begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_{res}^0 \mid U_+ \in \text{Id}_{H_+} + L^1(H_+) \right\}.$$

1.3.3 Le quotient kählérien

L'espace affine \mathcal{M}_k est naturellement munie de la structure faiblement kählérienne $(\mathfrak{g}, I, \omega)$ plate suivante :

$$\begin{aligned} g_x(X, Y) &= \Re \operatorname{Tr} X^*Y \\ I_x(Y) &= iY \\ \omega_x(X, Y) &= g_x(iX, Y) = \Im \operatorname{Tr} X^*Y \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathcal{M}_k$ et tous $X, Y \in T_x\mathcal{M}_k$.

Proposition 1.3.4 *L'action de G sur \mathcal{M}_k donnée par :*

$$g.x = x \circ g^{-1},$$

où $x \in \mathcal{M}_k$ et $g \in G$, est hamiltonnienne relativement à la structure symplectique ω , d'application moment G -équivariante :

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{M}_k &\longrightarrow \mathfrak{g}' \\ x &\longmapsto (\mathfrak{a} \mapsto \frac{i}{2} \operatorname{Tr} x^*x\mathfrak{a}), \end{aligned}$$

où \mathfrak{g}' est le dual continu de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \{\mathfrak{a} \in L^1(H_+) \text{ t.q. } \mathfrak{a}^* = -\mathfrak{a}\}$ de G . De plus, μ est invariante sous l'action du groupe $\mathcal{U}_{1,2}$.

□ **Preuve de la proposition 1.3.4 :**

• Remarquons d'abord que l'application moment μ est bien définie sur \mathcal{M}_k , car x^*x appartient à l'ensemble des opérateurs bornés de H_+ dans H_+ , noté $B(H_+)$, et \mathfrak{a} appartient à $L^1(H_+)$. Elle est C^∞ car l'application de \mathcal{M}_k dans $B(H_+)$ associant à x l'élément x^*x est C^∞ et :

$$\| \operatorname{Tr} (A.) \| = \|A\|, \forall A \in B(H_+).$$

• L'action infinitésimale de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est donnée, pour tout $x \in \mathcal{M}_k$ et tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$, par :

$$\mathfrak{a}.x = -x \circ \mathfrak{a}$$

De plus, pour tout $x \in \mathcal{M}_k$ et tout $X \in T_x\mathcal{M}_k$,

$$\begin{aligned} d\mu_x^\mathfrak{a}(X) &= \frac{i}{2} (\operatorname{Tr} X^*x\mathfrak{a} + \operatorname{Tr} x^*X\mathfrak{a}) \\ &= \frac{i}{2} (\operatorname{Tr} X^*x\mathfrak{a} + \operatorname{Tr} \mathfrak{a}x^*X) && \text{car } x^*X \in B(H_+) \text{ et } \mathfrak{a} \in L^1(H_+), \\ &= \frac{i}{2} (\operatorname{Tr} X^*x\mathfrak{a} - \operatorname{Tr} (x\mathfrak{a})^*X) \\ &= -\Im \operatorname{Tr} X^*x \circ \mathfrak{a} \\ &= \Im \operatorname{Tr} X^*(\mathfrak{a}.x) = -\Im \operatorname{Tr} (\mathfrak{a}.x)^*X \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d\mu_x^\mathfrak{a}(X) = i_{\mathfrak{a}.x}\omega(X)$$

• L'invariance sous $\mathcal{U}_{1,2}$ est claire. Vérifions la G -équivariance de μ . G agit sur \mathfrak{g}' par la représentation coadjointe est définie, pour tout $g \in G$ et tout $\xi \in \mathfrak{g}'$ par :

$$\begin{aligned} \operatorname{Ad}^*(g).\xi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathfrak{a} &\mapsto \xi(\operatorname{Ad}(g^{-1})(\mathfrak{a})). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mu^{\mathfrak{a}}(g.x) &= \frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x \circ g^{-1})^* (x \circ g^{-1}) \mathfrak{a} \\
&= \frac{i}{2} \operatorname{Tr} g x^* x g^{-1} \mathfrak{a} && \text{car } g \in \mathcal{U}(H_+) \\
&= \frac{i}{2} \operatorname{Tr} x^* x g^{-1} \mathfrak{a} g && \text{car } x^* x g^{-1} \mathfrak{a} \in L^1(H_+) \\
&= \mu^{\operatorname{Ad}(g^{-1})(\mathfrak{a})}(x)
\end{aligned}$$

□

Proposition 1.3.5 *Pour tout $k \in \mathbb{R}^*$, la surface de niveau $\mathcal{N}_k := \mu^{-1}(\frac{i}{2}k^2 \operatorname{Tr})$ est une sous-variété réelle de \mathcal{M}_k , stable par G .*

Lemme 1.3.6 *La surface de niveau \mathcal{N}_k s'identifie à :*

$$\{x \in \mathcal{M}_k \mid x^* x = k^2 \cdot \operatorname{Id}_{H_+}\}.$$

△ **Preuve du lemme 1.3.6 :**

La trace identifie isométriquement le dual continu (complexe) de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g} = L^1(H_+)$ à $B(H_+)$ par :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr} &: B(H_+) \xrightarrow{\sim} L^1(H_+)' \\
&A \longmapsto (B \mapsto \operatorname{Tr} AB).
\end{aligned}$$

En particulier, l'ensemble des $A \in B(H_+)$ tels que pour tout $B \in \mathfrak{g}$, $\operatorname{Tr}(AB) \in \mathbb{R}$ s'identifie au dual continu (réel) de \mathfrak{g} . Ainsi :

$$\begin{aligned}
i \operatorname{Tr} x^* x \mathfrak{a} &= ik^2 \operatorname{Tr} \mathfrak{a} && \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{g} \\
\Leftrightarrow x^* x &= k^2 \cdot \operatorname{Id}_{H_+}
\end{aligned}$$

△

Lemme 1.3.7 *Le groupe de Lie $\mathcal{U}_{1,2}$ agit transitivement sur la surface de niveau \mathcal{N}_k .*

△ **Preuve du lemme 1.3.7 :**

Tout élément :

$$x = \begin{pmatrix} x_+ \\ x_- \end{pmatrix} \in \mathcal{N}_k$$

définit une famille orthogonale libre de norme $|k|$ de H par le biais de ses vecteurs colonnes et s'obtient à partir de :

$$x_k = \begin{pmatrix} k \cdot \operatorname{Id} \\ 0 \end{pmatrix}$$

par l'action d'un élément :

$$U = \frac{1}{k} \cdot \begin{pmatrix} x_+ & A \\ x_- & B \end{pmatrix} \in \mathcal{U}(H),$$

où $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ est défini par une base (hilbertienne) orthogonale de norme $|k|$ de $\operatorname{Im} x^{\perp}$. La relation d'orthogonalité entre $\operatorname{Im} x$ et $\operatorname{Im} x^{\perp}$ implique en particulier :

$$x_+^* A + x_-^* B = 0,$$

ce qui, associé aux conditions $x_+ \in k \cdot \text{Id}_{H_+} + L^1(H_+)$ et $x_- \in L^2(H_+, H_-)$, implique que $A \in L^2(H_+)$. Ainsi $U \in \mathcal{U}_{1,2}$. \triangle

□ **Preuve de la proposition 1.3.5 :**

• Montrons que l'application \mathbb{R} -linéaire :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{M}_k &\rightarrow k^2 \cdot \text{Id}_{H_+} + \text{Sym}^1(H_+), \\ x &\mapsto x^*x \end{aligned}$$

où $\text{Sym}^1(H_+)$ désigne le sous-espace vectoriel réel fermé de $L^1(H_+)$ formés des opérateurs auto-adjoints de H_+ , est une submersion. Le fait qu'elle soit C^∞ est clair, et pour tout $x \in \mathcal{N}_k$,

$$\begin{aligned} d\gamma_x : T_x\mathcal{M}_k &\rightarrow \text{Sym}^1(H_+) \\ X &\mapsto X^*x + x^*X \end{aligned}$$

est surjective : quel que soit $Y \in \text{Sym}^1(H_+)$, $X := \frac{1}{2k^2}xY$ est un antécédent de Y appartenant à $T_x\mathcal{M}_k$.

• Au point $x_k = \begin{pmatrix} k \cdot \text{Id} \\ 0 \end{pmatrix}$, un supplémentaire topologique de

$$\text{Ker } d\gamma_{x_k} = \left\{ \begin{pmatrix} X_+ \\ X_- \end{pmatrix} \in T_{x_k}\mathcal{M}_k, X_+^* + X_+ = 0 \right\}$$

est :

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} Y_+ \\ 0 \end{pmatrix} \in T_{x_k}\mathcal{M}_k, Y_+^* - Y_+ = 0 \right\}.$$

Grâce à l'action transitive de $\mathcal{U}_{1,2}$ sur \mathcal{N}_k , on conclut qu'en tout point $x = U \cdot x_k$ avec $U \in \mathcal{U}_{1,2}$, $\text{Ker } d\gamma_x = U(\text{Ker } d\gamma_{x_k})$ possède un supplémentaire topologique, à savoir $U(W)$. \square

Théorème 1.3.8 *L'espace quotient \mathcal{N}_k/G possède une structure naturelle de variété fortement kählérienne.*

Notations 1.3.9 *On notera $\pi : \mathcal{N}_k \rightarrow \mathcal{N}_k/G, x \mapsto [x]$ la projection naturelle.*

■ **Preuve du théorème 1.3.8 :**

• Montrons que G agit proprement sur \mathcal{N}_k . D'après la proposition 1.2.5, puisque G agit librement sur \mathcal{N}_k , il suffit de montrer que le graphe $\mathcal{C} \subset \mathcal{N}_k \times \mathcal{N}_k$ de la relation d'équivalence définie par G est fermé dans $\mathcal{N}_k \times \mathcal{N}_k$ et que l'application f de \mathcal{C} dans G qui au couple (x, y) associe l'unique élément $g \in G$ tel que $y = x \circ g^{-1}$, est continue. Soit $\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{C} convergeant vers $(x_\infty, y_\infty) \in \mathcal{N}_k \times \mathcal{N}_k$ et $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'éléments de G définie par $y_n = x_n \circ g_n^{-1}$. Puisque x_n vérifie $x_n^*x_n = k^2 \text{Id}$, on a :

$$g_n^{-1} = \frac{1}{k^2}x_n^*x_n g_n^{-1} = \frac{1}{k^2}x_n^*y_n.$$

Par continuité du produit, on en déduit que $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers g_∞ vérifiant $g_\infty^{-1} := \frac{1}{k^2}x_\infty^*y_\infty$. En utilisant les conditions d'appartenance à \mathcal{M}_k de x_∞ et y_∞ , on montre facilement que $x_\infty^*y_\infty \in k^2 \text{Id}_{H_+} + L^1(H_+)$. De plus, l'ensemble des

éléments unitaires formant un fermé de $B(H_+)$, l'élément $x_\infty^* y_\infty$ appartient à G . Ainsi \mathcal{C} est fermé et $f : (x, y) \mapsto (\frac{1}{k^2} x^* y)^{-1}$ est continue (même différentiable). On en déduit que l'espace quotient \mathcal{N}_k/G est séparé. En particulier, l'orbite d'un point $x \in \mathcal{N}_k$ est fermée et l'espace tangent $T_x G.x$ est un sous-espace vectoriel fermé de $T_x \mathcal{M}_k$.

• La structure de variété riemannienne de \mathcal{N}_k/G provient du fait que l'espace tangent à l'orbite de x possède un supplémentaire topologique dans $T_x \mathcal{N}_k$, à savoir :

$$H_x = \left\{ \begin{array}{l} Y = \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix}, Y_+ \in L^1(H_+), \\ Y_- \in L^2(H_+, H_-), Y^* x + x^* Y = 0, Y^* x = 0 \end{array} \right\} \\ = T_x G.x^{\perp_g}.$$

qui fournit une tranche G -équivariante (en fait constante), i.e. vérifiant :

$$H_x.V^{-1} = H_x.V^{-1}.$$

Les projections associées à la décomposition en somme directe explicitées par :

$$\begin{array}{ll} p_1 : T_x \mathcal{N}_k & \longrightarrow T_x G.x \\ & Y \longmapsto \frac{1}{k^2} x x^* Y \\ p_2 : T_x \mathcal{N}_k & \longrightarrow H_x \\ & Y \longmapsto Y - \frac{1}{k^2} x x^* Y \end{array}$$

sont des application linéaires continues de $L^1(H_+) \times L^2(H_+, H_-)$ et G -équivariantes.

• De plus, G préservant la métrique g , on peut définir une métrique riemannienne g_{red} sur \mathcal{N}_k/G par :

$$\begin{array}{ll} g_{red,[x]} : T_{[x]} \mathcal{N}_k/G \times T_{[x]} \mathcal{N}_k/G & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto g_x(\tilde{X}, \tilde{Y}), \end{array}$$

où \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) est défini comme l'unique élément de H_x qui se projette sur X (resp. sur Y), appelé relèvement horizontal de X (resp. de Y).

Pour montrer que g_{red} identifie $T_{[x]} \mathcal{N}_k/G$ à $(T_{[x]} \mathcal{N}_k/G)'$ et définit ainsi une métrique fortement riemannienne, il suffit de considérer l'espace tangent en $[x_k]$ car l'action du groupe $\mathcal{U}_{1,2}$ est transitive et préserve g . Or en $[x_k]$, g_{red} est la métrique standard de $L^2(H_+, H_-)$ et réalise bien un isomorphisme entre l'espace tangent et son dual.

• Sur la variété quotient \mathcal{N}_k/G , on définit la 2-forme alternée ω_{red} par :

$$\begin{array}{ll} \omega_{red,[x]} : T_{[x]} \mathcal{N}_k/G \times T_{[x]} \mathcal{N}_k/G & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto \omega_x(\tilde{X}, \tilde{Y}), \end{array}$$

Puisque ω restreinte à la sous-variété \mathcal{N}_k est fermée, il en est de même de ω_{red} car $\omega|_{\mathcal{N}_k} = \pi^* \omega_{red}$ et $d\omega|_{\mathcal{N}_k} = d\pi^* \omega_{red} = \pi^* d\omega_{red} = 0$. Montrons que le noyau de $\omega|_{\mathcal{N}_k}$ en $x \in \mathcal{N}_k$ est exactement l'espace tangent à l'orbite de x . Par l'action transitive de $\mathcal{U}_{1,2}$ laissant ω invariant, il suffit de le vérifier pour $x = x_k$. Il vient :

$$T_{x_k} \mathcal{N}_k^{\perp \omega} = \{Y \in T_{x_k} \mathcal{M}_k, \text{Im Tr } Y^* X = 0, \forall X \in T_{x_k} \mathcal{M}_k \mid X_+^* + X_+ = 0\}$$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c} Y_+ \\ 0 \end{array} \right) \in T_{x_k} \mathcal{M}_k \mid \operatorname{Im} \operatorname{Tr} Y_+^* X_+ = 0, \forall X_+ \in L^1(H_+) \mid X_+^* + X_+ = 0 \right\}.$$

De plus, le sous-espace vectoriel de $L^1(H_+)$ des éléments anti-hermitiens est un sous-espace isotrope maximal. En effet :

$$\Im \operatorname{Tr} Y_+^* X_+ = \frac{1}{2i} (\operatorname{Tr} Y_+^* X_+ - \operatorname{Tr} X_+^* Y_+) = \frac{1}{2i} \operatorname{Tr} (Y_+^* + Y_+) X_+$$

et :

$$\begin{aligned} \Im \operatorname{Tr} Y_+^* X_+ &= 0 && \forall X_+ \in L^1(H_+) \text{ t.q. } X_+^* + X_+ = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Tr} (Y_+^* + Y_+) X_+ &= 0 && \forall X_+ \in L^1(H_+) \text{ t.q. } X_+^* + X_+ = 0 \\ \Leftrightarrow \operatorname{Tr} (Y_+^* + Y_+) X_+ &= 0 && \forall X_+ \in L^1(H_+) \text{ (par } \mathbb{C}\text{-linéarité de la trace)} \\ \Leftrightarrow Y_+^* + Y_+ &= 0 && \text{ (car la trace identifie } B(H_+) \text{ et } L^1(H_+)' \text{)} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$T_{x_k} \mathcal{N}_k^{\perp \omega} = \left\{ Y = \left(\begin{array}{c} Y_+ \\ 0 \end{array} \right) \in T_{x_k} \mathcal{M}_k, Y_+^* + Y_+ = 0 \right\} = T_{x_k} G.x_k.$$

Comme l'espace tangent à \mathcal{N}_k en x_k est $T_{x_k} G.x_k^{\perp \omega}$ et que $T_{x_k} G.x_k \subset T_{x_k} G.x_k^{\perp \omega}$, on conclut que :

$$T_{x_k} \mathcal{N}_k^{\perp \omega} \cap T_{x_k} \mathcal{N}_k = T_{x_k} G.x_k.$$

Il reste à montrer que la forme symplectique ω_{red} réalise un isomorphisme de $T_{[x]} \mathcal{N}_k / G$ sur $(T_{[x]} \mathcal{N}_k / G)'$, mais ceci est clair en $[x_k]$ car alors $T_{[x_k]} \mathcal{N}_k / G$ s'identifie à $L^2(H_+)$ et ω_{red} à la forme symplectique standard de $L^2(H_+)$. Par l'action transitive de $\mathcal{U}_{1,2}$, il en est de même en tout point $x \in \mathcal{N}_k$.

• Reliant ω à la métrique g via la structure complexe I , l'espace tangent $T_x \mathcal{N}_k$ apparaît comme le sous-espace vectoriel fermé $(I.T_x G.x)^{\perp_g}$ de $T_x \mathcal{M}_k$ et, en chaque point x' de l'orbite $G.x$, l'espace horizontal $H_{x'}$ est l'orthogonal pour g dans $T_x \mathfrak{g}_k$ de $T_x G.x \oplus I.T_x G.x$. Ainsi H_x a la propriété d'être stable sous I et G -équivariant. La G -équivariance de I permet alors de définir :

$$\begin{aligned} I_{red} : T_{[x]} \mathcal{N}_k / G &\rightarrow T_{[x]} \mathcal{N}_k / G \\ X &\mapsto \pi_* I_x \tilde{X}, \end{aligned}$$

où \tilde{X} est le relèvement horizontal de X en $T_x \mathcal{N}_k$. Il reste à montrer que la structure presque complexe ainsi définie est intégrable, i.e. que le tenseur de Nijenhuis N est nul. Soit X et Y deux éléments de $T_{[x]} \mathcal{N}_k / G$. On a :

$$N(X, Y) = [X, Y] + I_{red}[X, I_{red}Y] + I_{red}[I_{red}X, Y] - [I_{red}X, I_{red}Y].$$

Soit \tilde{X} et \tilde{Y} les relèvements horizontaux de X et Y . Comme \tilde{X} et \tilde{Y} sont des champs de vecteurs G -invariants, leur crochet $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ est G -invariant et se projette sur $[X, Y]$. En utilisant la définition de I_{red} , on a ainsi :

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= \pi_* [\tilde{X}, \tilde{Y}] + I_{red} \pi_* [\tilde{X}, I\tilde{Y}] + I_{red} \pi_* [I\tilde{X}, \tilde{Y}] - \pi_* [I\tilde{X}, I\tilde{Y}] \\ &= \pi_* (N(\tilde{X}, \tilde{Y})) = 0. \end{aligned}$$

■

La démonstration du théorème 1.3.8 permet de déduire le corollaire suivant que nous utiliserons au paragraphe 1.3.6 pour le calcul du potentiel kählerien :

Corollaire 1.3.10 *Le G -fibré principal $\pi : \mathcal{N}_k \rightarrow \mathcal{N}_k/G, x \mapsto [x]$ est naturellement muni d'une connexion G -invariante ∇ , caractérisée par la donnée des espaces horizontaux :*

$$H_x = \left\{ \begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix}, Y_+ \in L^1(H_+), Y_- \in L^2(H_+, H_-), Y^*x = 0 \right\}.$$

1.3.4 Bases de Schauder

Il nous reste à montrer que l'espace quotient obtenu est la grassmannienne restreinte comme définie dans [PS]. L'identification se fait naturellement par l'application qui à une classe d'équivalence de matrices $\{x \circ g^{-1}, g \in G\}$ associe l'espace vectoriel image $\text{Im}x$. Remarquons tout d'abord que ce dernier appartient bien à Gr_{res}^0 :

Proposition 1.3.11 *Pour tout $x \in \mathcal{M}_k$, l'espace vectoriel image $\text{Im}x$ est fermé et appartient à Gr_{res}^0 .*

□ **Preuve de la proposition 1.3.11 :**

L'appartenance de l'adhérence $\overline{\text{Im}x}$ à Gr_{res}^0 est une conséquence directe des définitions. Il reste donc à montrer que x est à image fermée. Notons :

$$T = x - k \text{Id}_{H_+} \in B(H_+, H).$$

T est un opérateur compact par hypothèse. Soit $f \in \overline{\text{Im}x}$ et $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de H_+ telle que :

$$xu_n = ku_n + Tu_n \rightarrow f.$$

Quitte à retrancher à u_n sa projection sur le noyau de x , on peut supposer que $u_n \in \text{Ker}(x)^\perp$.

Montrons par l'absurde que la suite $\{u_n\}$ est bornée. Supposons qu'il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_{n_k}\| = +\infty$. Notons :

$$v_k = \frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|}.$$

La suite $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée et T étant compact, il existe une sous-sous-suite $\{w_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ telle que Tw_i converge vers un élément $z \in H$. Comme :

$$(k \text{Id}_{H_+} + T)w_i = \frac{1}{\|u_{n_{k_i}}\|} xu_{n_{k_i}} \rightarrow 0,$$

w_i converge vers $-\frac{1}{k}z$. La limite z vérifie $(k \text{Id}_{H_+} + T)z = 0$, i.e. $z \in \text{Ker}x$. Or, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $w_i \in \text{Ker}(x)^\perp$, donc $z = 0$. Ceci est contredit par le fait que les éléments w_i sont de norme 1.

Ainsi la suite $\{u_n\}$ est bornée. Quitte à prendre une sous-suite, on peut supposer que Tu_n converge vers un élément $f' \in H$. Alors la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f - f' = g$ et un passage à la limite dans $ku_n + Tu_n \rightarrow f$ permet de conclure que : $kg + Tg = f$. □

Pour montrer que tout élément $W \in Gr_{res}^0$ possède une base orthogonale définissant un élément de \mathcal{N}_k , nous allons montrer que la surface stable associée

à \mathcal{N}_k est l'ensemble des bases de Schauder des éléments de Gr_{res} , puis que la base canonique, définie par A. Pressley et G. Segal dans [PS], associe à tout élément de Gr_{res}^0 un élément de la surface stable. Pour cela, remarquons que l'action de G se prolonge en une action holomorphe du groupe de Lie complexe :

$$G^{\mathbb{C}} = Gl(H_+) \cap \{ Id_{H_+} + L^1(H_+) \}$$

sur la variété complexe (\mathcal{M}_k, I) par : $g.x = x \circ g^{-1}$, pour tout $x \in \mathcal{M}_k$ et tout $g \in G^{\mathbb{C}}$. Rappelons la définition d'une base de Schauder d'un espace de Hilbert, équivalent en dimension infinie des bases non-orthonormée :

Définition 1.3.12 On dit que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de Schauder de l'espace de Hilbert séparable F si et seulement si pour tout $f \in F$ il existe une suite unique $\{\alpha_n\} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n f_n.$$

Remarque 1.3.13 Étant donnée une base hilbertienne $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert F , les suites $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ formées respectivement des éléments $f_n = n e_n$ et $g_n = \frac{1}{n} e_n$, définissent des bases de Schauder de F . Remarquons que l'application qui à e_n associe f_n est non bornée, alors que l'application qui à e_n associe g_n est compacte.

Proposition 1.3.14 L'ensemble des éléments x de \mathcal{M}_k définissant une base de Schauder de l'espace vectoriel image $Im x$ par le biais de ses vecteurs colonnes est :

$$\mathcal{M}_k^s = \{y \in \mathcal{M}_k \text{ t.q. } y \text{ est injectif}\}.$$

C'est aussi l'ouvert de \mathcal{M}_k défini par :

$$\mathcal{M}_k^s = \{y \in \mathcal{M}_k \mid \det \left(\frac{y^* y}{k^2} \right) > 0\}.$$

□ **Preuve de la proposition 1.3.14 :**

Un élément f appartient à l'image de x si et seulement si il existe une suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ telle que $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x e_n$, où $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est la base canonique de H_+ , i.e. ssi $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n f(e_n)$ avec $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$. L'unicité de cette écriture est bien équivalente à l'injectivité de l'application x . D'autre part, les conditions sur $x \in \mathcal{M}_k$ permettent de définir le déterminant de $\frac{y^* y}{k^2}$, qui est positif car $\frac{y^* y}{k^2}$ est auto-adjoint, et strictement positif ssi $y^* y$, donc y , est injectif. □

Rappelons la définition des “bases admissibles” selon [PS] d'un élément $x \in Gr_{res}^0$:

Définition 1.3.15 Étant donnée une base hilbertienne $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de H_+ , une suite $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $W \in Gr_{res}$ est une base admissible de W si :

1. l'application linéaire $w : H_+ \rightarrow W$ envoyant l'élément e_k sur w_k est un isomorphisme continu,
2. l'application composée $pr_+ \circ w : H_+ \rightarrow H_+$, où pr_+ désigne la projection orthogonale sur H_+ , est un opérateur à déterminant.

Remarque 1.3.16 Cette définition ne dépend pas de la base hilbertienne de H_+ choisie, et, par définition même, la variété des “bases admissibles” n’est rien d’autre que \mathcal{M}_1^s . C’est aussi la “variété de Stiefel” définie par J. Mickelsson dans [Mic].

Théorème 1.3.17 *La variété quotient \mathcal{N}_k/G s’identifie comme variété complexe à $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$.*

Notations 1.3.18 *On notera $\pi_{\mathbb{C}} : \mathcal{M}_k^s \rightarrow \mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ la projection holomorphe naturelle sur le quotient.*

Lemme 1.3.19 *L’ensemble des bases de Schauder \mathcal{M}_k^s s’identifie ensemblistement à la réunion des orbites complexes $\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$:*

$$\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}} = \{y \in \mathcal{M}_k \mid \exists g \in G^{\mathbb{C}} \text{ t.q. } g.y \in \mathcal{N}_k\},$$

Δ **Preuve du lemme 1.3.19 :**

• Montrons que : $\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}} \subset \mathcal{M}_k^s$:

Soit $y = x \circ g^{-1} \in \mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$ avec $g \in G^{\mathbb{C}}$ et $x^*x = k^2.Id_{H_+}$. x étant injectif, il en est de même de y .

• Montrons que $\mathcal{M}_k^s \subset \mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$:

Soit $y \in \mathcal{M}_k^s$. y étant injectif, y^*y est défini positif et appartient à $\{k^2.Id_{H_+} + L^1(H_+)\}$. Montrons que la racine carrée de $\frac{1}{k^2}y^*y$, notée $\frac{1}{|k|}|y|$ est dans $G^{\mathbb{C}}$. Tout d’abord, $\frac{1}{|k|}|y|$ est injectif car $\text{Ker } |y| = \text{Ker } y = \{0\}$. Montrons que $\frac{1}{|k|}|y|$ est à image fermée. Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d’éléments de H_+ telle que la suite $\{\frac{1}{|k|}|y|x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $h \in H_+$. Par continuité de $|y|$, la suite $\{\frac{1}{|k|}|y|^2x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $|y|h$. Or $|y|^2 = y^*y$ et, y^*y étant un opérateur de Fredholm, il est à image fermée. Ainsi il existe un élément $h' \in H_+$ tel que $|y|h = y^*yh' = |y|^2h'$. Par injectivité de l’application $|y|$, on en déduit que $h = |y|h'$. De cela on déduit que $|y|$ est bijectif car il est auto-adjoint et : $\text{Im } |y| = \text{Im } |y| = (\text{Ker } |y|)^{\perp} = H_+$. Ainsi $\frac{1}{|k|}|y|$ est une bijection continue de l’espace de Hilbert H_+ dans lui-même, donc son inverse est continu. Il reste à montrer que $\frac{1}{|k|}|y|$ appartient à $\{Id_{H_+} + L^1(H_+)\}$. Notons $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ les valeurs propres de $\frac{1}{k^2}y^*y - Id \in L^1(H_+)$. Les valeurs propres de $\frac{1}{|k|}|y| - Id$ sont les $\{\sqrt{1 + \lambda_n} - 1, n \in \mathbb{N}\}$, et on a la majoration :

$$\sqrt{1 + \lambda_n} - 1 \leq \frac{\lambda_n}{2},$$

ce qui implique que $\frac{1}{|k|}|y| - Id_{H_+} \in L^1(H_+)$. Il en résulte que $\frac{1}{|k|}|y|$ appartient au groupe $G^{\mathbb{C}} = Gl(H_+) \cap \{Id_{H_+} + L^1(H_+)\}$ et donc que $|k||y|^{-1}$ est aussi dans $G^{\mathbb{C}}$. Ainsi $x := |k|y \circ |y|^{-1}$ vérifie : $x^*x = k^2.|y|^{-1}y^*y|y|^{-1} = k^2.Id_{H_+}$ et y appartient bien à $\mathcal{N}_k^{\mathbb{C}}$. Δ

On déduit de la démonstration précédente la proposition suivante :

Proposition 1.3.20 *La décomposition polaire de $GL(H_+)$ en $U(H_+) \times \text{Sym}^{>0}(H_+)$, où $\text{Sym}^{>0}(H_+)$ désigne l’ensemble des opérateurs hermitiens définis positifs, se restreint en une décomposition polaire de $G^{\mathbb{C}}$ en $G \times \text{Sym}^{>0}(H_+) \cap \{Id_{H_+} + L^1(H_+)\}$.*

■ **Preuve du théorème 1.3.17 :**

D'après le lemme 1.3.19, \mathcal{M}_k^s est la surface stable associée à \mathcal{N}_k . D'après le théorème 1.2.18, $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ est une variété banachique complexe isomorphe (comme variété complexe) à \mathcal{N}_k/G . ■

Notations 1.3.21 On notera $q : \mathcal{M}_k^s \rightarrow \mathcal{N}_k$ la projection qui à y associe $|k|y \circ |y|^{-1}$.

Remarque 1.3.22 L'identification du théorème 1.3.17 permet de transporter la structure kählérienne de \mathcal{N}_k/G sur $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$.

D'après [PS], tout élément $P \in Gr_{res}$ possède une base admissible distinguée, appelée base canonique. Les étapes de sa construction sont les suivantes :

Définition 1.3.23 Choisissons $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ une base hilbertienne de H telle que $\{e_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ soit une base hilbertienne de H_+ et $\{e_{-n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ une base hilbertienne de H_- . $P \in Gr_{res}$ étant donné, on définit le sous-ensemble de \mathbb{Z} :

$$S_P = \{s \in \mathbb{Z} \mid \exists f = \sum_{k=-\infty}^s f_k e_k \in P, f_s \neq 0\},$$

et le sous-espace de Hilbert : $H_{S_P} = \hat{\oplus}_{k \in S_P} \mathbb{C}e_k$, où la somme est une somme hilbertienne.

Proposition 1.3.24 On a :

$$S_P \setminus \mathbb{N} < +\infty \quad \text{et} \quad \mathbb{N} \setminus S_P < +\infty$$

□ **Preuve de la proposition 1.3.24 :**

• Montrons que $S_P \setminus \mathbb{N} < +\infty$. Supposons qu'il existe une suite $\{s_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de S_P , que l'on peut supposer strictement décroissante, tendant vers $-\infty$. Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un élément f_{s_k} de P d'ordre fini s_k :

$$f_{s_k} = \sum_{-\infty}^{s_k} f_{kj} e_j \in P, f_{ks_k} \neq 0.$$

La suite $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ constitue une famille libre de P au sens $l^2(\mathbb{N}) : \forall \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \alpha_k = 0.$$

En outre, dès que $s_k < 0$, f_k appartient à $P \cap H_-$. On obtient donc une sous-famille infinie d'éléments de $P \cap H_-$. Or la projection orthogonale de P dans H_+ étant un opérateur de Fredholm, son noyau $P \cap H_-$ est de dimension finie. D'où une contradiction.

• Montrons que $\mathbb{N} \setminus S_P < +\infty$. La projection orthogonale pr_+ de P dans H_+ étant de codimension finie, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel $e_n \in \text{Im } pr_+$ pour tout $n > n_0$, il existe donc $f_n \in P$ de la forme :

$$f_n = e_n + \sum_{k < 0} f_{nk} e_k.$$

Ainsi tout $n > n_0$ appartient à S_P . □

Corollaire 1.3.25 *La projection p_{S_P} de P sur H_{S_P} est un isomorphisme.*

□ **Preuve du corollaire 1.3.25 :**

• Montrons que p_{S_P} est surjective. Soit $s_0 \in S_P$. Il existe un élément $f_{s_0} \in P$ d'ordre s_0 :

$$f_{s_0} = e_{s_0} + \sum_{k < s_0} \alpha_{s_0 k} e_k \in P$$

$$f_{s_0} = e_{s_0} + \sum_{k < s_0, k \in S_0} \alpha_{s_0 k} e_k + \sum_{k < s_0, k \notin S_0} \alpha_{s_0 k} e_k.$$

Remarquons que, d'après la proposition précédente, les éléments $k < s_0$ appartenant à S_P sont en nombre fini. Notons les k_1, \dots, k_n avec $k_n < k_{n-1} < \dots < k_1$. Pour chacun d'eux, il existe $f_{k_i} = e_{k_i} + \sum_{j < k_i} \alpha_{k_i j} e_j \in P, i = 1, \dots, n$. En retranchant à f_{s_0} une combinaison linéaire appropriée des $f_{k_i}, i = 1, \dots, n$, on obtient un élément $f \in P$ de la forme :

$$f = e_{s_0} + \sum_{k < s_0, k \notin S_P} \alpha_k e_k,$$

dont la projection sur H_{S_P} est e_{s_0} .

• Montrons que p_{S_P} est injective. Supposons qu'il existe un élément f non nul appartenant à $\text{Ker } p_{S_P} = P \cap \overline{H_{\overline{S_P}}}$, où $\overline{S_P}$ est le complémentaire de S_P dans \mathbb{Z} et $H_{\overline{S_P}}$ l'espace de Hilbert engendré par les éléments $e_n, n \in \overline{S_P}$. Alors f est de la forme :

$$f = \sum_{k \in \overline{S_P}} \alpha_k e_k.$$

Or, d'après le théorème précédent, $\overline{S_P}$ est borné supérieurement. Notons k_0 le maximum des $k \in \overline{S_P}$ tel que $\alpha_k \neq 0$. f est alors un élément de P d'ordre fini k_0 :

$$f = \alpha_{k_0} e_{k_0} + \sum_{k < k_0, k \in \overline{S_P}} \alpha_k e_k.$$

Ainsi $k_0 \in S_P$, d'où une contradiction. □

Définition 1.3.26 Pour tout $s \in S_P$, on définit $y_s = p_{S_P}^{-1}(e_s)$. La base de Schauder $\{y_s, s \in S_P\}$ est appelée base canonique de P .

Remarque 1.3.27 Relativement à la décomposition en somme directe orthogonale : $H = H_{S_P} \oplus H_{\overline{S_P}}^\perp$, tout élément P de Gr_{res} est l'image d'une application de la forme :

$$y = \begin{pmatrix} H_+ \\ Id \\ B \end{pmatrix} \begin{matrix} H_{S_P} \\ H_{\overline{S_P}}^\perp \end{matrix}$$

où la colonne s représente le vecteur y_s .

Théorème 1.3.28 *L'application :*

$$p : \begin{matrix} \mathcal{M}_k^s & \rightarrow & Gr_{res}^0 \\ y & \mapsto & Im y \end{matrix}$$

est une submersion holomorphe $\mathcal{U}_{1,2}$ -équivariante et G^C -invariante.

■ **Preuve du théorème 1.3.28 :**

• L'image de p est bien contenue dans la composante connexe de H_+ de la grassmannienne car la projection orthogonale de $\text{Im } y$ sur H_+ étant de la forme $Id_{H_+} + L^1(H_+)$, elle est Fredholm d'indice 0.

• Exprimons p dans des cartes et montrons qu'elle est holomorphe.

Notons $\mathcal{U}_P \subset Gr_{res}^0$ l'ouvert de carte formé par les $P' \in Gr_{res}$ tels que la projection orthogonale $pr_{P'} : P' \rightarrow P$ soit un isomorphisme et $\varphi_P : \mathcal{U}_P \rightarrow L^2(P, P^\perp)$ l'application de carte qui à un élément $P' \in \mathcal{U}_P$ associe l'unique application de P dans P^\perp dont P' est le graphe. Relativement aux décompositions orthogonales de H selon $H_+ \oplus H_-$ et $P \oplus P^\perp$, l'application identité $Id : H_+ \oplus H_- \rightarrow P \oplus P^\perp$ a une décomposition par blocs :

$$Id = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où $a \in B(H_+, P)$, $b \in B(H_-, P)$, $c \in B(H_+, P^\perp)$ et $d \in B(H_-, P^\perp)$. La condition $P' = \text{Im } y \in \mathcal{U}_P$ se résume alors en : $ay_+ + by_- \in \text{Isom}(H_+, P)$ et l'écriture de la projection p dans la carte $(\mathcal{U}_P, \varphi_P)$ devient :

$$p : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_k^s & \longrightarrow & Gr_{res}^0 \xrightarrow{\varphi_P} L^2(P, P^\perp) \\ y = \begin{pmatrix} y_+ \\ y_- \end{pmatrix} & \longmapsto & \text{Im } y \longmapsto (cy_+ + dy_-)(ay_+ + by_-)^{-1}, \end{array}$$

dont l'holomorphie est claire.

• Montrons que p est surjective. Soit $P \in Gr_{res}^0$. Nous allons montrer que (k fois) la base canonique de P définit un élément de \mathcal{M}_k^s , i.e. fournit une "section" (non continue!) du $G^{\mathbb{C}}$ -fibré \mathcal{M}_k^s au-dessus de Gr_{res}^0 . Puisque P appartient à la composante connexe de Gr_{res}^0 contenant H_+ , la matrice de l'application identité $Id_H : H \rightarrow H$ se décompose par blocs relativement aux sommes directes $H = H_{S_P} \oplus H_{S_P}^\perp$ et $H = H_+ \oplus H_-$ en :

$$\begin{array}{c} H_+ \\ H_- \end{array} \begin{pmatrix} H_{S_P} & H_{S_P}^\perp \\ Id + r_1 & r_2 \\ r_3 & Id + r_4 \end{pmatrix}$$

où $r_i, 1 \leq i \leq 4$ sont des opérateurs de rangs finis. Il en résulte que l'application qui au vecteur $e_j \in H_+$ de la base canonique associe le vecteur $ky_{s_j} \in P$, où les s_j sont ordonnés par ordre croissant et où y_{s_j} est le s_j ème vecteur de la base canonique de P , est de la forme :

$$y(P) = k \begin{pmatrix} Id + r_1 + r_2 \circ B \\ r_3 + B + r_4 \circ B \end{pmatrix}$$

Comme de plus $P \in Gr_{res}^0$, la projection $pr_- : P \rightarrow H_-$ est Hilbert-Schmidt, propriété indépendante des bases dans lesquelles elle est exprimée, et ainsi $y(P) \in \mathcal{M}_k^s$.

• Montrons que p est une submersion. Comme p est clairement $G^{\mathbb{C}}$ -invariante, il suffit de montrer que la différentielle de p est surjective pour les éléments de \mathcal{N}_k . Comme elle est de plus $\mathcal{U}_{1,2}$ -équivariante, il suffit de montrer que dp est surjective en un point $x \in \mathcal{N}_k$. Or, en $x = x_k$, l'application $d\varphi_{H_+} \circ dp_{H_+} :$

$T_{H_+} \mathcal{M}_k^s \longrightarrow L^2(H_+, H_-)$ associée à $\begin{pmatrix} Y_+ \\ Y_- \end{pmatrix}$ l'opérateur Y_- , et est clairement surjective. ■

Théorème 1.3.29 *L'espace quotient $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ s'identifie à la grassmannienne Gr_{res}^0 munie de sa structure kählérienne par le biais de l'application :*

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}} & \longrightarrow & Gr_{res}^0 \\ [y] & \longmapsto & Im y. \end{array}$$

■ **Preuve du théorème 1.3.29 :**

• Montrons l'injectivité de ρ . Soient y_1 et y_2 deux éléments de \mathcal{M}_k^s tels que : $Im y_1 = Im y_2$. On peut toujours trouver un changement de bases $g \in Gl(H_+)$ tel que $y_2 = y_1 \circ g^{-1}$. Notons : $a_1 = pr_+ \circ y_1 - Id_{H_+} \in L^1(H_+)$ et $a_2 = pr_+ \circ y_2 - Id_{H_+} \in L^1(H_+)$. On a : $g = Id_{H_+} + a_1 - a_2 \circ g \in G^{\mathbb{C}}$ car $L^1(H_+)$ est un idéal. Le théorème précédent permet de conclure que ρ est un isomorphisme de variétés complexes.

• D'après le théorème 1.3.28, ρ est surjective. Pour montrer que la différentielle de ρ en un point du quotient $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme, il suffit de considérer $d\rho$ en un point distingué, par exemple $[x_k]$ où $x_k = \begin{pmatrix} k & 0 \end{pmatrix}^T$. En effet, le groupe $\mathcal{U}_{1,2}$ agit transitivement sur la surface de niveau \mathcal{N}_k et son action passe au quotient \mathcal{N}_k/G qui s'identifie à $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$. En $[x_k]$, l'espace tangent à $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ s'identifie à l'ensemble des opérateurs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & Y_- \end{pmatrix}^T$ où Y_- appartient $L^2(H_+, H_-)$, et la différentielle $d\rho$ composée avec l'application carte φ_{H_+} se réduit à l'application qui à $\begin{pmatrix} 0 & Y_- \end{pmatrix}^T \in T_{[x_k]} \mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ associe $Y_- \in L^2(H_+, H_-) = T_{H_+} Gr_{res}$, qui est un isomorphisme. D'après le théorème d'inversion locale, ρ est un difféomorphisme.

• Il nous reste à montrer l'identification en tant que variétés kählériennes de $\mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}}$ et Gr_{res}^0 . Il suffit encore une fois de considérer l'espace tangent en x_k . On a :

$$T_{x_k} \mathcal{M}_k^s/G^{\mathbb{C}} = T_{x_k} \mathcal{M}_k^s / T_{x_k} G^{\mathbb{C}} \cdot x_k = \left\{ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_- \end{pmatrix}, Y_- \in L^2(H_+, H_-) \right\}$$

et :

$$\begin{aligned} g_{x_k}(X, Y) &= \Re \operatorname{Tr} (X_-^* Y_-) \\ I_{x_k} \cdot X &= iX \\ \omega_{x_k}(X, Y) &= \Im \operatorname{Tr} (X_-^* Y_-), \end{aligned}$$

qui est bien la structure kählérienne de la Grassmannienne. ■

Conclusion :

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{M}_k^s & \xrightarrow{q} & \mathcal{N}_k \\
& (\omega, I, g) & & (\omega|_{\mathcal{N}_k}, g|_{\mathcal{N}_k}) \\
& \downarrow & & \downarrow \\
& \mathcal{M}_k^s / G^{\mathbb{C}} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{N}_k / G \\
& \text{holo.} & & \text{holo.} \\
& \leftarrow \rho & & \\
& \sim & & \\
Gr_{res}^0 & & & \\
(\omega_{Gr}, I_{Gr}, g_{Gr}) & & & (\omega_{red}, I_{red}, g_{red})
\end{array}$$

\swarrow p holo.

Remarque 1.3.30 Chaque composante connexe de Gr_{res} est caractérisée par l'indice de l'opérateur de Fredholm de projection orthogonale sur H_+ . En remplaçant H_+ par H_d , où H_d est tel que la projection de H_d sur H_+ soit d'indice $d \in \mathbb{Z}$, il est possible de réaliser chaque composante connexe de Gr_{res} comme quotient kählérien.

1.3.5 La variété stable \mathcal{M}_k^s

Dans la section précédente, l'espace \mathcal{M}_k^s apparaît soit comme l'ensemble des éléments de \mathcal{M}_k définissant une base de Schauder de leur image, soit comme réunion des orbites complexes des éléments de \mathcal{N}_k . Le but de cette section est d'explicitier les trajectoires du champ de vecteurs induit sur \mathcal{M}_k par l'application moment. La projection q définie précédemment par :

$$\begin{aligned}
q : \mathcal{M}_k^s &\rightarrow \mathcal{N}_k \\
y &\mapsto |k|y \circ |y|^{-1},
\end{aligned}$$

apparaîtra alors comme l'application associant à un point son point limite.

Considérons tout d'abord l'application moment $\mu_0 = \mu - k^2 \text{Tr}$, qui a l'avantage d'être à valeurs dans l'image de l'injection de \mathfrak{g} dans son dual et donc peut être considérée comme à valeurs dans \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned}
\mu_0 : \mathcal{M}_k &\rightarrow \mathfrak{g}' && \rightarrow \mathfrak{g} \\
y &\mapsto (\mathbf{a} \mapsto \frac{i}{2} \text{Tr}(y^*y - k^2 \text{Id})\mathbf{a}) && \mapsto \frac{i}{2}(y^*y - k^2 \text{Id}).
\end{aligned}$$

Sur \mathfrak{g} , la forme de Killing donnée par $\kappa(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \text{Tr} \mathbf{a}\mathbf{b}$ est définie négative, ce qui permet de définir un produit scalaire par $-\kappa$, ainsi que la fonction :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\mu_0|^2 : \mathcal{M}_k &\rightarrow \mathbb{R} \\
y &\mapsto -\frac{1}{2}\kappa(\mu(y), \mu(y)).
\end{aligned}$$

Proposition 1.3.31 *Le champ de vecteurs défini sur \mathcal{M}_k par $X := -\text{grad} \frac{1}{2}|\mu_0|^2$ est :*

$$\begin{aligned}
X : \mathcal{M}_k &\rightarrow T\mathcal{M}_k \\
y &\mapsto -\frac{y}{2}(y^*y - k^2 \text{Id}).
\end{aligned}$$

□ **Preuve de la proposition 1.3.31 :**

Soit $V \in T_y\mathcal{M}_k$. On a :

$$\begin{aligned}
d_y(\frac{1}{2}|\mu_0|^2)(V) &= \frac{1}{2}V. \text{Tr} \frac{1}{4}(y^*y - k^2)^2 = \text{Tr} \frac{1}{4}(V.(y^*y - k^2)).(y^*y - k^2) \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} (V^*y + y^*V)(y^*y - k^2) \\
&= \frac{1}{4} \text{Tr} V^*y(y^*y - k^2) + \text{Tr} (y^*y - k^2)y^*V \text{ car } (y^*y - k^2) \in L^1(H_+), \\
&= g(V, \frac{y}{2}(y^*y - k^2)).
\end{aligned}$$

Ainsi $\text{grad}_{\frac{1}{2}}|\mu_0|(y) = \frac{y}{2}(y^*y - k^2)$. \square

Pour expliciter le flot du champ de vecteurs X , considérons tout d'abord le champs de vecteurs induit sur $k^2 \text{Id}_{H_+} + \text{Sym}^1(H_+)$ par l'application suivante :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_k &\rightarrow k^2 \text{Id}_{H_+} + \text{Sym}^1(H_+) \\ y &\mapsto y^*y \end{aligned}$$

Proposition 1.3.32 *Le champ de vecteurs X sur \mathcal{M}_k se projette via l'application f en un champ de vecteurs défini sur l'espace affine $k^2 \text{Id}_{H_+} + \text{Sym}^1(H_+)$ par :*

$$\begin{aligned} \tilde{X} : k^2 \text{Id}_{H_+} + \text{Sym}^1(H_+) &\rightarrow \text{Sym}^1(H_+) \\ p &\mapsto -p(p - k^2 \text{Id}). \end{aligned}$$

\square **Preuve de la proposition 1.3.32 :**

La différentielle de l'application f en un point $y \in \mathcal{M}_k$ est :

$$\begin{aligned} d_y f : T_y \mathcal{M}_k &\rightarrow \text{Sym}^1(H_+) \\ V &\mapsto y^*V + V^*y. \end{aligned}$$

Ainsi l'image du vecteur $X(y)$ par la différentielle de f est : $d_y f(X(y)) = -y^*y(y^*y - k^2 \text{Id})$. On en conclut que si y_1 et y_2 sont deux éléments de \mathcal{M}_k ayant même image par f , $d_{y_1} f(X(y_1)) = d_{y_2} f(X(y_2))$, ce qui permet de définir le champ de vecteurs projeté \tilde{X} . \square

Proposition 1.3.33 *Soit $p_0 \in k^2 \text{Id}_{H_+} + \text{Sym}^1(H_+)$, E_0 son noyau, E_{k^2} l'espace propre associé à la valeur propre k^2 , E l'orthogonal dans H_+ de $E_0 \oplus E_{k^2}$ et p_0^E la restriction de p_0 à E . Le flot $p(t)$ du champs de vecteur \tilde{X} vérifiant $p(0) = p_0$ est donné par :*

$$\begin{aligned} p(t)|_{E_0 \oplus E_{k^2}} &= p(0)|_{E_0 \oplus E_{k^2}} \\ p(t)|_E &= k^2 (\text{Id} - e^{-k^2 t} (\text{Id} - k^2 (p_0^E)^{-1}))^{-1}. \end{aligned}$$

\square **Preuve de la proposition 1.3.33 :**

Sur $E_0 \oplus E_{k^2}$, $\tilde{X}(p_0)$ est nul, ce qui implique la première partie de la proposition. Montrons tout d'abord que l'expression de $p(t)|_E$ ci-dessus a un sens. Sur E , notons $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ le spectre de $p_0^E - k^2 \text{Id}_{H_+} \in L^1(H_+)$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n > 0,$$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \leq \lambda_N$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0.$$

Ainsi le spectre de p_0^E est minoré par k^2 et p_0^E est inversible dans $B(E)$ avec :

$$\text{Spec}((p_0^E)^{-1}) = \left\{ \frac{1}{k^2 + \lambda_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

On en déduit que :

$$\text{Spec}(\text{Id} - k^2 (p_0^E)^{-1}) = \left\{ \frac{\lambda_n}{k^2 + \lambda_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}},$$

et :

$$\text{Spec}(\text{Id} - e^{-2k^2t}(\text{Id} - k^2(p_0^E)^{-1})) = \left\{ \frac{k^2 + \lambda_n(1 - e^{-k^2t})}{k^2 + \lambda_n} \right\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Ce dernier spectre est minoré par $\frac{k^2}{k^2 + \lambda_N} > 0$, d'où l'inversibilité de l'application associée. D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{dp(t)|_E}{dt} &= -k^2 \left(\text{Id} - e^{-k^2t}(\text{Id} - k^2(p_0^E)^{-1}) \right)^{-2} \left(k^2 e^{-k^2t}(\text{Id} - k^2(p_0^E)^{-1}) \right) \\ &= -(p(t)|_E)^2 \left(e^{-k^2t}(\text{Id} - k^2(p_0^E)^{-1}) \right) \end{aligned}$$

et :

$$e^{-k^2t}(\text{Id} - k^2(p_0^E)^{-1}) = (p(t)|_E)^{-1} (p(t)|_E - k^2 \text{Id}).$$

□

La proposition précédente permet de déduire le :

Théorème 1.3.34 *La solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(t) &= X(y(t)) \end{aligned}$$

a pour expression :

$$\begin{aligned} y(t)|_{E_0 \oplus E_{k^2}} &= y(0)|_{E_0 \oplus E_{k^2}} \\ y(t)|_E &= y_0 \left(\text{Id} - e^{-k^2t} \left(\text{Id} - k^2 \left((y_0^* y_0)|_E \right)^{-1} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} |k| |y_0|^{-1}, \end{aligned}$$

où E_0 désigne le noyau de l'application $y_0^* y_0$, E_{k^2} l'espace propre relatif à la valeur propre k^2 et E l'orthogonal dans H_+ de la somme directe de ces deux sous-espaces. En particulier, pour $y \in \mathcal{M}^s$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = |k| y_0 \circ |y_0|^{-1} = q(y_0).$$

Tout d'abord montrons le lemme suivant :

Lemme 1.3.35 *La solution du problème de Cauchy :*

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(t) &= X(y(t)) \end{aligned}$$

a pour expression :

$$y(t) = y_0 \exp -\frac{1}{2} \int_0^t (y(s)^* y(s) - k^2 \text{Id}) ds,$$

où \exp désigne l'application exponentielle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans $G^{\mathbb{C}}$.

△ **Preuve du lemme 1.3.35 :**

Rappelons que l'application exponentielle de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans $G^{\mathbb{C}}$ est définie comme l'application qui à un vecteur $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ associe l'élément $\exp(\mathfrak{a}) = \gamma_{\mathfrak{a}}(1) \in G^{\mathbb{C}}$ où $\gamma_{\mathfrak{a}}(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathfrak{a}}(0) &= e = \text{Id}_{H_+} \\ \dot{\gamma}_{\mathfrak{a}}(t) &= \mathfrak{a}(\gamma_{\mathfrak{a}}(t)). \end{aligned}$$

Pour les sous-groupes de Lie de $GL(H_+)$ elle coïncide avec l'application donnée par la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbf{a}^n}{n!}$, celle-ci étant normalement convergente dans $B(H_+)$. Si $L_{\exp(\mathbf{a})}$ désigne la translation à gauche par $\exp(\mathbf{a})$, on a :

$$d_{\mathbf{a}} \exp(\mathbf{b}) = d_e L_{\exp(\mathbf{a})} \left(\left(\frac{1 - e^{-\text{ad}(\mathbf{a})}}{\text{ad}(\mathbf{a})} \right) (\mathbf{b}) \right).$$

En particulier si \mathbf{a} et \mathbf{b} commutent, on a :

$$d_{\mathbf{a}} \exp(\mathbf{b}) = d_e L_{\exp(\mathbf{a})}(\mathbf{b}).$$

Dérivons maintenant l'expression $y(t) = y_0 \exp -\frac{1}{2} \int_0^t (y(s)^* y(s) - k^2 \text{Id}) ds$. Le point $p(s) = y(s)^* y(s)$ suit le flot du champ de vecteurs \tilde{X} , en particulier c'est une expression analytique en $y_0^* y_0$ et s . Il en résulte que $\int_0^t (y(s)^* y(s) - k^2 \text{Id}) ds$ et $y(t)^* y(t)$ commutent. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= y_0 d_e L_{\exp -\frac{1}{2} \int_0^t (y(s)^* y(s) - k^2 \text{Id}) ds} \left(-\frac{1}{2} (y(t)^* y(t) - k^2 \text{Id}) \right) \\ &= -\frac{1}{2} y_0 \exp -\frac{1}{2} \left(\int_0^t (y(s)^* y(s) - k^2 \text{Id}) ds \right) (y(t)^* y(t) - k^2 \text{Id}) \\ &= -\frac{1}{2} y(t) (y(t)^* y(t) - k^2 \text{Id}). \end{aligned}$$

△

■ **Preuve du théorème 1.3.34 :**

D'après la proposition 1.3.33, on a :

$$y(s)^* y(s)|_E = k^2 \left(\text{Id} - e^{-k^2 s} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \right)^{-1}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} &\int_0^t (y(s)^* y(s)|_E - k^2 \text{Id}) ds \\ &= \int_0^t k^2 e^{-k^2 s} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \left(\text{Id} - e^{-k^2 s} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \right)^{-1} ds \\ &= \left[\ln \left(\text{Id} - e^{-k^2 s} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \right) \right]_0^t \\ &= \ln \left(\text{Id} - e^{-k^2 t} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \right) \left(k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} y(t)|_E &= y(0)|_E \exp -\frac{1}{2} \ln \left(\text{Id} - e^{-k^2 t} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \right) \left(k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right)^{-1} \\ &= y(0)|_E \left(\text{Id} - e^{-k^2 t} \left(\text{Id} - k^2 ((y_0^* y_0)|_E)^{-1} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} |k| |y|^{-1}. \end{aligned}$$

■

1.3.6 Potentiel kählérien de la grassmannienne restreinte

Dans ce paragraphe, nous explicitons le potentiel kählérien obtenu en appliquant le procédé décrit dans la section 1.2.3. La variété kählérienne de départ \mathcal{M}_k possède un potentiel globalement défini, i.e une fonction K définie sur \mathcal{M}_k telle que $\omega = dd^c K$, à savoir :

$$\begin{aligned} K : \mathcal{M}_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{4} \operatorname{Tr} (x^*x - k^2 Id). \end{aligned}$$

Le fibré holomorphe trivial $L = \mathcal{M}_k \times \mathbb{C}$ muni du produit scalaire hermitien :

$$\begin{aligned} h_x : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\mapsto \bar{z}_1 z_2 e^{-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (x^*x - k^2 Id)}, \end{aligned}$$

et de la connexion de Chern ∇ associée, vérifie $R^\nabla = i\omega$. Pour expliciter la connexion de Chern, rappelons que :

$$\nabla_X \sigma = \partial_X \log h(\sigma, \sigma) \sigma.$$

Ainsi si σ s'écrit : $\sigma = (x, z_x)$,

$$\begin{aligned} \nabla_X \sigma &= \partial_X \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (x^*x - k^2 Id) + \log |z_x|^2 \right) \sigma \\ &= \left(\frac{1}{2} (d_X - id_{IX}) \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} (x^*x - k^2 Id) + \log |z_x|^2 \right) \right) \sigma \\ &= \left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} x^* X + \partial_X \log z_x^* z_x \right) \sigma \end{aligned}$$

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} agit sur $\Gamma(L)$ par :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \Gamma(L), \forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}, \\ \mathfrak{a} \cdot \sigma = -\nabla_{X^\mathfrak{a}} \sigma - i\mu^\mathfrak{a} \sigma - \frac{k^2}{2} \operatorname{Tr} \mathfrak{a} \cdot \sigma. \end{aligned}$$

Cette action correspond à l'action de l'algèbre de Lie sur l'espace total du fibré donnée par l'application qui à un élément $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ associe le champ de vecteurs $\hat{X}^\mathfrak{a}$ sur L dont la valeur en un point $\xi \in L$ au dessus de $x \in \mathcal{M}_k$ est :

$$\hat{X}^\mathfrak{a}(\xi) = \tilde{X}^\mathfrak{a}(\xi) + i\mu^\mathfrak{a}(x) \cdot T(\xi) + \frac{k^2}{2} \operatorname{Tr} \mathfrak{a} \cdot T(\xi),$$

où $\tilde{X}^\mathfrak{a}(\xi)$ est le relèvement horizontal en ξ de $X^\mathfrak{a}$ pour la connexion triviale et T est le champ de vecteur vertical donné par $T(\xi) = \xi$.

Cette action s'intègre en une action du groupe G lorsque l'application $\mathfrak{a} \mapsto \frac{k^2}{2} \operatorname{Tr} \mathfrak{a}$ est la dérivée d'un caractère de G . Ceci n'est le cas que pour les valeurs entières de $\frac{k^2}{2}$ et le caractère correspondant est :

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{k^2}{2}} : G &\rightarrow S^1 \\ g &\mapsto (\det(g))^{\frac{k^2}{2}}, \end{aligned}$$

qui s'étend en un homomorphisme de groupe de $G^\mathbb{C}$ dans \mathbb{C}^* , noté également $\chi_{\frac{k^2}{2}}$. L'action correspondante de G et $G^\mathbb{C}$ sur L est donnée par :

$$g \cdot (x, z) = (x \circ g^{-1}, (\det(g))^{-\frac{k^2}{2}} \cdot z),$$

ce qui permet de définir une action sur $\Gamma(L)$ par :

$$(g.\sigma)(x) := g(\sigma(g^{-1}.x)),$$

où $\sigma \in \Gamma(L)$, et $g \in G$. Ainsi on a la définition suivante :

Définition 1.3.36 Pour $\frac{k^2}{2} \in \mathbb{N}^*$, soit \hat{L}_k le fibré en droite de base Gr_{res}^0 obtenu en restreignant le fibré trivial L à la sous-variété réelle \mathcal{N}_k et en quotientant par l'action de G . La fibre de \hat{L}_k au-dessus d'un élément $P \in Gr_{res}^0$ est :

$$\hat{L}_k(P) = \{(x, z) \in L|_{\mathcal{N}_k} \text{ t.q. } \text{Im } x = P\} / \sim$$

où $(x, z) \sim (x \circ g^{-1}, (\det(g))^{-\frac{k^2}{2}}.z)$.

Le potentiel K étant G -invariant il en est de même du produit scalaire hermitien h , qui passe donc au quotient :

Définition 1.3.37 On définit un produit scalaire hermitien \hat{h} sur \hat{L}_k par :

$$\hat{h}(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

où $\sigma_i, i = 1, 2$ est la section G -invariante de $L|_{\mathcal{N}_k}$ relevant $\hat{\sigma}_i$.

Rappelons que l'on a une submersion holomorphe :

$$\begin{array}{ccc} p : \mathcal{M}_k^s & \longrightarrow & Gr_{res}^0 \\ x & \longmapsto & \text{Im } x, \end{array}$$

et une projection :

$$\begin{array}{ccc} q : \mathcal{M}_k^s & \longrightarrow & \mathcal{N}_k \\ x & \longmapsto & |k|x \circ |x|^{-1} = g_x.x. \end{array}$$

où $g_x := \frac{|x|}{|k|} \in \exp i\mathfrak{g}$.

Remarque 1.3.38 D'après la proposition 1.2.25, la 2-forme $p^*\omega_{red}$ est la courbure de la connexion de Chern du fibré $(L|_{\mathcal{M}_k^s}, \bar{h})$, où \bar{h} est défini, pour tout $x \in \mathcal{M}_k^s$ et tout $\xi \in L_x$, par :

$$\bar{h}(\xi, \xi) = h(g_x.\xi, g_x.\xi).$$

Proposition 1.3.39 Si $\frac{k^2}{2} \in \mathbb{N}^*$, la 2-forme $p^*\omega_{Gr}$ sur le $G^{\mathbb{C}}$ -fibré principal \mathcal{M}_k^s possède un potentiel globalement défini :

$$\hat{K}(x) = \frac{k^2}{4} \log \det \left(\frac{x^*x}{k^2} \right).$$

□ **Preuve de la proposition 1.3.39 :**

On a :

$$\begin{aligned} \hat{K}(x) &= \frac{1}{2} \log |(\det g_x)^{\frac{k^2}{2}}|^2 = \frac{1}{4} \log |(\det g_x^2)|^{k^2} \\ &= \frac{1}{4} \log |(\det \frac{1}{k^2}(x^*x))|^{k^2} = \frac{k^2}{4} \log \det \left(\frac{1}{k^2}x^*x \right). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.40 L'élément $\frac{1}{k}x$ définit une base admissible de l'élément $\text{Im}x$ de Gr_{res}^0 , de sorte que si i_P désigne l'injection de Plücker et π_s , $s \in \mathcal{S}$, les coordonnées de Plücker, on a :

$$\det \left(\frac{x^*x}{k^2} \right) = \sum_{s \in \mathcal{S}} |\pi_s(\text{Im } x)|^2.$$

On retrouve ainsi le fait que le potentiel kählerien de la grassmannienne restreinte défini sur la variété stable \mathcal{M}_k^s est induit par le potentiel kählerien $K_{k^2,1}$ de l'espace projectif $\mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$ défini sur $l^2(\mathcal{S}) - \{0\}$ via l'injection de Plücker :

$$\hat{K}(x) = K_{k^2,1}((\pi_s(x))_{s \in \mathcal{S}}).$$

1.4 Structure hyperkählérienne du cotangent de la grassmannienne restreinte et de la complexification de la Grassmannienne restreinte

1.4.1 Introduction

Le but de ce paragraphe est d'identifier l'espace (co-)tangent de la grassmannienne restreinte d'une part, et l'orbite complexe $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ de la projection orthogonale sur H_+ sous l'action par conjugaison du groupe de Lie complexe $Gl_2(H) := Gl(H) \cap \{Id + L^2(H, H)\}$ d'autre part, avec le quotient hyperkählérien d'un espace de Banach plat non hilbertien, et d'exprimer les potentiels kählériens relatifs aux structures complexes naturelles du cotangent et de l'orbite complexe.

Plus précisément, pour $k \in \mathbb{R}^*$, soient :

$$\mathcal{M}_k = \left\{ x \in B(H_+, H) \quad \left| \quad \begin{array}{l} pr_+ \circ x - k.Id_{H_+} \in L^1(H_+) \\ pr_- \circ x \in L^2(H_+, H_-) \end{array} \right. \right\},$$

où $L^1(H_+)$ désigne l'ensemble des opérateurs à trace de H_+ , $B(H_+, H)$ l'ensemble des opérateurs bornés de H_+ dans H , et $T^b\mathcal{M}_k$ l'image de l'espace tangent $T\mathcal{M}_k$ dans l'espace cotangent continu $T'\mathcal{M}_k$ donnée par la trace. Nous montrons que le quotient hyperkählérien de l'espace plat $T^b\mathcal{M}_k$ par l'action hamiltonienne du groupe G :

$$G = U(H_+) \cap \{ Id_{H_+} + L^1(H_+) \},$$

d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(H_+) \cap L^1(H_+).$$

possède une structure fortement hyperkählérienne (théorème 1.4.12) et peut être identifié soit à l'espace (co-)tangent de Gr_{res}^0 (théorème 1.4.16), soit à l'orbite complexe $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ (théorème 1.4.26). Les potentiels kählériens associés aux structures complexes naturelles de T^*Gr_{res} et $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ sont calculés grâce à la théorie de préquantification de Kostant-Souriau respectivement en 1.4.7 et 1.4.9.

Cette section est organisée comme suit. Dans 1.4.2, nous explicitons la structure faiblement hyperkählérienne de $T^b\mathcal{M}_k$. Dans 1.4.3, nous donnons l'expression des trois applications moments associées aux trois structures complexes et à l'action du groupe G . Dans 1.4.4, nous montrons que la surface de niveau \mathcal{W}_k est une variété riemannienne de dimension infinie. Dans 1.4.5, nous effectuons la réduction hyperkählérienne de $T^b\mathcal{M}_k$ par G . Dans 1.4.6, nous explicitons la surface stable \mathcal{W}_k^{s1} associée à la première structure complexe, ainsi que la projection de la variété stable \mathcal{W}_k^{s1} sur la surface de niveau \mathcal{W}_k . Puis nous identifions le quotient $\mathcal{W}_k^{s1}/G^{\mathbb{C}}$ à l'espace (co-)tangent de la grassmannienne restreinte. Dans 1.4.7, nous calculons le potentiel kählérien associé à la structure complexe naturelle de T^*Gr_{res} et l'exprimons en fonction de la courbure de Gr_{res} . Dans 1.4.8, nous définissons la variété stable \mathcal{W}_k^{s3} associée à la troisième structure complexe et nous identifions le quotient $\mathcal{W}_k^{s3}/G^{\mathbb{C}}$ à $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$. Dans 1.4.9, nous calculons le potentiel kählérien associé à la structure complexe naturelle de $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ et nous l'exprimons en fonction de la courbure de la grassmannienne restreinte, puis en fonction des angles caractéristiques formés par deux sous-espaces de la grassmannienne restreinte d'intersection nulle.

1.4.2 La structure hyperkählérienne de $T\mathcal{M}_k$

\mathcal{M}_k est un espace affine modellé sur l'espace de Banach $L^1(H_+) \times L^2(H_+, H_-)$. Le fibré tangent $T\mathcal{M}_k$ est identifié à :

$$T\mathcal{M}_k = \{(x, X) \mid x \in \mathcal{M}_k, X \in B(H_+, H) \mid \begin{array}{l} pr_+ \circ X \in L^1(H_+), \\ pr_- \circ X \in L^2(H_+, H_-) \end{array}\}$$

En notant $B(H_+)$ l'ensemble des opérateurs bornés de H_+ dans H_+ , l'espace cotangent (continu) $T'\mathcal{M}_k$ est :

$$T'\mathcal{M}_k = \{(x, \xi), x \in \mathcal{M}_k, \xi \in B(H, H_+) \mid \begin{array}{l} \xi|_{H_+} \in B(H_+), \\ \xi|_{H_-} \in L^2(H_-, H_+) \end{array}\},$$

le produit de dualité étant donné par la trace :

$$\begin{array}{ccc} T_x\mathcal{M}_k \times T_x\mathcal{M}_k' & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (X, \xi) & \mapsto & \text{Tr } \xi \circ X. \end{array}$$

L'espace de Banach $L^1(H_+)$ s'injectant dans son dual $B(H_+)$, on a une injection C^∞ notée ι de l'espace tangent $T_x\mathcal{M}_k$ en un point $x \in \mathcal{M}_k$ dans l'espace cotangent $T_x'\mathcal{M}_k$ associant au vecteur tangent X la forme linéaire continue :

$$\eta := \iota(X) : \begin{array}{ccc} T_x\mathcal{M}_k & \rightarrow & \mathbb{C} \\ Z & \mapsto & \text{Tr } X^* Z \end{array}$$

Ainsi $T^b\mathcal{M}_k$ est défini par :

$$T^b\mathcal{M}_k = \iota(T\mathcal{M}_k) = \{(x, \xi), x \in \mathcal{M}_k, \xi \in B(H, H_+) \mid \begin{array}{l} \xi|_{H_+} \in L^1(H_+), \\ \xi|_{H_-} \in L^2(H_-, H_+) \end{array}\}.$$

Comme tout espace cotangent complexe, la variété $T'\mathcal{M}_k$ possède une structure (faiblement) symplectique complexe canonique Ω , appelée 2-forme de Liouville. En un point $(x, \xi) \in T'\mathcal{M}_k$, l'espace tangent à $T'\mathcal{M}_k$ est donné par :

$$T_{(x, \xi)}(T'\mathcal{M}_k) = \{(Z, \eta), \begin{array}{l} Z \in B(H_+, H), \quad pr_+ \circ Z \in L^1(H_+), \\ \quad \quad \quad \quad \quad pr_- \circ Z \in L^2(H_+, H_-) \\ \eta \in B(H, H_+), \quad \eta|_{H_+} \in B(H_+) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \eta|_{H_-} \in L^2(H_-, H_+) \end{array}\}$$

et la forme symplectique de Liouville est explicitée par :

$$\Omega_{(x, \xi)}((Z_1, \eta_1); (Z_2, \eta_2)) = \text{Tr } \eta_1 Z_2 - \text{Tr } \eta_2 Z_1.$$

On en déduit la proposition suivante :

Proposition 1.4.1 *La 2-forme Ω se restreint en une structure faiblement symplectique complexe sur $T^b\mathcal{M}_k$. Autrement dit, le pull-back par ι de la forme symplectique Ω est une structure faiblement symplectique complexe sur la variété complexe $(T\mathcal{M}_k, I_1)$ avec pour tout (Z, T) appartenant à $T_{(x, X)}(T\mathcal{M}_k)$,*

$$I_1(Z, T) = (iZ, -iT).$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.1 :**

I_1 définit bien une structure complexe intégrable sur $T\mathcal{M}_k$, l'injection ι réalisant $(T\mathcal{M}_k, I_1)$ comme sous-variété complexe de $T'\mathcal{M}_k$ muni de sa structure complexe naturelle. Ω étant fermée, il en est de même de $\iota^*\Omega$. De plus, puisque l'application qui, à tout élément $Z_+ \in L^1(H_+)$, associe l'élément de $L^1(H_+)$ défini par $A \mapsto \text{Tr } Z_+^* A$, est injective, pour tout $(x, X) \in T\mathcal{M}_k$, l'application :

$$\begin{aligned} \rho : T_{(x,X)}(T\mathcal{M}_k) &\longrightarrow T'_{(x,X)}(T\mathcal{M}_k) \\ (Z_1, T_1) &\longmapsto i_{(Z_1, T_1)}\Omega : (Z_2, T_2) \mapsto \text{Tr } T_1^* Z_2 - \text{Tr } T_2^* Z_1 \end{aligned}$$

est également injective (mais non surjective). □

Par abus de notation, on notera $\iota^*\Omega$ encore Ω . On a alors :

$$\Omega((Z_1, T_1) ; (Z_2, T_2)) = \text{Tr } (T_1^* Z_2) - \text{Tr } (T_2^* Z_1),$$

pour tous (Z_1, T_1) et (Z_2, T_2) de $T_{(x,X)}T\mathcal{M}_k$. En séparant parties réelle et imaginaire de Ω , on obtient deux structures symplectiques réelles $\omega_2 := \Re\Omega$ et $\omega_3 := \Im\Omega$.

Proposition 1.4.2 *La variété $T\mathcal{M}_k$ est munie d'une métrique faiblement riemannienne g donnée par :*

$$g_{(x,X)}((Z_1, T_1) ; (Z_2, T_2)) = \Re \text{Tr } Z_2^* Z_1 + \Re \text{Tr } T_2^* T_1$$

qui, combinée à la structure complexe I_1 , définit une forme faiblement symplectique réelle ω_1 invariante par l'action des translations :

$$\begin{aligned} \omega_1((Z_1, T_1) ; (Z_2, T_2)) &= g_{(x,X)}((I_1(Z_1, T_1) ; (Z_2, T_2)) \\ &= -\Im \text{Tr } Z_1^* Z_2 + \Im \text{Tr } T_1^* T_2 \end{aligned}$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.2 :**

Ceci découle de la densité de $L^1(H_+)$ dans $L^2(H_+)$. □

Remarque 1.4.3 *Les structures complexes I_2 et I_3 associées à ω_2 et ω_3 , c'est-à-dire vérifiant $w_i(\cdot, \cdot) = g(I_i \cdot, \cdot)$ sont données, pour tout $(Z, T) \in T_{(x,X)}(T\mathcal{M}_k)$, par :*

$$I_2(Z, T) = (T, -Z)$$

et

$$I_3(Z, T) = (iT, iZ).$$

Remarque 1.4.4 $T\mathcal{M}_k$ munie de $(g, I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ est une variété (faiblement) hyperkählérienne plate.

Notations 1.4.5 *On notera également $(g, I_1, I_2, I_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$ la structure kählérienne induite sur $T^b\mathcal{M}_k$ par ι .*

1.4.3 Les trois applications moments

Soit le groupe de Lie banachique

$$G = U(H_+) \cap \{ Id_{H_+} + L^1(H_+) \},$$

d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g} = \{ \mathfrak{a} \in B(H_+) \text{ t.q. } \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^* = 0 \} \cap L^1(H_+).$$

G agit sur $T'\mathcal{M}_k$ par :

$$g \cdot ((x, \eta)) = (x \circ g^{-1}, g \cdot \eta : Y \mapsto \eta(Y \circ g)),$$

où $g \in G$ et $(x, \eta) \in T'\mathcal{M}_k$. Cette action se prolonge en une action holomorphe du groupe de Lie complexe :

$$G^{\mathbb{C}} = Gl(H_+) \cap \{ Id_{H_+} + L^1(H_+) \}$$

d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = L^1(H_+),$$

qui est hamiltonienne pour Ω et dont l'application moment est donnée par la 1-forme de Liouville :

Proposition 1.4.6 *L'action de $G^{\mathbb{C}}$ sur $T'\mathcal{M}_k$ est hamiltonienne relativement à la structure symplectique holomorphe Ω , d'application moment :*

$$\begin{aligned} \mu^{\mathbb{C}} : T'\mathcal{M}_k &\longrightarrow (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})' \\ (x, \eta) &\longmapsto (\mathfrak{b} \mapsto \eta(x\mathfrak{b})). \end{aligned}$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.6 :**

L'application : $(d\mu^{\mathbb{C}})_{(x, \eta)} : T_{(x, \eta)}(T'\mathcal{M}_k) \rightarrow (\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ associe au vecteur (Z, ξ) l'application \mathbb{C} -linéaire continue :

$$\begin{aligned} (d\mu^{\mathbb{C}})_{(x, \eta)}((Z, \xi)) : \mathfrak{c} &\mapsto \xi(x \circ \mathfrak{c}) + \eta(Z\mathfrak{c}) \\ &= -\xi(x^{\mathfrak{c}}) + \eta^{\mathfrak{c}}(Z) \\ &= +i_{(x^{\mathfrak{c}}, \eta^{\mathfrak{c}})}\Omega((Z, \xi)), \end{aligned}$$

où $(x^{\mathfrak{c}}, \eta^{\mathfrak{c}})$ est le champ de vecteurs engendré par l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie. □

Proposition 1.4.7 *L'action de $G^{\mathbb{C}}$ sur $T'\mathcal{M}_k$ se restreint en une action hamiltonienne de $G^{\mathbb{C}}$ sur $T^b\mathcal{M}_k$. Via l'application ι , $G^{\mathbb{C}}$ agit sur $T\mathcal{M}_k$ par :*

$$g \cdot ((x, X)) = (x \circ g^{-1}, X \circ g^*).$$

où $g \in G^{\mathbb{C}}$ et $(x, X) \in T^b\mathcal{M}_k$. En identifiant $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})'$ à $B(H_+)$ via la trace, l'application moment $\mu^{\mathbb{C}}$ sur $T\mathcal{M}_k$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \mu^{\mathbb{C}} : T\mathcal{M}_k &\longrightarrow L^1(H_+) \\ (x, X) &\longmapsto X^*x. \end{aligned}$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.7 :**

Il suffit de montrer que $G^{\mathbb{C}}$ préserve $T^{\flat}\mathcal{M}_k$, ce qui provient du fait que $L^1(H_+)$ est un idéal. □

Proposition 1.4.8 *L'action de G sur $T\mathcal{M}_k$ est hamiltonienne relativement à la structure symplectique ω_1 , d'application moment réelle :*

$$\begin{aligned} \mu_1 : T\mathcal{M}_k &\longrightarrow \mathfrak{g}' \\ (x, X) &\longmapsto (\mathfrak{a} \mapsto \frac{i}{2} (\operatorname{Tr} x^* x \mathfrak{a} - \operatorname{Tr} X^* X \mathfrak{a})) \end{aligned}$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.8 :**

Pour tout $(x, X) \in T\mathcal{M}_k$, et pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} (d\mu_1)_{(x, X)}^{\mathfrak{a}}((Z, T)) &= \frac{i}{2} \operatorname{Tr} Z^* x \mathfrak{a} + \frac{i}{2} \operatorname{Tr} x^* Z \mathfrak{a} - \frac{i}{2} \operatorname{Tr} T^* X \mathfrak{a} - \frac{i}{2} \operatorname{Tr} X^* T \mathfrak{a} \\ &= -\frac{i}{2} (\operatorname{Tr} Z^* (-x \mathfrak{a}) - \operatorname{Tr} (-x \mathfrak{a})^* Z - \operatorname{Tr} T^* X \mathfrak{a}^* \\ &\quad + \operatorname{Tr} (X \mathfrak{a}^*)^* T) \\ &= \Im \operatorname{Tr} Z^* (-x \mathfrak{a}) - \Im \operatorname{Tr} T^* X \mathfrak{a}^* \\ &= i_{(-x \circ \mathfrak{a}, X \circ \mathfrak{a}^*)} \omega_1((Z, T)) \end{aligned}$$

□

Notations 1.4.9 *On notera :*

$$\begin{aligned} \mu_1 : T\mathcal{M}_k &\rightarrow \mathfrak{g}' \\ (x, X) &\mapsto (\mathfrak{a} \mapsto \frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x^* x - X^* X) \mathfrak{a}) \\ \mu_2 = \Re(\mu^{\mathbb{C}}) : T\mathcal{M}_k &\rightarrow \mathfrak{g}' \\ (x, X) &\mapsto (\mathfrak{a} \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{Tr} (X^* x - x^* X) \mathfrak{a}) \\ \mu_3 = \Im(\mu^{\mathbb{C}}) : T\mathcal{M}_k &\rightarrow \mathfrak{g}' \\ (x, X) &\mapsto (\mathfrak{a} \mapsto -\frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x^* X + X^* x) \mathfrak{a}) \end{aligned}$$

les applications moment associées aux structures complexes I_1, I_2 et I_3 ,

$$\begin{aligned} \mu : T\mathcal{M}_k &\rightarrow \mathfrak{g}' \otimes \mathbb{R}^3 \\ (x, X) &\mapsto (\mu_1(x, X), \mu_2(x, X), \mu_3(x, X)) \end{aligned}$$

l'application moment relative à la structure tri-symplectique $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, et \mathcal{W}_k la surface de niveau $\mu^{-1}(\frac{i}{2}k^2 \operatorname{Tr}, 0, 0)$.

1.4.4 La surface de niveau \mathcal{W}_k

Proposition 1.4.10 *La surface de niveau $\mathcal{W}_k = \mu^{-1}(\frac{i}{2}k^2 \operatorname{Tr}, 0, 0)$ est :*

$$\mathcal{W}_k = \{(x, X) \in T\mathcal{M}_k \text{ t.q. } X^* x = 0 \text{ et } x^* x - X^* X = k^2 \operatorname{Id}\}.$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.10 :**

La trace étant une application \mathbb{C} -linéaire, la condition :

$$\frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x^* x - X^* X) \mathfrak{a} = \frac{i}{2} k^2 \operatorname{Tr} \mathfrak{a}$$

pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ implique :

$$\frac{i}{2} \operatorname{Tr} (x^* x - X^* X) \mathfrak{c} = \frac{i}{2} k^2 \operatorname{Tr} \mathfrak{c}$$

pour tout $\mathfrak{c} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = L^1(H_+)$, et donc :

$$\mu_1^{-1}\left(\frac{i}{2}k^2 \text{Tr}\right) := \{(x, X) \in T\mathcal{M}_k \text{ t.q. } x^*x - X^*X = k^2 \text{Id}\}.$$

Ainsi :

$$\mathcal{W}_k = \{(x, X) \in T\mathcal{M}_k \text{ t.q. } X^*x = 0 \text{ et } x^*x - X^*X = k^2 \text{Id}\}.$$

□

Théorème 1.4.11 \mathcal{W}_k est une sous-variété riemannienne de $T\mathcal{M}_k$.

■ **Preuve du théorème 1.4.11 :**

• \mathcal{W}_k est l'image réciproque de $(0, k^2 \text{Id})$ par l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : T\mathcal{M}_k &\longrightarrow L^1(H_+) \times \text{Sym}^1(H_+) \\ (x, X) &\longmapsto (X^*x, x^*x - X^*X), \end{aligned}$$

(où $\text{Sym}^1(H_+)$ désigne les opérateurs hermitiens à trace de H_+), dont la différentielle est donnée par :

$$\begin{aligned} d_{(x,X)}\mathcal{F} : T_{(x,X)}T\mathcal{M}_k &\longrightarrow L^1(H_+) \times \text{Sym}^1(H_+) \\ (Z, T) &\longmapsto (X^*Z + T^*x, x^*Z + Z^*x - X^*T - T^*X). \end{aligned}$$

Montrons qu'en tout point (x, X) de $\mathcal{F}^{-1}((0, k^2 \text{Id}))$, la différentielle $d_{(x,X)}\mathcal{F}$ est surjective. On décompose H_+ en :

$$H_+ = \text{Ker } X \oplus \text{Ker } X^\perp.$$

Puis, rappelant que x est un opérateur de Fredholm donc à image fermée alors que X est un opérateur compact, et que l'égalité $X^*x = 0$ implique que $\text{Im } x \perp \text{Im } X$ donc que $\text{Im } x \perp \overline{\text{Im } X}$ par continuité de la projection orthogonale de H sur $\text{Im } x$, on introduit la décomposition de H en :

$$H = \overline{\text{Im } X} \oplus \text{Im } X^\perp \cap \text{Im } x^\perp \oplus \text{Im } x|_{\text{Ker } X} \oplus \text{Im } x|_{\text{Ker } X^\perp}.$$

Relativement à ces décompositions de H_+ et H en somme directe de sous-espaces vectoriels fermés, x, X, Z et T s'écrivent :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_{31} & 0 \\ 0 & x_{42} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \\ Z_{31} & Z_{32} \\ Z_{41} & Z_{42} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix},$$

où x_{31} et x_{42} sont bijectifs et continus donc des isomorphismes et X_{12} est injectif mais non surjectif. Ainsi relativement à la décomposition de H_+ en $\text{Ker } X \oplus \text{Ker } X^\perp$, $X^*Z + T^*x$ a pour expression :

$$X^*Z + T^*x = \begin{pmatrix} T_{31}^*x_{31} & T_{41}^*x_{42} \\ X_{12}^*Z_{11} + T_{32}^*x_{31} & X_{12}^*Z_{12} + T_{42}^*x_{42} \end{pmatrix},$$

et $x^*Z + Z^*x - X^*T - T^*X$ a pour expression :

$$\begin{pmatrix} x_{31}^*Z_{31} + Z_{31}^*x_{31} & x_{31}^*Z_{32} + Z_{41}^*x_{42} - T_{11}^*X_{12} \\ x_{42}^*Z_{41} + Z_{32}^*x_{31} - X_{12}^*T_{11} & x_{42}^*Z_{42} + Z_{42}^*x_{42} - T_{12}^*X_{12} - X_{12}^*T_{12} \end{pmatrix}.$$

Soit $(U, V) \in L^1(H_+) \times \text{Sym}^1(H_+)$ dont les décompositions relativement à la somme directe $H_+ = \text{Ker } X \oplus \text{Ker } X^\perp$ sont :

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}.$$

Un antécédent de (U, V) est fourni par le couple (Z, T) suivant :

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2}x_{31}^{-1*}V_{11} & \frac{1}{2}x_{31}^{-1*}V_{12} \\ \frac{1}{2}x_{42}^{-1*}V_{21} & \frac{1}{2}x_{42}^{-1*}V_{22} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_{31}^{-1*}U_{11}^* & x_{31}^{-1*}U_{21}^* \\ x_{42}^{-1*}U_{12}^* & x_{42}^{-1*}U_{22}^* \end{pmatrix}.$$

• En un point $(x, X) \in \mathcal{W}_k$, le noyau de la différentielle $d_{(x, X)}\mathcal{F}$ est donné par :

$$T_{(x, X)}\mathcal{W}_k = \{(Z, T) \in T_{(x, X)}T\mathcal{M}_k \mid X^*Z + T^*x = 0, x^*Z + Z^*x = X^*T + T^*X\}.$$

Montrons que $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$ possède un supplémentaire topologique dans $T_{(x, X)}T\mathcal{M}_k$. Considérons l'espace $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ muni de la structure complexe $I_1(Z, T) = (iZ, -iT)$ et de la métrique fortement riemannienne donnée par la partie réelle du produit scalaire hermitien. Notons E l'adhérence de $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$ dans $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ et $E^{\perp_{\mathfrak{s}, 2}}$ son orthogonal. On a :

$$L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H) = E \oplus E^{\perp_{\mathfrak{s}, 2}}.$$

Nous allons montrer que la projection sur E , notée p_E , quand restreinte à $T_{(x, X)}T\mathcal{M}_k$, est à valeurs dans $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$ et est continue pour la topologie de $T_{(x, X)}T\mathcal{M}_k$. Un couple $(Z, T) \in L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ appartient à E ssi Z et T sont de la forme :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \\ x_{31}^{-1*}\mathfrak{a}_1 & Z_{32} \\ x_{42}^{-1*}(X_{12}^*T_{11} - Z_{32}^*x_{31}) & x_{42}^{-1*}(\frac{1}{2}(X_{12}^*T_{12} + T_{12}^*X_{12}) + \mathfrak{a}_2) \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ 0 & -x_{31}^{-1*}Z_{11}^*X_{12} \\ 0 & -x_{42}^{-1*}Z_{12}^*X_{12} \end{pmatrix},$$

où \mathfrak{a}_1 appartient à l'ensemble $\mathcal{A}^2(\text{Ker } X)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt anti-hermitiens de $\text{Ker } X$, et \mathfrak{a}_2 à l'ensemble $\mathcal{A}^2((\text{Ker } X)^\perp)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt anti-hermitiens de $(\text{Ker } X)^\perp$. Un couple $(Z, T) \in L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ appartient à $E^{\perp_{\mathfrak{s}, 2}}$ ssi Z et T sont de la forme :

$$Z = \begin{pmatrix} X_{12}T_{32}^*x_{31}^{-1*} & X_{12}T_{42}^*x_{42}^{-1*} \\ 0 & 0 \\ x_{31}\mathfrak{s}_1 & x_{31}Z_{41}^*x_{42}^{-1*} \\ Z_{41} & x_{42}\mathfrak{s}_2 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} -X_{12}x_{42}^{-1}Z_{41} & -X_{12}\mathfrak{s}_2 \\ 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} \\ T_{41} & T_{42} \end{pmatrix},$$

où \mathfrak{s}_1 appartient à l'ensemble $\text{Sym}^2(\text{Ker } X)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt hermitiens de $\text{Ker } X$, et \mathfrak{s}_2 appartient à l'ensemble $\text{Sym}^2((\text{Ker } X)^\perp)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt hermitiens de $(\text{Ker } X)^\perp$. La projection orthogonale

de $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ sur E est donnée par l'application qui à un couple $(Z, T) \in L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ associe le couple $(p_E(Z), p_E(T))$ où $p_E(Z)$ (resp. $p_E(T)$) a une décomposition par blocs notée $(p_E(Z_{ij}))_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 2}$ (resp. $(p_E(T_{ij}))_{1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 2}$) vérifiant :

$$p_E(Z) = \begin{pmatrix} p_E(Z_{11}) & p_E(Z_{12}) \\ Z_{21} & Z_{22} \\ \frac{1}{2}(Z_{31} - x_{31}^{-1*} Z_{31}^* x_{31}) & p_E(Z_{32}) \\ p_E(Z_{41}) & \frac{1}{2}x_{42}^{-1*}(\frac{1}{2}(X_{12}^* p_E(T_{12}) + p_E(T_{12})^* X_{12}) + \mathfrak{a}_1) \end{pmatrix}$$

$$p_E(T) = \begin{pmatrix} p_E(T_{11}) & p_E(T_{12}) \\ T_{21} & T_{22} \\ 0 & -x_{31}^{-1*}(p_E(Z_{11}))^* X_{12} \\ 0 & -x_{42}^{-1*}(p_E(Z_{12}))^* X_{12} \end{pmatrix}.$$

avec :

$$\begin{aligned} p_E(Z_{41}) &= \frac{1}{2}(Z_{41} + x_{42}^{-1*} Z_{32}^* x_{31} - x_{42}^{-1*} X_{12}^* T_{12}) \\ p_E(Z_{32}) &= Z_{32} - x_{31} p_E(Z_{41})^* x_{42}^{-1*} \\ p_E(T_{11}) &= T_{11} + X_{12} x_{42}^{-1*} p_E(Z_{41}) \\ \mathfrak{a}_1 &= \frac{1}{2}(x_{42}^* Z_{42} - Z_{42}^* x_{42}) + \frac{1}{2}(X_{12}^*(T_{12} - p_E(T_{12})) - (T_{12} - p_E(T_{12}))^* X_{12}). \end{aligned}$$

Montrons que $p_{H_+} \circ p_E(Z)$ et $p_{H_+} \circ p_E(T)$ sont des opérateurs à trace lorsque $p_{H_+}(Z)$ et $p_{H_+}(T)$ le sont. Soit :

$$p_{H_+} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \end{pmatrix}$$

l'expression de la projection orthogonale sur H_+ dans une base adaptée à la décomposition :

$$H = \overline{\text{Im } X} \oplus \text{Im } X^\perp \cap \text{Im } x^\perp \oplus \text{Im } x|_{\text{Ker } X} \oplus \text{Im } x|_{\text{Ker } X^\perp},$$

et :

$$H_+ = \text{Ker } X \oplus (\text{Ker } X)^\perp.$$

Pour $(x, X) \in \mathcal{W}_k$, les opérateurs $p_{11}, p_{12}, p_{14}, p_{21}, p_{22}, p_{23}$ sont à trace, et $p_{13} - x_{31}^{-1}$, ainsi que $p_{24} - x_{42}^{-1}$ également. La condition $p_{H_+}(Z) \in L^1(H_+)$ implique que Z_{31}, Z_{32}, Z_{41} et Z_{42} sont à trace. On en déduit que $p_E(Z_{32})$ et $p_E(Z_{41})$ sont à trace, ainsi que \mathfrak{a}_1 . Par conséquent, $p_{H_+} \circ p_E(Z)$ est à trace. De plus, puisque p_{11}, p_{12}, p_{21} et p_{22} sont à trace, la condition $p_{H_+}(T) \in L^1(H_+)$ implique directement que $p_{H_+} \circ p_E(T)$ est à trace. Ainsi on a la somme directe algébrique :

$$T_{(x,X)} T\mathcal{M}_k = T_{(x,X)} \mathcal{W}_k \oplus E^{\perp_{g,2}} \cap T_{(x,X)} T\mathcal{M}_k.$$

La projection sur $T_{(x,X)} \mathcal{W}_k$ étant la composée de l'injection continue de $T_{(x,X)} T\mathcal{M}_k$ dans $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ et de la projection continue de $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ sur E , elle est continue et la somme est une somme directe topologique. ■

1.4.5 La réduction hyperkählérienne

Théorème 1.4.12 *La réduction hyperkählérienne de $T\mathcal{M}_k$ via l'application moment μ munit \mathcal{W}_k/G d'une structure de variété hyperkählérienne.*

■ **Preuve du théorème 1.4.12 :**

• Le groupe G agit librement sur la surface de niveau \mathcal{W}_k . Notons \mathcal{G} le graphe de la relation d'équivalence définie par \mathcal{G} . Pour tout élément $(x, X) \in \mathcal{W}_k$, x est un opérateur de Fredholm injectif de H_+ dans H , donc réalise un isomorphisme entre H_+ et son image (fermée). On notera x^{-1} l'opérateur réciproque, étendu par 0 sur $\text{Im}x^\perp$, de sorte que x^{-1} désigne un opérateur de H dans H . L'application qui á un couple $((x, X), (y, Y))$ d'éléments du graphe \mathcal{G} associe l'unique élément de G tel que $g.(x, X) = (y, Y)$, est donnée par $g = x^{-1}y$. Elle est continue pour la topologie induite sur \mathcal{G} par celle de $\mathcal{W}_k \times \mathcal{W}_k$ et pour la topologie de G induite par la norme L^1 sur $\text{Id}_{H_+} + L^1(H_+)$. Montrons que le graphe \mathcal{G} est fermé dans $\mathcal{W}_k \times \mathcal{W}_k$. Soit $\{(x_n, X_n), (x_n \circ g_n^{-1}, X_n \circ g_n^{-1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{G} convergeant vers $((x, X), (y, Y)) \in \mathcal{W}_k \times \mathcal{W}_k$. La suite $\{g_n^{-1} = x_n^{-1} \circ (x_n \circ g_n^{-1})\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G convergeant vers $x^{-1}y$ dans $\text{Id}_{H_+} + L^1(H_+)$ (donc dans $B(H_+)$). Puisque l'ensemble des éléments unitaires est fermé dans $B(H_+)$, G est fermé dans $\text{Id}_{H_+} + L^1(H_+)$ et $x^{-1}y \in G$. D'après la proposition 1.2.4, l'espace quotient \mathcal{W}_k/G est séparé. En particulier, les orbites sous G sont fermées. On en déduit que l'espace tangent à l'orbite sous G en un point $(x, X) \in \mathcal{W}_k$ est un sous-espace vectoriel fermé de $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$.

• La structure de variété riemannienne du quotient provient de l'existence d'une tranche G -équivariante, c'est-à-dire d'un sous-fibré $H \subset T\mathcal{W}_k$ en sous-espaces vectoriels fermés tel que :

$$\forall (x, X) \in \mathcal{W}_k,$$

$$H_{(x, X)} \oplus T_{(x, X)}G.(x, X) = T_{(x, X)}\mathcal{W}_k,$$

et :

$$H_{g.(x, X)} = g.H_{(x, X)}.$$

Un bon candidat pour $H_{(x, X)}$ est l'orthogonal dans $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$ pour la métrique G -invariante g de $T_{(x, X)}G.(x, X)$. Montrons que l'on a la décomposition en somme directe topologique :

$$T_{(x, X)}G.(x, X) \oplus (T_{(x, X)}G.(x, X))^\perp = T_{(x, X)}\mathcal{W}_k.$$

Pour montrer ce résultat, on utilise la décomposition orthogonale des adhérences L^2 des espaces considérés pour la métrique fortement riemannienne de $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$, et on montre que la projection orthogonale de l'adhérence E de $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$ sur l'adhérence de $T_{(x, X)}G.(x, X)$, quand restreinte à $T_{(x, X)}\mathcal{W}_k$, est à valeurs dans $T_{(x, X)}G.(x, X)$.

L'orthogonal de l'adhérence de $T_{(x, X)}G.(x, X)$ dans E est donné par l'ensemble des couples $(Z, T) \in L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ de la forme :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \\ 0 & x_{31}^{-1*} T_{11}^* X_{12} \\ 0 & x_{42}^{-1*} T_{12}^* X_{12} \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ 0 & -x_{31}^{-1*} Z_{11}^* X_{12} \\ 0 & -x_{42}^{*-1} Z_{12}^* X_{12} \end{pmatrix}.$$

La projection orthogonale de E sur $\overline{T_{(x,X)}G.(x, X)}$ est l'application qui au couple $(Z, T) \in E$ d'expression :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \\ x_{31}^{-1*} \mathbf{a}_1 & Z_{32} \\ x_{42}^{-1*} (X_{12}^* T_{11} - Z_{32}^* x_{31}) & x_{42}^{-1*} (\frac{1}{2} (X_{12}^* T_{12} + T_{12}^* X_{12}) + \mathbf{a}_2) \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \\ 0 & -x_{31}^{-1*} Z_{11}^* X_{12} \\ 0 & -x_{42}^{-1*} Z_{12}^* X_{12} \end{pmatrix}$$

associe le couple $(p_G(Z), p_G(T))$ donné par :

$$p_G(Z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_{31}^{-1*} \mathbf{a}_1 & -x_{31} (T_{11}^* X_{12} - x_{31}^* Z_{32}) x_{42}^{-1} x_{42}^{-1*} \\ x_{42}^{-1*} (X_{12}^* T_{11} - Z_{32}^* x_{31}) & -x_{42} \mathbf{a} \end{pmatrix}$$

$$p_G(T) = \begin{pmatrix} X_{12} x_{42}^{-1} x_{42}^{-1*} (X_{12}^* T_{11} - Z_{32}^* x_{31}) & -X_{12} \mathbf{a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où \mathbf{a} vérifie :

$$\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2} (X_{12}^* T_{12} - T_{12}^* X_{12}) = k^2 \mathbf{a} - (x_{42}^* x_{42} \mathbf{a} + \mathbf{a} x_{42}^* x_{42}).$$

L'existence et l'unicité d'une solution à cette dernière équation provient du fait que, pour $(x, X) \in \mathcal{W}_k$, l'opérateur :

$$\mathcal{E}_{x_{42}} : \begin{array}{ccc} L^2((\text{Ker } X)^\perp) & \longrightarrow & L^2((\text{Ker } X)^\perp) \\ \mathbf{a} & \longmapsto & k^2 \mathbf{a} - (x_{42}^* x_{42} \mathbf{a} + \mathbf{a} x_{42}^* x_{42}) \end{array}$$

est bijectif et continu, donc un isomorphisme. En effet, pour l'injectivité, rappelons que $x_{42}^* x_{42}$ est un opérateur hermitien défini positif sur $(\text{Ker } X)^\perp$ (que l'on munit d'une base $\{f_i, i \in I\}$), et soit $g \in U((\text{Ker } X)^\perp)$ tel que $x_{42}^* x_{42} = g D g^*$, où D est diagonale : $g(D f_i, f_j) = D_i \delta_{ij}$. La condition d'appartenance à \mathcal{W}_k implique que :

$$x_{42}^* x_{42} = k^2 \text{Id} + X_{12}^* X_{12},$$

et donc que $D_i > k^2$. Ainsi l'équation :

$$k^2 \mathbf{a} = x_{42}^* x_{42} \mathbf{a} + \mathbf{a} x_{42}^* x_{42}$$

est équivalente à :

$$k^2 g^* \mathbf{a} g = g^* \mathbf{a} g D + D g^* \mathbf{a} g,$$

et implique en particulier :

$$k^2 g(g^* \mathbf{a} g \cdot f_j, f_i) = (D_j + D_i) g(g^* \mathbf{a} g \cdot f_j, f_i),$$

c'est-à-dire : $g(g^* \mathbf{a} g \cdot f_j, f_i) = 0$ car $(D_j + D_i) - k^2 > k^2$. Ainsi $\text{Ker } \mathcal{E}_{x_{42}} = 0$. Pour la surjectivité, étant donné $u \in L^2((\text{Ker } X)^\perp)$, on définit un opérateur $\tilde{\mathbf{a}} \in L^2((\text{Ker } X)^\perp)$ par :

$$g(\tilde{\mathbf{a}} f_j, f_i) = 1/(k^2 - (D_i + D_j))g(g^* u g \cdot f_j, f_i),$$

et $g\tilde{\mathbf{a}}g^*$ est un antécédent de u pour $\mathcal{E}_{x_{42}}$. Notons de plus que, si $u \in L^1((\text{Ker } X)^\perp)$, $g\tilde{\mathbf{a}}g^* \in L^1((\text{Ker } X)^\perp)$. La continuité de $\mathcal{E}_{x_{42}}$ étant claire, on en déduit que $\mathcal{E}_{x_{42}}$ réalise un isomorphisme de $L^2((\text{Ker } X)^\perp)$ et se restreint en un isomorphisme de $L^1((\text{Ker } X)^\perp)$.

Il reste à vérifier que la projection p_G envoie un élément de $T_{(x,X)}\mathcal{W}_k$ dans $T_{(x,X)}G.(x, X)$. Soit :

$$p_{H_+} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \end{pmatrix}$$

l'expression de la projection orthogonale sur H_+ dans une base adaptée à la décomposition :

$$H = \overline{\text{Im } X} \oplus \text{Im } X^\perp \cap \text{Im } x^\perp \oplus \text{Im } x|_{\text{Ker } X} \oplus \text{Im } x|_{\text{Ker } X^\perp},$$

et :

$$H_+ = \text{Ker } X \oplus (\text{Ker } X)^\perp.$$

Pour $(x, X) \in \mathcal{W}_k$, les opérateurs $p_{11}, p_{12}, p_{14}, p_{21}, p_{22}, p_{23}$ sont à trace et $p_{13} - x_{31}^{-1}$ ainsi que $p_{24} - x_{42}^{-1}$ également. La condition $p_{H_+}(Z) \in L^1(H_+)$ implique en particulier que \mathbf{a}_1, Z_{32} et \mathbf{a}_2 sont à trace. On en déduit que \mathbf{a} est à trace, ainsi que $p_{H_+} \circ p_G(Z)$ et $p_{H_+} \circ p_G(T)$. Ainsi on a bien :

$$T_{(x,X)}G.(x, X) \oplus (T_{(x,X)}G.(x, X))^{\perp_{\mathfrak{g}}} = T_{(x,X)}\mathcal{W}_k.$$

On notera $H_{(x,X)}$ l'orthogonal de $T_{(x,X)}G.(x, X)$ dans $T_{(x,X)}\mathcal{W}_k$ et, par abus de notation, g la structure riemannienne induite sur le quotient.

• On en déduit que pour chaque structure symplectique $\omega_i, i = 1, 2, 3$, on a :

$$(T_{(x,X)}\mathcal{W}_k)^{\perp_{\omega_1}} \cap T_{(x,X)}\mathcal{W}_k = T_{(x,X)}G.(x, X).$$

La G -invariance des structures permet de définir trois formes symplectiques sur le quotient que, par abus de notations, on notera également ω_i .

• D'après la démonstration du théorème 1.4.11, on a :

$$\overline{T_{(x,X)}\mathcal{W}_k} \oplus (\overline{T_{(x,X)}\mathcal{W}_k})^{\perp_{\mathfrak{g}_2}} = L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H),$$

comme somme directe orthogonale pour la métrique fortement riemannienne g_2 donnée par la partie réelle du produit scalaire hermitien de $L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$, et d'après ce qui précède, la projection orthogonale pour g_2 de $T_{(x,X)}\mathcal{W}_k$ sur $\overline{T_{(x,X)}G.(x, X)}$ est à valeurs dans $T_{(x,X)}G.(x, X)$. On en déduit que la projection d'un élément de $T_{(x,X)}\mathcal{M}_k$ sur $\overline{T_{(x,X)}G.(x, X)}$ est à valeurs dans $T_{(x,X)}G.(x, X)$. De cela il découle que, pour $j = 1, 2, 3$, la projection d'un élément de $T_{(x,X)}\mathcal{M}_k$ sur $I_j \overline{T_{(x,X)}G.(x, X)}$ est à valeurs dans $I_j T_{(x,X)}G.(x, X)$. Ainsi, on a :

$$T_{(x,X)}\mathcal{M}_k = T_{(x,X)}G.(x, X) \oplus H_{(x,X)} \oplus I_1 T_{(x,X)}G.(x, X) \\ \oplus I_2 T_{(x,X)}G.(x, X) \oplus I_3 T_{(x,X)}G.(x, X),$$

de sorte que $H_{(x,X)}$ est stable par I_1, I_2 et I_3 . Le sous-fibré constitué des espaces horizontaux étant G -équivariant, chacune des structures complexes intégrables $I_j, j = 1, 2, 3$ définit une structure complexe intégrable sur le quotient. ■

1.4.6 L'identification de la variété complexe $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ avec l'espace cotangent de Gr_{res}^0

Dans ce paragraphe, nous montrons que l'espace quotient obtenu s'identifie avec l'espace cotangent de la grassmannienne restreinte. Pour cela, nous utilisons l'isomorphisme de l'espace quotient sur le quotient de la variété stable $\mathcal{W}_k^{s_1}$ associée à la structure complexe I_1 par le groupe banachique $G^{\mathbb{C}}$.

Le groupe banachique complexe $G^{\mathbb{C}}$ agit I_1 -holomorphiquement sur $T\mathcal{M}_k$ par :

$$g \cdot ((x, X)) = (x \circ g^{-1}, X \circ g^*),$$

où $g \in G^{\mathbb{C}}$, et $(x, X) \in T\mathcal{M}_k$.

Proposition 1.4.13 *L'ensemble $\mathcal{W}_k^{s_1}$ des orbites sous $G^{\mathbb{C}}$ des éléments de \mathcal{W}_k est l'ensemble :*

$$\{(x, X) \in T\mathcal{M}_k \text{ t.q. } X^*x = 0 \text{ et } x \text{ injectif}\},$$

et pour tout (x, X) de $\mathcal{W}_k^{s_1}$ l'unique élément $g_{(x,X)}$ de $\exp \mathfrak{ig}$ tel que $g_{(x,X)} \cdot (x, X) \in \mathcal{W}_k$ est donné par :

$$g_{(x,X)}^{-1} := \left(\frac{k^2}{2}(x^*x)^{-1} + \frac{k^2}{2}(x^*x)^{-\frac{1}{2}} \left(Id_{H_+} + \frac{4}{k^4}(x^*x)^{\frac{1}{2}} X^* X (x^*x)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} (x^*x)^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.13 :**

La démonstration est identique à celle du lemme 1.2.33 du paragraphe 1.2.6, avec $X = \zeta^*$. Notons que l'élément $g_{(x,X)}^{-1}$ obtenu appartient bien à $Id + L^1(H_+)$. □

Notations 1.4.14 *On notera q_1 la projection :*

$$\begin{aligned} q_1 : \mathcal{W}_k^{s_1} &\rightarrow \mathcal{W}_k \\ (x, X) &\mapsto (x \circ g_{(x,X)}^{-1}, X \circ g_{(x,X)}). \end{aligned}$$

Proposition 1.4.15 *$\mathcal{W}_k^{s_1}$ est une sous-variété complexe de $T\mathcal{M}_k$ pour la structure complexe I_1 , et $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ possède une structure naturelle de variété I_1 -complexe. L'application de \mathcal{W}_k/G dans $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ induite par l'injection naturelle de \mathcal{W}_k dans $\mathcal{W}_k^{s_1}$ est un difféomorphisme I_1 -holomorphe.*

□ **Preuve de la proposition 1.4.15 :**

Découle de la théorie générale exposée au paragraphe 1.2.5. □

Théorème 1.4.16 *L'application :*

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{W}_k^{s_1} &\longrightarrow T'Gr_{res}^0 \\ (x, X) &\longmapsto (Im x, \frac{1}{k^2}x \circ X^*) \end{aligned}$$

est une submersion holomorphe, dont les fibres sont les orbites sous le groupe complexifié $G^{\mathbb{C}} = Gl(H_+) \cap \{ Id_{H_+} + L^1(H_+), \}$.

■ **Preuve du théorème 1.4.16 :**

• $\text{Im } x$ appartient à Gr_{res}^0 car $pr_+ \circ x \in \{Id_{H_+} + L^1(H_+)\}$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et $pr_- \circ x \in L^2(H_+, H_-)$. De plus, la condition $X^*x = 0$ implique que $\xi := \frac{1}{k^2}x \circ X^*$ vérifie $\xi|_{\text{Im } x} = 0$, donc peut être considéré comme élément de $L^2((\text{Im } x)^\perp, \text{Im } x) = T'_{\text{Im } x} Gr_{res}^0$.

• Ψ est surjective car la base canonique x_P d'un élément $P \in Gr_{res}^0$ (selon [PS]) est dans \mathcal{M}_k et pour tout $V \in L^2(P^\perp, P)$, $X := k^2V^* \circ x_P^{*-1}$ (où x_P est vu comme isomorphisme de H_+ dans P) vérifie $\frac{1}{k^2}x \circ X^* = V$ et appartient à $L^2(H_+, P^\perp)$. De plus, puisque $pr_- : P \rightarrow H_-$ est Hilbert-Schmidt, $pr_+ : P^\perp \rightarrow H_+$ est Hilbert-Schmidt et $pr_+ \circ X \in L^1(H_+)$.

• Montrons que deux éléments (x_1, X_1) et (x_2, X_2) de $\mathcal{W}_k^{s_1}$ ont la même image par Ψ si et seulement si ils appartiennent à la même orbite sous $G^{\mathbb{C}}$. On a :

$$\text{Im } x_1 = \text{Im } x_2 \Leftrightarrow x_2 = x_1 \circ g^{-1}$$

avec $g^{-1} \in G^{\mathbb{C}}$, d'où :

$$x_2 \circ X_2^* = x_1 \circ X_1^* = x_2 \circ g \circ X_1^*,$$

ce qui équivaut à : $X_2 = X_1 \circ g^*$ car x_2 est injectif.

• Exprimons la différentielle de Ψ en (x, X) . Soient $P = \text{Im } x$, $\mathcal{U}_P \subset Gr_{res}^0$ l'ouvert formé des éléments $P' \in Gr_{res}^0$ tels que la projection orthogonale de P' sur P soit un isomorphisme et φ_P l'application carte de \mathcal{U}_P dans $L^2(P, P^\perp)$ qui à P' associe l'unique application $U \in L^2(P, P^\perp)$ dont P' est le graphe. Soient :

$$(Z, T) \in T_{(x, X)} \mathcal{W}_k^{s_1}$$

et

$$(x(t), X(t)) \in \mathcal{C}^1(] - \epsilon, \epsilon[, \mathcal{W}_k^{s_1})$$

telle que :

$$(x(0), X(0)) = (x, X)$$

et

$$\dot{x}(0) = Z \text{ et } \dot{X}(0) = T.$$

Posons :

$$\varphi_P \circ \Psi((x(t), X(t))) = (U(t), V(t)).$$

Comme

$$\text{Im } x(t) = \text{Im} (\text{Id} + U(t))$$

et $U(0) = 0$, il existe $g(t) \in \mathcal{C}^1(] - \epsilon, \epsilon[, G^{\mathbb{C}})$ tel que :

$$x(t) \circ g(t)^{-1} = \text{Id} + U(t) \text{ et } x(0) \circ g(0)^{-1} = \text{Id}.$$

En décomposant H selon $P \oplus P^\perp$, on a : $g(t) = pr_P \circ x(t)$, où pr_P désigne la projection orthogonale sur P . Ainsi $U(t) = pr_{P^\perp} x(t) \circ (pr_P \circ x(t))^{-1}$ et :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} U(t) = pr_{P^\perp} Z \circ x(0)^{-1}.$$

De plus : $V(t) = \frac{1}{k^2} pr_P \circ x(t) \circ X(t)|_{P^\perp}^*$ et :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} V(t) = \frac{1}{k^2} (pr_P(Z) \circ X^* + x \circ pr_{P^\perp}(T)^*).$$

Ainsi :

$$d\varphi_P \circ d\Psi_{(x,X)}((Z, T)) = (pr_{P^\perp} \circ Z \circ x^{-1}, \frac{1}{k^2}(pr_P(Z) \circ X^* + x \circ pr_{P^\perp}(T)^*)).$$

On a bien :

$$d\varphi_P \circ d\Psi_{(x,X)}(I_1(Z, T)) = id\varphi_P \circ d\Psi_{(x,X)}((Z, T))$$

ce qui prouve que Ψ est holomorphe. De plus, $d\phi_P \circ d\Psi_{(x,X)}$ est surjective, un antécédent de $(U, V) \in L^2(P, P^\perp) \times L^2(P^\perp, P)$ étant donné par : $(U \circ x, k^2 V^* x^{*-1})$. ■

Corollaire 1.4.17 *L'espace quotient $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ est difféomorphe à l'espace cotangent $T'Gr_{res}^0$ de la composante connexe de H_+ de la grassmannienne restreinte via l'application :*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}} &\longrightarrow T'Gr_{res}^0 \\ [(x, X)] &\longmapsto (Im x, \frac{1}{k^2}x \circ X^*), \end{aligned}$$

et à l'espace tangent TGr_{res}^0 de la composante connexe de H_+ de la grassmannienne restreinte via l'application :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}} &\longrightarrow TGr_{res}^0 \\ [(x, X)] &\longmapsto (Im x, \frac{1}{k^2}X \circ x^*). \end{aligned}$$

1.4.7 Calcul du potentiel kählérien associé à la structure complexe I_1

Potentiel sur le quotient

La variété hyperkählérienne $T\mathcal{M}_k$ possède un potentiel kählérien relatif à la structure (g, I_1, ω_1) globalement défini, i.e une fonction K définie sur $T\mathcal{M}_k$ telle que $\omega_1 = dd^{c_1}K$, où $d^{c_1} := I_1 d I_1^{-1}$, à savoir :

$$\begin{aligned} K : T\mathcal{M}_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, X) &\mapsto \frac{1}{4} \text{Tr} (x^*x + X^*X - k^2 Id). \end{aligned}$$

Le fibré holomorphe trivial $L = T\mathcal{M}_k \times \mathbb{C}$ muni du produit scalaire hermitien :

$$\begin{aligned} h_{(x,X)} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, z_2) &\mapsto z_1 \bar{z}_2 e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} (x^*x + X^*X - k^2 Id)}, \end{aligned}$$

et de la connexion de Chern ∇ associée, vérifie $R^\nabla = i\omega_1$.

L'algèbre de Lie \mathfrak{g} agit sur les sections holomorphes de $L = T\mathcal{M}_k \times \mathbb{C}$ par :

$$\mathfrak{a}.\sigma((x, X)) = -\nabla_{(-x \circ \mathfrak{a}, X \circ \mathfrak{a}^*)}\sigma + i\mu_1^{\mathfrak{a}}\sigma + \frac{k^2}{2} \text{Tr} \mathfrak{a}.\sigma,$$

où $\sigma \in \Gamma(L)$ et $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$. Cette action correspond à l'action de \mathfrak{g} sur l'espace total du fibré L donnée par l'application qui à $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ associe le champ de vecteurs $V^{\mathfrak{a}}$ dont la valeur en un point $\xi \in L$ est l'élément de $T_{(x,X)}\mathcal{M}_k \times \mathbb{C}$:

$$V^{\mathfrak{a}}(\xi) = (x^{\mathfrak{a}}, X^{\mathfrak{a}}, i\mu_1^{\mathfrak{a}}((x, X)).\xi + \frac{k^2}{2} \text{Tr} \mathfrak{a}.\xi).$$

Cette action s'intègre en une action du groupe G lorsque l'application $\mathfrak{a} \mapsto k^2 \operatorname{Tr} \mathfrak{a}$ est la différentielle d'un caractère de G . Ceci n'est le cas que pour les valeurs entières de $\frac{k^2}{2}$ et le caractère correspondant est :

$$\begin{aligned} \chi_{\frac{k^2}{2}} : G &\rightarrow S^1 \\ g &\mapsto (\det(g))^{\frac{k^2}{2}}. \end{aligned}$$

On notera également $\chi_{\frac{k^2}{2}}$ son extention en un homomorphisme de groupe de $G^{\mathbb{C}}$ dans \mathbb{C}^* . L'action correspondante de G et $G^{\mathbb{C}}$ sur L est donnée par :

$$g((x, X), z) = ((x \circ g^{-1}, X \circ g^*), (\det(g))^{-\frac{k^2}{2}} \cdot z).$$

ce qui induit une action de $G^{\mathbb{C}}$ sur $\Gamma(L)$ par :

$$(g \cdot \sigma)((x, X)) := g(\sigma(g^{-1} \cdot (x, X))).$$

où $\sigma \in \Gamma(L)$, et $g \in G^{\mathbb{C}}$.

Définition 1.4.18 Pour $\frac{k^2}{2} \in \mathbb{N}^*$, soit \hat{L}_k le fibré en droite de base $T'Gr_{res}^0$ obtenu en restreignant le fibré trivial L à la sous-variété réelle \mathcal{W}_k et en quotientant par l'action de G . La fibre de \hat{L}_k au-dessus d'un élément $(P, U) \in T'Gr_{res}^0$ est :

$$\hat{L}_k((P, U)) = \{((x, X), z) \in L|_{\mathcal{W}_k} \text{ t.q. } \operatorname{Im} x = P \text{ et } x \circ X^* = U\} / \sim$$

où $((x, X), z) \sim ((x \circ g^{-1}, X \circ g^*), (\det(g))^{-\frac{k^2}{2}} \cdot z)$.

Le potentiel K étant G -invariant, il en est de même du produit scalaire hermitien h , qui permet de définir un produit scalaire sur \hat{L}_k :

Définition 1.4.19 On définit un produit scalaire hermitien \hat{h} sur \hat{L}_k par :

$$\hat{h}(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2) = h(\sigma_1, \sigma_2),$$

où $\sigma_i, i = 1, 2$ est la section G -invariante de $L|_{\mathcal{W}_k}$ relevant $\hat{\sigma}_i$.

Rappelons que l'on a une submersion holomorphe :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{W}_k^{s_1} &\longrightarrow T'Gr_{res}^0 \\ (x, X) &\longmapsto (\operatorname{Im} x, \frac{1}{k^2} x \circ X^*) \end{aligned}$$

et une projection :

$$\begin{aligned} q_1 : \mathcal{W}_k^{s_1} &\longrightarrow \mathcal{W}_k \\ (x, X) &\longmapsto (x \circ g_{(x, X)}^{-1}, X \circ g_{(x, X)}), \end{aligned}$$

avec :

$$g_{(x, X)}^{-1} := \left(\frac{k^2}{2} (x^* x)^{-1} + \frac{k^2}{2} (x^* x)^{-\frac{1}{2}} (Id_{H_+} + \frac{4}{k^4} (x^* x)^{\frac{1}{2}} X^* X (x^* x)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} (x^* x)^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2)$$

Remarque 1.4.20 D'après la proposition 1.2.25, la 2-forme $\Psi^* \omega_1$ est la courbure de la connexion de Chern du fibré $(L|_{\mathcal{W}_k^{s_1}}, \bar{h})$, où \bar{h} est défini par :

$$\bar{h}(\xi) = h(g_{(x, X)} \cdot \xi, g_{(x, X)} \cdot \xi).$$

pour tous $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_1}$ et tous $\xi \in L_{(x, X)}$, et où $g_{(x, X)}$ est défini par 1.2.

Proposition 1.4.21 Pour tout $\frac{k^2}{2} \in \mathbb{N}^*$, la 2-forme $\Psi^* \omega_1$ sur $\mathcal{W}_k^{s_1}$ vérifie :

$$i\Psi^* \omega_1 = dd^{c_1} \hat{K}_1,$$

avec, pour tout $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_1}$,

$$\hat{K}_1(x, X) = \frac{k^2}{4} \log \det \left(\frac{x^* x}{k^2} \right) + \frac{k^2}{2} \operatorname{Tr} \left(\frac{\gamma \gamma^*}{k^2} - \operatorname{Id} \right) - \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \left(\log \frac{\gamma \gamma^*}{k^2} \right),$$

où :

$$\gamma \gamma^* = \frac{k^2}{2} \left(\operatorname{Id}_{H_+} + \left(\operatorname{Id}_{H_+} + \frac{4}{k^4} (x^* x)^{\frac{1}{2}} X^* X (x^* x)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.21 :**

D'après le théorème 1.2.26, on a :

$$\hat{K}_1((x, X)) := K(g_{(x, X)} \cdot (x, X)) + \frac{1}{2} \log |\chi_{k^2}(g_{(x, X)})|^2.$$

Comme $g_{(x, X)}^{-1} x^* x g_{(x, X)}^{-1} - k^2 \operatorname{Id} = g_{(x, X)} X^* X g_{(x, X)}$,

$$\begin{aligned} K(g_{(x, X)} \cdot (x, X)) &= \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \left(g_{(x, X)}^{-1} x^* x g_{(x, X)}^{-1} + g_{(x, X)} X^* X g_{(x, X)} - k^2 \operatorname{Id} \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left(g_{(x, X)}^{-1} x^* x g_{(x, X)}^{-1} - k^2 \operatorname{Id} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, après conjugaison par $g_{(x, X)}^{-1}$:

$$K(g_{(x, X)} \cdot (x, X)) = \frac{k^2}{2} \operatorname{Tr} \left(g_{(x, X)}^{-2} \frac{x^* x}{k^2} - \operatorname{Id} \right),$$

et :

$$g_{(x, X)}^{-2} x^* x = (x^* x)^{-\frac{1}{2}} \gamma \gamma^* (x^* x)^{\frac{1}{2}}.$$

En conjugant par $(x^* x)^{-\frac{1}{2}}$, on a donc :

$$K(g_{(x, X)} \cdot (x, X)) = \frac{k^2}{2} \operatorname{Tr} \left(\frac{\gamma \gamma^*}{k^2} - \operatorname{Id} \right).$$

• D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log |\chi_{\frac{k^2}{2}}(g_{(x, X)})|^2 &= -\frac{1}{2} \log \left(\det \left(g_{(x, X)}^{-2} \right) \right)^{\frac{k^2}{2}} \\ &= -\frac{k^2}{4} \log \det (x^* x)^{-\frac{1}{2}} \gamma \gamma^* (x^* x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= +\frac{k^2}{4} \log \det \frac{x^* x}{k^2} - \frac{k^2}{4} \log \det \frac{\gamma \gamma^*}{k^2}. \end{aligned}$$

De plus, l'opérateur

$$A := \frac{\gamma \gamma^*}{k^2} - \operatorname{Id} = \frac{1}{2} \left(\left(\operatorname{Id} + \frac{4}{k^4} (x^* x)^{\frac{1}{2}} X^* X (x^* x)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Id} \right)$$

est auto-adjoint positif à trace. Ainsi :

$$\log \det \frac{\gamma \gamma^*}{k^2} = \operatorname{Tr} \log \frac{\gamma \gamma^*}{k^2}.$$

□

Le potentiel \hat{K}_1 de l'espace tangent TGr_{res}^0

Proposition 1.4.22 *Pour tout $\frac{k^2}{2} \in \mathbb{N}^*$, la 2-forme $\Psi^*\omega_1$ sur $\mathcal{W}_k^{s_1}$ vérifie*

$$i\Psi^*\omega_1 = dd^{c_1}\hat{K}_1,$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{K}_1((x, X)) &= \frac{k^2}{4} \log \det \left(\frac{x^*x}{k^2} \right) + \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \left((Id + 4V^*V)^{\frac{1}{2}} - Id \right) \\ &\quad - \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \log \frac{1}{2} \left(Id + (Id + 4V^*V)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

où $V = \frac{1}{k^2}X \circ x^*$ est l'image de la classe de (x, X) par l'identification $\tilde{\Phi}$ de $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}}$ et TGr_{res} donnée au corollaire 1.4.17.

□ **Preuve de la proposition 1.4.22 :**

Puisque :

$$\frac{\gamma\gamma^*}{k^2} = \frac{1}{2} \left(Id + \left(Id + \frac{4}{k^4}|x|X^*X|x| \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

l'opérateur $\frac{\gamma\gamma^*}{k^2}$ est conjugué à :

$$\frac{1}{2} \left(Id + \left(Id + \frac{4}{k^4}xX^*Xx^* \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Ainsi il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left(\frac{\gamma\gamma^*}{k^2} - Id \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left(\log \frac{\gamma\gamma^*}{k^2} \right) &= \operatorname{Tr} \left((Id + 4V^*V)^{\frac{1}{2}} - Id \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \log \frac{1}{2} \left(Id + (Id + 4V^*V)^{\frac{1}{2}} \right). \end{aligned}$$

□

Le potentiel \hat{K}_1 en fonction de la courbure de Gr_{res}^0 .

Théorème 1.4.23 *Le potentiel \hat{K}_1 s'écrit :*

$$\hat{K}_1((x, X)) = \frac{k^2}{4} \log \det \left(\frac{x^*x}{k^2} \right) + k^2 g_{Gr} (f(I_1 R_{I_1 V, V})V, V),$$

avec $V = \frac{1}{k^2}X \circ x^*$ et $f(u) = \frac{1}{u} \left(\sqrt{1+u} - 1 - \log \frac{1+\sqrt{1+u}}{2} \right)$.

■ **Preuve du théorème 1.4.23 :**

La grassmannienne Gr_{res}^0 est une orbite symétrique hermitienne sous le groupe U_{res}^0 . Sa courbure pour la connexion de Levi-Cevita est donnée par :

$$R_{X,Y}Z = YX^*Z - ZY^*X + ZX^*Y - XY^*Z,$$

pour tous $X, Y, Z \in T_P Gr_{res}^0$ (voir l'Appendice B pour les grandes lignes et [SpWu] pour les détails). L'opérateur $R_{I_1 V, V}$ agit sur $T_P Gr_{res}^0$ par :

$$R_{I_1 V, V}Y = -2i(VV^*Y + YV^*V).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} g_{Gr}(I_1 R_{I_1 V, V} V, V) &= 2\Re \operatorname{Tr} (V^* V V^* V + V^* V V^* V) = 4\Re \operatorname{Tr} ((V^* V)^2) \\ &= \frac{1}{4}\Re \operatorname{Tr} ((4V^* V)^2), \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} g_{Gr}((I_1 R_{I_1 V, V})^j V, V) &= \Re \operatorname{Tr} (4^j (V^* V)^{j+1}) \\ &= \frac{1}{4}\Re \operatorname{Tr} ((4V^* V)^{j+1}). \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \left((\operatorname{Id} + 4V^* V)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Id} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \log \frac{1}{2} \left(\operatorname{Id} + (\operatorname{Id} + 4V^* V)^{\frac{1}{2}} \right) \\ = g_{Gr}(f(I_1 R_{I_1 V, V}) V, V), \end{aligned}$$

avec

$$f(u) = \frac{1}{u} \left(\sqrt{1+u} - 1 - \log \frac{1 + \sqrt{1+u}}{2} \right).$$

■

Remarque 1.4.24 Le premier terme de cette somme est le pull-back du potentiel kählérien de la grassmannienne restreinte défini sur la variété stable \mathcal{M}_k^s à la variété stable $\mathcal{W}_k^{s_1}$ par l'injection canonique $\mathcal{M}_k^s \hookrightarrow \mathcal{W}_k^{s_1}$. Le second terme est exprimé en fonction de la courbure de la grassmannienne restreinte et de l'image de l'élément (x, X) de $\mathcal{W}_k^{s_1}$ par l'identification $\mathcal{W}_k^{s_1}/G^{\mathbb{C}} = TGr_{res}^0$.

1.4.8 L'identification de la variété complexe $\mathcal{W}_k^{s_3}/G^{\mathbb{C}}$ avec l'orbite complexifiée de Gr_{res}^0

L'orbite complexifiée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ de la grassmannienne restreinte

La composante connexe contenant H_+ de la grassmannienne restreinte est un espace homogène sous le groupe unitaire $\mathcal{U}_2 := \mathcal{U}(H) \cap \{\operatorname{Id}_H + L^2(H, H)\}$ pour l'action par conjugaison, un point P de Gr_{res}^0 étant identifié à l'opérateur de projection orthogonale $ikpr_P$, $k \neq 0$, de H sur P . L'orbite complexifiée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ de Gr_{res}^0 est l'orbite sous l'action par conjugaison du groupe de Lie complexe $Gl_2 := Gl(H) \cap \{\operatorname{Id}_H + L^2(H, H)\}$ de n'importe quel point de Gr_{res}^0 . Elle a été en particulier introduite par J. Mickelsson dans [Mic]. C'est l'ensemble des opérateurs $z \in B(H)$ possédant exactement deux valeurs propres ik avec $k \neq 0$ et 0 et tels que les espaces propres correspondants appartiennent respectivement à la composante connexe contenant H_+ de la grassmannienne restreinte Gr_{res} et à la composante connexe contenant H_- de la grassmannienne duale Gr_{res}^* obtenue en échangeant les rôles de H_+ et H_- .

Proposition 1.4.25 *L'orbite complexifiée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ de la composante connexe Gr_{res}^0 de la grassmannienne restreinte d'un espace de Hilbert polarisé $H = H_+ \oplus H_-$ est l'espace homogène $Gl_2(H)/(Gl_2(H_+) \times Gl_2(H_-))$ et une variété banachique complexe modélée sur l'espace de Banach $L^2(H_+, H_-) \times L^2(H_-, H_+)$, isomorphe à l'ouvert de la variété $Gr_{res}^0 \times Gr_{res}^{*0}$ formé des couples $(P, Q) \in Gr_{res}^0 \times Gr_{res}^{*0}$ tels que $P \cap Q = \{0\}$.*

□ **Preuve de la proposition 1.4.25 :**

Notons $\epsilon := ikpr_+$ où pr_+ désigne la projection orthogonale sur H_+ . Le stabilisateur de ϵ pour l'action par conjugaison de $Gl_2(H)$ est $Gl_2(H_+) \times Gl_2(H_-)$.

L'espace tangent en ϵ à l'espace homogène $Gl_2(H).$ est isomorphe à $\mathfrak{gl}_2(H)/(\mathfrak{gl}_2(H_+) \times \mathfrak{gl}_2(H_-))$ c'est-à-dire à $L^2(H_+, H_-) \times L^2(H_-, H_+)$. Pour tout $g \in Gl_2(H)$, $g \epsilon g^{-1} = ikpr_{g.H_+}$ où $pr_{g.H_+}$ désigne la projection sur $g.H_+$ parallèlement à $g.H_-$. Puisque $g \in Gl_2(H)$, la projection orthogonale de $g.H_+$ sur H_- est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et la projection orthogonale de $g.H_+$ sur H_+ est un opérateur de Fredholm d'indice 0. De même, la projection orthogonale de $g.H_-$ sur H_+ est Hilbert-Schmidt, et la projection orthogonale de $g.H_-$ sur H_- est un opérateur de Fredholm d'indice 0. Ainsi $g.H_+ \in Gr_{res}^0$ et $g.H_- \in Gr_{res}^{*0}$. De plus $g.H_+ \cap g.H_- = \{0\}$. \square

La variété stable $\mathcal{W}_k^{s_3}$ associée à la structure complexe I_3

Rappelons que pour $(Z, T) \in T_{(x, X)}T\mathcal{M}_k$, $I_3(Z, T) = (iT, iZ)$, et que l'action de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} sur $(x, X) \in T\mathcal{M}_k$ est donnée, pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$, par :

$$\mathfrak{a} \cdot (x, X) = (-x \circ \mathfrak{a}, -X \circ \mathfrak{a}).$$

On en déduit une action de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sur $T\mathcal{M}_k$ par :

$$i\mathfrak{a} \cdot_3(x, X) := I_3(\mathfrak{a} \cdot (x, X)) = (-iT \circ \mathfrak{a}, -iZ \circ \mathfrak{a}) = (x, X) \begin{pmatrix} 0 & -i\mathfrak{a} \\ -i\mathfrak{a} & 0 \end{pmatrix}.$$

où \mathfrak{a} appartient à \mathfrak{g} . Cette action s'intègre en une action I_3 -holomorphe de $G^{\mathbb{C}} = G \cdot \exp i\mathfrak{g}$ sur $T\mathcal{M}_k$ par :

$$\exp(i\mathfrak{a})u \cdot_3(x, X) := (x, X) \circ u^{-1} \begin{pmatrix} \cosh i\mathfrak{a} & -\sinh i\mathfrak{a} \\ -\sinh i\mathfrak{a} & \cosh i\mathfrak{a} \end{pmatrix}.$$

où $\mathfrak{a} \in \mathfrak{g}$ et $u \in G$. La variété stable associée à la structure complexe I_3 est la sous-variété I_3 -complexe de $T\mathcal{M}_k$:

$$\mathcal{W}_k^{s_3} := \{(x, X) \in T\mathcal{M}_k, \exists \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}, \exp i\mathfrak{a} \cdot_3(x, X) \in \mathcal{W}_k\}.$$

Contrairement à la variété stable associée à la structure complexe I_1 , la projection $\mathcal{W}_k^{s_3} \rightarrow \mathcal{W}_k$ ne peut être explicitée facilement.

L'identification $\mathcal{W}_k^{s_3}/G^{\mathbb{C}} = \mathcal{O}^{\mathbb{C}}$

Théorème 1.4.26 *L'application ψ définie par :*

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{W}_k^{s_3} &\rightarrow \mathcal{O}^{\mathbb{C}} \\ (x, X) &\mapsto z = i(x + X)(x^* - X^*) \end{aligned}$$

est une submersion holomorphe, dont les fibres sont les orbites sous $G^{\mathbb{C}}$ pour l'action I_3 -holomorphe de $G^{\mathbb{C}}$ sur $\mathcal{W}_k^{s_3}$.

■ Preuve du théorème 1.4.26 :

• Montrons que l'application ψ est bien à valeurs dans $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$. Pour tout $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_3}$, $x^*x - X^*X = k^2 \text{Id}$ et $X^*x = x^*X$, ainsi :

$$\begin{aligned} (x^* - X^*)(x + X) &= k^2 \text{Id} \\ (x^* + X^*)(x - X) &= k^2 \text{Id}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{Ker}(x + X) = \{0\}$ et $\text{Ker}(x - X) = \{0\}$. Le noyau de l'opérateur z est donc $\text{Ker}(x^* - X^*) = \text{Im}(x - X)^\perp$. D'autre part le sous-espace $\text{Im}(x + X)$ est espace propre relatif à la valeur propre ik^2 car :

$$z((x + X)u) = i(x + X)(x^* - X^*)(x + X)u = ik^2(x + X)u.$$

Ainsi $\text{Im}(x + X) \cap \text{Ker}(x^* - X^*) = \{0\}$. De plus la projection de H sur $\text{Im}(x + X)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} p_1 : H &\rightarrow \text{Im}(x + X) \\ u &\mapsto \frac{1}{k^2}(x + X)(x^* - X^*), \end{aligned}$$

et est continue, et $\text{Id}_H - p_1$ est à valeurs dans $\text{Ker}(x^* - X^*)$ de sorte que $\text{Im}(x + X)$ et $\text{Ker}(x^* - X^*)$ sont en somme directe topologique. De plus, puisque $(x, X) \in T\mathcal{M}_k$, $\text{Im}(x + X)$ et $\text{Im}(x - X)$ appartiennent à Gr_{res} , et $\text{Ker}(x^* - X^*) = \text{Im}(x - X)^\perp$ appartient à la grassmannienne duale Gr_{res}^* . On en déduit que l'application ψ est bien à valeurs dans l'orbite complexifiée $\mathcal{O}^\mathbb{C}$ de la grassmannienne restreinte.

• Montrons que les fibres de ψ sont les orbites sous $G^\mathbb{C}$. Supposons que $\psi((x_1, X_1)) = \psi((x_2, X_2))$ où (x_1, X_1) et (x_2, X_2) appartiennent à $\mathcal{W}_k^{s_3}$. Alors $\text{Im}(x_1 + X_1) = \text{Im}(x_2 + X_2)$ et $\text{Im}(x_1 - X_1) = \text{Im}(x_2 - X_2)$. Ainsi il existe $g \in \text{Gl}(H_+)$ tel que $(x_2 + X_2) = (x_1 + X_1) \circ g$ et $g' \in \text{Gl}(H_+)$ tel que $(x_2 - X_2) = (x_1 - X_1) \circ g'$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} 2x_2 &= x_1(g + g') + X_1(g - g') \\ 2X_2 &= x_1(g - g') + X_1(g + g') \end{aligned}$$

Puisque pour $i = 1, 2$, $x_i^*x_i - X_i^*X_i = k^2 \text{Id}$ et $X_i^*x_i = x_i^*X_i$, il vient :

$$\begin{aligned} 4(x_2^*x_2 - X_2^*X_2) &= (g^* + g'^*)(x_1^*x_1 - X_1^*X_1)(g + g') \\ &\quad + (g^* - g'^*)(X_1^*X_1 - x_1^*x_1)(g - g') \\ &\quad + (g^* + g'^*)(x_1^*X_1 - X_1^*x_1)(g - g') \\ &\quad + (g^* - g'^*)(X_1^*x_1 - x_1^*X_1)(g + g') \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$g^*g' + g'^*g = 2 \text{Id},$$

et :

$$\begin{aligned} 4(X_2^*x_2 - x_2^*X_2) &= (g^* - g'^*)(x_1^*x_1 - X_1^*X_1)(g + g') \\ &\quad + (g^* + g'^*)(X_1^*X_1 - x_1^*x_1)(g - g') \\ &\quad + (g^* - g'^*)(x_1^*X_1 - X_1^*x_1)(g - g') \\ &\quad + (g^* + g'^*)(X_1^*x_1 - x_1^*X_1)(g + g') \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$g^*g' = g'^*g.$$

On en déduit que $g' = g^{*-1}$. En notant $g = u \exp(ia)$ la décomposition polaire de $g \in \text{Gl}(H_+)$ avec $u \in U(H_+)$ et $a \in \mathfrak{u}(H_+)$, on a alors :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 u \cosh(ia) + X_1 u \sinh(ia) \\ X_2 &= x_1 u \sinh(ia) + X_1 u \cosh(ia), \end{aligned}$$

et $(x_2, X_2) = (u \exp(ia))^{-1} \cdot (x_1, X_1)$.

• Montrons que ψ est surjective. Soient $P \in Gr_{res}^0$ et $Q \in Gr_{res}^{*0}$ tels que $P \cap Q = \{0\}$. Q^\perp est le graphe d'un opérateur de Hilbert-Schmidt $A : P \rightarrow P^\perp$ et Q est le graphe de l'opérateur $-A^* : P^\perp \rightarrow P$. Soit f l'application qui à une base orthonormée $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ de H_+ associe la base canonique de P correspondante (cf 1.3.15) et qui à une base orthonormée $\{e_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ de H_- associe la base canonique de P^\perp correspondante. Notons $g = f \circ |f|^{-1}$. Soient :

$$\begin{aligned} x &= k(\text{Id}_P + \frac{1}{2}A)g|_{H_+} \\ X &= -\frac{k}{2}Ag|_{H_+}. \end{aligned}$$

On a : $\text{Im}(x + X) = \text{Im}(g|_{H_+}) = P$ et $\text{Im}(x - X) = \text{Im}(\text{Id}_P + A)g|_{H_+} = Q^\perp$. Si la décomposition par blocs de l'identité relativement aux décompositions de H en $H = P \oplus P^\perp$ et $H = H_+ \oplus H_-$ est :

$$\text{id} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors $a - \text{Id} \in L^1(P, H_+)$, $b \in L^2(P^\perp, H_+)$, $c \in L^2(P, H_-)$, $d - \text{Id} \in L^2(P^\perp, H_-)$. On en déduit que :

$$pr_+ \circ x = k(a + \frac{1}{2}bA)g|_{H_+} \in k\text{Id}_{H_+} + L^1(H_+, H_+)$$

et

$$pr_- \circ x = k(c + \frac{1}{2}dA)g|_{H_+} \in L^2(H_+, H_-).$$

De même,

$$pr_+ \circ X = -\frac{k}{2}bAg|_{H_+} \in L^1(H_+, H_+)$$

et

$$pr_- \circ X = -\frac{k}{2}dA \in L^2(H_+, H_-).$$

Ainsi le couple (x, X) appartient à $T\mathcal{M}_k$. De plus, $x^*x - X^*X = k^2\text{Id}_{H_+}$ et $X^*x - x^*X = 0$. Il reste à montrer que $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_3}$. Pour cela remarquons que :

$$\begin{aligned} x^*x + X^*X &= k^2\text{Id}_{H_+} + \frac{k^2}{4}g^*A^*Ag \\ X^*x + x^*X &= -\frac{k^2}{4}g^*A^*Ag. \end{aligned}$$

La condition $\exp -i\mathbf{a}.3(x, X) \in \mathcal{W}_k$ est équivalente à l'équation :

$$\begin{aligned} \cosh i\mathbf{a}(\text{Id}_{H_+} + \frac{1}{2}g^*A^*Ag) \sinh i\mathbf{a} + \sinh i\mathbf{a}(\text{Id}_{H_+} + \frac{1}{2}g^*A^*Ag) \cosh i\mathbf{a} \\ - \cosh i\mathbf{a}\frac{1}{2}g^*A^*Ag \cosh i\mathbf{a} - \sinh i\mathbf{a}\frac{1}{2}g^*A^*Ag \sinh i\mathbf{a} = 0, \end{aligned}$$

qui a pour solution :

$$i\mathbf{a} = -\frac{1}{4} \log(\text{Id}_{H_+} + g^*A^*Ag) \in L^1(H_+, H_+).$$

• La différentielle de ψ en un point $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_3}$ est l'application qui au couple $(Z, T) \in T_{(x, X)}\mathcal{W}_k^{s_3}$ associe :

$$d\psi_{(x, X)}(Z, T) = i(Z + T)(x^* - X^*) + i(x + X)(Z^* - T^*).$$

Elle vérifie $d\psi_{(x,X)}(I_3(Z,T)) = id\psi_{(x,X)}(Z,T)$, ainsi ψ est holomorphe. Soient $z \in \mathcal{O}^{\mathbb{C}}$, P l'espace propre de z de valeur propre ik^2 et Q le noyau de z . Soient $(U, V) \in L^2(P, P^{\perp}) \times L^2(Q, Q^{\perp})$. Un antécédent de (U, V) par $d\psi_{(x,X)}$ est le couple $(Z, T) \in L^2(H_+, H) \times L^2(H_+, H)$ avec :

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{i}{k^2} (U(x+X) - V^*(x-X)) \\ T &= -\frac{i}{k^2} (U(x+X) + V^*(x-X)). \end{aligned}$$

De plus, puisque $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_3}$, $pr_+ \circ Z - \text{Id}_{H_+}$ et $pr_+ \circ T - \text{Id}_{H_+}$ sont des opérateurs à trace. On en déduit que la différentielle $d\psi_{(x,X)}$ est surjective. ■

Corollaire 1.4.27 *L'espace quotient $\mathcal{W}_k^{s_3}/G^{\mathbb{C}}$ est difféomorphe à l'orbite complexe $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ via l'application :*

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : \mathcal{W}_k^{s_3}/G^{\mathbb{C}} &\rightarrow \mathcal{O}^{\mathbb{C}} \\ [(x, X)] &\mapsto z = i(x+X)(x^* - X^*) \end{aligned}$$

1.4.9 Calcul du potentiel kählérien K_3 associé à la structure complexe I_3

Expression du potentiel kählérien \hat{K}_3 sur la surface de niveau $\mathcal{W}_k^{s_3}$

En notant d^{c_3} l'opérateur : $d^{c_3} := I_3 \circ d \circ I_3^{-1}$, où I_3 agit sur les formes différentielles ϕ de degré n sur $T\mathcal{M}_k$ par :

$$\forall X_1, \dots, X_n \in T_{(x,X)}T\mathcal{M}_k, (I_3\phi)(X_1, \dots, X_n) := (-1)^n \phi(I_3X_1, \dots, I_3X_n),$$

$p_3 : \mathcal{W}_k^{s_3} \rightarrow \mathcal{W}_k^{s_3}/G^{\mathbb{C}}$ la projection naturelle, et $q_3 : \mathcal{W}_k^{s_3} \rightarrow \mathcal{W}_k$ la projection sur la surface de niveau $\mathcal{W}_k := \mu_1^{-1}(\frac{i}{2} \text{Tr}) \cap \mu_2^{-1}(0) \cap \mu_3^{-1}(0)$, la structure symplectique ω_3 vérifie :

$$p_3^*\omega_3((x, X)) = dd^{c_3}K(q_3(x, X)),$$

où : $K((y, Y)) = \frac{1}{4} \text{Tr} (y^*y + Y^*Y - k^2\text{Id})$. Bien que la projection q_3 ne soit pas explicite, il est possible d'évaluer le potentiel kählérien $\hat{K}_3 := K \circ q_3$ associé à la structure complexe I_3 en un point de la variété stable $\mathcal{W}_k^{s_3}$ en utilisant un invariant des orbites sous $G^{\mathbb{C}}$. En identifiant \mathfrak{g}' et \mathfrak{g} via la trace de sorte que $\mu_3((x, X)) = X^*x + x^*X$ et en posant :

$$\mu_4((x, X)) := x^*x + X^*X.$$

on a :

$$\begin{aligned} \mu_3(\exp ia.(x, X)) &= \cosh ia\mu_4(x, X) \sinh ia + \sinh ia\mu_4(x, X) \cosh ia \\ &\quad + \cosh ia\mu_3(x, X) \cosh ia + \sinh ia\mu_3(x, X) \sinh ia, \\ \mu_4(\exp ia.(x, X)) &= \cosh ia\mu_4(x, X) \cosh ia + \sinh ia\mu_4(x, X) \sinh ia \\ &\quad + \cosh ia\mu_3(x, X) \sinh ia + \sinh ia\mu_3(x, X) \cosh ia. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\mu_3 + \mu_4)(\exp ia.(x, X)) &= \exp ia(\mu_3 + \mu_4) \exp ia, \\ (\mu_3 - \mu_4)(\exp ia.(x, X)) &= \exp -ia(\mu_3 - \mu_4) \exp -ia, \end{aligned}$$

et :

$$(\mu_4^2 - \mu_3^2)(\exp ia.(x, X)) = \exp ia(\mu_4^2((x, X)) - \mu_3^2((x, X))) \exp(-ia).$$

Pour $\exp i\mathbf{a}((x, X)) = q_3((x, X))$, il vient :

$$\mu_4(q_3((x, X))) = \exp(i\mathbf{a})(\mu_4^2((x, X)) - \mu_3^2((x, X)))^{\frac{1}{2}} \exp(-i\mathbf{a}),$$

et :

$$\hat{K}_3((x, X)) = \frac{1}{4} \operatorname{Tr} \left((\mu_4^2((x, X)) - \mu_3^2((x, X)))^{\frac{1}{2}} - k^2 \operatorname{Id} \right).$$

Proposition 1.4.28 *Pour tout $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_3}$,*

$$\hat{K}_3((x, X)) = \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \left(\left(\operatorname{Id} + \frac{4}{k^4} (xX^*Xx^* - Xx^*Xx^*) \right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Id} \right).$$

□ **Preuve de la proposition 1.4.28 :**

Puisque $\mathcal{W}_k^{s_3} \subset \mu_1^{-1}(\frac{i}{2}k^2) \cap \mu_2^{-1}(0)$, pour tout $(x, X) \in \mathcal{W}_k^{s_3}$, $x^*x - X^*X = k^2 \operatorname{Id}$ et $X^*x = x^*X$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mu_4^2((x, X)) - \mu_3^2((x, X)) &= x^*xx^*x + x^*xX^*X + X^*Xx^*x + X^*XX^*X \\ &\quad - x^*Xx^*X - x^*XX^*x - X^*xx^*X - X^*xX^*x \\ &= x^*x(X^*X + k^2) + x^*xX^*X + X^*Xx^*x \\ &\quad + (x^*x - k^2)X^*X - x^*Xx^*X \\ &\quad - x^*XX^*x - X^*xx^*X - X^*xX^*x \\ &= k^4 + 4x^*xX^*X - 4x^*Xx^*X. \end{aligned}$$

En conjuguant par x^{*-1} vu comme opérateur de H_+ dans $\operatorname{Im}x$ on obtient le résultat. □

Expression du potentiel kählerien K_3 sur TGr_{res} en fonction de la courbure

Théorème 1.4.29 *La forme symplectique ω_3 de TGr_{res} possède un potentiel kählerien globalement défini sur TGr_{res} donné par :*

$$\begin{aligned} K_3((P, V)) &= \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \left((\operatorname{Id} + 4V^*V)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Id} \right) \\ &= k^2 g_{Gr} (h(I_1 R_{I_1 V, V}) V, V), \end{aligned}$$

où $h(u) := \frac{1}{u} (\sqrt{1+u} - 1)$.

■ **Preuve du théorème 1.4.29 :**

Lorsque (x, X) appartient à la surface de niveau \mathcal{W}_k , $x^*X = 0$ et :

$$\begin{aligned} \hat{K}_3((x, X)) &= \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \left((\operatorname{Id} + \frac{4}{k^4} xX^*Xx^*)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Id} \right) \\ &= \frac{k^2}{4} \operatorname{Tr} \left((\operatorname{Id} + 4V^*V)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{Id} \right). \end{aligned}$$

Le résultat provient alors des identités :

$$g_{Gr} (I_1 R_{I_1 V, V} V, V) = \frac{1}{4} \Re \operatorname{Tr} ((4V^*V)^2),$$

et :

$$g_{Gr} ((I_1 R_{I_1 V, V})^j V, V) = \frac{1}{4} \Re \operatorname{Tr} ((4V^*V)^{j+1})$$

et du fait que $p_3^* \omega_3 = dd^{c_3} \hat{K}_3 = dd^{c_3} p_3^* K_3 = p_3^* dd^{c_3} K_3$ car p_3 est I_3 -holomorphe.

■

Expression du potentiel kählérien K_3 sur $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ en fonction des angles caractéristiques

Dans ce paragraphe, nous retrouvons l'expression du potentiel kählérien K_3 donnée dans [BG3] en fonction des angles caractéristiques. Pour cela, nous utilisons une section de l'application ψ donnée dans la démonstration du théorème 1.4.26.

D'après le théorème 1.4.26, tout couple (P, Q) appartenant à $Gr_{res}^0 \times Gr_{res}^{*0}$ avec $P \cap Q = \{0\}$ représente un point de l'orbite complexifiée. Un antécédent de (P, Q) par l'application $\psi : \mathcal{W}_k^{s_3} \rightarrow \mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ est donné par :

$$\begin{aligned} x &= k(\text{Id}_P + \frac{1}{2}A)g|_{H_+} \\ X &= -\frac{k}{2}Ag|_{H_+}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

où A est un opérateur de Hilbert-Schmidt de P dans P^{\perp} dont Q^{\perp} est le graphe (déterminé modulo l'action à droite de $Gl(P)$), et où g est un opérateur unitaire uniquement déterminé à partir des bases canoniques de P et Q . Remarquons que les valeurs propres $\{a_i, i \in \mathbb{N}\}$ de A sont indépendantes de l'opérateur A choisi pour représenter le couple (P, Q) . Dans le cas où cet opérateur est générique, c'est-à-dire lorsque toutes les valeurs propres a_i sont distinctes, il est possible de définir des paires de droites caractéristiques $\{l_i, l'_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, comme suit. La droite complexe l_i est la droite de P espace propre de l'opérateur A_*A associé à la valeur propre a_i , et l'_i est la droite complexe de Q^{\perp} image de l_i par l'opérateur $\text{Id}_P + A$. L'angle θ_i formé par les deux droites complexes l_i et l'_i est défini par :

$$\cos \theta_i = |\langle e_i, e'_i \rangle|,$$

où e_i est un générateur unitaire de l_i et où

$$e'_i := \frac{e_i + A(e_i)}{|e_i + A(e_i)|}.$$

L'angle θ_i est relié à la valeur propre a_i par :

$$\cos \theta_i = \frac{1}{\sqrt{1 + a_i^2}}.$$

Cette dernière expression a un sens même dans le cas non générique, et permet de définir de manière biunivoque les angles $\theta_i \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$.

Remarque 1.4.30 L'orbite d'un couple de sous-espaces (P, Q) de $Gr_{res}^0 \times Gr_{res}^{*0}$ sous l'action naturelle de $Gl_2(H)$ est caractérisée par la dimension de $P \cap Q$. L'orbite d'un couple de sous-espaces (P, Q) sous l'action de $\mathcal{U}_2(H)$ sur $Gr_{res}^0 \times Gr_{res}^{*0}$ est caractérisée par l'ensemble des angles caractéristiques θ_i .

La proposition 1.4.28 permet d'exprimer le potentiel kählérien K_3 sur l'orbite complexifiée en fonction des valeurs propres a_i de A_*A ou des angles θ_i entre les droites caractéristiques.

Théorème 1.4.31 *La forme symplectique $\bar{\psi}^{-1*}\omega_3$ définie sur l'orbite complexifiée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ et associée à la structure complexe naturelle de $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ vérifie $\bar{\psi}^{-1*}\omega_3 = dd^c K_3$ avec :*

$$K_3((P, Q)) = k^2 \text{Tr} \left((\text{Id}_P + A_*A)^{\frac{1}{2}} - \text{Id}_P \right),$$

où A est tel que $\text{Im}(\text{Id}_P + A) = Q^\perp$. En notant a_i les valeurs propres de l'opérateur A^*A , et θ_i les angles caractéristiques, il vient :

$$\begin{aligned} K_3((P, Q)) &= k^2 \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\sqrt{1 + a_i^2} - 1 \right) \\ &= k^2 \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{\cos \theta_i} - 1 \right) \end{aligned}$$

■ **Preuve du théorème 1.4.31 :**

D'après la démonstration de la proposition 1.4.28, le potentiel \hat{K}_3 est donné en un point (x, X) de la surface stable $\mathcal{W}_k^{s_3}$ par :

$$\hat{K}_3((x, X)) = \text{Tr} \left((k^4 + 4x^*xX^*X - 4x^*Xx^*X)^{\frac{1}{2}} - k^2 \text{Id} \right).$$

Pour (x, X) donné par :

$$\begin{aligned} x &= k(\text{Id}_P + \frac{1}{2}A)g|_{H_+} \\ X &= -\frac{k}{2}Ag|_{H_+}, \end{aligned}$$

il vient :

$$\hat{K}_3((x, X)) = k^2 \text{Tr} \left((\text{Id}_P + g^*A^*Ag)^{\frac{1}{2}} - \text{Id}_P \right),$$

ce qui après conjugaison par g donne le résultat. ■

Remarque 1.4.32 Le couple (x, X) donné par 1.3 appartient à $\mathcal{W}_k^{s_3}$ mais non à $\mathcal{W}_k^{s_1}$. Bien que sa projection sur la surface de niveau soit donnée en terme de A et A^* par l'action de

$$e^{4ia} = \text{Id}_{H_+} + g^*A^*Ag$$

(cf la démonstration du théorème 1.4.26), il n'est pas facile d'obtenir une expression simple du potentiel \hat{K}_1 en termes de l'orbite complexifiée.

Chapitre 2

Orbites coadjointes affines des L^* -groupes

2.1 Introduction

En dimension finie, les orbites (co-)adjointes d'un groupe de Lie compact semi-simple possèdent une structure naturelle de variétés kählériennes, la compacité du groupe n'intervenant que pour définir un produit scalaire invariant sur l'algèbre de Lie du groupe par le biais de la forme de Killing définie négative. Lorsqu'on passe aux groupes de Lie banachiques, la notion d'orbite (co-)adjointe apparaît trop restrictive et doit être élargie en la notion d'orbite (co-)adjointe affine, qui lui est équivalente en dimension finie, mais ne l'est plus en dimension infinie. Ceci est à relier au fait que les dérivations d'une algèbre de Lie de dimension infinie ne sont pas toutes intérieures. En particulier, la grassmannienne restreinte d'un espace de Hilbert H est une orbite (co-)adjointe affine du groupe unitaire $U_2(H)$, mais pas une orbite (co-)adjointe au sens classique du terme.

La seconde particularité du cadre banachique est que les orbites coadjointes (affines) ne possèdent pas nécessairement de structure naturelle de variétés, mais dès lors qu'elles en possèdent une, elles sont faiblement symplectiques. La structure de variété d'une orbite coadjointe est conditionnée par l'existence d'un supplémentaire topologique de l'algèbre de Lie du stabilisateur d'un point. En particulier pour les L^* -groupes, formant une classe de groupes de Lie hilbertiens aux propriétés algébriques semblables à celles des groupes de Lie de dimension finie, toute orbite coadjointe affine possède une structure naturelle de variété fortement symplectique.

Ce second chapitre est consacré à la généralisation des constructions de métriques hyperkähleriennes obtenues par O. Biquard et P. Gauduchon dans [BG1], [BG2] et [BG3], plus précisément, à la construction de structures hyperkähleriennes sur les complexifications des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques des L^* -groupes semi-simples de type compact (le terme compact est ici utilisé par analogie à la situation en dimension finie pour notifier l'existence d'un produit scalaire invariant). Il est organisé en trois parties. La première est consacrée à la classification des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques des L^* -groupes simples de type compact, ainsi qu'à la théorie des racines fortement orthogonales qu'il a fallu développer dans ce cadre.

La seconde partie est consacrée à la démonstration du théorème de Mostow pour un L^* -groupe semi-simple de type compact. Dans la troisième partie, nous utilisons ces deux ingrédients pour construire une structure hyperkählérienne sur les orbites complexifiées des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques des L^* -groupes simples de type compact, grâce à la fibration de l'orbite complexifiée au dessus de l'orbite de type compact, puis sur l'espace (co-)tangent de ces orbites de type compact.

Dans les sections 2.2 et 2.3, nous exposons les résultats connus sur les L^* -groupes et les L^* -algèbres, ainsi que l'étude de leurs orbites coadjointes affines effectuée par K.H. Neeb dans [Nee1]. En section 2.4, nous intéressons aux orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques des L^* -groupes semi-simples de type compact. La classification des espaces hermitiens symétriques de dimension infinie a été obtenue par W. Kaup dans [Kau2] sur la base d'une caractérisation algébrique des variétés banachiques complexes simplement connexes et symétriques en termes de triplets de Jordan hermitiens. Nous donnons la classification des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques des L^* -groupe simples de type compact, généralisant la démonstration de la classification des espaces hermitiens symétriques de dimension finie de J. Wolf ([Wol2]), basée sur la notion de racine de type non-compact. Ce résultat montre a posteriori que tout espace hermitien symétrique irréductible est une orbite coadjointe affine d'un L^* -groupe. Chacune des orbites irréductibles obtenue est l'analogue en dimension infinie d'une orbite coadjointe affine hermitienne symétrique compact appartenant à l'une des familles infinies classiques. L'espace projectif d'un espace de Hilbert, la grassmannienne des p -plans d'un espace de Hilbert avec $p < +\infty$, ainsi que la grassmannienne restreinte en sont des exemples.

Le théorème de Mostow auquel nous faisons référence s'énonce comme suit. Soient G un groupe de Lie connexe compact semi-simple, dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} se décompose en $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, où \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe fermé K de G , et $G^{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. Alors $G^{\mathbb{C}}$ est homéomorphe au produit $G \times \exp i\mathfrak{m} \times \exp i\mathfrak{k}$. La démonstration de Mostow utilise la compacité de G et nous en donnons une généralisation en section 2.5 au cas où G est un L^* -groupe semi-simple de type compact, basée sur la complétude de son algèbre de Lie.

L'orbite complexifiée d'une orbite coadjointe affine \mathcal{O} hermitienne symétrique d'un L^* -groupe G semi-simple de type compact d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , est définie comme l'orbite de n'importe quel point de \mathcal{O} sous l'action coadjointe affine du L^* -groupe complexe connexe $G^{\mathbb{C}}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$. En section 2.6, nous montrons qu'une telle orbite complexifiée est fibrée au dessus de l'orbite de type compact, et possède une structure de variété hyperkählérienne. Puis nous construisons un isomorphisme de variétés fibrées entre cette orbite complexifiée et l'espace tangent de l'orbite de type compact. Finalement, nous explicitons la métrique hyperkählérienne induite sur l'espace tangent de l'orbite de type compact. Nous retrouvons ainsi, comme cas particulier, la structure hyperkählérienne de l'orbite complexifiée de la grassmannienne restreinte et de l'espace (co-)tangent de la grassmannienne restreinte établie dans le chapitre premier.

2.2 L^* -groupes et L^* -algèbres

2.2.1 Définitions, propriétés et exemples

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de L^* -algèbre et de L^* -groupe et exposons les premières propriétés issues des définitions. Les démonstrations en sont élémentaires mais ne figurent pas toujours dans la littérature (en particulier la proposition 2.2.17). Dans la suite, les produits scalaires hermitiens sur les espaces de Hilbert complexes considérés seront \mathbb{C} -anti-linéaires par rapport à la première variable, et \mathbb{C} -linéaires par rapport à la seconde.

Définition 2.2.1 Une L^* -algèbre \mathfrak{g} sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est une algèbre de Lie sur \mathbb{K} munit d'une structure d'espace de Hilbert sur \mathbb{K} telle que pour tout $x \in \mathfrak{g}$, il existe $x^* \in \mathfrak{g}$ vérifiant :

$$\langle [x, y], z \rangle = \langle y, [x^*, z] \rangle, \quad (2.1)$$

pour tous y, z appartenant à \mathfrak{g} .

Exemple 1 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie et \mathfrak{g}_0 une forme réelle compacte de \mathfrak{g} définie par une involution σ . Si on pose $x^* = -\sigma(x)$ et $\langle x, y \rangle = B(x^*, y)$, où B est la forme de Killing de \mathfrak{g} , alors \mathfrak{g} devient un espace de Hilbert complexe de dimension finie, l'application $x \mapsto x^*$ une conjugaison et la condition 2.1 est vérifiée, de sorte que \mathfrak{g} devient une L^* -algèbre.

Définition 2.2.2 Soit \mathfrak{g} une L^* -algèbre. On note :

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &:= \{x \in \mathfrak{g}, x^* = -x\} \\ \mathfrak{p} &:= \{x \in \mathfrak{g}, x^* = x\}, \end{aligned}$$

de sorte que $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. On dit que \mathfrak{g} est de type compact si $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}$, et de type hermitien si $\mathfrak{g} = \mathfrak{p}$.

Remarque 2.2.3 La notion de L^* -algèbre de type compact est une généralisation de la notion d'algèbre de Lie de dimension finie associée à un groupe de Lie compact.

Notations 2.2.4 Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, on note D_x l'opérateur linéaire défini par :

$$D_x(y) = [x, y].$$

pour tout y appartenant à \mathfrak{g} .

Remarque 2.2.5 D'après la propriété 2.1, l'adjoint de D_x est D_{x^*} .

Proposition 2.2.6 Pour tout $x \in \mathfrak{g}$, l'opérateur $D_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ est borné.

□ **Preuve de la proposition 2.2.6 :**

Montrons que le graphe de D_x est fermé. Soit $\{(y_n, D_x(y_n))\}$ une suite d'éléments du graphe de D_x convergeant vers un élément (y, z) de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Par continuité du produit scalaire de \mathfrak{g} , pour tout $t \in \mathfrak{g}$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle z, t \rangle &= \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} [x, y_n], t \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle [x, y_n], t \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle y_n, [x^*, t] \rangle = \langle \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n, [x^*, t] \rangle \\ &= \langle y, [x^*, t] \rangle = \langle [x, y], t \rangle. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Riesz, $z = [x, y]$. □

Proposition 2.2.7 *L'application $x \mapsto D_x$ est une application continue de \mathfrak{g} dans l'espace de Banach $B(\mathfrak{g})$ des opérateurs bornés sur \mathfrak{g} muni de la norme d'opérateur.*

□ **Preuve de la proposition 2.2.7 :**

Montrons que le graphe de l'application $x \mapsto D_x$ est fermé. Soit $\{(x_n, D_{x_n})\}$ une suite d'éléments du graphe convergeant vers $(x, D) \in \mathfrak{g} \times B(\mathfrak{g})$. Pour tout $y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_{x_n}(y) = - \lim_{n \rightarrow +\infty} [y, x_n] = D(y).$$

Par continuité de l'application D_y , $\lim_{n \rightarrow +\infty} [y, x_n] = [y, x]$, d'où $D(y) = [x, y]$, et $D = D_x$. □

Remarque 2.2.8 L'application $x \mapsto x^*$ est un automorphisme involutif de \mathfrak{g} , \mathbb{R} -linéaire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et \mathbb{C} -anti-linéaire lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Proposition 2.2.9 *Pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$, on a :*

$$[x, y]^* = [y^*, x^*].$$

□ **Preuve de la proposition 2.2.9 :**

Pour tous $z, t \in \mathfrak{g}$, il vient :

$$\begin{aligned} \langle [[x, y], z], t \rangle &= \langle [[x, z], y] + [x, [y, z]], t \rangle \\ &= \langle [x, z], [t, y^*] \rangle + \langle [y, z], [x^*, t] \rangle \\ &= \langle z, [x^*, [t, y^*]] \rangle + \langle z, [y^*, [x^*, t]] \rangle \\ &= \langle z, [[y^*, x^*], t] \rangle. \end{aligned}$$

□

Notations 2.2.10 Pour tous sous-ensembles A et B d'une L^* -algèbre \mathfrak{g} , on note $[A, B]$ la fermeture de l'espace vectoriel engendré par $\{[a, b], a \in A, b \in B\}$.

Définition 2.2.11 Une L^* -algèbre \mathfrak{g} est dite semi-simple si $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Elle est dite simple si elle n'est pas abélienne et si elle n'admet aucun idéal fermé non trivial.

Remarque 2.2.12 La propriété 2.1 implique que pour tout idéal i de \mathfrak{g} , l'orthogonal i^\perp est aussi un idéal de \mathfrak{g} . On en déduit la proposition suivante :

Proposition 2.2.13 *Toute L^* -algèbre est somme directe de son centre et d'un idéal semi-simple.*

□ **Preuve de la proposition 2.2.13 :**

Soit C le centre de \mathfrak{g} . Par continuité du crochet, C est fermé. D'après la proposition 2.2.9, C est $*$ -stable. On en déduit qu'il en est de même de l'idéal C^\perp . Montrons que C^\perp est semi-simple. Soit $x \in [C^\perp, C^\perp]^\perp \cap C^\perp$. Pour tout $u, v \in C^\perp$, on a :

$$\langle [u, x], v \rangle = \langle x, [u^*, v] \rangle = 0,$$

donc $[u, x] \in (C^\perp)^\perp = C$. Puisque C^\perp est un idéal, $[u, x] \in C^\perp \cap C = \{0\}$. Il en découle que x commute à C et à C^\perp , donc appartient au centre de \mathfrak{g} . Or $x \in C^\perp$, donc $x = 0$. □

Proposition 2.2.14 Si \mathfrak{g} est semi-simple, alors :

$$\langle x, y \rangle = \langle y^*, x^* \rangle,$$

pour tous x et y de \mathfrak{g} , de sorte que l'application $x \mapsto x^*$ est une conjugaison de l'espace de Hilbert \mathfrak{g} . L'algèbre \mathfrak{g} est alors la complexification de la L^* -algèbre réelle formée des éléments anti-auto-adjoints.

□ **Preuve de la proposition 2.2.14 :**

Soient $x, a, b \in \mathfrak{g}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \langle x, [a, b] \rangle &= -\langle [x, a^*], b \rangle = \langle a^*, [b, x^*] \rangle \\ &= \langle [b^*, a^*], x^* \rangle = \langle [a, b]^*, x^* \rangle. \end{aligned}$$

Puisque $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, par linéarité et continuité du produit scalaire, on en déduit que $\langle x, y \rangle = \langle y^*, x^* \rangle$ pour tout $x, y \in \mathfrak{g}$. □

Proposition 2.2.15 Soit \mathfrak{i} un idéal fermé d'une algèbre de Lie semi-simple. Alors :

$$[\mathfrak{i}^*, \mathfrak{i}^\perp] = 0.$$

□ **Preuve de la proposition 2.2.15 :**

Puisque \mathfrak{i}^\perp est un idéal de \mathfrak{g} , on a :

$$[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}^\perp] = 0.$$

Comme \mathfrak{g} est semi-simple, on en déduit que :

$$\mathfrak{i} = [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] \quad \text{et} \quad \mathfrak{i}^* = [\mathfrak{i}^*, \mathfrak{i}^*].$$

Soient $a, b \in \mathfrak{i}$ et $z \in \mathfrak{i}^\perp$. Pour tout $y \in \mathfrak{g}$, on a :

$$\langle y, [[b^*, a^*], z] \rangle = \langle y, [[a, b]^*, z] \rangle = \langle [[a, b], y], z \rangle = 0.$$

Ainsi $[[b^*, a^*], z] = 0$. Par linéarité et continuité du crochet, on en déduit que $[\mathfrak{i}^*, \mathfrak{i}^\perp] = 0$. □

Corollaire 2.2.16 Pour tout idéal \mathfrak{i} d'une L^* -algèbre semi-simple, on a :

$$[(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*)^\perp, \mathfrak{i}] = 0.$$

□ **Preuve du corollaire 2.2.16 :**

Soient $u \in (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*)^\perp$ et $v \in \mathfrak{i}$. Pour tout z de \mathfrak{g} dont la décomposition selon la somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{i} \oplus \mathfrak{i}^\perp$ s'écrit $z = z_0 + z_1$, on a :

$$\langle [u, v], z \rangle = \langle u, [z_0, v^*] \rangle + \langle u, [z_1, v^*] \rangle = 0,$$

car $[z_0, v^*] \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*$ et $[z_1, v^*] \in [\mathfrak{i}^\perp, \mathfrak{i}^*] = \{0\}$. D'après le théorème de Riesz, $[u, v] = 0$. □

Proposition 2.2.17 Tout idéal fermé d'une L^* -algèbre semi-simple est $*$ -stable.

□ **Preuve de la proposition 2.2.17 :**

Soit \mathfrak{i} un idéal fermé d'une L^* -algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} . \mathfrak{i} se décompose en somme orthogonale de deux idéaux :

$$\mathfrak{i} = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^* \oplus (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*)^\perp \cap \mathfrak{i}.$$

D'après le corollaire 2.2.16, on a $[(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*), (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*)^\perp] = 0$ et :

$$[(\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*)^\perp \cap \mathfrak{i}, (\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*)^\perp \cap \mathfrak{i}] = 0,$$

ce qui implique que $[\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = [\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*, \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*]$. Comme \mathfrak{g} est semi-simple, $\mathfrak{i} = [\mathfrak{i}, \mathfrak{i}] = [\mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*, \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*] = \mathfrak{i} \cap \mathfrak{i}^*$. □

Remarque 2.2.18 Rappelons qu'en dimension infinie, une algèbre de Lie ne s'intègre pas forcément en un groupe de Lie. Un exemple d'algèbre de Lie banachique qui ne soit pas l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est donnée par W. Van Est et Th.J. Korthagen dans [EK]. Cependant, la proposition précédente, associée au fait que toute algèbre de Lie banachique possédant une représentation fidèle s'intègre en un groupe de Lie banachique, permet de démontrer la proposition suivante ([Nee1] ou [Nee2]) :

Proposition 2.2.19 *Pour toute L^* -algèbre \mathfrak{g} , il existe un groupe de Lie hilbertien G d'algèbre de Lie \mathfrak{g} .*

Définition 2.2.20 Un groupe de Lie hilbertien associé à une L^* -algèbre est appelé L^* -groupe.

Exemple 2 Soient H un espace de Hilbert complexe, $L^2(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H et id l'application identité. L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C}) := L^2(H)$ muni du commutateur de deux opérateurs comme crochet de Lie, de l'adjonction comme involution $*$ et du produit scalaire :

$$\langle X, Y \rangle := \text{Tr } X^*Y,$$

défini pour tous X, Y de $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$, est une L^* -algèbre complexe. Le groupe de Lie hilbertien correspondant est :

$$GL_2(H, \mathbb{C}) := \{g \in GL(H), g - id \in L^2(H)\}.$$

Exemple 3 Soit β l'application \mathbb{C} -bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$ définie par :

$$\beta(X, Y) = \text{Tr } X^T Y,$$

pour tous X, Y appartenant à $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$, où X^T désigne l'application transposée de X (relativement à la structure d'espace de Hilbert réel de H). L'algèbre de Lie complexe orthogonale :

$$\mathfrak{o}_2(H, \mathbb{C}) := \{X \in \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C}), X^T + X = 0\}$$

est une sous- L^* -algèbre de $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$. Le L^* -groupe orthogonal associé est :

$$O_2(H, \mathbb{C}) := \{g \in GL_2(H, \mathbb{C}), g^T g = id\}.$$

Exemple 4 Soit $\Phi = \{e_{-1}, e_{-2}, \dots, e_1, e_2, \dots\}$ une base orthonormée de H , et J l'opérateur linéaire défini par : $\forall i > 0, J e_{-i} := -e_i$ et $J e_i := e_{-i}$. L'algèbre de Lie symplectique complexe :

$$\mathfrak{sp}_2(H, J) := \{x \in \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C}), X^T J + J X = 0\}$$

est la sous- L^* -algèbre de $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$ préservant la forme \mathbb{C} -bilinéaire anti-symétrique γ définie par :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C}), \gamma(X, Y) := \text{Tr}(X^T J Y).$$

Le groupe symplectique complexe associé est :

$$Sp_2(H, J) := \{g \in GL_2(H, \mathbb{C}), g^T J g = J\}.$$

2.2.2 Systèmes de racines des L^* -algèbres complexes

Dans ce paragraphe, \mathfrak{g} désigne une L^* -algèbre complexe semi-simple séparable. Les résultats présentés dans cette section sont classiques. Nous incluons les démonstrations des propositions qui seront utilisées par la suite afin de rendre l'exposé aussi auto-suffisant que possible. Pour le reste, nous renvoyons le lecteur à [Schu1] ou à [Bou].

Définition 2.2.21 Une sous-algèbre de Cartan d'une L^* -algèbre semi-simple complexe \mathfrak{g} est une sous-algèbre abélienne, stable par $*$, et maximale parmi les sous-algèbres abélienne $*$ -stables.

Remarque 2.2.22 Par le lemme de Zorn, tout élément $x \in \mathfrak{g}$ tel que $[x, x^*] = 0$ est contenu dans une sous-algèbre de Cartan. Une sous-algèbre de Cartan est nécessairement fermée.

Proposition 2.2.23 Une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} est une sous-algèbre abélienne maximale et $\mathfrak{h}^\perp = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$.

□ **Preuve de la proposition 2.2.23 :**

Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre abélienne $*$ -stable, maximale parmi les sous-algèbres abéliennes $*$ -stable. Montrons que \mathfrak{h} est abélienne maximale. Soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $[\mathfrak{h}, x] = 0$. Alors $[\mathfrak{h}, x^*] = 0$ car \mathfrak{h} est $*$ -stable. Ainsi $[\mathfrak{h}, x + x^*] = [\mathfrak{h}, x - x^*] = 0$. Puisque \mathfrak{h} est $*$ -stable abélienne maximale, $x + x^*$ et $x - x^*$ appartiennent à \mathfrak{h} , de sorte que $x \in \mathfrak{h}$. Il en découle que \mathfrak{h} est une sous-algèbre abélienne maximale. D'autrepart, si $h_1 \in \mathfrak{h}$ et $x \in \mathfrak{g}$, alors pour tout $h_2 \in \mathfrak{h}$:

$$\langle h_2, [h_1, x] \rangle = \langle [h_1^*, h_2], x \rangle = 0,$$

ce qui implique que : $[h_1, x] \in \mathfrak{h}^\perp$. Ainsi $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}^\perp$. Réciproquement, si $x \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]^\perp$ on a :

$$\langle x, [h^*, y] \rangle = \langle [h, x], y \rangle = 0,$$

pour tout h de \mathfrak{h} et tout y de \mathfrak{g} , par conséquent : $[h, x] \in \mathfrak{g}^\perp = \{0\}$ pour tout h de \mathfrak{h} . L'algèbre \mathfrak{h} étant abélienne maximale, il en découle que x appartient à \mathfrak{h} . Ainsi $\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]^\perp$ et $\mathfrak{h}^\perp = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]$. □

Remarque 2.2.24 Dans le cas où \mathfrak{g} est de dimension finie, on retrouve la définition usuelle d'une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} . En effet, \mathfrak{h} est abélienne maximale, et $\forall x \in \mathfrak{h}$, $[x, x^*] = 0$, ainsi D_x est un opérateur normal, donc diagonalisable. D'après [Lie], ces deux propriétés caractérisent les sous-algèbres de Cartan d'une algèbre de Lie de dimension finie. Réciproquement, si \mathfrak{g} est une algèbre semi-simple de dimension finie et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan au sens classique du terme, alors il existe une forme réelle compacte \mathfrak{g}_0 de \mathfrak{g} associée à une involution σ telle que $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, ce qui implique que \mathfrak{g} est une L^* -algèbre pour l'anti-automorphisme $*$ défini par : $x^* = -\sigma(x)$, et \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Cartan au sens précédent.

Théorème 2.2.25 ([Schu1]) *Soit \mathfrak{g} une L^* -algèbre semi-simple. Il existe une suite d'idéaux fermés simples \mathfrak{g}_j , $*$ -stables, indexée par un ensemble J , telle que \mathfrak{g} soit somme directe hilbertienne des \mathfrak{g}_j pour $j \in J$. Tout idéal fermé de \mathfrak{g} est obtenu en sommant les \mathfrak{g}_j sur un sous-ensemble de J .*

Notations 2.2.26 Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan d'une L^* -algèbre semi-simple complexe \mathfrak{g} . Pour toute application linéaire $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$, on note V_α le sous-espace vectoriel fermé :

$$V_\alpha := \{v \in \mathfrak{g} \mid \forall h \in \mathfrak{h}, [h, v] = \alpha(h)v\}.$$

Définition 2.2.27 On dit que $\alpha : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ est une racine (relativement à \mathfrak{h}) si $V_\alpha \neq \{0\}$.

Remarque 2.2.28 La fonction nulle est une racine et $V_0 = \mathfrak{h}$ car \mathfrak{h} est abélienne maximale. Si α est une racine, alors c'est un homomorphisme de l'algèbre de Banach d'opérateurs engendrée par $\{D_h, h \in \mathfrak{h}\}$. Comme tout homomorphisme d'une algèbre de Banach est une application linéaire de norme au plus 1, une racine est nécessairement une application linéaire continue dont la norme est majorée par la norme de l'application $x \mapsto D_x$. De plus, la propriété 2.1 implique :

$$\alpha(h^*) = \overline{\alpha(h)}.$$

pour tout h de \mathfrak{h} .

Notations 2.2.29 On notera \mathcal{R} l'ensemble des racines non nulles de \mathfrak{g} .

Remarque 2.2.30 Si α est une racine, $-\alpha$ est une racine et $V_\alpha^* = V_{-\alpha}$. Si α et β sont deux racines distinctes alors $V_\alpha \perp V_\beta$. De plus, d'après l'identité de Jacobi : $[V_\alpha, V_\beta] \subset V_{\alpha+\beta}$.

Théorème 2.2.31 ([Schu2]) *Soit \mathfrak{g} une L^* -algèbre semi-simple et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan. Alors \mathfrak{g} possède une décomposition de Cartan relativement à \mathfrak{h} au sens au :*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} V_\alpha$$

comme somme hilbertienne, α parcourant l'ensemble \mathcal{R} des racines distinctes non nulles relatives à \mathfrak{h} .

Définition 2.2.32 Pour toute racine non nulle α , on appelle coracine et on note h_α l'élément de \mathfrak{h} tel que $\forall h \in \mathfrak{h}$, $\alpha(h) = \langle h, h_\alpha \rangle$. Remarquons que : $h_\alpha^* = h_\alpha$.

Proposition 2.2.33 Si α est une racine non nulle, alors V_α est de dimension 1.

□ **Preuve de la proposition** Soit $v_1 \in V_\alpha$ avec $\|v_1\| = 1$ et $v_2 \in V_\alpha$ avec $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$. Pour tout $v \in V_\alpha$, $[v_1, v^*] \subset [v_\alpha, V_{-\alpha}] = \mathfrak{h}$. Pour tout $h \in \mathfrak{h}$,

$$\langle h, [v_1, v^*] \rangle = \langle [h, v], v_1 \rangle = \langle h, h_\alpha \rangle \langle v, v_1 \rangle.$$

D'où : $[v_1, v^*] = \langle v_1, v \rangle h_\alpha$, en particulier : $[v_1, v_2^*] = 0$. De manière analogue, $[v_2, v_2^*] = \langle v_2, v_2 \rangle h_\alpha$. D'après l'identité de Jacobi et la propriété 2.1 :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle [v_1^*, v_2], [v_1^*, v_2] \rangle = \langle v_1^*, [[v_1^*, v_2], v_2^*] \rangle \\ &= \langle v_1^*, [v_1^*, [v_2, v_2^*]] + [[v_1^*, v_2^*], v_2] \rangle = \langle v_1^*, [v_1^*, \|v_2\|^2 h_\alpha] \rangle + \|[v_1^*, v_2^*]\|^2 \\ &= \langle v_1^*, \|v_2\|^2 \alpha(h_\alpha) v_1^* \rangle + \|[v_1^*, v_2^*]\|^2 \\ &= \|h_\alpha\|^2 \|v_2\|^2 + \|[v_1^*, v_2^*]\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi $\|v_2\| = 0$ et $v_2 = 0$. □

Définition 2.2.34 Soit \mathcal{R} l'ensemble des racines non nulles relativement à une sous-algèbre de Cartan \mathfrak{h} de \mathfrak{g} . Par le lemme de Zorn, il est possible de décomposer \mathcal{R} en $\mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-$ avec \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- disjoint et tels que $\alpha \in \mathcal{R}_+ \Leftrightarrow -\alpha \in \mathcal{R}_-$. Une telle décomposition définit une relation d'ordre partiel strict sur \mathcal{R} par :

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0.$$

Dans la suite, on identifiera une telle décomposition avec l'ordre induit et on appellera racines positives les éléments de \mathcal{R}_+ .

Notations 2.2.35 Pour toute racine positive $\alpha \in \mathcal{R}_+$, soit $e_\alpha \in V_\alpha$ tel que $\|e_\alpha\| = 1$. Alors $e_\alpha^* \in V_{-\alpha}$ et $\|e_\alpha^*\| = 1$. Pour toute racine négative $\alpha \in \mathcal{R}_-$, on note $e_\alpha := e_{-\alpha}^*$, de sorte que pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, on a : $e_\alpha^* = e_{-\alpha}$.

Remarque 2.2.36 L'ensemble $\{e_\alpha, \alpha \in \mathcal{R}\}$ forme une base hilbertienne de \mathfrak{h}^\perp et :

$$[e_\alpha, e_\alpha^*] = h_\alpha.$$

Proposition 2.2.37 Si β est une racine et α une racine non nulle, alors la suite $\{\beta - k\alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ contient seulement un nombre fini de racines.

□ **Preuve de la proposition 2.2.37 :**

Si $\beta - k\alpha$ est une racine et C la norme de l'application $x \mapsto D_x$, alors :

$$C \geq \|h_{\beta - k\alpha}\| = \|h_\beta - kh_\alpha\| \geq |k| \left| \|h_\alpha\| - \|h_\beta\| \right|,$$

de sorte que k est borné. □

Notations 2.2.38 Soit β est une racine et α une racine non nulle. On note $k_1(\alpha, \beta)$ et $k_2(\alpha, \beta)$ les entiers tels que $\beta + k\alpha$ est une racine pour $-k_1(\alpha, \beta) \leq k \leq k_2(\alpha, \beta)$ et tels que $\beta - (k_1(\alpha, \beta) + 1)\alpha$ et $\beta + (k_2(\alpha, \beta) + 1)\alpha$ ne sont pas des racines.

Définition 2.2.39 On définit un produit scalaire sur \mathfrak{h}' par :

$$(\alpha, \beta) := \langle h_\alpha, h_\beta \rangle,$$

pour tout α, β appartenant à \mathfrak{h}' , où $\alpha(h) = \langle h, h_\alpha \rangle$ et $\beta(h) = \langle h, h_\beta \rangle$, $\forall h \in \mathfrak{h}$.

Proposition 2.2.40 *Si β est une racine et α une racine non nulle telles que $\alpha + \beta$ soit une racine, alors l'espace vectoriel engendré par les $e_{\beta-k\alpha}$ pour $-k_1(\alpha, \beta) \leq k \leq k_2(\alpha, \beta)$ est un \mathfrak{sl}_2 -module irréductible de dimension finie. En outre $V_{\alpha+\beta}$ est engendré par $[e_\alpha, e_\beta]$ et $n(\beta, \alpha) := 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ est un entier.*

□ **Preuve de la proposition 2.2.40 :**

Posons

$$H_\alpha := \frac{2}{\|h_\alpha\|^2} h_\alpha \quad \text{et} \quad Y_\alpha := \frac{2}{\|h_\alpha\|^2} e_{-\alpha}.$$

On a :

$$[e_\alpha, Y_\alpha] = H_\alpha \quad [H_\alpha, e_\alpha] = 2e_\alpha \quad [H_\alpha, Y_\alpha] = -2Y_\alpha,$$

ce qui signifie que e_α, Y_α et H_α forment un \mathfrak{sl}_2 -triplet. L'espace vectoriel engendré par les $e_{\beta-k\alpha}$ pour $-k_1(\alpha, \beta) \leq k \leq k_2(\alpha, \beta)$ est un \mathfrak{sl}_2 -module irréductible de dimension finie. En particulier, $\text{ad}(e_\alpha) : V_\beta \rightarrow V_{\beta+\alpha}$ est bijectif et $V_{\beta+\alpha}$ est engendré par $[e_\alpha, e_\beta]$. De plus :

$$[H_\alpha, e_\beta] = \frac{2}{\|h_\alpha\|^2} [h_\alpha, e_\beta] = \frac{2}{\|h_\alpha\|^2} \beta(h_\alpha) e_\beta = \frac{2}{\|h_\alpha\|^2} \langle h_\alpha, h_\beta \rangle e_\beta = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} e_\beta$$

et $n(\beta, \alpha) := 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ est entier. □

Corollaire 2.2.41 *Si α et β sont deux racines non proportionnelles telles que $n(\beta, \alpha) > 0$, alors $\beta - \alpha$ est une racine.*

□ **Preuve du corollaire 2.2.41 :**

Avec les notations de la proposition précédente, on a $[H_\alpha, e_\beta] = n(\beta, \alpha)e_\beta$ avec $n(\beta, \alpha) > 0$. On en déduit que $[Y_\alpha, e_\beta] \neq 0$ et engendre $V_{\beta-\alpha}$. □

Définition 2.2.42 Une racine positive α est dite simple si elle ne peut s'écrire comme la somme de deux racines positives.

Notations 2.2.43 Étant donné un ordre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-$ sur l'ensemble des racines non nulles \mathcal{R} , on désignera par \mathcal{S} l'ensemble des racines simples.

Définition 2.2.44 Un sous-ensemble \mathcal{N} de l'ensemble des racines non nulles \mathcal{R} est appelé système de racine si :

1. $\alpha \in \mathcal{N} \Rightarrow -\alpha \in \mathcal{N}$,
2. $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ et $\alpha + \beta \in \mathcal{R} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathcal{N}$.

Définition 2.2.45 Un sous-ensemble \mathcal{N} de l'ensemble des racines non nulles \mathcal{R} est dit indécomposable si \mathcal{N} ne peut pas s'écrire comme l'union de deux sous-ensembles non-vides orthogonaux.

Proposition 2.2.46 ([Schu1]) *Si \mathfrak{g} est une L^* -algèbre simple alors \mathcal{R} est indécomposable. Soit F un sous-ensemble indécomposable de l'ensemble des racines non nulles \mathcal{R} d'une algèbre de Lie semi-simple \mathfrak{g} , alors le système de racine \mathcal{N}_F engendré par F est indécomposable et la sous-algèbre $\mathfrak{g}(\mathcal{N}_F)$ de \mathfrak{g} engendrée par les $e_\alpha, \alpha \in \mathcal{N}_F$, est simple.*

Un corollaire de la proposition 2.2.37 est la proposition suivante :

Proposition 2.2.47 ([Schu1]) *Pour tout sous-ensemble fini F de l'ensemble des racines non nulles \mathcal{R} d'une L^* -algèbre simple, il existe un système fini indécomposable de racines non nulles contenant F .*

2.2.3 Classification des L^* -algèbres simples

Dans ce paragraphe, nous énonçons les résultats à la base de la classification des L^* -algèbres simples complexes obtenus par J.R. Schue dans [Schu1]. Dans la suite du paragraphe, \mathfrak{g} désignera une L^* -algèbre complexe séparable semi-simple et \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan.

Remarque 2.2.48 Si \mathfrak{g} est une L^* -algèbre séparable, l'ensemble $\{e_\alpha, \alpha \in \mathcal{R}\}$ est dénombrable, de sorte que l'ensemble \mathcal{R} des racines non nulles est dénombrable.

Théorème 2.2.49 ([Schu1]) Soit \mathfrak{g} une L^* -algèbre simple séparable et $\mathcal{R} = \{\alpha_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ l'ensemble des racines. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Il existe une suite $\{\mathcal{N}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de sous-ensembles finis de \mathcal{R} tels que :

1. $F_n \subset \mathcal{N}_n \subset \mathcal{N}_{n+1}$
2. \mathcal{N}_n est un système de racines indécomposable
3. $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{N}_n$
4. Les sous-algèbres simples $\mathfrak{g}(\mathcal{N}_n)$ forment une suite croissante avec

$$\mathfrak{g} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{g}(\mathcal{N}_n)}$$

5. Les sous-algèbres simples de dimensions finies $\mathfrak{g}(\mathcal{N}_n)$ sont toutes de même type A, B, C ou D.

Proposition 2.2.50 ([Schu1]) Étant donné une suite $\{\mathcal{N}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ comme dans le théorème précédent, il est possible de définir un ordre total sur l'espace vectoriel réel engendré par l'ensemble des racines tel que :

1. $\alpha > 0 \Rightarrow -\alpha < 0$,
2. $\alpha > 0, \beta > 0 \Rightarrow \alpha + \beta > 0$,
3. Si $\alpha > 0$ et $\alpha \notin \mathcal{N}_n$ alors $\alpha > \beta$ pour tout $\beta \in \mathcal{N}_n$,
4. l'ordre induit sur \mathcal{N}_n est un ordre lexicographique relativement à une base de racines.

Proposition 2.2.51 ([Schu1]) Soit \mathcal{S} l'ensemble des racines simples de \mathfrak{g} relativement à l'ordre précédent.

1. $\mathcal{S} \cap \mathcal{N}_n$ est un système complet de racines simples de $\mathfrak{g}(\mathcal{N}_n)$, i.e. toute racine positive α de \mathcal{N}_n s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de $\mathcal{S} \cap \mathcal{N}_n$.
2. Si α et β appartiennent à \mathcal{S} , $\alpha - \beta$ est une racine si et seulement si $\alpha = \beta$, de sorte que $k_1(\alpha, \beta) = k_1(\beta, \alpha) = 0$
3. \mathcal{S} est un système linéairement indépendant sur \mathbb{R} et toute racine positive $\alpha \in \mathcal{R}_+$ est une combinaison linéaire d'éléments de \mathcal{S} à coefficients entiers positifs ou nuls, nuls sauf un nombre fini.
4. Si $\tau = \sum_i n_i \alpha_i$ avec $\alpha_i \in \mathcal{S}$ et $n_i = 0$ sauf un nombre fini, alors pour savoir si τ est une racine, il suffit de connaître $\langle h_\alpha, h_\beta \rangle$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathcal{S}$.

Définition 2.2.52 Soit \mathcal{S} l'ensemble des racines simples d'une L^* -algèbre simple \mathfrak{g} munie d'une décomposition de l'ensemble des racines en racines positives et négatives. Le graphe de \mathcal{S} est l'ensemble des $\langle h_\alpha, h_\beta \rangle$ où α et β parcourent \mathcal{S} .

Définition 2.2.53 Soient \mathfrak{g}_1 (resp. \mathfrak{g}_2) une L^* -algèbre simple séparable, \mathfrak{h}_1 (resp. \mathfrak{h}_2) une sous-algèbre de Cartan et \mathcal{G}_1 (resp. \mathcal{G}_2) le graphe correspondant à un ordre sur les racines. On dit que \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont isomorphes s'il existe une application φ envoyant une racine simple α de \mathfrak{g}_1 sur une racine simple $\varphi(\alpha)$ de \mathfrak{g}_2 de telle sorte que :

$$(\alpha, \beta) = (\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$$

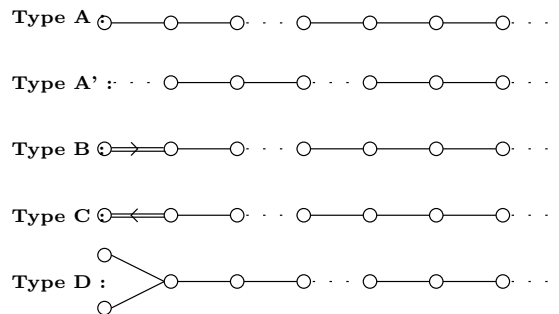
pour tout α, β appartenant à \mathcal{S} .

Théorème 2.2.54 ([Schu1]) Soient \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 deux L^* -algèbres simples séparables tels que les graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 relatifs au choix de sous-algèbres de Cartan et d'ordres sur les racines soient isomorphes. Alors \mathfrak{g}_1 et \mathfrak{g}_2 sont isomorphes en tant que L^* -algèbres.

Définition 2.2.55 On appelle diagramme de Coxeter d'une L^* -algèbre semi-simple \mathfrak{g} le graphe dont les sommets sont les racines simples α relatives au choix d'un ordre sur les racines, et dont les arêtes entre deux racines distinctes α et β sont au nombre de $n(\alpha, \beta).n(\beta, \alpha)$. On appelle diagramme de Dynkin d'une L^* -algèbre semi-simple \mathfrak{g} le diagramme de Coxeter habillé des rapports des longueurs entre deux racines simples.

Le théorème 2.2.54 implique que le diagramme de Dynkin détermine une classe d'isomorphisme de L^* -algèbres simples. Le théorème 2.2.49 ainsi que la proposition 2.2.50 permettent de déduire de la classification des algèbres de Lie simples de dimension finie le théorème suivant :

Théorème 2.2.56 ([Schu1]) Les diagrammes de Dynkin possibles d'une L^* -algèbre simple de dimension infinie sont les suivants (ici la flèche sur une arête pointe vers la plus longue racine) :



TAB. 2.1 – Diagrammes de Dynkin possibles des L^* -algèbres simples complexes de dimension infinie

Remarque 2.2.57 Dans [Schu1], J. R. Schue montre que chacun des cinq diagrammes de type A, A', B, C et D apparaît effectivement comme diagramme de Dynkin d'une L^* -algèbre simple. C'est une particularité de la dimension infinie que deux diagrammes de Dynkin différents peuvent définir deux L^* -algèbres isomorphes. Plus précisément, J. R. Schue montre que les diagrammes A et A' sont isomorphes, de même que les diagrammes B et D.

Théorème 2.2.58 ([Schu1]) *Toute L^* -algèbre complexe simple séparable de dimension infinie est isomorphe à $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$ (Type A ou A'), $\mathfrak{o}_2(H, \mathbb{C})$ (Type B ou D) ou $\mathfrak{sp}_2(H, J)$ (Type C) pour un certain espace de Hilbert H .*

La classification des L^* -algèbres simples réelles a été effectuées indépendamment par Balachandran, de La Harpe et Unsain. Plus précisément, ils ont montré le théorème suivant :

Théorème 2.2.59 ([Bal], [Har2], [Uns2]) *Toute L^* -algèbre réelle simple séparable de dimension infinie de type compact est isomorphe à l'une des L^* -algèbres non isomorphes suivantes pour un certain espace de Hilbert H :*

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_2(H, \mathbb{C}) &:= \{ \mathfrak{a} \in \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C}), \mathfrak{a}^* + \mathfrak{a} = 0 \} \\ \mathfrak{o}_2(H, \mathbb{R}) &:= \{ \mathfrak{a} \in \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{R}), \mathfrak{a}^T + \mathfrak{a} = 0 \} \\ \mathfrak{sp}_2(H, \mathbb{H}) &:= \{ \mathfrak{a} \in \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{H}), \bar{\mathfrak{a}}^T + \mathfrak{a} = 0 \}, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{H})$ désigne l'ensemble des applications \mathbb{H} -linéaire relativement à la donnée d'un anti-automorphisme de carré -1 sur un espace de Hilbert complexe H , et où, pour $x = x_0 + x_1i + x_2j + x_3ij \in \mathbb{H}$, $\bar{x} = x_0 - x_1i - x_2j - x_3ij$.

2.3 Orbites coadjointes affines

2.3.1 Généralités sur les orbites coadjointes affines

Dans ce paragraphe, nous définissons la notion d'orbite (co-)adjointe affine introduite par K.H. Neeb dans [Nee1].

Notations 2.3.1 Soit V un espace de Banach. On note $\text{Aff}(V) = GL(V) \ltimes V$ le groupe de transformations affines de V . Un élément $(g, x) \in \text{Aff}(V)$ agit sur un élément $v \in V$ par :

$$(g, x).v = g(v) + x.$$

Remarque 2.3.2 $\text{Aff}(V)$ est un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{aff}(V) := \mathfrak{gl}(V) \ltimes V,$$

muni de la topologie produit et du crochet de Lie suivant :

$$\forall (A, X), (B, Y) \in \mathfrak{gl}(V) \ltimes V,$$

$$[(A, X), (B, Y)] = ([A, B], AY - BX).$$

Définition 2.3.3 Une représentation affine d'un groupe de Lie G est un morphisme de groupe de Lie $\rho : G \rightarrow \text{Aff}(V)$ où V est un espace de Banach. Une représentation affine d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un morphisme d'algèbre de Lie $\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{aff}(V)$.

Remarque 2.3.4 Un morphisme de groupe $\rho : G \rightarrow \text{Aff}(V)$ est donné par une paire (ρ_l, Θ) où ρ_l est un morphisme de groupe de G dans $GL(V)$ et où

$$\Theta : G \rightarrow V,$$

satisfait :

$$\forall g_1, g_2 \in G, \Theta(g_1 g_2) = \rho_l(g_1)\Theta(g_2) + \Theta(g_1).$$

Un morphisme d'algèbre de Lie $\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{aff}(V)$ est donné par une paire (γ_l, θ) où γ_l est un morphisme d'algèbre de Lie de \mathfrak{g} dans $\mathfrak{gl}(V)$ et où

$$\theta : \mathfrak{g} \rightarrow V,$$

satisfait :

$$\forall A, B \in \mathfrak{g}, \theta([A, B]) = \gamma_l(A)\theta(B) - \gamma_l(B)\theta(A).$$

Définition 2.3.5 Une représentation coadjointe (resp. adjointe) affine d'un groupe de Lie banachique G est une représentation affine $\rho = (\rho_l, \Theta)$ sur le dual continu \mathfrak{g}' de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G (resp. sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G) telle que ρ_l soit la représentation coadjointe Ad^* (resp. adjointe Ad) de G sur \mathfrak{g}' (resp. sur \mathfrak{g}).

Une représentation coadjointe (resp. adjointe) affine d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est une représentation affine $\gamma = (\gamma_l, \theta)$ de \mathfrak{g} sur son dual continu \mathfrak{g}' (resp. sur \mathfrak{g}) telle que γ_l soit la représentation coadjointe ad^* (resp. adjointe ad) de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}' (resp. sur \mathfrak{g}).

Proposition 2.3.6 Un 2-cocycle continu ω sur une algèbre de Lie \mathfrak{g} définit une représentation coadjointe affine de \mathfrak{g} par :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \theta(X)(Y) := \omega(X, Y).$$

□ **Preuve de la proposition 2.3.6 :**

Il suffit de vérifier que $\theta([X, Y]) = \text{ad}^*(X)\theta(Y) - \text{ad}^*(Y)\theta(X)$ ce qui est une simple réécriture de la condition de cocycle :

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \omega(X, [Y, Z]) + \omega(Y, [X, Z]) + \omega(Z, [X, Y]) = 0.$$

□

Remarque 2.3.7 Étant donnée une représentation coadjointe affine $\gamma = (\text{ad}^*, \theta)$ d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'application $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{K}$ définie par :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \omega(X, Y) := \theta(X)(Y),$$

est continue, mais pas alternée en général, de sorte que l'on n'obtient pas toutes les représentations coadjointes affines en considérant celles qui sont issues d'un 2-cocycle continu.

Remarque 2.3.8 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie banachique associée à un groupe de Lie G . Si G est simplement connexe, alors toute représentation affine $\gamma = (\gamma_l, \theta)$ de \mathfrak{g} s'intègre en une unique représentation affine $\rho = (\rho_l, \Theta)$ de G avec $d\rho_l = \gamma_l$ et $d\Theta = \theta$.

Notations 2.3.9 Pour tout 2-cocycle continu ω sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} d'un groupe de Lie banachique G simplement connexe, on note Ad_ω^* la représentation coadjointe affine de G obtenue en intégrant la représentation coadjointe affine $\text{ad}_\omega^* = (\text{ad}^*, \theta)$ où θ est défini par :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \theta(X)(Y) = \omega(X, Y).$$

Pour tout $f \in \mathfrak{g}'$, le stabilisateur de f est le sous-groupe de Lie de G :

$$\text{Stab}(f) := \{g \in G, \text{Ad}_\omega^*(f) = f\},$$

d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{stab}(f) := \{X \in \mathfrak{g}, \theta(X) = f \circ \text{ad}(X)\}.$$

Proposition 2.3.10 *Soit ρ_ω une représentation coadjointe affine d'un groupe de Lie G provenant d'un 2-cocycle continu ω et $f \in \mathfrak{g}'$. Si le stabilisateur $\mathfrak{stab}(f)$ possède un supplémentaire topologique dans \mathfrak{g} , alors l'orbite coadjointe affine $\mathcal{O}_f := \{\rho_\omega(g)(f), g \in G\}$ de f possède une structure naturelle de variété faiblement symplectique.*

□ **Preuve de la proposition 2.3.10 :**

Si $\mathfrak{stab}(f)$ possède un supplémentaire topologique, alors l'identification $\mathcal{O}_f = G/\text{Stab}(f)$ permet de définir sur \mathcal{O}_f une structure naturelle de variété banachique sur laquelle G agit de manière lisse et transitive. L'espace tangent à \mathcal{O}_f en f s'identifie à $\mathfrak{g}/\mathfrak{stab}(f)$. Sur \mathfrak{g} , on définit une forme bilinéaire alternée continue Ω_f par :

$$\Omega_f(\text{ad}_\omega^*(X), \text{ad}_\omega^*(Y)) := \omega(X, Y) - f([X, Y]),$$

où $X, Y \in \mathfrak{g}$. Le noyau de Ω_f étant $\mathfrak{stab}(f)$, Ω_f définit une forme bilinéaire alternée non dégénérée sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{stab}(f)$, invariante sous l'action de $\text{Stab}(f)$. Soit Ω la 2-forme G -invariante sur \mathcal{O}_f coïncidant avec Ω_f sur $T_f\mathcal{O}_f$. Ω est fermée car ω est un 2-cocycle et l'application $(X, Y) \rightarrow f([X, Y])$ un 2-cobord. Ω est donc bien une forme faiblement symplectique sur \mathcal{O}_f . □

Remarque 2.3.11 Soit ω un 2-cocycle sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} d'un groupe de Lie simplement connexe G et Ad_ω^* la représentation coadjointe affine associée. Soit $\alpha \in \mathfrak{g}'$ et $\tilde{\omega}_\alpha := \omega + d\alpha$. On a :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \tilde{\omega}_\alpha(X, Y) = \omega(X, Y) - \alpha([X, Y]),$$

et

$$\tilde{\theta}_\alpha(X) = \theta(X) + \text{ad}^*(X)(\alpha),$$

de sorte que pour tout g de G :

$$\tilde{\Theta}_\alpha(g) = \Theta(g) + \text{Ad}^*(g)(\alpha) - \alpha.$$

Ainsi la translation

$$\begin{array}{ccc} \tau_\alpha : \mathfrak{g}' & \rightarrow & \mathfrak{g}' \\ \beta & \mapsto & \beta + \alpha, \end{array}$$

satisfait

$$\text{Ad}_\omega^*(g) \circ \tau_\alpha = \tau_\alpha \circ \text{Ad}_{\tilde{\omega}_\alpha}^*(g),$$

ce qui exprime le fait que Ad_ω^* et $\text{Ad}_{\tilde{\omega}_\alpha}^*$ sont deux représentations équivalentes. Les orbites correspondantes vérifient : $\mathcal{O}_\beta = \tilde{\mathcal{O}}_{\beta-\alpha} + \alpha$, et cet isomorphisme préserve les structures symplectiques. Ainsi par translation, on peut toujours se ramener à l'orbite coadjointe de 0.

2.3.2 Orbites kählériennes des L^* -groupes simples de type compact

Dans ce paragraphe, nous exposons les résultats annoncés par K.H. Neeb dans [Nee1]. Le théorème 2.3.13 sera utilisé dans la paragraphe suivant.

Soit G un L^* -groupe réel simple de type compact d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , et $G^{\mathbb{C}}$ son complexifié, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Le produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ permet d'associer à tout 2-cocycle continu ω sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ un opérateur continu $\mathbb{D} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ par :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \omega(X, Y) = \langle X^*, \mathbb{D}Y \rangle. \quad (2.2)$$

La condition de cocycle implique que \mathbb{D} est un dérivation. De plus, le produit scalaire hermitien permet d'identifier les orbites coadjointes aux orbites adjointes.

Notations 2.3.12 Pour toute dérivation $\mathbb{D} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, on note $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ l'orbite adjointe affine de 0 correspondant à $\omega(X, Y) := \langle \mathbb{D}X, Y^* \rangle$.

$$\mathcal{O}_{\mathbb{D}} := \{ \text{Ad}^*(g)\mathbb{D} - \mathbb{D}, g \in G \}.$$

Dans le cas des L^* -groupes, toute orbite (co-)adjointe affine possède une structure naturelle de variété faiblement symplectique. Toutes les orbites (co-)adjointes affines ne sont cependant pas fortement symplectiques :

Théorème 2.3.13 ([Nee2]) *Pour toute dérivation $\mathbb{D} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ d'une L^* -algèbre réelle il vient :*

1. *l'orbite (co-)adjointe affine $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ est fortement symplectique si et seulement si l'image de \mathbb{D} est fermée,*
2. *Si l'image de \mathbb{D} est fermée, alors :*
 - (a) *\mathbb{D} est diagonalisable sur $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$*
 - (b) *$\text{Ker } \mathbb{D}$ contient une sous-algèbre de Cartan*
 - (c) *Si \mathfrak{g} est simple et $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$ (resp. $\mathfrak{o}_2(H, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}_2(H, J)$) pour un certain espace de Hilbert H , alors \mathbb{D} s'écrit : $\mathbb{D}(X) = [D, X]$ pour un opérateur antihermitien D (resp. réel antisymétrique, resp. antihermitien anti-commutant à J) à spectre fini.*

Le théorème suivant montre que toute orbite (co-)adjointe affine d'un L^* -groupe simple de type compact possédant une structure de variété fortement symplectique est fortement kählérienne :

Théorème 2.3.14 ([Nee2]) *Si \mathfrak{g} est une L^* -algèbre simple de type compact et \mathbb{D} une dérivation de \mathfrak{g} à image fermée, alors il existe un sous-groupe G_+ du L^* -groupe complexe $G^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ tel que G agisse transitivement sur l'espace homogène complexe $G^{\mathbb{C}}/G_+$ et de sorte que $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ soit isomorphe en tant que G -espace à $G^{\mathbb{C}}/G_+$. De plus, la structure complexe héritée de cette identification munie $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ d'une structure de variété fortement kählérienne.*

Remarque 2.3.15 Les orbites kählériennes ainsi obtenues sont les espaces de drapeaux :

1. **Pour** $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_2(H, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{C})$:

Notons d_1, \dots, d_k les valeurs propres de l'opérateur hermitien iD et $H_j := \text{Ker}(iD - d_j \text{id})$ les espaces propres correspondants. L'orbite adjointe affine

$$\mathcal{O}_D := \{gDg^{-1} - D, g \in U_2(H, \mathbb{C})\}$$

est isomorphe à l'espace homogène complexe $GL(H, \mathbb{C})/G_+$, G_+ étant le sous-groupe de Lie de $GL(H, \mathbb{C})$ préservant le drapeau $\mathcal{F} := (F_0, F_1, \dots, F_k)$ où $F_0 := \{0\}$ et $F_j := \sum_{i=1}^j H_i$. Cet espace de drapeaux a été étudié par G.Helminck et A.Helminck dans [HH].

2. **Pour** $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}_2(H, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{o}_2(H^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$:

Notons d_1, \dots, d_k les valeurs propres positives de iD sur \mathbb{C} , $d_0 = 0$ et d_{-j} la valeur propre $-d_j$ pour $j = 1, \dots, k$, ainsi que $H_j := \text{Ker}(iD - d_j)$ les espaces propres correspondants. L'espace de Hilbert complexe $H^{\mathbb{C}}$ se décompose en :

$$H^{\mathbb{C}} = H_k \oplus \dots \oplus H_1 \oplus H_0 \oplus H_{-1} \oplus \dots \oplus H_{-k},$$

où $\bar{H}_j = H_{-j}$. Le groupe $O_2(H, \mathbb{R})$ est le sous-groupe de $O_2(H^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ préservant la forme bilinéaire symétrique complexe définie par :

$$\forall X, Y \in H^{\mathbb{C}}, \beta(X, Y) := \langle \bar{X}, Y \rangle = \text{Tr } X^T Y,$$

et les espaces $F_j := \sum_{i=1}^j H_i$, $j = 1, \dots, k$ sont isotropes pour β . L'orbite adjointe affine

$$\mathcal{O}_D := \{gDg^{-1} - D, g \in O_2(H, \mathbb{R})\}$$

s'identifie à l'espace homogène complexe $O_2(H^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})/G_+$, G_+ étant le sous-groupe complexe de $O_2(H^{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ préservant le drapeau :

$$\{0\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_k \subseteq F_k^{\perp\beta} \subseteq \dots \subseteq F_2^{\perp\beta} \subseteq F_1^{\perp\beta} \subseteq F_0^{\perp\beta} = H.$$

3. **Pour** $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_2(H, \mathbb{H})$, $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{sp}_2(H, J)$:

Le fait que D anti-commute à J implique que :

$$J \text{Ker}(iD - d) = \text{Ker}(iD + d).$$

Notons d_1, \dots, d_k les valeurs propres positives de iD sur \mathbb{C} , $d_0 = 0$ et d_{-j} la valeur propre $-d_j$ pour $j = 1, \dots, k$, ainsi que $H_j := \text{Ker}(iD - d_j)$ les espaces propres correspondants. L'espace de Hilbert complexe $H^{\mathbb{C}}$ se décompose en :

$$H^{\mathbb{C}} = H_k \oplus \dots \oplus H_1 \oplus H_0 \oplus H_{-1} \oplus \dots \oplus H_{-k},$$

où $JH_j = H_{-j}$. Le groupe $Sp_2(H, \mathbb{H})$ est le sous-groupe de $Sp_2(H, J)$ préservant la forme bilinéaire symétrique complexe définie par :

$$\forall X, Y \in H^{\mathbb{C}}, \gamma(X, Y) := \langle \bar{X}, JY \rangle = \text{Tr } X^T JY,$$

et les espaces $F_j := \sum_{i=1}^j H_i$, $j = 1, \dots, k$ sont isotropes pour γ . L'orbite adjointe affine

$$\mathcal{O}_D := \{gDg^{-1} - D, g \in Sp_2(H, \mathbb{H})\}$$

s'identifie à l'espace homogène complexe $Sp_2(H, J)/G_+$, G_+ étant le sous-groupe complexe de $Sp_2(H, J)$ préservant le drapeau :

$$\{0\} = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots \subseteq F_k \subseteq F_k^{\perp\gamma} \subseteq \dots \subseteq F_2^{\perp\gamma} \subseteq F_1^{\perp\gamma} \subseteq F_0^{\perp\gamma} = H.$$

2.4 Orbites hermitiennes symétriques

2.4.1 Introduction

Un espace symétrique riemannien est une variété connexe \mathcal{M} telle que pour tout x de \mathcal{M} , il existe une isométrie globalement définie, s_x , qui préserve x et dont la différentielle en l'espace tangent à \mathcal{M} en x soit $-\text{id}$. L'isométrie s_x est appelée symétrie de \mathcal{M} en x . Une variété complexe munie d'une métrique hermitienne est un espace hermitien symétrique si la variété réelle sous-jacente, munie de la partie réelle de la métrique hermitienne, est symétrique et si les symétries préservent la métrique hermitienne.

En dimension finie, chaque classe d'isomorphisme d'espace riemannien symétrique \mathcal{M} simplement connexe est caractérisé par un triplet $(\mathfrak{g}, \sigma, B)$ comme suit. Soit G le plus grand groupe connexe d'isométries de \mathcal{M} et K le sous-groupe de G fixant un point $x \in \mathcal{M}$. Un espace symétrique étant complet, le théorème de Hopf-Rinow assure que G agit transitivement sur \mathcal{M} , et \mathcal{M} est difféomorphe à G/K . Soit \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , σ l'automorphisme de \mathfrak{g} induit par la conjugaison par la symétrie s_x et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ la décomposition de \mathfrak{g} en espaces propres de σ de valeurs propres $+1$ et -1 respectivement. \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie de K et :

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

En particulier l'action adjointe $\text{Ad}(K)$ de K sur \mathfrak{g} préserve \mathfrak{m} . Une métrique riemannienne sur \mathcal{M} est caractérisée par sa G -invariance et sa valeur en x . Cette dernière est déterminée par un produit scalaire $\text{Ad}(K)$ -invariant sur \mathfrak{m} , noté B .

Réciproquement, un triplet $(\mathfrak{g}, \sigma, B)$ détermine une classe d'isomorphisme d'espaces riemanniens symétriques simplement connexe, car en dimension finie, l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie simplement connexe G' , l'automorphisme σ fournit une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}' \oplus \mathfrak{m}$ en espaces propres de valeurs propres $+1$ et -1 respectivement, et le quotient G'/K' , où K' est le sous-groupe connexe de G' d'algèbre de Lie \mathfrak{k}' , est un espace riemannien symétrique simplement connexe, l'espace tangent en un point s'identifiant à \mathfrak{m} muni de B , la symétrie par rapport à un point étant la symétrie géodésique.

Remarquons qu'en dimension infinie, le théorème de Hopf-Rinow n'a plus cours (cf [Eke] pour un Ansatz), et, bien qu'un espace riemannien symétrique soit géodésiquement complet, rien ne garantit (a priori) que le groupe des isométries agit transitivement. D'autre part une algèbre de Lie banachique n'est pas toujours l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie banachique, ce qui ne permet pas de reconstituer un espace hermitien symétrique à partir d'un triplet $(\mathfrak{g}, \sigma, B)$, où \mathfrak{g} serait une algèbre de Lie banachique quelconque.

En s'appuyant sur l'étude des triplets de Jordan hermitiens ([Kau1]), W. Kaup a montré dans [Kau2] que tout espace hermitien symétrique \mathcal{M} de dimension infinie se décompose de manière unique en un produit orthogonal $\mathcal{M} = \mathcal{M}_+ \times \mathcal{M}_0 \times \mathcal{M}_-$, où \mathcal{M}_+ (resp. \mathcal{M}_0 , resp. \mathcal{M}_-) est un espace hermitien symétrique (éventuellement de dimension nulle) de courbure sectionnelle > 0 (resp. $= 0$, resp. < 0), généralisant ainsi le cas de la dimension finie. En outre, \mathcal{M}_+ et \mathcal{M}_- sont simplement connexes et \mathcal{M}_0 est le quotient d'un espace de Hilbert complexe par un sous-groupe discret de translations. Un espace hermitien symétrique de courbure sectionnelle positive (resp. négative, resp. nulle) est dit de type *compact* (resp. *non-compact*, resp. *plat*), par analogie au

cas de la dimension finie. W. Kaup montre qu'un espace hermitien symétrique simplement connexe \mathcal{M} est de type compact si et seulement si toute fonction holomorphe sur \mathcal{M} est constante, il est de type non-compact si et seulement si toute fonction holomorphe bornée sur \mathcal{M} sépare les points, et il est de type plat si et seulement si toute fonction holomorphe sur \mathcal{M} sépare les points et toute fonction holomorphe bornée est constante.

Un espace hermitien symétrique est dit irréductible s'il n'est pas isomorphe à un espace plat, et s'il n'est pas localement isomorphe à un produit $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ d'espaces hermitiens symétriques avec, pour $i = 1, 2$, $\dim(\mathcal{M}_i) > 0$. La classification des espaces hermitiens symétriques irréductibles de dimension infinie a été obtenue par W. Kaup dans [Kau2]. La démonstration en est très algébrique et repose sur l'étude des triplets de Jordan hermitiens.

Dans le paragraphe suivant, nous retrouvons cette classification par le biais de la classification des orbites adjointes affines hermitiennes symétriques irréductibles $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ d'une L^* -algèbre de type compact \mathfrak{g} , où \mathbb{D} est une dérivation de \mathfrak{g} . Cette classification est une généralisation de la classification des espaces hermitiens symétriques irréductibles de dimension finie par le biais des racines non-compactes des algèbres de Lie simples, obtenue par J. Wolf dans [Wol2]. En outre, ce résultat prouve a posteriori que tout espace hermitien symétrique irréductible est une orbite coadjointe affine d'un L^* -groupe.

2.4.2 Classification des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques irréductibles de type compact

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 *Les orbites adjointes affines hermitiennes symétriques irréductibles des L^* -algèbres simples de type compact sont isomorphes aux espaces homogènes suivants :*

1. $U_2(H) / (U_2(P_0) \times U_2(P_0^\perp))$, où P_0 est un sous-espace vectoriel complexe fermé d'un espace de Hilbert H , soit de dimension finie p , soit de dimension infinie p et de codimension infinie ;
2. $O_2^+(H, \mathbb{R}) / (SO(P_0) \times O_2^+(P_0^\perp))$ où P_0 est un 2-plan orienté de l'espace de Hilbert réel H ;
3. $O_2^+(H, \mathbb{R}) / U_2(H_{J_0})$, où H_{J_0} est l'espace de Hilbert complexe obtenu en munissant l'espace de Hilbert réel H d'une structure complexe J_0 , et où $O_2^+(H, \mathbb{R})$ est la composante connexe de l'identité de $O_2(H, \mathbb{R})$;
4. $Sp_2(H, \mathbb{H}) / U_2(P_0)$, où P_0 est un sous-espace lagrangien de l'espace de Hilbert symplectique complexe H .

Dans la suite, \mathfrak{g} désigne l'une des L^* -algèbres simples de dimension infinie séparable de type compact réalisée comme sous-algèbre réelle de $\mathfrak{gl}_2(H, \mathbb{R})$, où H est un espace de Hilbert réel, et G est le L^* -groupe connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{g} . Soit \mathbb{D} une dérivation de \mathfrak{g} , telle que l'orbite coadjointe affine de 0 dans \mathfrak{g} associée soit kählérienne. D'après le théorème 2.3.13, il existe $D \in B(H)$ vérifiant $D^* = -D$ tel que $\forall x \in \mathfrak{g}, \mathbb{D}x = [D, x]$, et une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ contenue dans $\text{Ker ad}(D)$. En identifiant orbite coadjointe et orbite adjointe par le biais du produit scalaire invariant, l'orbite adjointe \mathcal{O}_D obtenue est :

$$\mathcal{O}_D = \{gDg^{-1} - D \in \mathfrak{g}, g \in G\}$$

Notations 2.4.2 On notera $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ le stabilisateur de 0 et K le L^* -groupe associé :

$$\mathfrak{k} := \{x \in \mathfrak{g}, [D, x] = 0\}.$$

Définition 2.4.3 On dira que l'orbite adjointe affine \mathcal{O}_D est symétrique s'il existe un supplémentaire topologique \mathfrak{m} de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} invariant sous l'action adjointe de K vérifiant :

$$[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}.$$

Notations 2.4.4 Dans la suite de cette section, \mathcal{O}_D désignera une orbite adjointe affine symétrique de la L^* -algèbre simple \mathfrak{g} . On notera $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ l'algèbre de Lie complexifiée de \mathfrak{g} , $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ les complexifications de \mathfrak{k} et \mathfrak{m} , de sorte que $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est somme directe orthogonale de $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ et $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ relativement au produit scalaire hermitien de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Proposition 2.4.5 Soit $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ contenue dans $\text{Ker } adD$ et

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{R}} V_{\alpha}$$

la décomposition de Cartan associée, où \mathcal{R} désigne l'ensemble des racines non nulles de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ relativement à $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Alors il existe des sous-ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} de \mathcal{R} tels que $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{R}$ et tels que :

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{\alpha}, \quad \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} V_{\alpha}.$$

□ **Preuve de la proposition 2.4.5 :**

Puisque \mathcal{O}_D est symétrique, on a $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ avec :

$$[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}; \quad [\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}; \quad [\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}.$$

Soit v un vecteur non nul de V_{α} , et $v = v_0 + v_1$ sa décomposition selon la somme directe $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}^{\mathbb{C}} \oplus \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. Pour tout $h \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, on a :

$$[h, v] = [h, v_0 + v_1] = \alpha(h)(v_0 + v_1) = \alpha(h)v_0 + \alpha(h)v_1 = [h, v_0] + [h, v_1].$$

Comme $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ et $[\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$, il vient :

$$[h, v_0] = \alpha(h)v_0 \quad \text{et} \quad [h, v_1] = \alpha(h)v_1.$$

Or V_{α} est de dimension 1, donc soit $v_0 = 0$, soit $v_1 = 0$. Ainsi V_{α} est contenu soit dans $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ soit dans $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$. □

Proposition 2.4.6 Pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, il existe $c_{\alpha} \in \mathbb{R}$ tel que $[D, e_{\alpha}] = ic_{\alpha}e_{\alpha}$. De plus $c_{-\alpha} = -c_{\alpha}$.

□ **Preuve de la proposition 2.4.6 :**

Pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$ et tout $h \in \mathfrak{h}$, on a :

$$[h, [D, e_{\alpha}]] = [[h, D], e_{\alpha}] + [D, [h, e_{\alpha}]] = \alpha(h)[D, e_{\alpha}].$$

V_{α} étant de dimension 1, on en déduit que $[D, e_{\alpha}]$ est proportionnel à e_{α} . Puisque D vérifie $D^* = -D$, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}$, on a :

$$\langle [D, e_{\alpha}], e_{\alpha} \rangle = -\langle e_{\alpha}, [D, e_{\alpha}] \rangle = -\overline{\langle [D, e_{\alpha}], e_{\alpha} \rangle},$$

Ainsi il existe une constante réelle c_α telle que :

$$[D, e_\alpha] = ic_\alpha e_\alpha$$

D'autrepart,

$$[D, e_\alpha]^* = [e_\alpha^*, D^*] = -[e_\alpha^*, D] = [D, e_\alpha^*].$$

Ainsi :

$$\langle [D, e_\alpha^*], e_\alpha^* \rangle = \langle e_\alpha, [D, e_\alpha^*]^* \rangle = \langle e_\alpha, [D, e_\alpha] \rangle = -ic_\alpha.$$

□

Notations 2.4.7 On note \mathfrak{m}_+ (resp. \mathfrak{m}_-) le sous-espace vectoriel fermé de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ engendré par les e_α , ou α parcourt les racines telles que $c_\alpha > 0$ (resp. $c_\alpha < 0$). On note \mathcal{B}_+ (resp. \mathcal{B}_-) l'ensemble des racines β de \mathcal{B} telles que $V_\beta \in \mathfrak{m}_+$ (resp. $V_\beta \in \mathfrak{m}_-$).

Définition 2.4.8 Une orbite \mathcal{O}_D est dite irréductible si et seulement si \mathfrak{m} est un $\text{Ad}(K)$ -module irréductible non nul.

Proposition 2.4.9 Si l'orbite \mathcal{O}_D est irréductible, \mathfrak{m}_+ et \mathfrak{m}_- sont des $\text{Ad}(K)$ -modules irréductibles, et il existe une constante $c > 0$ telle que : $\text{ad}(D)|_{\mathfrak{m}_+} = ic \text{ id}$ et $\text{ad}(D)|_{\mathfrak{m}_-} = -ic \text{ id}$. En particulier le spectre de $\text{ad}(D)$ est réduit à $\{0, ic, -ic\}$.

□ **Preuve de la proposition 2.4.9 :**

Pour tout $k \in \mathfrak{k}$ et tout $e_\alpha \in \mathfrak{m}_\pm$, on a :

$$[D, [k, e_\alpha]] = [[D, k], e_\alpha] + [k, [D, e_\alpha]] = ic_\alpha [k, e_\alpha].$$

Ainsi : $[\mathfrak{k}, \mathfrak{m}_\pm] \subset \mathfrak{m}_\pm$ et \mathfrak{m}_\pm est stable par l'action adjointe de K . Supposons que \mathfrak{m}_+ se décompose en deux sous- $\text{Ad}(K)$ -modules \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 . Alors :

$$\mathfrak{m}_- = \mathfrak{m}_1^* \oplus \mathfrak{m}_2^*,$$

et \mathfrak{m} se décompose en deux sous- $\text{Ad}(K)$ -modules, à savoir $\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_1^*)$ et $\mathfrak{g} \cap (\mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_2^*)$. L'orbite \mathcal{O}_D étant irréductible, \mathfrak{m} est un $\text{Ad}(K)$ -module irréductible. On en déduit l'irréductibilité de \mathfrak{m}_\pm . Soit $e_\alpha \in \mathfrak{m}_+$ et $c = c_\alpha$:

$$[D, e_\alpha] = ice_\alpha.$$

Le noyau $\text{Ker}(D - ic)$ étant un sous- $\text{Ad}(K)$ -module de \mathfrak{m}_+ , $\text{ad}(D)|_{\mathfrak{m}_+} = ic \text{ id}$. La relation $c_{-\alpha} = -c_\alpha$ implique que $\text{ad}(D)|_{\mathfrak{m}_-} = -ic \text{ id}$. □

Définition 2.4.10 Étant donné un ordre sur l'ensemble des racines non nulles \mathcal{R} de \mathfrak{g} , une racine simple ϕ est dite de type non compact si toute racine $\alpha \in \mathcal{R}$ est de la forme :

$$\alpha = \pm \sum_{\Psi \in \mathcal{S}-\phi} a_\Psi \Psi, a_\Psi \geq 0,$$

ou de la forme :

$$\alpha = \pm(\phi + \sum_{\Psi \in \mathcal{S}-\phi} a_\Psi \Psi), a_\Psi \geq 0.$$

Lemme 2.4.11 Soient \mathcal{O}_D une orbite adjointe affine symétrique irréductible d'une L^* -algèbre simple \mathfrak{g} , $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ contenue dans $\text{Ker ad}D$ et

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{\alpha} \oplus \sum_{\beta \in \mathcal{B}} V_{\beta}$$

la décomposition de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ correspondante, avec :

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} V_{\alpha}, \text{ et } \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} V_{\beta}.$$

Pour tout ordre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-$ sur l'ensemble des racines, il existe une unique racine simple appartenant à \mathcal{B} .

Δ **Preuve du lemme 2.4.11 :**

Soit $\{\phi_i, \Psi_j\}_{i \in I, j \in J}$ l'ensemble des racines simples avec $\phi_i \in \mathcal{A}$ et $\Psi_j \in \mathcal{B}$. Supposons J vide. La relation $[\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}] \subset \mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ implique que toutes les racines positives appartiennent à \mathcal{A} et $\mathfrak{m} = \{0\}$, ce qui contredit le fait que \mathfrak{m} est un $\text{Ad}(K)$ -module irréductible non nul. Soit β une racine simple appartenant à \mathcal{B} . L'espace vectoriel fermé engendré par l'action adjointe de \mathfrak{k} sur e_{β} est un $\text{Ad}(K)$ -module irréductible non nul de \mathfrak{m} . Puisque l'orbite est irréductible, $\text{ad}(\mathfrak{k})(V_{\beta}) = \mathfrak{m}_+$ ou \mathfrak{m}_- . Δ

Lemme 2.4.12 Soit β la racine simple appartenant à \mathcal{B} . Il existe une suite croissante de systèmes finis indécomposables \mathcal{N}_n de racines de \mathfrak{g} telle que :

1. $\mathcal{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{N}_n$;
2. les algèbres de Lie \mathfrak{g}_n de dimensions finies engendrées par \mathcal{N}_n sont toutes de même type A, B, C, ou D et \mathfrak{g} est l'adhérence de l'union des \mathfrak{g}_n ;
3. β est une racine de type non-compact pour chaque algèbre \mathfrak{g}_n pour l'ordre induit par l'ordre sur \mathcal{R} .

Δ **Preuve du lemme 2.4.12 :**

Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots\}$ une numérotation des racines appartenant à \mathcal{A} . Posons $F_n = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. On construit par récurrence une suite croissante de systèmes finis indécomposables \mathcal{N}_n comme suit. D'après la proposition 2.2.47, il existe un système fini indécomposable \mathcal{N}_1 contenant $\{\beta\} \cup F_1$. Supposons que \mathcal{N}_{n-1} soit construit, il existe un système fini indécomposable \mathcal{N}_n contenant $F_n \cup \mathcal{N}_{n-1}$. Puisque toute racine de \mathcal{B} est somme de β et de racines de \mathcal{A} (éventuellement en nombre infini), $\mathcal{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{N}_n$. La suite $\{\mathfrak{g}_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de sous-algèbres simples de dimensions finies engendrées par les systèmes \mathcal{N}_n est une suite croissante telle que $\mathfrak{g} = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathfrak{g}_n}$. Puisqu'il n'existe que 9 types d'algèbres de Lie simples de dimension finie, au moins un des types est pris une infinité de fois. Puisque \mathfrak{g} est de dimension infinie et que seuls les types A, B, C, ou D correspondent à des algèbres de Lie de dimensions arbitraires, au moins un des type A, B, C, ou D est pris une infinité de fois. Il existe donc une sous-suite \mathcal{N}_{n_k} de \mathcal{N}_n telle que les algèbres \mathfrak{g}_{n_k} soient toutes de même type A, B, C, ou D.

Soit \mathcal{S}_{n_k} l'ensemble des racines simples de \mathfrak{g}_{n_k} pour l'ordre induit par l'ordre sur \mathcal{R} . Pour toute racine positive γ de \mathcal{N}_{n_k} il existe une suite finie $\{\gamma_i, i = 1, \dots, k\}$ de racines de \mathcal{S}_{n_k} telle que :

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k,$$

et telle que les sommes partielles $\gamma_1 + \dots + \gamma_j$, $1 \leq j \leq k$, soient des racines ([Bou]). Ainsi l'espace vectoriel V_γ est engendré par :

$$v = [e_{\gamma_k}, [e_{\gamma_{k-1}}, [e_{\gamma_{k-2}}, \dots, [e_{\gamma_2}, e_{\gamma_1}] \dots]]].$$

L'orbite étant irréductible, $[D, e_\beta] = \delta_\beta \text{ice}_\beta$ avec $\delta_\beta = +1$ (resp. -1) si $V_\beta \subset \mathfrak{m}_+$ (resp. \mathfrak{m}_-). Ainsi :

$$[D, v] = \text{card}(\{i, \gamma_i = \beta\}) \delta_\beta \text{icv}.$$

Puisque $\text{ad}(\mathfrak{k}^{\mathbb{C}})$ préserve $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$, \mathfrak{m}_+ et \mathfrak{m}_- , on en déduit que pour $\gamma \in \mathcal{A} \cap \mathcal{R}_+$, $\text{card}(\{i, \alpha_i = \beta\}) = 0$ et pour $\gamma \in \mathcal{B} \cap \mathcal{R}_+$, $\text{card}(\{i, \alpha_i = \beta\}) = 1$. Par conséquent β est de type non-compact. \triangle

Corollaire 2.4.13 *Soit $\mathcal{O} = G/K$ une orbite coadjointe affine hermitienne symétrique irréductible d'un L^* -groupe G , et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ la décomposition de Cartan associée où \mathfrak{g} et \mathfrak{k} désignent respectivement les algèbres de Lie de G et K . Alors il existe une suite croissante $\{\mathfrak{g}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-algèbres de Lie de dimension finie de \mathfrak{g} de même type A, B, C ou D et une suite croissante $\{\mathfrak{k}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-algèbres de Lie de \mathfrak{k} telles que :*

1. $\mathfrak{g} = \overline{\cup \mathfrak{g}_n}$
2. $\mathfrak{k} = \overline{\cup \mathfrak{k}_n}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'orthogonal \mathfrak{m}_n de \mathfrak{k}_n dans \mathfrak{g}_n vérifie :

$$[\mathfrak{k}_n, \mathfrak{m}_n] \subset \mathfrak{m}_n \quad [\mathfrak{m}_n, \mathfrak{m}_n] \subset \mathfrak{k}_n,$$

de sorte que $(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{k}_n)$ est une paire symétrique.

4. les orbites coadjointes $\mathcal{O}_n := G_n/K_n$ où G_n est K_n sont les sous-groupes de Lie de G d'algèbres de Lie \mathfrak{g}_n et \mathfrak{k}_n respectivement, forme une suite croissante d'orbites hermitiennes symétriques irréductibles telle que $\mathcal{O} = \overline{\cup \mathcal{O}_n}$.

Ainsi, pour classifier les orbites coadjointes affines des L^* -groupes simples de type compact, il suffit de connaître les racines simples de type non-compact des algèbres de Lie simples de dimension finie. Une racine simple d'une algèbre de Lie simple de dimension finie est de type non-compact si elle apparaît avec un coefficient $+1$ dans l'écriture de la plus grande racine. La liste des racines non-compactes des algèbres de Lie simples de type A, B, C, ou D de dimension finie est donnée dans le tableau 2.2 ([Lie] ou [Wol2]).

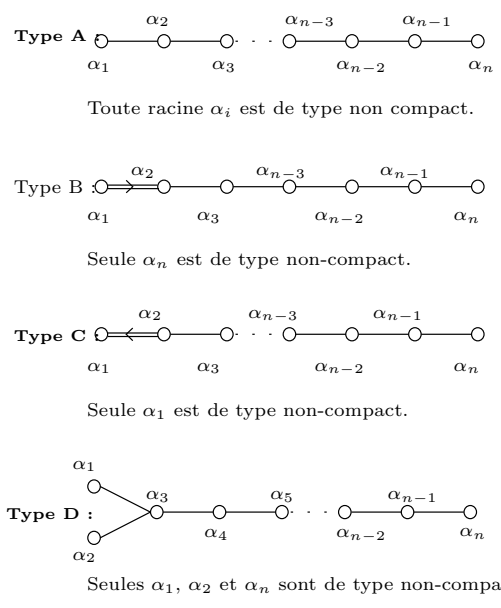
■ Preuve du théorème 2.4.1 :

Cette classification résulte directement du tableau 2.2 et du fait que toute racine de type non-compact ϕ détermine une paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ où \mathfrak{k} est la L^* -algèbre dont le diagramme de Dynkin est obtenu en supprimant ϕ du diagramme de Dynkin de \mathfrak{g} (\mathfrak{k} est l'orthogonal de l'espace vectoriel fermé engendré par les $e_{\phi+\alpha}$). ■

2.4.3 Description des orbites coadjointes affines hermitiennes symétriques de type compact et de leurs injections dans une grassmannienne

Introduction

Dans ce paragraphe, nous donnons une brève description des espaces hermitiens symétriques irréductibles G/K , où G est un L^* -groupe simple de type com-



TAB. 2.2 – Racines simples de types non-compactes des groupes de Lie simples de dimension finie de type A, B, C, D.

compact, et de leurs identifications avec des orbites adjointes affines hermitiennes symétriques irréductibles.

L'injection naturelle du L^* -groupe G dans le groupe unitaire d'un espace de Hilbert complexe H , induit une injection de G/K dans une grassmannienne complexe, holomorphe pour la structure complexe I de G/K . En particulier, les espaces homogènes $Z(H) := O_2^+(H, \mathbb{R})/U_2(H_{J_0})$ et $L(H) := Sp_2(H, \mathbb{H})/U_2(H_+)$ s'injectent holomorphiquement dans la grassmannienne restreinte d'un espace de Hilbert polarisé $H = H_+ \oplus H_-$. L'injection naturelle du L^* -groupe complexe $G^{\mathbb{C}}$, complexifié de G , dans le groupe linéaire de H , induit une injection holomorphe de $G^{\mathbb{C}}/K^{\mathbb{C}}$ dans l'orbite complexifiée de la grassmannienne en question, pour la structure complexe i . Ainsi les complexifications $Z(H)^{\mathbb{C}}$ et $L(H)^{\mathbb{C}}$ de $Z(H)$ et $L(H)$ sont des sous-variétés complexes, donc kählériennes, de l'orbite complexifiée $\mathcal{O}^{\mathbb{C}}$ de la grassmannienne restreinte, pour la structure complexe I_3 . Le potentiel kählérien K_3 associé à la structure complexe I_3 , calculé dans la section 1.4.9 du chapitre 1, se restreint en un potentiel kählérien sur $Z(H)^{\mathbb{C}}$ et $L(H)^{\mathbb{C}}$. La métrique obtenue sur $Z(H)^{\mathbb{C}}$ (resp. $L(H)^{\mathbb{C}}$) se restreint en la métrique kählérienne de $Z(H)$ (resp. $L(H)$). Nous montrerons dans la section 2.6 que cette métrique est hyperkählienne, et nous expliciterons la structure complexe qui éteint la structure complexe I .

Les grassmanniennes $Gr^{(p)}$ et Gr_{res}

Pour $p < +\infty$, la grassmannienne des p -plans d'un espace de Hilbert est décrite en Annexe A, et sa structure kählérienne a été obtenue au paragraphe 1.2.4 du chapitre 1 par quotient kählérien. Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A pour une description de l'injection de Plücker de $Gr^{(p)}$ dans un espace projectif complexe. Pour tout $k \neq 0$, $Gr^{(p)}$ s'identifie à l'orbite adjointe de

$\epsilon_{p,k} := ik\text{pr}_P \in \mathfrak{u}_2(H)$, où P est un p -plan de référence et pr_P la projection orthogonale sur P , et pour tous k, l tel que $(k, l) \neq (0, 0)$, à l'orbite adjointe affine de 0 pour la dérivation $[\epsilon_{p,k,l}, \cdot]$, avec $\epsilon_{p,k,l} := ik\text{pr}_P - il\text{pr}_{P^\perp}$.

La grassmannienne des sous-espaces vectoriels de codimension $p < +\infty$ d'un espace de Hilbert est isomorphe à $Gr^{(p)}$ par l'application qui à un sous-espace vectoriel P_0 de codimension p associe son orthogonal.

La grassmannienne restreinte Gr_{res} d'un espace de Hilbert polarisée $H = H_+ \oplus H_-$ fait l'objet du chapitre 1, paragraphe 1.3. L'injection de Plücker de Gr_{res} dans un espace projectif a été établie par A. Pressley et G. Segal dans [PS] et est décrite en Annexe A. Pour tous k, l tel que $(k, l) \neq (0, 0)$, Gr_{res} s'identifie à l'orbite adjointe affine de 0 pour la dérivation $[\epsilon_{k,l}, \cdot]$, avec $\epsilon_{k,l} = ik\text{pr}_+ - il\text{pr}_-$, où pr_\pm désigne la projection orthogonale sur H_\pm .

La grassmannienne des 2-plans orientés d'un espace de Hilbert réel

La grassmannienne $Gr^{or}(2, H)$ des 2-plans orientés d'un espace de Hilbert réel H est l'espace homogène $O_2^+(H, \mathbb{R})/(SO(P_0) \times O_2^+(P_0^\perp))$, où P_0 est un 2-plan orienté de référence et où $O_2^+(H, \mathbb{R})$ est la composante connexe de l'identité du groupe orthogonal $O_2(H, \mathbb{R})$. Un élément P de $Gr^{or}(2, H)$ est un 2-plan naturellement muni d'une structure complexe J_P . Pour tout $k \neq 0$, $Gr^{or}(2, H)$ s'identifie à l'orbite adjointe de $kJ_{P_0} \in \mathfrak{o}_2(H, \mathbb{R})$. La structure complexe naturelle de $Gr^{or}(2, H)$ consiste à composer un élément X de l'espace tangent en un point P , identifié à l'espace des opérateurs réels de P dans son orthogonal, par l'opérateur J_P^{-1} .

La grassmannienne $Gr^{or}(2, H)$ s'identifie comme variété complexe à la conique \mathcal{C} de l'espace projectif $\mathbb{P}(H^\mathbb{C})$, où $H^\mathbb{C}$ est l'espace de Hilbert complexifié de H :

$$\mathcal{C} := \{(z_1 : \dots : z_n : \dots) \in \mathbb{P}(H^\mathbb{C}), \sum_{i \in \mathbb{N}} z_i^2 = 0\}.$$

L'identification se fait par le biais de l'application qui à une base orthonormée orientée $\{u, v\}$ de P associe la droite de $H^\mathbb{C}$ engendrée par $u + iv$.

Proposition 2.4.14 L'application

$$\begin{aligned} f_1 : Gr^{or}(2, H) &\rightarrow \mathbb{P}(H^\mathbb{C}) \\ \text{vect}\{u, v\} &\mapsto \mathbb{C}(u + iv) \end{aligned}$$

est une injection holomorphe de $Gr^{or}(2, H)$ dans $\mathbb{P}(H^\mathbb{C})$, et un isomorphisme de variétés kählériennes de $Gr^{or}(2, H)$ sur \mathcal{C} .

□ **Preuve de la proposition 2.4.14 :**

Soient $\{u, v\}$ une base orthonormée orientée de $P \in Gr^{or}(2, H)$, et $[z_i]_{i \in \mathbb{N}}$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{C}(u + iv)$ relativement au choix d'une base orthonormée de H indexée par \mathbb{N} . On a :

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} z_i^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i^2 - \sum_{i \in \mathbb{N}} v_i^2 + 2i \sum_{i \in \mathbb{N}} u_i v_i = 0,$$

où u_i (resp. v_i) sont les coordonnées de u (resp. v). Ainsi l'image de $Gr^{or}(2, H)$ par f_1 appartient à \mathcal{C} .

Réciproquement, soient $z = [z_i]_{i \in \mathbb{N}}$ un élément de \mathcal{C} , $u = \Re z$ et $v = \Im z$. La condition d'appartenance de z à \mathcal{C} implique que la norme de u est égale à la

norme de v et que le produit scalaire de u et v est nul. On obtient ainsi un plan réel $P = \text{vect}\{u, v\}$, naturellement orienté par $u \wedge v$.

Au voisinage d'un point $P \in Gr^{or}(2, H)$, f_1 se réduit à l'application qui à un élément $X = (a_{ij})_{i \in \mathbb{N}, j=1,2}$ de l'ouvert \mathcal{U}_P formé des applications linéaires réelles de P dans P^\perp , associe l'application \mathbb{C} -linéaire $Y = (a_{i1} + ia_{i2})_{i \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}(u + iv)$ dans le complexifié de P^\perp . On en déduit que f_1 est différentiable. De plus, $X \circ J_P^{-1} = iY$, ce qui prouve que f_1 est holomorphe. La métrique kählérienne de $Gr^{or}(2, H)$ étant donnée par la trace, elle provient également de la métrique kählérienne de $\mathbb{P}(H^\mathbb{C})$, et ceci permet de conclure que $Gr^{or}(2, H)$ s'identifie à la sous-variété kählérienne \mathcal{C} de $\mathbb{P}(H^\mathbb{C})$. \square

La variété des structures complexes orthogonales et préservant l'orientation d'un espace de Hilbert réel

Soient H un espace de Hilbert réel, et J_0 une structure complexe orthogonale pour le produit scalaire $(., .)$ de H , i.e. vérifiant

$$(J_0 X, J_0 Y) = (X, Y).$$

L'espace homogène $O_2^+(H, \mathbb{R})/U(H_{J_0})$, où H_{J_0} est l'espace de Hilbert complexe obtenu en munissant l'espace de Hilbert réel H de la structure complexe J_0 , et où $O_2^+(H, \mathbb{R})$ est la composante connexe de l'identité de $O_2(H, \mathbb{R})$, est la variété $Z(H)$ des structures complexes J sur H , orthogonales pour le produit scalaire $(., .)$, et proche de la structure complexe distinguée J_0 . Pour tout $k \neq 0$, $Z(H)$ s'identifie à l'orbite adjointe affine de 0 de $\mathfrak{o}_2(H, \mathbb{R})$ pour la dérivation $[kJ_0, .]$. En notant H_+ (resp. H_-) l'espace propre de valeur propre $+i$ (resp. $-i$) de l'extention \mathbb{C} -linéaire de J_0 à l'espace de Hilbert complexe $H^\mathbb{C} = H \oplus iH$, $Z(H)$ s'injecte dans la grassmannienne restreinte de l'espace de Hilbert polarisé $H^\mathbb{C} = H_+ \oplus H_-$ par l'application qui à une structure complexe J associe le sous-espace P_J de $H^\mathbb{C}$ formé des vecteurs X de type $(1, 0)$ relativement à J , i.e. vérifiant $JX = iX$.

Proposition 2.4.15 *L'application*

$$\begin{array}{ccc} f_2 : Z(H) & \rightarrow & Gr_{res} \\ & \mapsto & P_J \end{array}$$

est une injection holomorphe de $Z(H)$ dans Gr_{res} , et un isomorphisme de variétés kählériennes de $Z(H)$ sur la sous-variété complexe Gr^{gc} de Gr_{res} formée des sous-espaces isotropes pour l'extention \mathbb{C} -linéaire $g_{\mathbb{C}}$ du produit scalaire $(., .)$.

\square **Preuve de la proposition 2.4.15 :**

Étant donné une structure complexe J de $Z(H)$, et deux éléments X et Y de P_J , on a :

$$g_{\mathbb{C}}(X, Y) = g_{\mathbb{C}}(JX, JY) = g_{\mathbb{C}}(iX, iY) = -g_{\mathbb{C}}(X, Y),$$

donc P_J est $g_{\mathbb{C}}$ -isotrope.

Réciproquement, étant donné un sous-espace $g_{\mathbb{C}}$ -isotrope P , l'endomorphisme J de H qui à X associe l'unique vecteur Y tel que $X - iY$ appartienne à P , est une structure complexe de H orthogonale pour $(., .)$.

La dérivation $[kJ_0, .]$ de la L^* -algèbre $\mathfrak{o}_2(H, \mathbb{R})$ s'étend en la dérivation $[\epsilon_{k,k}, .]$ de la L^* -algèbre $\mathfrak{u}_2(H)$, (où $\epsilon_{k,k} := ikpr_+ - ikpr_-$), ce qui implique l'identification de variétés kählériennes. \square

La variété des sous-espaces Lagrangiens d'un espace de Hilbert complexe

Soit H un espace de Hilbert complexe et J un endomorphisme \mathbb{C} -antilinéaire sur H de carré -1 . L'espace homogène $L(H) := Sp_2(H, \mathbb{H})/U_2(H_+)$ est la variété des espaces lagrangiens pour la 2-forme symplectique complexe Ω définie par $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$, proche d'un sous-espace lagrangien de référence H_+ . En notant $H_- = JH_+$ et pr_\pm la projection orthogonale sur H_\pm , $L(H)$ s'identifie à l'orbite adjointe affine de 0 de $\mathfrak{sp}_2(H, \mathbb{H})$ pour la dérivation $[\epsilon_{k,k}, \cdot]$, avec $\epsilon_{k,k} = i\text{pr}_+ - i\text{pr}_-$. De ce fait, $L(H)$ s'identifie à une sous-variété kählérienne de la grassmannienne restreinte.

2.4.4 Sous-algèbres abéliennes maximales et racines fortement orthogonales

Sous-algèbres abéliennes maximales d'un espace hermitien symétrique

Soit $\mathcal{O} = G/K$ une orbite coadjointe affine hermitienne symétrique d'un L^* -groupe G . On note \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G , \mathfrak{k} l'algèbre de Lie de K , et \mathfrak{m} l'orthogonal de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} , de sorte que :

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

Si \mathfrak{A} est une sous-algèbre de \mathfrak{g} contenue dans \mathfrak{m} , alors \mathfrak{A} est abélienne. Par abus de langage, on dira que \mathfrak{A} est une sous-algèbre abélienne de \mathfrak{m} . Le théorème suivant est une généralisation du théorème 8.6.1 (iii) de [Wol3] ou lemme 6.3 (iii) de [Hel] au cas d'une orbite coadjointe affine hermitienne symétrique d'un L^* -groupe. Il est basé sur le corollaire 2.4.13.

Théorème 2.4.16 *Soit \mathfrak{A} une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{m} . Alors :*

$$\mathfrak{m} = \overline{\cup_{g \in K} \text{Ad}(g)\mathfrak{A}}.$$

■ Preuve du théorème 2.4.16 :

En décomposant l'orbite en produit d'orbites irréductibles, il suffit de considérer le cas où \mathcal{O} est irréductible. D'après le corollaire 2.4.13, il existe une suite $\{\mathfrak{g}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-algèbres de dimensions finies de \mathfrak{g} et une suite $\{\mathfrak{k}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-algèbres de dimensions finies de \mathfrak{k} telles que, si \mathfrak{m}_n désigne l'orthogonal de \mathfrak{k}_n dans \mathfrak{g}_n , on ait :

$$\mathfrak{g} = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{g}_n}$$

$$\mathfrak{k} = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{k}_n}$$

$$[\mathfrak{k}_n, \mathfrak{m}_n] \subset \mathfrak{m}_n; \quad [\mathfrak{m}_n, \mathfrak{m}_n] \subset \mathfrak{k}_n.$$

On note K_n le sous-groupe de G d'algèbres de Lie \mathfrak{k}_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{A} \cap \mathfrak{g}_n$ est une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{g}_n . D'après la théorie de dimension finie (cf théorème 8.6.1 (iii) de [Wol3], ou lemme 6.3 de [Hel]), on a :

$$\mathfrak{m}_n = \text{Ad}(K_n)(\mathfrak{A}_n).$$

Comme $\mathfrak{m} = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{m}_n}$, que $\cup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ad}(K_n)(\mathfrak{A}_n) \subset \text{Ad}(K)(\mathfrak{A})$ et que d'autre part $\mathfrak{m} \supset \text{Ad}(K)(\mathfrak{A})$, on a $\mathfrak{m} = \overline{\cup_{g \in K} \text{Ad}(g)\mathfrak{A}}$. ■

Remarque 2.4.17 En dimension finie, chaque sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{m} est le centralisateur d'un de ses éléments et toutes les sous-algèbres abéliennes maximales de \mathfrak{m} sont conjuguées. Ceci repose sur le fait que, dans le cas de la dimension finie, $\exp \mathfrak{m}$ est fermée dans G , et, pour \mathfrak{A} sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{m} , $\exp \mathfrak{A}$ est un tore (groupe abélien compact connexe) donc possède un sous-groupe à un paramètre partout dense.

Système de racines fortement orthogonales

Soit $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ une orbite (co-)adjointe affine hermitienne symétrique d'un L^* -groupe G de type compact, où \mathbb{D} désigne une dérivation de la L^* -algèbre \mathfrak{g} de G . On note $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ la L^* -algèbre complexifiée de \mathfrak{g} , $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ la L^* -algèbre complexifiée de \mathfrak{k} , et $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ le sous-espace vectoriel fermé complexe de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ obtenu en complexifiant \mathfrak{m} . Le sous-espace vectoriel $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ se décompose en $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{m}^+ \oplus \mathfrak{m}^-$, où \mathfrak{m}^{\pm} est somme directe des espaces propres $V_{\pm c_{\alpha}}$ de \mathbb{D} de valeurs propres $\pm ic_{\alpha}$, $c_{\alpha} > 0$. On notera

$$I := \sum_{\alpha} \frac{1}{c_{\alpha}} \mathbb{D}|_{V_{c_{\alpha}} \oplus V_{-c_{\alpha}}}$$

la structure complexe naturelle de l'orbite. Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan contenu dans \mathfrak{k} , \mathcal{R} l'ensemble des racines et

$$\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} V^{\alpha} \oplus \bigoplus_{\beta \in \mathcal{B}_+} (V^{\beta} + V^{-\beta})$$

la décomposition de \mathfrak{g} en espaces propres de $\text{ad}(\mathfrak{h})$, avec :

$$\mathfrak{k}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{A}} V^{\alpha}; \quad \mathfrak{m}_{\pm} = \bigoplus_{\beta \in \mathcal{B}_{\pm}} V^{\beta}$$

Définition 2.4.18 Deux racines α et β sont dites fortement orthogonales si $\alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$ ne sont pas des racines.

Remarque 2.4.19 Deux racines fortement orthogonales sont orthogonales pour le produit scalaire de \mathfrak{h}' .

Remarque 2.4.20 D'après le lemme de Zorn, il existe des sous-ensembles maximaux de racines (deux à deux) fortement orthogonales.

Notations 2.4.21 D'après le lemme 2.4.11, pour tout ordre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_+ \cup \mathcal{R}_-$ sur l'ensemble des racines, il existe une unique racine simple appartenant à \mathcal{B} . Quitte à échanger \mathcal{R}_+ et \mathcal{R}_- , on peut donc supposer $\mathcal{B}_+ \subset \mathcal{R}_+$. Un tel ordre étant choisi, pour toute racine α , il existe $(h_{\alpha}, e_{\alpha}, e_{-\alpha}) \in i\mathfrak{h} \times V^{\alpha} \times V^{-\alpha}$ tels que $[h_{\alpha}, e_{\pm\alpha}] = \pm 2e_{\alpha}$, $[e_{\alpha}, e_{-\alpha}] = h_{\alpha}$ et $x_{\alpha} := e_{\alpha} - e_{-\alpha} \in \mathfrak{g}$ (ces notations sont légèrement différentes de celles utilisées en 2.2.2, en particulier le h_{α} ci-dessus vaut un nombre complexe $e^{i\theta}$ fois le H_{α} de la démonstration de la proposition 2.2.40, et le $e_{-\alpha}$ ci-dessus le $e^{i\theta} Y_{\alpha}$). En notant $y_{\alpha} := Ix_{\alpha}$, on a :

$$[x_{\alpha}, y_{\alpha}] = 2ih_{\alpha}; \quad [h_{\alpha}, x_{\alpha}] = -2iy_{\alpha}; \quad [h_{\alpha}, y_{\alpha}] = 2ix_{\alpha}.$$

Proposition 2.4.22 Soit Ψ un sous-ensemble maximal de racines fortement orthogonales. Alors la somme hilbertienne

$$\mathfrak{A} := \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R}x_{\alpha}$$

définie une sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{m} telle que :

$$[\mathfrak{A}, I\mathfrak{A}] = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R}ih_{\alpha}.$$

En particulier, $\mathfrak{m} = \overline{Ad(K)(\mathfrak{A})}$.

□ **Preuve de la proposition 2.4.22 :**

Le fait que \mathcal{A} soit une sous-algèbre abélienne maximale provient de la propriété $[V^{\alpha}, V^{\beta}] \subset V^{\alpha+\beta}$ et de l'hypothèse que Ψ est un sous-ensemble maximal de racines fortement orthogonales. □

Proposition 2.4.23 Avec les notations précédentes, la courbure R de l'orbite symétrique $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ vérifie :

$$\begin{aligned} R_{x_{\alpha}, Ix_{\alpha}}x_{\alpha} &= 4Ix_{\alpha} \\ R_{x_{\alpha}, Ix_{\alpha}}x_{\beta} &= R_{x_{\alpha}, Ix_{\beta}} = R_{x_{\alpha}, x_{\beta}} = 0, \end{aligned}$$

pour tous α et β dans un sous-ensemble maximal Ψ de racines fortement orthogonales avec $\alpha \neq \beta$.

□ **Preuve de la proposition 2.4.23 :**

Résulte directement de l'expression de la courbure d'un espace symétrique :

$$R_{x_{\alpha}, Ix_{\alpha}}x_{\alpha} = [[x_{\alpha}, Ix_{\alpha}], x_{\alpha}]$$

(cf annexe B). □

Le lemme suivant est l'analogie en dimension infinie du lemme 2 de [BG2] et sera utilisé pour démontrer le théorème 2.6.2.

Lemme 2.4.24 Pour tous $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ appartenant à \mathfrak{m} , on a :

$$\langle [\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}, I\mathfrak{b}] \rangle = \|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}\|^2.$$

Si ϕ est une fonction analytique paire, positive ou nulle, alors

$$\phi(x)(ad(i\mathfrak{a}))[\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}] = [\mathfrak{a}', I\mathfrak{a}'],$$

avec $\mathfrak{a}' = \sqrt{\phi}(x)(ad(iI\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})$.

△ **Preuve du lemme 2.4.24 :**

Par produit, il suffit de démontrer le lemme dans le cas où \mathfrak{g} est simple et $\mathcal{O}_{\mathbb{D}}$ irréductible. Dans ce cas, la structure complexe vaut $I = \frac{1}{c}D$ et on a :

$$[\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}] = \frac{1}{c}[\mathfrak{a}, [D, \mathfrak{b}]] = \frac{1}{c}[[\mathfrak{a}, D], \mathfrak{b}] + \frac{1}{c}[D, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]].$$

Puisque $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k}$, pour $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{m}$, il vient :

$$[\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}] = -[I\mathfrak{a}, \mathfrak{b}].$$

De même, pour $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{m}$, on a :

$$[I\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}] = \frac{1}{c^2}[[D, \mathfrak{a}], [D, \mathfrak{b}]] = \frac{1}{c^2}[D, [\mathfrak{a}, [D, \mathfrak{b}]]] - \frac{1}{c^2}[\mathfrak{a}, [D, [D, \mathfrak{b}]]] = [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}].$$

Puisque \mathfrak{g} est formée d'éléments anti-hermitiens, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \langle [\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}], [\mathfrak{b}, I\mathfrak{b}] \rangle &= -\langle I\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, I\mathfrak{b}]] \rangle \\ &= -\langle I\mathfrak{a}, [[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], I\mathfrak{b}] \rangle - \langle I\mathfrak{a}, [\mathfrak{b}, [\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}]] \rangle \\ &= \langle [I\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}], [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \rangle + \langle [\mathfrak{b}, I\mathfrak{a}], [\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}] \rangle \\ &= \|\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\|^2 + \|\mathfrak{a}, I\mathfrak{b}\|^2. \end{aligned}$$

Pour démontrer la deuxième partie du lemme, supposons tout d'abord que \mathfrak{a} appartient à une sous-algèbre abélienne maximale de la forme

$$\mathfrak{A} := \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R}x_\alpha$$

où Ψ est un sous-ensemble maximal de racines fortement orthogonales. En utilisant les notations précédentes, $\mathfrak{a} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x_{\alpha}$, $I\mathfrak{a} = \sum_{\alpha} a_{\alpha} y_{\alpha}$ et $[\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}] = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^2 2ih_{\alpha}$. En utilisant les relations de commutations

$$[x_{\alpha}, y_{\beta}] = 2ih_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}; \quad [h_{\alpha}, x_{\beta}] = -2iy_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}; \quad [h_{\alpha}, y_{\beta}] = 2ix_{\alpha} \delta_{\alpha\beta},$$

il vient :

$$\text{ad}(i\mathfrak{a})^{2n}[\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}] = \sum_{\alpha} (2a_{\alpha})^{2n} (a_{\alpha}^2 2ih_{\alpha}).$$

Ainsi pour toute fonction analytique paire positive ou nulle ϕ , on a :

$$\begin{aligned} \phi(x)(\text{ad}(i\mathfrak{a}))[\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}] &= \sum_{\alpha} \phi(2a_{\alpha}) a_{\alpha}^2 2ih_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \phi(2a_{\alpha}) a_{\alpha}^2 [x_{\alpha}, y_{\alpha}] \\ &= \sum_{\alpha} [\sqrt{\phi}(2a_{\alpha}) a_{\alpha} x_{\alpha}, \sqrt{\phi}(2a_{\alpha}) a_{\alpha} y_{\alpha}]. \end{aligned}$$

D'autre part, l'action de $\text{ad}(iI\mathfrak{a})$ est donnée par :

$$\text{ad}(iI\mathfrak{a})^{2n}(\mathfrak{a}) = \sum_{\alpha} (2a_{\alpha})^{2n} a_{\alpha} x_{\alpha},$$

ainsi $\sum_{\alpha} \sqrt{\phi}(2a_{\alpha}) a_{\alpha} x_{\alpha} = \sqrt{\phi}(x)(\text{ad}(iI\mathfrak{a}))(\mathfrak{a})$, ce qui montre la deuxième partie du lemme pour \mathfrak{a} dans \mathfrak{A} . Par action adjointe de K , elle est vraie pour tout $\mathfrak{a} \in \bigcup_{g \in K} \text{Ad}(g)(\mathfrak{A})$. Par continuité de ϕ et du crochet, on en déduit qu'elle est vraie pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{m} = \overline{\text{Ad}(K)(\mathfrak{A})}$. \triangle

Exemple de système de racines fortement orthogonales dans le cas de Gr_{res}

Considérons le cas de (la composante connexe de H_+) de la grassmannienne restreinte Gr_{res}^0 d'un espace de Hilbert polarisé $H = H_+ \oplus H_-$, vu comme orbite adjointe affine du L^* -groupe $G = U_2(H)$ avec comme dérivation $\mathbb{D} = [\epsilon, \cdot]$, où $\epsilon := i(pr_+ - pr_-)$, pr_{\pm} désignant la projection orthogonale sur H_{\pm} . On a :

$$Gr_{res}^0 = \{g\epsilon g^{-1} - \epsilon, g \in U_2(H)\} = U_2(H) / (U_2(H_+) \times U_2(H_-)).$$

Après le choix d'une base $\{e_n\}_{n \in -\mathbb{N}^*}$ de H_+ et d'une base $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de H_- , l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}_2(H)$ de $U_2(H)$ se décompose en

$$\mathfrak{u}_2(H) = (\mathfrak{u}_2(H_+) \times \mathfrak{u}_2(H_-)) \oplus \mathfrak{m},$$

où \mathfrak{m} est le sous-espace fermé de $\mathfrak{u}_2(H)$ composé des éléments ayant leurs deux blocs diagonaux nuls. Soit \mathfrak{h} la sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{u}_2(H)$ composée des

éléments diagonaux. L'ensemble des racines de la L^* -algèbre complexe $\mathfrak{gl}_2(H)$ sous l'action adjointe de $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ est constitué des formes linéaires sur $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$:

$$\alpha_{ij} := \lambda_i - \lambda_j,$$

pour $i, j \in \mathbb{Z}^*$, $i < j$, où λ_k est définie par :

$$\lambda_k(h) = h_{kk},$$

avec $h = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} h_{kk} e_k \otimes e_k^* \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$. Soient :

$$\begin{aligned} x_{\alpha_{ij}} &= e_i \otimes e_j^* - e_j \otimes e_i^* \\ y_{\alpha_{ij}} &= i e_i \otimes e_j^* + i e_j \otimes e_i^* \\ h_{\alpha_{ij}} &= e_i \otimes e_i^* - e_j \otimes e_j^*. \end{aligned}$$

En notant $I = \frac{1}{2}\mathbb{D}$ la structure complexe naturelle de l'orbite adjointe affine, pour toute racine α_{ij} , on a :

$$I x_{\alpha_{ij}} = y_{\alpha_{ij}}, \quad I y_{\alpha_{ij}} = -x_{\alpha_{ij}}, \quad [x_{\alpha_{ij}}, y_{\alpha_{ij}}] = 2i h_{\alpha_{ij}}.$$

L'ensemble $\Psi = \{\lambda_i - \lambda_{-i}, i \in -\mathbb{N}^*\}$ est un sous-ensemble maximal de racines fortement orthogonales. La sous-algèbre abélienne maximale de \mathfrak{m} définie par la somme hilbertienne :

$$\mathfrak{A} = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R} x_{\alpha}$$

vérifie :

$$[\mathfrak{A}, I\mathfrak{A}] = \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R} i h_{\alpha},$$

et :

$$\mathfrak{m} = \overline{\bigcup_{g \in U_2(H_+) \times U_2(H_-)} \text{Ad}(g)\mathfrak{A}}.$$

La courbure R de Gr_{res}^0 est donnée par :

$$R_{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2} \mathfrak{a}_3 = [[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2], \mathfrak{a}_3],$$

avec $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$ et \mathfrak{a}_3 dans \mathfrak{m} . En particulier, pour α et β dans Ψ , $\alpha \neq \beta$, on a :

$$\begin{aligned} R_{x_{\alpha}, I x_{\alpha}} x_{\alpha} &= 4y_{\alpha} = 4I x_{\alpha} \\ R_{x_{\alpha}, I x_{\alpha}} x_{\beta} &= 0 \\ R_{x_{\alpha}, x_{\beta}} &= 0 \\ R_{x_{\alpha}, I x_{\beta}} &= 0. \end{aligned}$$

2.5 Théorème de Mostow

2.5.1 Introduction

Dans ce paragraphe nous présentons une généralisation du théorème de Mostow au cas d'un L^* -groupe semi-simple (théorème 2.5.17 pour le cas $Gl_2(H)$, et théorème 2.5.18 pour le cas général). Le théorème auquel nous faisons référence a été démontré en dimension finie par G.D. Mostow en 1955 et s'énonce comme suit :

Théorème 2.5.1 (Théorème 5 de [Mos]) *Soient G un groupe de Lie compact semi-simple connexe de dimension finie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , $G^{\mathbb{C}}$ le groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, K un sous-groupe de G d'algèbre de Lie \mathfrak{k} et \mathfrak{m} l'orthogonal de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} pour la forme de Killing de G . Alors $G^{\mathbb{C}}$ est homéomorphe au produit cartésien $G \times \exp \mathfrak{m} \times \exp i\mathfrak{k}$.*

Remarquons que, puisque G est connexe, donc engendré par un voisinage de l'élément neutre, et que l'action adjointe de K préserve $\exp \mathfrak{m}$, tout élément de G se décompose en un produit d'un élément de $\exp \mathfrak{m}$ et d'un élément de $\exp \mathfrak{k}$, mais que cette décomposition n'est pas unique. Le théorème 2.5.1 est basé sur l'existence d'une projection orthogonale de la variété des matrices hermitiennes définies positives sur tout espace totalement géodésique, prouvée par G. D. Mostow dans le cadre de la dimension finie à l'aide d'arguments de compacité qui n'ont plus cours en dimension infinie. Nous démontrons en 2.5.4 l'existence d'une projection analogue de la variété \mathcal{P} des opérateurs hermitiens définis positifs d'un espace de Hilbert sur tout sous-espace totalement géodésique, en utilisant les propriétés d'espace à courbure sectionnelle négative de \mathcal{P} . L'étude de l'espace \mathcal{P} est analogue à celle de l'espace des matrices $n \times n$ définies positives effectuée par G.D. Mostow dans [Mos], et est présentée ici en gardant autant que possible les mêmes notations, afin de faciliter la lecture. Pour les démonstrations qui ne font pas intervenir la dimension infinie et qui ne sont pas nécessaires à la bonne compréhension, nous renvoyons le lecteur à [Mos].

2.5.2 La variété \mathcal{P} des opérateurs auto-adjoints définis positifs de $Gl_2(H)$

L'espace de Hilbert $\mathfrak{gl}_2(H)$ se décompose en somme directe de $\mathfrak{u}_2(H)$ et du sous-espace vectoriel fermé $\mathcal{S}_2(H)$ constitué des éléments auto-adjoints de $\mathfrak{gl}_2(H)$. L'application exponentielle définie par $\exp(A) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$ pour tout A de $\mathfrak{gl}_2(H)$ envoie $\mathcal{S}_2(H)$ sur la variété \mathcal{P} de $Gl_2(H)$ constituée des éléments auto-adjoints définis positifs de $Gl_2(H)$.

Notations 2.5.2 On notera L_X (resp. R_X) la translation à gauche (resp. à droite) par un élément $X \in \mathfrak{gl}_2(H)$, définie sur $\mathfrak{gl}_2(H)$ par $L_X(B) := XB$ (resp. $R_X(B) := BX$). La représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2(H)$ sera notée $\text{ad} : \text{ad}(X)(B) := [X, B] = (L_X - R_X)(B)$, et D_X désignera $-\text{ad}(X)$.

Proposition 2.5.3 *La différentielle de l'application exponentielle de $\mathcal{S}_2(H) = \{A \in \mathfrak{gl}_2(H), A^* = A\}$ dans $\mathcal{P} = \{B \in Gl_2(H), B = B^*, B > 0\}$ est donnée en $X \in \mathcal{S}_2(H)$ par :*

$$(d_X \exp)(Y) = L_{\exp(X)} \left(\frac{1 - e^{-\text{ad}(X)}}{\text{ad}(X)} \right) (Y),$$

pour tout Y de $\mathcal{S}_2(H)$.

Définition 2.5.4 Soit τ_X l'application définie sur $\mathcal{S}_2(H)$ par :

$$\tau_X : Y \mapsto L_{\exp(-\frac{X}{2})} R_{\exp(-\frac{X}{2})} d_X \exp(Y).$$

Pour prouver la proposition 2.5.3, nous allons utiliser le lemme suivant ([Mos]) :

Lemme 2.5.5 Pour tout X de $\mathcal{S}_2(H)$ on a :

$$\tau_X = \frac{\sinh(\frac{D_X}{2})}{D_X/2}.$$

Δ **Preuve du lemme 2.5.5 :**

Soit $X(t)$ une courbe différentiable dans $\mathcal{S}_2(H)$. Puisque $X(t)$ et $\exp(X(t))$ commutent, l'équation $X \exp(X) = \exp(X)X$ implique :

$$\frac{dX}{dt} \exp(X) + X \frac{d}{dt} \exp(X) = \frac{d}{dt} \exp(X)X + \exp(X) \frac{dX}{dt},$$

ainsi :

$$\frac{dX}{dt} \exp(X) - \exp(X) \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \exp(X)X - X \frac{d}{dt} \exp(X).$$

Après multiplication à gauche et à droite par $\exp(-\frac{X}{2})$, il vient :

$$\begin{aligned} & (\exp - \frac{X}{2}) \frac{dX}{dt} (\exp \frac{X}{2}) - (\exp \frac{X}{2}) \frac{dX}{dt} (\exp - \frac{X}{2}) \\ &= (\exp - \frac{X}{2}) \frac{d}{dt} \exp(X) (\exp - \frac{X}{2}) X - X (\exp - \frac{X}{2}) \frac{d}{dt} (\exp X) (\exp - \frac{X}{2}). \end{aligned}$$

Puisque L_X et R_X commutent, $\exp \frac{D_X}{2} = \exp -\frac{L_X}{2} \exp \frac{R_X}{2}$, et l'équation précédente devient :

$$\left(\exp \frac{D_X}{2} - \exp -\frac{D_X}{2} \right) \frac{dX}{dt} = D_X \tau_X \left(\frac{dX}{dt} \right).$$

Pour tout Y appartenant à $\mathcal{S}_2(H)$, l'identité précédente appliquée à la courbe $X(t) = X + tY$ et l'identité

$$\frac{(\exp \frac{D_X}{2} - \exp -\frac{D_X}{2})}{D_X} = \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(D_X/2)^{2n}}{(2n+1)!},$$

permettent de conclure que $D_X \left(\tau_X - \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2} \right) Y = 0$ pour tout $Y \in \mathcal{S}_2(H)$.

En notant $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{S}_2(H), D_X A = 0\}$, l'application $\tau_X - \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}$ envoie $\mathcal{S}_2(H)$ dans \mathcal{N} . De plus, $\tau_X - \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}$ est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{S}_2(H)$. En effet pour tous A, B appartenant à $\mathcal{S}_2(H)$:

$$\begin{aligned} \langle D_X(A), B \rangle &= - \operatorname{Tr} ([X, A]^* B) = - \operatorname{Tr} ([A, X] B) = - \operatorname{Tr} (AXB - XAB) \\ &= - \operatorname{Tr} (A[X, B]) = \langle A, D_X(B) \rangle, \end{aligned}$$

ainsi D_X^2 est auto-adjoint de même que $\frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}$, et l'équation

$$\frac{d}{dt} \frac{\exp(X + tA) - \exp X}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{d}{dt} \frac{(X + tA)^n - X^n}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n-1} X^p A X^q,$$

implique :

$$\begin{aligned}
\langle \tau_X(A), B \rangle &= \text{Tr} (\tau_X(A))^* B \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n-1} \text{Tr} \exp(-\frac{X}{2}) X^q A X^p \exp(-\frac{X}{2}) B \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n-1} \text{Tr} A X^p \exp(-\frac{X}{2}) B \exp(-\frac{X}{2}) X^q \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n-1} \text{Tr} A \exp(-\frac{X}{2}) X^p B X^q \exp(-\frac{X}{2}) \\
&= \langle A, \tau_X(B) \rangle,
\end{aligned}$$

par conséquent τ_X est également auto-adjoint.

De cela il découle que $\tau_X - \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}$ préserve \mathcal{N}^\perp , mais puisque l'image de $\mathcal{S}_2(H)$ par cette application est dans \mathcal{N} , on a $\tau_X - \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2} = 0$ sur \mathcal{N}^\perp . Sur \mathcal{N} , puisque $[X, Y] = 0$, $\exp(X + tY) = \exp X \exp tY$ et

$$\tau_X(Y) = \exp(-\frac{X}{2}) \exp(X) Y \exp(-\frac{X}{2}) = Y = \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}(Y).$$

D'où $\tau_X(Y) = \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}(Y)$ pour tout Y dans $\mathcal{S}_2(H)$. △

□ **Preuve de la proposition 2.5.3 :**

Du lemme précédent, il vient :

$$\begin{aligned}
d_X \exp(Y) &= L_{\exp(\frac{X}{2})} R_{\exp(\frac{X}{2})} \tau_X(Y) \\
&= L_{\exp(X)} \exp L_{-\frac{X}{2}} \exp R_{\frac{X}{2}} \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}(Y) \\
&= L_{\exp(X)} \exp(D_X/2) \frac{\sinh(D_X/2)}{D_X/2}(Y) \\
&= L_{\exp(X)} \frac{\exp(D_X)-1}{D_X}(Y) = L_{\exp(X)} \left(\frac{1-e^{-\text{ad}(X)}}{\text{ad}(X)} \right) (Y).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.5.6 *L'application exponentiel réalise un difféomorphisme de $\mathcal{S}_2(H)$ sur \mathcal{P} .*

□ **Preuve du corollaire 2.5.6 :**

Tout élément X de $\mathcal{S}_2(H)$ est un opérateur compact auto-adjoint sur H . Soit $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ le spectre de $X \in \mathcal{S}_2(H)$, composé de nombres réels tels que $\sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i^2 < +\infty$. Le spectre de D_X agissant sur $\mathcal{S}_2(H)$ est l'ensemble $\{\lambda_i - \lambda_j, i \neq j\}$, et le spectre de τ_X est l'ensemble :

$$\left\{ \frac{\sinh(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2})}{\frac{(\lambda_i - \lambda_j)}{2}}, i \neq j \right\}.$$

Puisque

$$1 \leq \frac{\sinh(\frac{\lambda_i - \lambda_j}{2})}{\frac{(\lambda_i - \lambda_j)}{2}} \leq \frac{\sinh 2\|X\|_2}{\|X\|_2},$$

τ_X est injectif sur $\mathcal{S}_2(H)$ et borné. Puisque l'application qui associe à une série entière $P(x)$ l'opérateur $P(D_X)$ de $B(H)$ est un morphisme d'anneau, l'inverse de τ_X est l'opérateur donné par la série formelle :

$$\begin{aligned} \tau_X^{-1} : \mathcal{S}_2(H) &\rightarrow \mathcal{S}_2(H) \\ Y &\mapsto \frac{D_X/2}{\sinh D_X/2}(Y), \end{aligned}$$

dont la norme est bornée par 1. Ainsi τ_x est un isomorphisme de $\mathcal{S}_2(H)$ et il en est de même de $d_X \exp$. Par conséquent \exp est un difféomorphisme local sur $\mathcal{S}_2(H)$.

De plus, puisque tout élément P de \mathcal{P} possède une base orthonormale de vecteurs propres associés à des valeurs propres strictement positives, l'application exponentielle de $\mathcal{S}_2(H)$ dans \mathcal{P} est bijective, l'application inverse étant donnée par le logarithme. Ainsi \exp est un difféomorphisme de $\mathcal{S}_2(H)$ sur \mathcal{P} . \square

Notations 2.5.7 Dans la suite de cette section, \mathcal{P} sera muni de la métrique riemannienne g induite par la métrique invariante à gauche sur $Gl_2(H)$ dont la valeur en l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2(H)$ est donnée par la trace, i.e. :

$$g_p(U, V) = \text{Tr} (p^{-1}Up^{-1}V).$$

En introduisant les notations utilisées dans [Mos], $\rho_R(f)$ désignera la longueur d'une courbe f dans \mathcal{P} par rapport à la métrique g , et $\rho_S(f)$ la longueur de la courbe $\log(f)$ dans $\mathcal{S}_2(H)$ par rapport au produit scalaire sur $\mathcal{S}_2(H)$ donné par $\langle X, Y \rangle = \text{Tr} XY$ pour tout X, Y de $\mathcal{S}_2(H)$. La distance définie sur \mathcal{P} par la métrique g sera notée dist .

Remarque 2.5.8 Pour tout x de $Gl_2(H)$, l'application $p \mapsto x^*px$ est une isométrie de \mathcal{P} .

De la preuve du corollaire 2.5.6, on déduit que :

Lemme 2.5.9 *Pour toute courbe différentiable $p(t)$ de \mathcal{P} , on a*

$$\text{Tr} \left(\frac{d}{dt} \log(p(t)) \right)^2 \leq \text{Tr} \left(p(t)^{-1} \frac{dp}{dt} \right)^2,$$

et $\rho_S(p) \leq \rho_R(p)$.

Du lemme précédent, il découle :

Lemme 2.5.10 *Pour tout p appartenant à \mathcal{P} , la courbe $t \mapsto \exp t \log(p)$, ($0 \leq t \leq 1$) est l'unique géodésique de \mathcal{P} joignant l'identité id à p . Plus généralement, il existe une unique géodésique joignant deux points de \mathcal{P} .*

Δ **Preuve du lemme 2.5.10 :**

Notons $p(t) := \exp t \log p$. Il vient :

$$\rho_R(p(t)) = \int_0^1 \left(\text{Tr} \left(p(t)^{-1} \frac{dp}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Puisque

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \left(p(t)^{-1} \frac{dp}{dt} \right)^2 &= \operatorname{Tr} \left(p(t)^{-\frac{1}{2}} \frac{dp}{dt} p(t)^{-\frac{1}{2}} \right) \left(p(t)^{-\frac{1}{2}} \frac{dp}{dt} p(t)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \operatorname{Tr} \left(\tau_{\log(p(t))} \left(\frac{d \log(p(t))}{dt} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned} \rho_R(p) &= \int_0^1 \left(\operatorname{Tr} \left(\tau_{\log(p(t))} \left(\frac{d \log(p(t))}{dt} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 \left(\operatorname{Tr} \left(\frac{\sinh D_{\log(p(t))/2}}{D_{\log(p(t))/2}} (\log(p)) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \int_0^1 \left(\operatorname{Tr} \log(p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt = \left(\operatorname{Tr} \log(p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\log p\| = \rho_S(p). \end{aligned}$$

Comme $t \mapsto t \log(p)$ est l'unique géodesique de $\mathcal{S}_2(H)$ paramétrée à vitesse constante joignant 0 à $\log(p)$, pour toute application $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{P}$ joignant id à p et ayant une image différente de celle de l'application $p(t)$, on a :

$$\rho_R(g(t)) \geq \rho_S(g(t)) > \rho_S(p(t)) = \rho_R(p(t)).$$

Ainsi l'application $p(t)$ minimise la longueur de toute courbe joignant id à p dans \mathcal{P} . Il en découle que $p(t)$ est une géodésique.

Supposons qu'il existe une autre géodésique γ telle que $\gamma(0) = \operatorname{id}$ et $\gamma(1) = p$. Notons $X := \frac{d}{dt} \gamma(0)$. Par unicité locale, on a $\gamma(t) = \exp tX$ pour tout t dans un voisinage de 0 . Puisque $t \mapsto \exp tX$ est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que $\gamma(t) = \exp tX$ sur $[0, 1]$. Ainsi $p = \exp X$. Puisque l'application exponentielle est injective sur $\mathcal{S}_2(H)$, il vient $X = \log(p)$.

De plus, par l'action transitive des isométries de la forme $p \mapsto xpx$ avec p et x dans \mathcal{P} , il existe une unique géodésique joignant deux points de \mathcal{P} . \square

Lemme 2.5.11 *L'angle riemannien entre deux courbes f et g de \mathcal{P} s'intersectant en l'identité id est égal à l'angle euclidien entre les deux courbes $\log(f)$ et $\log(g)$ en 0 . De plus, pour tout triangle géodésique ABC de \mathcal{P} ,*

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos \widehat{ACB},$$

où a, b, c sont les longueurs des côtés opposés à A, B, C et où \widehat{ACB} est l'angle en A .

Δ **Preuve du lemme 2.5.11 :**

Pas de difficultés liées à la dimension infinie. Voir [Mos]. \square

2.5.3 Sous-espaces totalement géodésiques de \mathcal{P}

Le théorème et le lemme qui suivent ont été démontrés par G.D. Mostow dans le cas de la dimension finie dans [Mos]. Bien que l'adaptation des démonstrations à la dimension infinie ne présente pas de difficultés majeures, nous les incluons ici car quelques idées seront utilisées dans la suite (en particulier le lemme 2.5.13).

Théorème 2.5.12 ([Mos]) Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{S}_2(H)$. Il y a équivalence entre :

1. $[X, [X, Y]] \in E$ pour tout $X, Y \in E$,
2. $e f e \in \exp E$ pour tout $e, f \in \exp E$,
3. $\exp E$ est un sous-espace totalement géodésique de \mathcal{P} .

Lemme 2.5.13 ([Mos]) :

Soit X un élément de $\mathcal{S}_2(H)$. Les applications :

$$\begin{aligned} a_X : \mathcal{S}_2(H) &\rightarrow \mathcal{S}_2(H) \\ A &\mapsto A \exp X + \exp X A \\ \beta_X : \mathcal{S}_2(H) &\rightarrow \mathcal{S}_2(H) \\ A &\mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(X + tA) \end{aligned}$$

sont des transformation linéaires bijectives de $\mathcal{S}_2(H)$ sur $\mathcal{S}_2(H)$. Soit $\gamma_X = \beta_X^{-1} \circ a_X$. Alors :

$$\gamma_X = D_X \coth(D_X/2).$$

Δ **Preuve du lemme 2.5.13 :**

Puisque $\beta_X = \exp \frac{L_X}{2} \circ \exp \frac{R_X}{2} \circ \tau_X$, c'est une bijection de $\mathcal{S}_2(H)$ dans $\mathcal{S}_2(H)$. Soit A un élément de $\mathcal{S}_2(H)$ appartenant au noyau de a_X . De $A \exp X + \exp X A = 0$, on déduit :

$$[(\exp - \frac{X}{2})A \exp \frac{X}{2}]^* = \exp \frac{X}{2} A \exp - \frac{X}{2} = -(\exp - \frac{X}{2})A \exp \frac{X}{2}.$$

Ainsi $(\exp - \frac{X}{2})A \exp \frac{X}{2}$ est anti-hermitien, mais comme il est conjugué à l'opérateur symétrique A , on en déduit qu'il est identiquement nul. Ainsi $A = 0$ et a_X est injectif. Comme a_X est un opérateur auto-adjoint de $\mathcal{S}_2(H)$ dans $\mathcal{S}_2(H)$, on en déduit que a_X est surjectif. La continuité de a_X étant claire, le théorème de l'application ouverte assure que a_X est un isomorphisme. De plus :

$$\begin{aligned} \gamma_X &= (\exp \frac{L_X}{2} \circ \exp \frac{R_X}{2} \tau_X)^{-1} (\exp R_X + \exp L_X) \\ &= \frac{D_X/2}{\sinh D_X/2} \cdot (\exp(R_X - L_X)/2 - \exp(L_X - R_X)/2) \\ &= D_X \frac{\cosh D_X/2}{\sinh D_X/2} = D_X \coth D_X/2. \end{aligned}$$

Δ

■ **Preuve du théorème 2.5.12 :**

• $1 \Rightarrow 2$: Supposons que $[X, [X, Y]] \in E$ pour tous X, Y de E . Soit f un élément de $\exp E$, Y un élément de E et X la courbe différentiable de $\mathcal{S}_2(H)$ définie par :

$$X(t) = \log(\exp tY.f.\exp tY).$$

Il s'agit de montrer que $\exp X(t) = \exp tY.f.\exp tY$ appartient à $\exp E$ pour tout t . On a :

$$\frac{d}{dt}|_{t=t_0} \exp X(t) = Y \exp X(t) + \exp X(t)Y,$$

donc

$$\dot{X}(t) = \beta_{X(t)}^{-1} \alpha_{X(t)}(Y) = \gamma_{X(t)}(Y) = D_{X(t)} \coth(D_X(t)/2)(Y).$$

On obtient ainsi une équation différentielle sur $X(t)$. De plus, puisque $D \coth(D/2)$ ne fait intervenir que des puissances paires de D , $X(t)$ appartient à l'espace de Banach E lorsque $X(0) \in E$. Le flot de ce champ de vecteurs étant défini pour tout $t \in \mathbb{R}$, en prenant $t = 1$ et $Y = \log e$ avec $e \in \exp E$, on a $e.f.e \in \exp E$.

• 2 \Rightarrow 3 : Supposons que pour tous e et f appartenant $\exp E$, le produit $e.f.e$ appartient à $\exp E$. D'après le lemme 2.5.10, $\exp E$ contient toute géodésique joignant id à un point quelconque de $\exp E$. Puisque l'ensemble des isométries de la forme $x \mapsto e.x.e$ avec $e \in \exp E$ laisse $\exp E$ invariant et agit transitivement sur $\exp E$, $\exp E$ contient toute géodésique joignant deux de ses points, i.e. $\exp E$ est totalement géodésique dans \mathcal{P} .

• 3 \Rightarrow 2 : Supposons que $\exp E$ soit un sous-espace totalement géodésique de \mathcal{P} . Considérons l'application définie de \mathcal{P} dans \mathcal{P} par $\sigma_p : x \mapsto px^{-1}p$ avec $p \in \mathcal{P}$. Pour tout vecteurs tangent X, Y en x à \mathcal{P} , on a :

$$\begin{aligned} g_{px^{-1}p}(d\sigma_p(X), d\sigma_p(Y)) &= g_{px^{-1}p}(px^{-2}Xp, px^{-2}Yp) \\ &= \text{Tr}(p^{-1}xp^{-1}.px^{-2}Xpp^{-1}xp^{-1}px^{-2}Yp) \\ &= \text{Tr}(x^{-1}Xx^{-1}Y) = g_x(X, Y). \end{aligned}$$

Ainsi σ_p est une isométrie qui laisse p fixe. De plus toute géodésique de la forme $t \mapsto p^{-\frac{1}{2}} \exp tXp^{-\frac{1}{2}}$ à pour image $t \mapsto p^{-\frac{1}{2}} \exp -tXp^{-\frac{1}{2}}$ par σ_p , de sorte que chaque géodésique issue de p est un sous-ensemble invariant par σ_p . On en déduit que si $\exp E$ est un sous-ensemble totalement géodésique de \mathcal{P} , alors $\sigma_p(\exp E) \subset \exp E$ pour tout $p \in \exp E$. Si τ_p dénote l'isométrie de \mathcal{P} donnée par $\tau_p(x) = p^{\frac{1}{2}}xp^{\frac{1}{2}}$, alors :

$$\sigma_p \cdot \sigma_{p^{\frac{1}{2}}}(x) = p.(p^{\frac{1}{2}}x^{-1}p^{\frac{1}{2}})^{-1}.p = p^{\frac{1}{2}}xp^{\frac{1}{2}} = \tau_p(x).$$

Ainsi pour tous e, f de $\exp E$, $e.f.e = \tau_e(f) = \sigma_e(\sigma_{e^{\frac{1}{2}}}(f)) \in \exp E$.

• 2 \Rightarrow 1 : Supposons que $e.f.e \in \exp E$ lorsque e, f appartiennent à $\exp E$. Pour $f \in \exp E$ et $Y \in E$ soit X la courbe différentiable de $S_2(H)$ définie par :

$$X(t) = \log(\exp tY.f.\exp tY).$$

Alors $X(t)$ appartient à E pour tout $t \in \mathbb{R}$, de même que $\dot{X}(t)$ et

$$Z = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{X}(t) - \dot{X}(0)}{t^2}$$

appartient également à E . Comme $\dot{X}(t) = D_{X(t)} \coth(D_{X(t)}/2)(Y)$, il vient :

$$Z = \lim_{t=0} \left[\frac{(1 + (1/12)t^2 D_{X_t}^2)Y - Y}{t^2} + tW \right] = (1/12)t^2 D_{X_0}^2 Y,$$

où W dépend continument de t . Ainsi $D_{X(0)}(Y)$ appartient à E . En prenant $f = \exp X$ on a le résultat. \blacksquare

2.5.4 Projection orthogonale de \mathcal{P} sur un sous-espace totalement géodésique

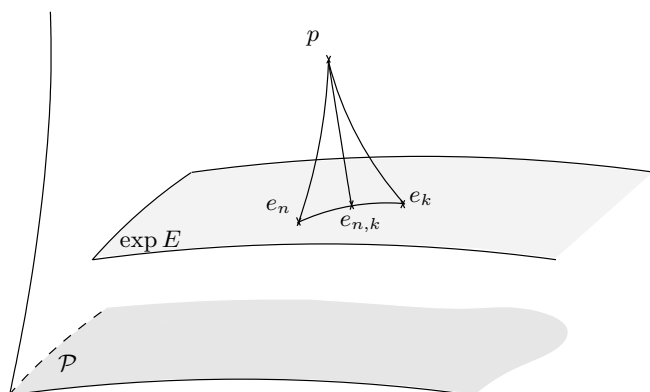
Dans toute la suite E désigne un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{S}_2(H)$ tel que $[X, [X, Y]] \in E$, pour tout $X, Y \in E$. D'après le corollaire 2.5.6, $\exp E$ est fermé dans \mathcal{P} .

La preuve du théorème de décomposition de Mostow donnée dans [Mos] est basée sur l'existence d'une projection orthogonale de \mathcal{P} sur $\exp E$ qui se déduit d'arguments de compacité n'ayant pas cours en dimension infinie. Ici nous utilisons la complétude de $\exp E$ pour obtenir un résultat analogue.

Théorème 2.5.14 *Il existe une projection orthogonale continue (1-lipschitzienne) de \mathcal{P} dans $\exp E$, i.e. une application continue π satisfaisant $\text{dist}(p, \exp E) = \text{dist}(p, \pi(p))$ et telle que la géodésique joignant p à $\pi(p)$ soit orthogonale à toute géodésique partant de $\pi(p)$ et contenue dans $\exp E$.*

■ Preuve du théorème 2.5.14 :

• Soit p un élément de \mathcal{P} . Notons δ la distance de p à $\exp E$ dans \mathcal{P} et soit $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\exp E$ telle que $\text{dist}^2(p, e_n) \leq \delta^2 + \frac{1}{n}$. Montrons que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\exp E$.



Considérons pour $k > n$ la géodésique $\gamma(t)$ joignant $e_n =: \gamma(0)$ à $e_k =: \gamma(1)$. Cette géodésique est contenue dans $\exp E$ car $\exp E$ est totalement géodésique, et est de la forme :

$$\gamma(t) = e_n^{\frac{1}{2}} \exp(tX) e_n^{\frac{1}{2}},$$

où X est un élément de E . Notons $e_{n,k}$ le milieu de la géodésique joignant e_n à e_k , i.e. $e_{n,k} = e_n^{\frac{1}{2}} \exp(\frac{1}{2}X) e_n^{\frac{1}{2}}$. D'après le lemme 2.5.11 appliqué au triangle géodésique joignant p , e_n et $e_{n,k}$, il vient :

$$\text{dist}(p, e_n)^2 \geq \text{dist}(e_n, e_{n,k})^2 + \text{dist}(e_{n,k}, p)^2 - 2 \text{dist}(e_n, e_{n,k}) \text{dist}(e_{n,k}, p) \cos \widehat{e_n e_{n,k} p}.$$

D'autre part, le lemme 2.5.11 appliqué au triangle géodésique joignant p , e_k et $e_{n,k}$ implique :

$$\text{dist}(p, e_k)^2 \geq \text{dist}(e_k, e_{n,k})^2 + \text{dist}(e_{n,k}, p)^2 - 2 \text{dist}(e_k, e_{n,k}) \text{dist}(e_{n,k}, p) \cos \widehat{e_k e_{n,k} p}.$$

D'après la définition de $e_{n,k}$, on a : $\text{dist}(e_k, e_{n,k}) = \text{dist}(e_n, e_{n,p})$. De plus, puisque la géodésique γ est une courbe lisse, il vient :

$$\widehat{e_k e_{n,k} p} + \widehat{e_n e_{n,k} p} = 180^\circ,$$

et $\cos \widehat{e_k e_{n,k} p} = -\cos \widehat{e_n e_{n,k} p}$. En sommant ces deux inégalités, on obtient :

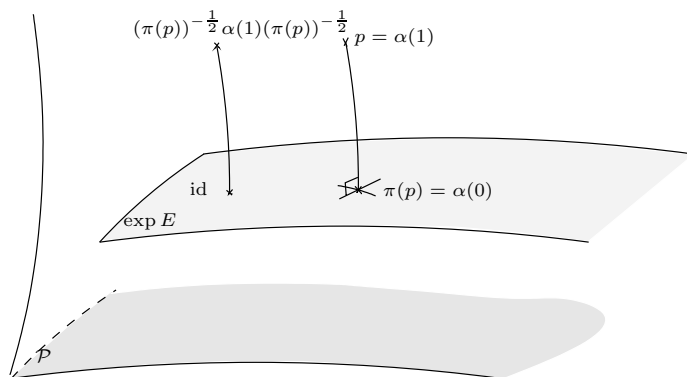
$$\text{dist}(p, e_n)^2 + \text{dist}(p, e_k)^2 \geq 2\text{dist}(e_k, e_{n,k})^2 + 2\text{dist}(e_{n,k}, p)^2.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \text{dist}(e_k, e_{n,k})^2 &\leq \frac{1}{2}(\text{dist}(p, e_n)^2 + \text{dist}(p, e_k)^2) - \text{dist}(e_{n,k}, p)^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\delta^2 + \frac{1}{n} + \delta^2 + \frac{1}{p}) - \delta^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{p}). \end{aligned}$$

Ainsi $\text{dist}(e_n, e_k) \leq \sqrt{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{p})^{\frac{1}{2}}$ et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\exp E$. Comme $\exp E$ est fermé dans l'espace complet $\mathcal{S}_2(H)$, la suite $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $\pi(p)$ de $\exp E$ satisfaisant :

$$\text{dist}(p, \pi(p)) = \text{dist}(p, \exp E).$$



• Soit $t \mapsto \alpha(t)$ la géodésique paramétrée à vitesse constante satisfaisant $\alpha(0) = \pi(p)$ et $\alpha(1) = p$. Par unicité de la géodésique joignant deux points, la longueur de α est $\text{dist}(p, \exp E)$. L'application $x \mapsto (\pi(p))^{-\frac{1}{2}}x(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ étant une isométrie, la courbe $t \mapsto (\pi(p))^{-\frac{1}{2}}\alpha(t)(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ est une géodésique dont la longueur est la distance entre $(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}p(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ et $\exp E$, ainsi la projection de $(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}p(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ sur $\exp E$ est id . D'après le lemme 2.5.10, il vient :

$$(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}\alpha(t)(\pi(p))^{-\frac{1}{2}} = \exp tV,$$

pour un vecteur V de $\mathcal{S}_2(H)$. Puisque la longueur de la courbe $t \mapsto \exp tV$ pour $t \in [0, 1]$ est $\|V\|$, V est dans l'orthogonal F de E et $(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}p(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ est dans $\exp F$. Comme $E \perp F$, d'après le lemme 2.5.11, $(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}\alpha(t)(\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ est orthogonal en l'identité à toute courbe partant de l'identité et contenue dans $\exp E$. Par conséquent α est orthogonal en $\pi(p)$ à toute courbe partant de $\pi(p)$ et contenue dans $\exp E$.

• Pour montrer que π est continue, rappelons que la métrique de \mathcal{P} est la restriction à \mathcal{P} de la métrique invariante à gauche de $Gl_2(\mathbb{C})$ dont la valeur en

l'identité est la partie réelle du produit scalaire hermitien de l'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}_2(H)$. Ainsi \mathcal{P} est une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative. Notons $\gamma(t)$ (resp. $\alpha(t)$) la géodésique joignant un point p_1 (resp. p_2) de \mathcal{P} à sa projection sur $\exp E$, avec $\gamma(0) = \pi(p_1)$ (resp. $\alpha(0) = \pi(p_2)$) et $\gamma(1) = p_1$ (resp. $\alpha(1) = p_2$). L'application $t \mapsto \text{dist}(\gamma(t), \alpha(t))$ est convexe car \mathcal{P} est CAT-0 (cf remarque ci-dessous). Puisque, pour $t = 0$, $\gamma(t)$ et $\alpha(t)$ sont orthogonales à la géodésique joignant $\pi(p_1)$ à $\pi(p_2)$, le minimum de la distance entre $\gamma(t)$ et $\alpha(t)$ est atteint pour $t = 0$, et $\text{dist}(p_1, p_2) \geq \text{dist}(\pi(p_1), \pi(p_2))$. ■

Remarque 2.5.15 Une variété riemannienne est CAT-0 si la distance entre deux points du périmètre d'un triangle de côtés donnés est inférieure à ce qu'elle serait dans un triangle euclidien de mêmes côtés. Si, dans une variété CAT-0 (de dimension finie ou infinie), deux points quelconques peuvent être joints par une géodésique, la distance entre deux géodésiques est une fonction convexe. En effet, soient $x(t)$ et $y(t)$ deux géodésiques, et $z(t)$ la géodésique joignant $z(0) = x(0)$ et $z(1) = y(1)$. On a :

$$\begin{aligned} d(x(t), y(t)) &\leq d(x(t), z(t)) + d(z(t), y(t)) \\ &\leq td(x(1), z(1)) + (1-t)d(z(0), y(0)) \\ &\leq td(x(1), y(1)) + (1-t)d(x(0), y(0)). \end{aligned}$$

Remarquons que la variété \mathcal{P} des opérateurs auto-adjoints définis positifs de $\mathfrak{gl}_2(H)$ est CAT-0. En effet, il suffit de le voir pour un triangle géodésique dont l'un des sommets est en l'identité. Puisque l'exponentielle réalise un difféomorphisme de l'ensemble $\mathcal{S}_2(H)$ des opérateurs de Hilbert-Schmidt auto-adjoints sur \mathcal{P} , un triangle dont l'un des sommets est en l'identité est contenu dans une variété de dimension 2 de courbure négative, donc CAT-0 d'après la théorie de dimension finie.

2.5.5 Preuve du théorème de Mostow pour $\mathfrak{gl}_2(H)$

Théorème 2.5.16 Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{S}_2(H)$ tel que :

$$[X, [X, Y]] \in E, \forall X, Y \in E,$$

et soit F son orthogonal dans $\mathcal{S}_2(H)$:

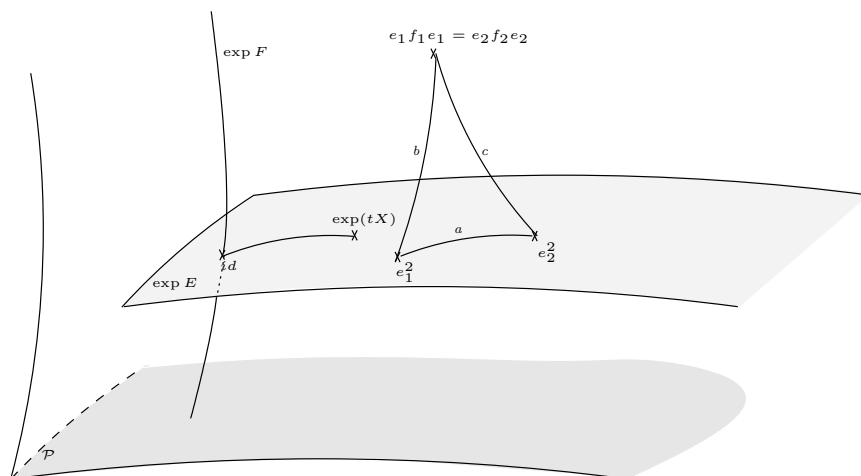
$$F := E^\perp = \{X \in \mathcal{S}_2(H), \text{Tr } XY = 0 \text{ pour tout } Y \in E\}.$$

Pour tout opérateur auto-adjoint défini positif A de \mathcal{P} il existe un unique élément $e \in \exp E$ et un unique élément $f \in \exp F$ tel que $A = efe$. De plus l'application définie de \mathcal{P} dans $\exp E \times \exp F$ associant à A le couple (e, f) est un homéomorphisme.

■ **Preuve du théorème 2.5.16 :**

Notons Υ l'application de $\exp E \times \exp F$ dans \mathcal{P} associant à (e, f) le produit efe .

• Montrons que Υ est injective. Supposons que (e_1, f_1) et (e_2, f_2) soient deux éléments de $\exp E \times \exp F$ tels que : $e_1 f_1 e_1 = e_2 f_2 e_2$. Considérons le triangle géodésique T de sommets $e_1 f_1 e_1$, e_1^2 et e_2^2 . D'après le théorème 2.5.12, $\exp E$ est totalement géodésique dans \mathcal{P} . Ainsi la géodésique joignant e_1^2 à e_2^2 est contenue dans $\exp E$. D'autre part, la géodésique joignant $e_1 f_1 e_1$ à e_1^2 appartient à



$e_1 \exp F e_1$. Puisque E est perpendiculaire à F en 0 , d'après le lemme 2.5.11, $\exp E$ est perpendiculaire à $\exp F$ en l'identité. Or l'application associant à un élément x de \mathcal{P} l'élément $e_1 x e_1$ est une isométrie, donc $e_1 \exp F e_1$ est perpendiculaire à $e_1 \exp E e_1 = \exp E$ en e_1^2 . Ainsi l'angle en e_1^2 du triangle T est 90° . De manière analogue, l'angle en e_2^2 du triangle T est 90° car la géodésique joignant e_2^2 à $e_2 f_2 e_2 = e_1 f_1 e_1$ est contenue dans $e_2 \exp F e_2$ et la géodésique joignant e_2^2 à e_1^2 est contenue dans $\exp E$. Notons a la longueur du côté du triangle géodésique T joignant e_1^2 à e_2^2 , b la longueur du côté joignant $e_1 f_1 e_1$ à e_1^2 et c la longueur du côté joignant $e_1 f_1 e_1$ à e_2^2 . D'après le lemme 2.5.11, on a : $c^2 \geq b^2 + a^2$ et $b^2 \geq c^2 + a^2$. Cela entraîne $a = 0$ et $e_1^2 = e_2^2$. On en déduit que $e_1 = e_2$ et $f_1 = f_2$.

• Montrons que Υ est surjective. Considérons un point p de \mathcal{P} . D'après le théorème 2.5.14, la géodésique joignant p à $\pi(p) \in \exp E$ est orthogonale à toute géodésique partant de $\pi(p)$ et contenue dans $\exp E$. Notons γ la géodésique satisfaisant $\gamma(0) = \text{id}$ et $\gamma(1) = (\pi(p))^{-\frac{1}{2}} p (\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$. Puisque l'application

$$x \mapsto (\pi(p))^{-\frac{1}{2}} x (\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$$

est une isométrie, γ est orthogonale à toute géodésique partant de l'identité et contenue dans $(\pi(p))^{-\frac{1}{2}} \exp E (\pi(p))^{-\frac{1}{2}} = \exp E$. D'après le lemme 2.5.11, la courbe γ est tangente à $F = E^\perp$ en l'identité. D'après le lemme 2.5.10, γ est de la forme $t \mapsto \exp tX$. On en déduit que X appartient à F . Ainsi $\gamma(1) = \exp X = (\pi(p))^{-\frac{1}{2}} p (\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ appartient à $\exp F$. Par conséquent $p = e f e$ avec $e := (\pi(p))^{\frac{1}{2}}$ appartenant à $\exp E$ et $f := (\pi(p))^{-\frac{1}{2}} p (\pi(p))^{-\frac{1}{2}}$ appartenant à $\exp F$. Il en découle que Υ est surjective.

• La continuité de l'application qui à p associe le couple (e, f) de $\exp E \times \exp F$ vérifiant $p = e f e$ est une conséquence directe de la continuité de la projection orthogonale π . ■

Théorème 2.5.17 (Décomposition de Mostow) *Soient E et F comme précédemment. Alors tout élément g de $GL_2(H)$ a une décomposition de la forme $g = k f e$ avec $k \in U_2(H)$, $f \in \exp F$ et $e \in \exp E$. De plus l'application qui à un élément g de $GL_2(H)$ associe le triplet (k, f, e) de $U_2(H) \times \exp F \times \exp E$ vérifiant $g = k f e$ est un homéomorphisme.*

■ **Preuve du théorème 2.5.17 :**

Notons Θ l'application définie sur $U_2(H) \times \exp E \times \exp F$ à valeurs dans $Gl_2(H)$ associant à (k, f, e) le produit kfe .

• Montrons que Θ est injective. Supposons que $a = k_1 f_1 e_1 = k_2 f_2 e_2$ avec (k_1, f_1, e_1) et (k_2, f_2, e_2) dans $U_2(H) \times \exp E \times \exp F$. On a :

$$a^* a = e_1 f_1^2 e_1 = e_2 f_2^2 e_2.$$

Puisque f_1^2 et f_2^2 appartiennent à $\exp F$, d'après le théorème 2.5.16, on a $e_1 = e_2$ et $f_1^2 = f_2^2$. Ainsi $f_1 = f_2$ et $k_1 = k_2$.

• Montrons que Θ est surjective. Considérons x dans $Gl_2(H)$. $x^* x$ est un élément de \mathcal{P} et d'après le théorème 2.5.16, il existe $e \in \exp E$ et $f \in \exp F$ tels que $x^* x = e f^2 e$. Soit $k = x(fe)^{-1}$. On a :

$$k^* k = (fe)^{-1*} x^* x (fe)^{-1} = f^{-1} e^{-1} e f^2 e e^{-1} f^{-1} = \text{id}.$$

Ainsi k appartient à $U_2(H)$ et on a $x = kfe$.

• La continuité de l'application qui à un élément x de $Gl_2(H)$ associe le triplet (k, f, e) de $U_2(H) \times \exp F \times \exp E$ vérifiant $x = kfe$ découle directement de la continuité de l'application qui à x associe $x^* x$ et du théorème 2.5.16. ■

2.5.6 Théorème de Mostow pour un L^* -groupe semi-simple

Du théorème 2.5.17 nous déduisons le théorème suivant :

Théorème 2.5.18 Soient G un L^* -groupe connexe semi-simple de type compact d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , $G^{\mathbb{C}}$ le L^* -groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, E' un sous-espace vectoriel fermé de $i\mathfrak{g}$ tel que :

$$[X, [X, Y]] \in E', \forall X, Y \in E',$$

et F l'orthogonal de E' dans $i\mathfrak{g}$. Alors $G^{\mathbb{C}}$ est homéomorphe au produit cartésien $G \times \exp F \times \exp E'$.

■ **Preuve du théorème 2.5.18 :**

Puisque $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est une L^* -algèbre semi-simple, elle est somme hilbertienne d'idéaux fermés simples et $*$ -stables \mathfrak{g}_j , où j parcourt un ensemble J (cf théorème 2.2.25). Puisque chaque L^* -algèbre simple \mathfrak{g}_j est une algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert H_j , $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est une sous- L^* -algèbre de $\mathfrak{gl}_2(H)$ où H est la somme hilbertienne des H_j pour j parcourant J . $G^{\mathbb{C}}$ est alors un sous- L^* -groupe de $Gl_2(H)$. Puisque $G^{\mathbb{C}}$ est connexe, $G^{\mathbb{C}}$ est engendré par un voisinage de l'élément neutre. L'exponentielle réalise un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ sur un voisinage de l'élément neutre de $G^{\mathbb{C}}$. Puisque $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ est stable par prise de l'adjoint et que $(\exp X)^* = \exp X^*$, $G^{\mathbb{C}}$ est également $*$ -stable. Soit $x \in G^{\mathbb{C}}$. D'après le théorème 2.5.17, x s'écrit $x = k.f.e$ avec $k \in U_2(H)$, $e \in \exp E'$ et $f \in \exp F'$, où F' est l'orthogonal de E' dans $\mathcal{S}_2(H)$. Puisque $G^{\mathbb{C}}$ est $*$ -stable, il contient $x^* x = e f^2 e$. Cet élément étant un opérateur hermitien défini positif de $G^{\mathbb{C}}$, il appartient à $\exp \mathcal{S}_2(H) \cap G^{\mathbb{C}} = \exp i\mathfrak{g}$. Comme $f^2 = e^{-1} x^* x e^{-1}$, f^2 appartient également à $\exp i\mathfrak{g}$ donc à $\exp F$, de même que sa racine carré f . On en déduit que $k = x e^{-1} f^{-1}$ appartient à $G^{\mathbb{C}} \cap U_2(H) = G$. ■

Corollaire 2.5.19 *Soient G un L^* -groupe connexe semi-simple de type compact d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , $G^{\mathbb{C}}$ le L^* -groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, \mathfrak{k} une sous- L^* -algèbre de \mathfrak{g} et \mathfrak{m} l'orthogonal de \mathfrak{k} dans \mathfrak{g} . Alors $G^{\mathbb{C}}$ est homéomorphe au produit cartésien $G \times \exp i\mathfrak{m} \times \exp i\mathfrak{k}$.*

□ **Preuve du corollaire 2.5.19 :**

Résulte directement du théorème 2.5.18 puisque $[i\mathfrak{k}, [i\mathfrak{k}, i\mathfrak{k}]] \subset i\mathfrak{k}$. □

2.6 Structure hyperkählérienne de l'orbite complexifiée $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ d'une orbite coadjointe affine hermitienne symétrique \mathcal{O}_D d'un L^* -groupe semi-simple de type compact et de $T'\mathcal{O}_D$

Les notations utilisées dans toute cette section sont les suivantes. \mathcal{O}_D désigne une orbite (co-)adjointe affine hermitienne symétrique d'un L^* -groupe G semi-simple de type compact (i.e. dont l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est de type compact), définie par une dérivation $\mathbb{D} = [D, \cdot]$ de \mathfrak{g} (cf section 2.3). L'action adjointe affine Ad_D du L^* -groupe connexe $G^{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ est donnée par un morphisme de groupe de $G^{\mathbb{C}}$ dans $\text{Gl}(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}) \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ se décomposant en (Ad, Θ_D) avec $\Theta_D : G \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ vérifiant :

$$\Theta_D(g_1 g_2) = \text{Ad}(g_1)(\Theta_D(g_2)) + \Theta_D(g_1),$$

et donné par $\Theta_D(g_1) = g_1 D g_1^{-1} - D$. L'orbite adjointe affine \mathcal{O}_D (resp. $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$) de 0 pour la dérivation \mathbb{D} est l'ensemble des éléments de \mathfrak{g} (resp. $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$) de la forme :

$$(\text{Ad}(g), \Theta_D(g))(0) = \text{Ad}(g)(0) + \Theta_D(g) = \Theta_D(g) = g D g^{-1} - D,$$

avec $g \in G$ (resp. $g \in G^{\mathbb{C}}$).

On notera $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ la décomposition de \mathfrak{g} en paire symétrique, avec $\mathfrak{k} := \{x \in \mathfrak{g}, \mathbb{D}x = 0\}$ et $\mathfrak{m} := \mathfrak{k}^{\perp}$. Si K désigne le L^* -groupe connexe d'algèbre de Lie \mathfrak{k} , on a :

$$\mathcal{O}_D := \{g D g^{-1} - D, g \in G\} = G/K.$$

Soient $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$ la L^* -algèbre complexifiée de \mathfrak{k} , et $\mathfrak{m}^{\mathbb{C}}$ le sous-espace vectoriel fermé complexe de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ obtenu en complexifiant \mathfrak{m} . On notera

$$I := \sum_{\alpha} \frac{1}{c_{\alpha}} \mathbb{D}|_{V_{c_{\alpha}} \oplus V_{-c_{\alpha}}}$$

la structure complexe naturelle de l'orbite, où $V_{\pm c_{\alpha}}$ est l'espace propre de \mathbb{D} de valeur propre $\pm i c_{\alpha}$. En vertu de la décomposition de Mostow (cf corollaire 2.5.19 du théorème 2.5.18), le L^* -groupe connexe $G^{\mathbb{C}}$ se décompose en :

$$G^{\mathbb{C}} = G \times \exp i\mathfrak{m} \times \exp i\mathfrak{k}.$$

Pour tout $x = g D g^{-1} - D \in \mathcal{O}_D$, on notera $\mathfrak{k}_x := g \mathfrak{k} g^{-1}$ le stabilisateur de x dans \mathfrak{g} et $\mathfrak{m}_x := g \mathfrak{m} g^{-1}$ son orthogonal.

2.6.1 Fibration de l'orbite complexifiée au-dessus de l'orbite de type compact

Définition 2.6.1 (Orbite complexifiée) On appellera orbite complexifiée de \mathcal{O}_D l'orbite adjointe affine $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ du L^* -groupe complexe semi-simple $G^{\mathbb{C}}$

$$\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} = \{g D g^{-1} - D, g \in G^{\mathbb{C}}\}.$$

Le théorème suivant est une généralisation de la proposition 1 de [BG2] au cas d'une orbite adjointe affine d'un L^* -groupe semi-simple.

Théorème 2.6.2 *Tout élément y de l'orbite adjointe complexifiée $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$y = \text{Ad}_D(e^{i\mathbf{a}}).x$$

où x est l'unique point de l'orbite de type compact \mathcal{O}_D à distance minimale de y , et où \mathbf{a} appartient à \mathfrak{m}_x . Les fibres de cette projection orthogonale

$$\begin{array}{ccc} \pi : \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} & \rightarrow & \mathcal{O}_D \\ y & \mapsto & x \end{array}$$

sont les $\text{Ad}_D G_x^{n.c.}(x)$ où $G_x^{n.c.}$ est le L^* -groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}_x \oplus i\mathfrak{m}_x$. En outre, π est G -équivariante.

■ **Preuve du théorème 2.6.2 :**

Par produit, on peut supposer que G est simple et \mathcal{O}_D irréductible, en particulier $I = \frac{1}{c}\mathbb{D}$, avec $c > 0$. En vertu de la décomposition de Mostow, tout élément g de $G^{\mathbb{C}}$ s'écrit $g = u.\exp i\mathbf{a}.\exp i\mathbf{b}$ avec $u \in G$, $\mathbf{a} \in \mathfrak{m}$, $\mathbf{b} \in \mathfrak{k}$, ou encore $g = e^{iu\mathbf{a}u^{-1}}.ue^{i\mathbf{b}}$. Ainsi tout élément $y = \text{Ad}_D(g)(0)$ de l'orbite complexifiée s'écrit

$$y = \text{Ad}_D(e^{iu\mathbf{a}u^{-1}})(x)$$

avec $x = \text{Ad}_D(u)(0)$ et $u\mathbf{a}u^{-1} \in \mathfrak{m}_x$. Montrons que x est caractérisé par le fait qu'il est l'unique point de \mathcal{O}_D à distance minimale de y .

Puisque tout élément de G s'écrit comme un produit d'un élément de $\exp \mathfrak{m}_x$ et d'un élément de $\exp \mathfrak{k}_x$, tout autre point de l'orbite de type compacte s'écrit :

$$x' = \text{Ad}_D(e^{\mathbf{b}'})x = e^{\mathbf{b}'}uDu^{-1}e^{-\mathbf{b}'} - D$$

avec $\mathbf{b}' \in \mathfrak{m}_x$. Posons

$$x_t := \text{Ad}_D(e^{t\mathbf{b}'})x = e^{t\mathbf{b}'}uDu^{-1}e^{-t\mathbf{b}'} - D$$

et

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2}\|y - x_t\|^2 = \frac{1}{2}\|e^{iu\mathbf{a}u^{-1}}uDu^{-1}e^{-iu\mathbf{a}u^{-1}} - e^{t\mathbf{b}'}uDu^{-1}e^{-t\mathbf{b}'}\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}} - e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}\|^2, \end{aligned}$$

où $\mathbf{b} := u^{-1}\mathbf{b}'u \in \mathfrak{m}$. On a :

$$f'(t) = \Re\langle e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}} - D, -[\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}] \rangle + \Re\langle e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D, [\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}] \rangle.$$

Des relations de commutations

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}; \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}; \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{k},$$

on déduit que : $e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}} - D \in \mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{m}$ et $-[\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}] \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, de sorte que seules les composantes selon \mathfrak{k} contribuent au produit scalaire. Considérons les deux termes de cette somme séparément. D'une part :

$$\begin{aligned} &\Re\langle e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}} - D, -[\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}] \rangle \\ &= \Re\langle \frac{\cosh x - 1}{x^2}(\text{ad}(i\mathbf{a}))[\mathbf{a}, [D, \mathbf{a}]], \frac{1}{t} \frac{\sin x}{x}(\text{ad}(t\mathbf{b}))[\mathbf{b}, [D, \mathbf{b}]] \rangle \\ &= \frac{c^2}{t} \Re\langle \frac{\cosh x - 1}{x^2}(\text{ad}(i\mathbf{a}))[\mathbf{a}, I\mathbf{a}], \frac{1}{t} \frac{\sin x}{x}(\text{ad}(t\mathbf{b}))[\mathbf{b}, I\mathbf{b}] \rangle, \end{aligned}$$

où, pour toute fonction entière f , $f(x)(\text{ad}(i\mathbf{a}))$ désigne l'opérateur obtenu en appliquant la série de f à l'opérateur symétrique $\text{ad}(i\mathbf{a})$. D'après le lemme 2.4.24 du paragraphe 2.4.4,

$$\begin{aligned}\Re\langle e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}} - D, -[\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}] \rangle &= \frac{c^2}{t} \Re\langle [\mathbf{a}'', I\mathbf{a}''], [\mathbf{b}'', I\mathbf{b}''] \rangle, \\ &= \frac{c^2}{t} (\|\mathbf{a}''\|^2 + \|\mathbf{b}''\|^2)\end{aligned}$$

avec $\mathbf{a}'' := \sqrt{\frac{\cosh x - 1}{x^2}}(\text{ad}(iI\mathbf{a})(\mathbf{a}))$ et $\mathbf{b}'' := \sqrt{\frac{\sin x}{x}}(\text{ad}(iI\mathbf{b})(\mathbf{b}))$, cette dernière expression étant valable pour $t \leq \frac{\pi}{2\|\mathbf{b}\|}$.

D'autre part, puisque $\langle e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D, [\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D] \rangle$ est imaginaire pur, on a :

$$\Re\langle e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D, [\mathbf{b}, e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}}] \rangle = \Re\langle e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D, [\mathbf{b}, D] \rangle.$$

En utilisant de nouveau les relations de commutations entre \mathfrak{k} et \mathfrak{m} , on a $e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$, et $[\mathbf{b}, D] \in \mathfrak{m}$, de sorte que :

$$\begin{aligned}\Re\langle e^{t\mathbf{b}}De^{-t\mathbf{b}} - D, [\mathbf{b}, D] \rangle &= \Re\langle \frac{\sin x}{x}(\text{ad}(it\mathbf{b}))[t\mathbf{b}, D], [\mathbf{b}, D] \rangle \\ &= t \Re\langle \frac{\sin x}{x}(\text{ad}(it\mathbf{b}))I\mathbf{b}, I\mathbf{b} \rangle.\end{aligned}$$

On en déduit que pour $0 < t < \frac{\pi}{2\|\mathbf{b}\|}$, $f'(t) > 0$. Remarquons que pour $t = \frac{\pi}{2\|\mathbf{b}\|}$, x_t atteint le cut-locus de x . La dérivée seconde en 0 de la fonction f est donnée par :

$$\begin{aligned}f''(0) &= \Re\langle e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}} - D, -[\mathbf{b}, [\mathbf{b}, D]] \rangle + \Re\langle [\mathbf{b}, D], [\mathbf{b}, D] \rangle \\ &= \Re\langle [\mathbf{b}, e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}}], [\mathbf{b}, D] \rangle \\ &= \Re\langle [\mathbf{b}, \frac{\cosh(x)-1}{x^2}(\text{ad}(i\mathbf{a}))([\mathbf{a}, [i\mathbf{a}, D]])], [\mathbf{b}, D] \rangle + \Re\langle [\mathbf{b}, D], [\mathbf{b}, D] \rangle \\ &= \Re\langle \frac{\cosh(x)-1}{x^2}(\text{ad}(i\mathbf{a}))([\mathbf{a}, [D, \mathbf{a}]])], [\mathbf{b}, [D, \mathbf{b}]] \rangle + c^2\|\mathbf{b}\|^2 \\ &= c^2 \Re\langle \frac{\cosh(x)-1}{x^2}(\text{ad}(i\mathbf{a}))[\mathbf{a}, I\mathbf{a}], [\mathbf{b}, I\mathbf{b}] \rangle + c^2\|\mathbf{b}\|^2 \geq c^2\|\mathbf{b}\|^2.\end{aligned}$$

Ainsi le hessien du carré de la distance de y à x dont l'expression est

$$\text{Hess}(X^c, X^d) = \Re\langle [c, e^{i\mathbf{a}}De^{-i\mathbf{a}}], [d, D] \rangle, \quad (2.3)$$

est défini positif en x , et x est l'unique point de \mathcal{O}_D à distance minimale de y . On en déduit que la fibre au dessus de x est $\text{Ad}G^{n.c.}(x)$. La G -équivariance de π résulte directement de la définition. ■

Proposition 2.6.3 *Soit $y = \text{Ad}_D(e^{i\mathbf{a}})(x)$, avec $\mathbf{a} \in \mathfrak{m}_x$. L'application*

$$\begin{aligned}\rho : \mathfrak{m}_x \oplus \mathfrak{im}_x &\rightarrow T_y \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{c} &\mapsto X^c\end{aligned}$$

est un isomorphisme. Le noyau de $\pi_* : T_y \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} \rightarrow T_x \mathcal{O}_D$ est $V_y := \{X^{i\mathbf{c}}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{m}_x\}$, et π_* réalise un isomorphisme de $H_y := \{X^c, \mathfrak{c} \in \mathfrak{m}_x\}$ sur \mathfrak{m}_x .

□ **Preuve de la proposition 2.6.3 :**

Par G -équivariance, il suffit de considérer le cas où $x = 0$. Un vecteur tangent à $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ en $y = e^{ia}De^{-ia} - D$ est donné par l'action d'un élément \mathfrak{c} de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$, i.e. est la dérivée en 0 de la fonction

$$\Phi^{\mathfrak{c}}(t) = e^{t\mathfrak{c}}e^{ia}De^{-ia}e^{-t\mathfrak{c}} - D,$$

c'est-à-dire est de la forme :

$$X^{\mathfrak{c}} = [\mathfrak{c}, e^{ia}De^{-ia}] = e^{ia}[e^{-ia}\mathfrak{c}e^{ia}, D]e^{-ia}.$$

Pour $\mathfrak{c} \in \mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{m}$,

$$\begin{aligned} [e^{-ia}\mathfrak{c}e^{ia}, D] &= [\text{Ad}(e^{-ia})(\mathfrak{c}), D] = [\exp(\text{ad}(-ia))(\mathfrak{c}), D] \\ &= -cI \cosh(\text{ad}(-ia))(\mathfrak{c}). \end{aligned}$$

L'opérateur $\cosh(\text{ad}(-ia))$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ dans $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ étant hermitien injectif, il réalise un isomorphisme de $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, qui préserve $\mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{m}$. Comme l'espace tangent à $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ en y est $e^{ia}(\mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{m})e^{-ia}$, on en déduit que ρ est un isomorphisme.

Pour $\mathfrak{c} \in i\mathfrak{m}$, $X^{\mathfrak{c}}$ est tangent à la fibre de π au-dessus de 0, donc $\pi_*(X^{\mathfrak{c}}) = 0$. De plus, pour $\mathfrak{c} \in \mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{c} = e^{ia}\mathfrak{c}'e^{-ia}$, il vient :

$$\begin{aligned} \pi(\Phi^{\mathfrak{c}}(t)) &= \pi(e^{t\mathfrak{c}}e^{ia}De^{-ia}e^{-t\mathfrak{c}} - D) \\ &= \pi(e^{ia}e^{t\mathfrak{c}'}De^{-t\mathfrak{c}'}e^{-ia} - D) \\ &= \pi(e^{t\mathfrak{c}'}De^{-t\mathfrak{c}'} - D) = e^{t\mathfrak{c}'}De^{-t\mathfrak{c}'} - D. \end{aligned}$$

Ainsi $\pi_*(X^{\mathfrak{c}}(y)) = [\mathfrak{c}', D] = -cI \cosh(\text{ad}(-ia))(\mathfrak{c})$ et π_* réalise un isomorphisme de $H_y = \{X^{\mathfrak{c}}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{m}\}$ dans \mathfrak{m} . □

2.6.2 Structure hyperkählérienne de l'orbite complexifiée

Le caractère métrique de la fibration décrite au paragraphe précédent permet de montrer de manière explicite l'existence d'une structure hyperkählérienne sur l'orbite complexifiée d'une orbite (co-)adjointe affine hermitienne symétrique d'un L^* -groupe de type compact G , et, de ce fait, de généraliser le théorème 3 de [BG2] (plus précisément la partie existence). Notons que, par produit, il suffit de considérer le cas d'une orbite irréductible $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$.

Théorème 2.6.4 *L'orbite complexe irréductible $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ possède une structure hyperkählérienne G -invariante compatible avec la forme symplectique $\omega^{\mathbb{C}}$ de Kirillov-Kostant-Souriau se restreignant en la structure kählérienne de l'orbite de type compact \mathcal{O}_D . La forme de Kähler ω associée à la structure complexe i de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ est donnée par $\omega = dd^c K$, avec*

$$K(y) = c\Re\langle y, \pi(y) \rangle.$$

■ **Preuve du théorème 2.6.4 :**

Pour $y = \text{Ad}_D(e^{ia})(x) \in \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$, où $x \in \mathcal{O}_D$, et pour tout vecteur $X^{\mathfrak{c}}$ de l'espace tangent à $T_y\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ engendré par l'élément $\mathfrak{c} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, on a :

$$dK_y(X^{\mathfrak{c}}) = c\Re\langle X^{\mathfrak{c}}, \pi(y) \rangle + c\Re\langle y, \pi_*(X^{\mathfrak{c}}(y)) \rangle.$$

Comme $y \in \mathfrak{k}_x \oplus i\mathfrak{m}_x$ et $\pi_*(X^c(y)) \in \mathfrak{m}_x$, il vient :

$$dK_y(X^c) = c\Re\langle X^c, \pi(y) \rangle,$$

et

$$d^c K_y(X^c) = -c\Im\langle X^c, \pi(y) \rangle.$$

Ainsi, pour $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, il vient :

$$dd^c K(X^c, X^{\mathfrak{d}}) = c\Im\langle X^c, \pi_*(X^{\mathfrak{d}}(y)) \rangle - c\Im\langle X^{\mathfrak{d}}, \pi_*(X^c(y)) \rangle + c\Im\langle X^{[\mathfrak{c}, \mathfrak{d}]}, \pi(y) \rangle.$$

Pour $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathfrak{m}_x \oplus i\mathfrak{m}_x$, le crochet $[\mathfrak{c}, \mathfrak{d}]$ appartient à $\mathfrak{k}_x \oplus i\mathfrak{k}_x$ et on obtient l'expression de la forme ω la suivante :

$$\omega(X^c, X^{\mathfrak{d}}) = c\Im(\langle X^c, \pi_*(X^{\mathfrak{d}}) \rangle - \langle X^{\mathfrak{d}}, \pi_*(X^c) \rangle),$$

qui, combinée avec la structure complexe i , donne l'expression de la 2-forme symétrique g suivante :

$$\begin{aligned} g(X^c, X^{\mathfrak{d}}) &= g(X^{i\mathfrak{c}}, X^{i\mathfrak{d}}) = c\Re\langle X^c(y), X^{\mathfrak{d}}(\pi(y)) \rangle, \\ g(X^c, X^{i\mathfrak{d}}) &= 0, \end{aligned}$$

où \mathfrak{c} et \mathfrak{d} appartiennent à \mathfrak{m}_x . Pour la métrique g , les sous-espaces H_y et V_y sont orthogonaux. La G -équivariance de π implique la G -invariance de g . Pour vérifier que g est définie positive, il suffit par conséquent de considérer g en un point $y = e^{i\alpha}De^{-i\alpha} - D$ de la fibre $\pi^{-1}(0)$. On a alors :

$$g(X^c, X^{\mathfrak{d}}) = g(X^{i\mathfrak{c}}, X^{i\mathfrak{d}}) = c\Re\langle [\mathfrak{c}, e^{i\alpha}De^{-i\alpha}], [\mathfrak{d}, D] \rangle, \quad (2.4)$$

qui, d'après l'équation 2.3 de la démonstration du théorème 2.6.2, est égale (à la constante multiplicative strictement positive c près) au hessien en $\pi(y)$ de la distance de y à \mathcal{O}_D , donc est définie positive. Remarquons que l'expression de g donnée par l'équation (2.4) reste invariante lorsqu'on ajoute à \mathfrak{c} ou \mathfrak{d} un élément de \mathfrak{k} , ce qui garantit la bonne définition de g .

Il reste à montrer que g définit une métrique hyperkählérienne sur $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ compatible avec $\omega^{\mathbb{C}}$. Pour cela, on utilise la proposition A.6.4 de l'Appendice A, selon laquelle il suffit de montrer que l'endomorphisme J_2 défini par :

$$g(X, Y) = \Re\omega^{\mathbb{C}}(X, J_2Y)$$

est de carré -1 . La forme symplectique $\omega^{\mathbb{C}}$ naturelle de l'orbite complexe est la 2-forme $G^{\mathbb{C}}$ -invariante sur $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ qui, en l'espace tangent au point $0 \in \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$, est donnée par (cf la démonstration de la proposition 2.3.10 de la section 2.3 et l'équation (2.2)) :

$$\omega^{\mathbb{C}}(X, Y) = \langle X^*, [D, Y] \rangle,$$

où X, Y appartiennent à $T_0\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$. (Remarquons la présence d'un facteur c^2 dans la définition de $\omega^{\mathbb{C}}$ par rapport à la définition usuelle en dimension finie, qui se répercute sur l'expression du potentiel K qui, à un élément du noyau de d^c près, vaut c^2 fois le potentiel obtenu en dimension finie dans [BG2]). Par G -invariance de g et de $\omega^{\mathbb{C}}$, on est ramené à l'étude de J_2 en un point de la fibre au-dessus

de 0. Pour tout $\mathfrak{c}, \mathfrak{d} \in \mathfrak{m}$, et pour tout $y = e^{i\alpha} D e^{-i\alpha} - D$ de la fibre $\pi^{-1}(0)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(X^{\mathfrak{c}}, X^{\mathfrak{d}}) &= c \Re \langle [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}], [\mathfrak{d}, D] \rangle \\
&= -c \Re \langle [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}]^*, [\mathfrak{d}, D] \rangle \\
&\quad (\text{car seules les composantes dans } \mathfrak{g} \text{ contribuent au produit scalaire}) \\
&= c^2 \Re \langle e^{-i\alpha} (e^{-i\alpha} [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}] e^{i\alpha})^* e^{i\alpha}, [\frac{D}{c}, \mathfrak{d}] \rangle \\
&= c^2 \Re \langle (e^{-i\alpha} [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}] e^{i\alpha})^*, e^{-i\alpha} [\frac{D}{c}, \mathfrak{d}] e^{i\alpha} \rangle \\
&\quad (\text{car } \text{Ad}(e^{-i\alpha}) \text{ est auto-adjoint}) \\
&= -\Re \langle [D, [D, (e^{-i\alpha} [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}] e^{i\alpha})^*]], e^{-i\alpha} [\frac{D}{c}, \mathfrak{d}] e^{i\alpha} \rangle \\
&\quad (\text{car } \text{ad}^2(D) = -c^2 \text{Id sur } \mathfrak{m}^{\mathbb{C}} = \text{Im}(\text{ad}(D))) \\
&= \Re \langle (e^{-i\alpha} [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}] e^{i\alpha})^*, [D, [e^{-i\alpha} [\frac{D}{c}, \mathfrak{d}] e^{i\alpha}, D]] \rangle \\
&= \Re \langle (e^{-i\alpha} [\mathfrak{c}, e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}] e^{i\alpha})^*, [D, e^{-i\alpha} [[\frac{D}{c}, \mathfrak{d}], e^{i\alpha} D e^{-i\alpha}] e^{i\alpha}] \rangle \\
&= \Re \omega^{\mathbb{C}}(X^{\mathfrak{c}}, X^{[\frac{D}{c}, \mathfrak{d}]})
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $\mathfrak{d} \in \mathfrak{m}$, l'expression de I_2 est :

$$J_2 X^{\mathfrak{d}} = X^{[\frac{D}{c}, \mathfrak{d}]}.$$

On montre de même que :

$$J_2 X^{i\mathfrak{d}} = -X^{i[\frac{D}{c}, \mathfrak{d}]}.$$

L'opérateur $I := [\frac{D}{c}, \cdot]$ est la structure complexe de l'orbite de type compact, ce qui implique que J_2 est de carré -1 . ■

2.6.3 Identification de l'orbite complexifiée avec l'espace tangent de l'orbite de type compact

Notations 2.6.5 On notera $\Re y$ (resp. $\Im y$) la projection sur le premier (resp. deuxième) facteur de la somme directe $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \oplus i\mathfrak{g}$ d'un élément $y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$.

Le théorème suivant est l'analogue du théorème 3 de [BG3].

Théorème 2.6.6 *L'application*

$$\begin{aligned}
\Upsilon : \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} &\rightarrow T\mathcal{O}_D \\
y &\mapsto -\frac{1}{c} I_{\pi(y)} \Im y
\end{aligned}$$

est un isomorphisme de variétés fibrées au-dessus de \mathcal{O}_D , qui commute aux projections naturelles $\pi : \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{O}_D$ et $p : T\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_D$.

■ **Preuve du théorème 2.6.6 :**

Notons que, pour tout y appartenant à la fibre $\pi^{-1}(x)$ de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ au-dessus de $x \in \mathcal{O}_D$, $\Im y$ appartient à \mathfrak{m}_x , et, de ce fait, peut-être considéré comme un élément de $T_x \mathcal{O}_D$. La G -équivariante de la projection π et de la structure complexe I de l'orbite \mathcal{O}_D implique que Υ est G -équivariante et commute aux projections π et p . Pour montrer que Υ est bijective, il suffit donc de montrer que Υ identifie la fibre $\pi^{-1}(0)$ avec \mathfrak{m} .

Pour $y = e^{i\mathfrak{a}} D e^{-i\mathfrak{a}} - D$ avec $\mathfrak{a} \in \mathfrak{m}$, on a :

$$\begin{aligned} f_1(\mathfrak{a}) &:= -\frac{1}{c} I \Im y = \frac{i}{c} I \sinh(x)(\text{ad}(i\mathfrak{a}))(D) \\ &= \frac{i}{c} I \frac{\sinh x}{x}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))([i\mathfrak{a}, D]) \\ &= I \frac{\sinh x}{x}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))I\mathfrak{a}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres de l'opérateur $\frac{\sinh x}{x}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))$ de \mathfrak{g} dans \mathfrak{g} étant minorées par 1, la condition $\Im y = 0$ implique $\mathfrak{a} = 0$, c'est-à-dire $y = x$.

Soit $V \in \mathfrak{m} \simeq T_x \mathcal{O}_D$. Montrons qu'il existe $y \in \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ tel que $\Im y = cIV$. Supposons tout d'abord que V appartient à une sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{A} de \mathfrak{m} engendrée par un sous-ensemble maximal de racines fortement orthogonales Ψ :

$$\mathfrak{A} := \bigoplus_{\alpha \in \Psi} \mathbb{R}x_{\alpha}$$

Pour tout $\alpha \in \Psi$, on note $y_{\alpha} = Ix_{\alpha}$ et $h_{\alpha} = \frac{1}{2i}[x_{\alpha}, y_{\alpha}]$. Pour tout $\alpha, \beta \in \Psi$, on a les relations de commutations suivantes :

$$[x_{\alpha}, y_{\beta}] = 2ih_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}; \quad [h_{\alpha}, x_{\beta}] = -2iy_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}; \quad [h_{\alpha}, y_{\beta}] = 2ix_{\alpha}\delta_{\alpha\beta}.$$

Remarquons que pour $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ dont la décomposition relativement à la base x_{α} est

$$\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \Psi} a_{\alpha} x_{\alpha},$$

on a :

$$\text{ad}(i\mathfrak{a})^{2n} I\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \Psi} (2a_{\alpha})^{2n} a_{\alpha} y_{\alpha},$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{i}{c} I \sinh x(\text{ad}(i\mathfrak{a}))(D) &= I \frac{\sinh x}{x}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))I\mathfrak{a} \\ &= \frac{1}{2} I \sum_{\alpha \in \Psi} \sinh(2a_{\alpha}) y_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Psi} \sinh(2a_{\alpha}) x_{\alpha}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout V de \mathfrak{A} dont la décomposition selon la base x_{α} est

$$V = \sum_{\alpha \in \Psi} v_{\alpha} x_{\alpha},$$

l'élément y de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ donné par $y = e^{i\mathfrak{a}} D e^{-i\mathfrak{a}} - D$ où

$$\mathfrak{a} := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Psi} \text{argsinh}(2v_{\alpha}) x_{\alpha}$$

vérifie $-\frac{1}{c}I\mathfrak{S}y = V$. De plus, \mathfrak{a} s'exprime en fonction de l'opérateur $\text{ad}(iV)$ de la manière suivante :

$$\mathfrak{a} = f_2(V) = I \frac{\text{argsinh } x}{x} (\text{ad}(iV))(IV).$$

Puisque l'union des sous-algèbres abéliennes maximales engendrées par un système de racines fortement orthogonales est dense dans \mathfrak{m} (rappelons que l'on a $\mathfrak{m} = \overline{\cup_{g \in K} \text{Ad}(g)(\mathfrak{A})}$), on en déduit que l'image par Υ de la fibre $\pi^{-1}(0)$ est dense dans $T_0\mathcal{O}_D$. De ce qui précède, on déduit également que $f_2 \circ f_1 = \text{Id}$ et $f_1 \circ f_2 = \text{Id}$ sur $\text{Ad}(K)\mathfrak{A}$. Par continuité de f_1 et f_2 on a alors $f_2 \circ f_1 = \text{Id}$ et $f_1 \circ f_2 = \text{Id}$ sur \mathfrak{m} . Ainsi Υ identifie la fibre $\pi^{-1}(0)$ de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ et $T_0\mathcal{O}_D$.

La différentiabilité de Υ provient de la différentiabilité de f_1 et de la définition de variété de $T\mathcal{O}_D$ comme sous-variété de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ (cf Appendice A). \blacksquare

2.6.4 Expression de la métrique hyperkählérienne de l'espace tangent de l'orbite de type compact

D'après le paragraphe 2.6.2 et l'identification donnée en 2.6.3, l'espace tangent $T\mathcal{O}_D$ de l'orbite de type compact possède une structure hyperkählérienne G -invariante, notée également g . Le but de ce paragraphe est d'exprimer la métrique hyperkählérienne ainsi obtenue en termes de l'espace tangent de \mathcal{O}_D .

Rappelons l'expression de la métrique hyperkählérienne g de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ définie en 2.6.2. L'espace tangent à $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ en un point $y = \text{Ad}_D(e^{i\mathfrak{a}})(x)$, où x appartient à \mathcal{O}_D et \mathfrak{a} à \mathfrak{m}_x , est $e^{i\mathfrak{a}}(\mathfrak{m}_x \oplus i\mathfrak{m}_x)e^{-i\mathfrak{a}}$. Il est identifié à $\mathfrak{m}_x \oplus i\mathfrak{m}_x$ par l'application ρ définie dans la proposition 2.6.3 par :

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{m}_x \oplus i\mathfrak{m}_x &\rightarrow T_y\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} \\ \mathfrak{c} &\mapsto X^{\mathfrak{c}}. \end{aligned}$$

L'espace vertical $V_y := \rho(i\mathfrak{m}_x)$ est le noyau de π , et ρ se restreint en un isomorphisme de \mathfrak{m}_x dans l'espace horizontal $H_y := \rho(\mathfrak{m}_x)$. Pour tout y de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ et tous \mathfrak{c} et \mathfrak{d} de \mathfrak{m}_x , on a :

$$\begin{aligned} g(X^{\mathfrak{c}}, X^{\mathfrak{d}}) &= g(X^{i\mathfrak{c}}, X^{i\mathfrak{d}}) = c\Re\langle X^{\mathfrak{c}}(y), X^{\mathfrak{d}}(\pi(y)) \rangle, \\ g(X^{\mathfrak{c}}, X^{i\mathfrak{d}}) &= 0. \end{aligned}$$

La métrique g est G -invariante et son expression, en un point $y = e^{i\mathfrak{a}}De^{-i\mathfrak{a}} - D$ de la fibre $\pi^{-1}(0)$ au-dessus de 0, est la suivante :

$$g(X^{\mathfrak{c}}, X^{\mathfrak{d}}) = g(X^{i\mathfrak{c}}, X^{i\mathfrak{d}}) = c\Re\langle [\mathfrak{c}, e^{i\mathfrak{a}}De^{-i\mathfrak{a}}], [\mathfrak{d}, D] \rangle. \quad (2.4)$$

Par suite, pour tous \mathfrak{c} et \mathfrak{d} de \mathfrak{m} , il vient :

$$\begin{aligned} g(X^{\mathfrak{c}}, X^{\mathfrak{d}}) &= c\Re\langle [\mathfrak{c}, \cosh(x)(\text{ad}(i\mathfrak{a}))(D)], [\mathfrak{d}, D] \rangle \\ &= c\Re\langle [\mathfrak{c}, D], [\mathfrak{d}, D] \rangle + c\Re\langle [\mathfrak{c}, \frac{\cosh(x)}{x^2}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))([\mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, D]])], [\mathfrak{d}, D] \rangle \\ &= c^3\Re\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle + c^2\Re\langle [\mathfrak{c}, \frac{\cosh(x)}{x^2}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))([\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}])], [\mathfrak{d}, D] \rangle \\ &= c^3\Re\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle + c^3\Re\langle -I[\frac{\cosh(x)}{x^2}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))([\mathfrak{a}, I\mathfrak{a}])], \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle \\ &= c^3\Re\langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle + c^3\Re\langle I[\frac{\cosh(x)}{x^2}(\text{ad}(i\mathfrak{a}))([I\mathfrak{a}, \mathfrak{a}])], \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle. \end{aligned}$$

Les lemmes suivants expriment l'opérateur $I \left[\frac{\cosh(x)}{x^2} (\text{ad}(i\mathbf{a}))([\mathbf{a}, I\mathbf{a}], \cdot) \right]$ de \mathfrak{m} dans \mathfrak{m} en fonction de $V = f_1(\mathbf{a}) = I \frac{\sinh x}{x} (\text{ad}(i\mathbf{a})) I\mathbf{a}$.

Lemme 2.6.7 *Pour tout \mathbf{a} de \mathfrak{m} , on a :*

$$\frac{\cosh(x) - 1}{x^2} (\text{ad}(i\mathbf{a})) ([I\mathbf{a}, \mathbf{a}]) = I \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} (\text{ad}(iV)) [IV, V]. \quad (2.5)$$

Δ **Preuve du lemme 2.6.7 :**

Par continuité des opérateurs en question et densité des sous-algèbres abéliennes maximales engendrées par un système maximal de racines fortement orthogonales, il suffit de vérifier l'équation (2.5) pour \mathbf{a} appartenant à une sous-algèbre abélienne maximale \mathfrak{A} engendré par une base x_α , $\alpha \in \Psi$, où Ψ est un système maximal de racines fortement orthogonales. En reprenant les notations utilisées dans la démonstration du théorème 2.6.6, il vient :

$$V = \sum_{\alpha \in \Psi} v_\alpha x_\alpha,$$

et

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha \in \Psi} a_\alpha x_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Psi} \text{argsinh}(2v_\alpha) x_\alpha.$$

Pour $\varphi(x) = \frac{\cosh(x)-1}{x^2}$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi(x)(\text{ad}(i\mathbf{a})) ([I\mathbf{a}, \mathbf{a}]) &= \sum_{\alpha \in \Psi} \varphi(2a_\alpha) [a_\alpha y_\alpha, a_\alpha x_\alpha] \\ &= \sum_{\alpha \in \Psi} \frac{\cosh(2a_\alpha) - 1}{(2a_\alpha)^2} [a_\alpha y_\alpha, a_\alpha x_\alpha] \\ &= \sum_{\alpha \in \Psi} \frac{1}{4} (\cosh(\text{argsinh}(2v_\alpha)) - 1) [y_\alpha, x_\alpha] \\ &= \sum_{\alpha \in \Psi} \frac{\sqrt{1+(2v_\alpha)^2} - 1}{(2v_\alpha)^2} [v_\alpha y_\alpha, v_\alpha x_\alpha] \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2} (\text{ad}(iV)) [IV, V] \end{aligned}$$

Δ

Lemme 2.6.8 *Pour tout $V \in \mathfrak{m}$, et toute fonction analytique positive φ , on a :*

$$\varphi(x^2) (\text{ad}(iV)) [IV, V] = \varphi(x) (IR_{IV,V}) (V).$$

Δ **Preuve du lemme 2.6.8 :**

Avec les notations introduites précédemment, on a :

$$IR_{IV,V} = I[IV, V] = I \sum_{\alpha \in \Psi} [v_\alpha y_\alpha, v_\alpha x_\alpha] = I \sum_{\alpha \in \Psi} v_\alpha^2 (-2i) h_\alpha,$$

et

$$\begin{aligned} (IR_{IV,V})V &= I \sum_{\alpha \in \Psi} v_\alpha^2 (-2i) [h_\alpha, v_\alpha x_\alpha] \\ &= I \sum_{\alpha \in \Psi} v_\alpha^2 (-2i) (-2i) v_\alpha y_\alpha \\ &= -I \sum_{\alpha \in \Psi} (2v_\alpha)^2 v_\alpha y_\alpha \\ &= \sum_{\alpha \in \Psi} (2v_\alpha)^2 v_\alpha x_\alpha \end{aligned}$$

Ainsi, il vient :

$$(IR_{IV,V})^n(V) = \sum_{\alpha \in \Psi} (2v_\alpha)^{2n} v_\alpha x_\alpha.$$

Par conséquent, pour tout fonction positive φ , on a :

$$\varphi(x^2) (\text{ad}(iV)) [IV, V] = \varphi(x) (IR_{IV,V}) (V).$$

△

Notations 2.6.9 On note $g_{\mathcal{O}}$ la métrique kählérienne canonique de l'orbite adjointe affine de type compact \mathcal{O}_D dont l'expression en 0 est donnée par :

$$g_{\mathcal{O}}(X^c, X^d) = c\Re\langle [c, D], [d, D] \rangle = c^3\Re\langle c, d \rangle.$$

Cette métrique est fortement kählérienne, ce qui implique que la connexion de Levi-Cevita ∇ est bien définie. En un point V de l'espace tangent $T\mathcal{O}_D$, $T_V(T\mathcal{O}_D)$ se décompose en $\text{Hor}_V \oplus \text{Ver}_V$, où Ver_V est l'espace tangent à la fibre de la projection canonique p de $T(T\mathcal{O}_D)$ dans $T\mathcal{O}_D$, et où Hor_V est l'espace horizontal associé la connexion ∇ . Pour tout V de la fibre $p^{-1}(x)$, avec $x \in \mathcal{O}_D$, on identifie naturellement Ver_V à \mathfrak{m}_x , et Hor_V à \mathfrak{m}_x par la différentielle de p . On note g_0 la métrique obtenue en transportant la métrique $g_{\mathcal{O}}$ de \mathcal{O}_D sur Hor_V et Ver_V et en demandant que Hor_V et Ver_V soient perpendiculaires.

Théorème 2.6.10 La métrique hyperkähleriennne g de l'espace tangent $T\mathcal{O}_D$ se déduit de la métrique g_0 au moyen de l'endomorphisme dont la décomposition par blocs relative à la somme directe $T_V(T\mathcal{O}_D) = \text{Hor}_V \oplus \text{Ver}_V$ est :

$$\begin{pmatrix} A_V & 0 \\ 0 & A_V^{-1} \end{pmatrix}$$

avec

$$A_V = Id + IR_{I\varphi(x)(IR_{IV,V})(V), \varphi(x)(IR_{IV,V})(V)},$$

où

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

■ **Preuve du théorème 2.6.10 :**

L'identification Υ de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ avec $T\mathcal{O}_D$ commute aux projections $\pi : \mathcal{O}_D^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{O}_D$ et $p : T\mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_D$. Ainsi la différentielle de Υ transporte l'espace vertical V_y sur l'espace vertical Ver_V , où $V = \Upsilon(y)$. L'espace horizontal H_y est identifié à \mathfrak{m}_x par ρ^{-1} et Hor_V est identifié à \mathfrak{m}_x par dp . Par G -invariance de la métrique, on peut supposer que y appartient à la fibre $\pi^{-1}(0)$. D'après l'équation (2.4), pour tous c, d de \mathfrak{m} , on a :

$$\begin{aligned} g(\rho(c), \rho(d)) &= c\Re\langle [c, e^{ia}De^{-ia}], [d, D] \rangle \\ &= c\Re\langle [c, \cosh(x)((ad)(ia))(D)], [d, D] \rangle \\ &= c\Re\langle [c, D], [d, D] \rangle + c\Re\langle [\frac{\cosh(x)-1}{x^2}((ad)(ia))]ia, [ia, D], c, [D, d] \rangle \\ &= c^3\Re\langle c, d \rangle + c^3\Re\langle [\frac{\cosh(x)-1}{x^2}((ad)(ia))]a, [a, Ia], c, Id \rangle \\ &= c^3\Re\langle c, d \rangle + c^3\Re\langle I[\frac{\cosh(x)-1}{x^2}((ad)(ia))]Ia, a, c, Id \rangle. \end{aligned}$$

D'après le lemme 2.4.24, il vient :

$$g(\rho(\mathfrak{c}), \rho(\mathfrak{d})) = c^3 \Re \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle + c^3 \Re \langle I[[I\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'], \mathfrak{c}], \mathfrak{d} \rangle.$$

avec

$$\mathfrak{a}' = \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} (\text{ad}(i\mathfrak{a}))(\mathfrak{a}).$$

D'après les lemmes 2.6.7 et 2.6.8, il vient :

$$g(\rho(\mathfrak{c}), \rho(\mathfrak{d})) = c^3 \Re \langle (\text{Id} + IR_{I\varphi(x)(IR_{IV,V})(V), \varphi(x)(IR_{IV,V})(V)}) \mathfrak{c}, \mathfrak{d} \rangle,$$

où $\varphi(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)^{\frac{1}{2}}$. On en déduit que pour tous \mathfrak{c} et \mathfrak{d} de \mathfrak{m} , le produit scalaire des relèvements horizontaux \mathfrak{c}^H et \mathfrak{d}^H appartenant à Hor_V est égal à :

$$g(\mathfrak{c}^H, \mathfrak{d}^H) = g_0(A_V \mathfrak{c}, \mathfrak{d})$$

avec

$$A_V = \text{Id} + IR_{I\varphi(x)(IR_{IV,V})(V), \varphi(x)(IR_{IV,V})(V)},$$

où

$$\varphi(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui démontre le théorème dans les directions horizontales. De plus, l'orthogonalité des distributions H_y et V_y implique l'orthogonalité des distributions Hor_V et Ver_V . La métrique g se déduit donc de g_0 au moyen d'un opérateur de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

où B caractérise la métrique dans les directions tangentes aux fibres de la projection p . Remarquons que pour tous \mathfrak{c} et \mathfrak{d} de $i\mathfrak{m}$, on a :

$$g(\rho(\mathfrak{c}), \rho(\mathfrak{d})) = g(\rho(-i\mathfrak{c}), \rho(-i\mathfrak{d})).$$

La multiplication par $-i$ échange V_y et H_y et induit une structure complexe sur l'espace tangent en V à $T\mathcal{O}_D$, qui se déduit de \mathfrak{g}_0 au moyen d'un endomorphisme I_3 échangeant Hor_V et Ver_V , i.e dont l'expression selon la décomposition $T_V(T\mathcal{O}_D) = \text{Hor}_V \oplus \text{Ver}_V$ est de la forme :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la structure symplectique $\omega = g(i., .)$ associée à la structure complexe i de $\mathcal{O}_D^{\mathbb{C}}$ a pour expression :

$$\omega(\rho(X^{\mathfrak{c}}), \rho(X^{\mathfrak{d}})) = c\Im (\langle \rho(X^{\mathfrak{c}}), \pi_* \rho(X^{\mathfrak{d}}) \rangle - \langle \rho(X^{\mathfrak{d}}), \pi_* \rho(X^{\mathfrak{c}}) \rangle),$$

où \mathfrak{c} et \mathfrak{d} appartiennent à $\mathfrak{m} \oplus i\mathfrak{m}$. On en déduit que la forme symplectique sur $T\mathcal{O}_D$ associée à la structure complexe I_3 est la partie imaginaire de la 2-forme de Liouville ω_3 :

$$\begin{aligned} \omega_3(\mathfrak{c}, \mathfrak{d}) &= c\Im (\langle \mathfrak{c}^V, \mathfrak{d}^H \rangle - \langle \mathfrak{d}^V, \mathfrak{c}^H \rangle) \\ &= c\Re (\langle i\mathfrak{c}^V, \mathfrak{d}^H \rangle - \langle i\mathfrak{d}^V, \mathfrak{c}^H \rangle), \end{aligned}$$

où \mathfrak{c} et \mathfrak{d} appartiennent à $\text{Hor}_V \oplus \text{Ver}_V$ et où \mathfrak{c}^H (resp. \mathfrak{c}^V) désigne la projection de \mathfrak{c} sur Hor_V (resp. Ver_V). La forme ω_3 se déduit de g_0 au moyen de l'endomorphisme dont la décomposition par blocs relativement à la somme directe $T_V(T\mathcal{O}_D) = \text{Hor}_V \oplus \text{Ver}_V$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

L'équation $g(I_3, \cdot) = \omega_3(\cdot, \cdot)$ impose les conditions suivantes sur les opérateurs A, B, C et D :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & C \\ D & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

i.e $AC = i$ et $BD = i$. D'autre part la condition $I_3^2 = -1$ impose $CD = -1$. On en déduit que $B = A^{-1}$, et que I_3 est représenté par :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 0 & iA^{-1} \\ iA & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Proposition 2.6.11 *La métrique g est l'unique métrique hyperkählérienne sur $T\mathcal{O}_D$ se restreignant en la métrique kählérienne de \mathcal{O}_D , compatible avec la forme symplectique naturelle provenant de l'identification $T^*\mathcal{O}_D \simeq T\mathcal{O}_D$, et rendant les distributions horizontales Hor_V et verticales Ver_V perpendiculaires.*

□ **Preuve de la proposition 2.6.11 :**

Une métrique vérifiant les conditions imposées est représentée par rapport à la métrique g_0 par un opérateur de la forme

$$g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix},$$

où A doit vérifier :

$$(X^v.(AI))_V - R_{V,(A^{-1}I)X} = 0$$

(cf [BG1]). Cette dernière équation se réduit, dans chaque direction radiale, à une équation différentielle ordinaire, d'où l'unicité. □

Remarque 2.6.12 Via l'identification de l'espace tangent de la grassmannienne restreinte TGr_{res} avec l'espace tangent d'une orbite adjointe affine comme décrit en 2.4.3, on retrouve la famille de métriques hyperkählériennes de TGr_{res} décrites au chapitre 1.

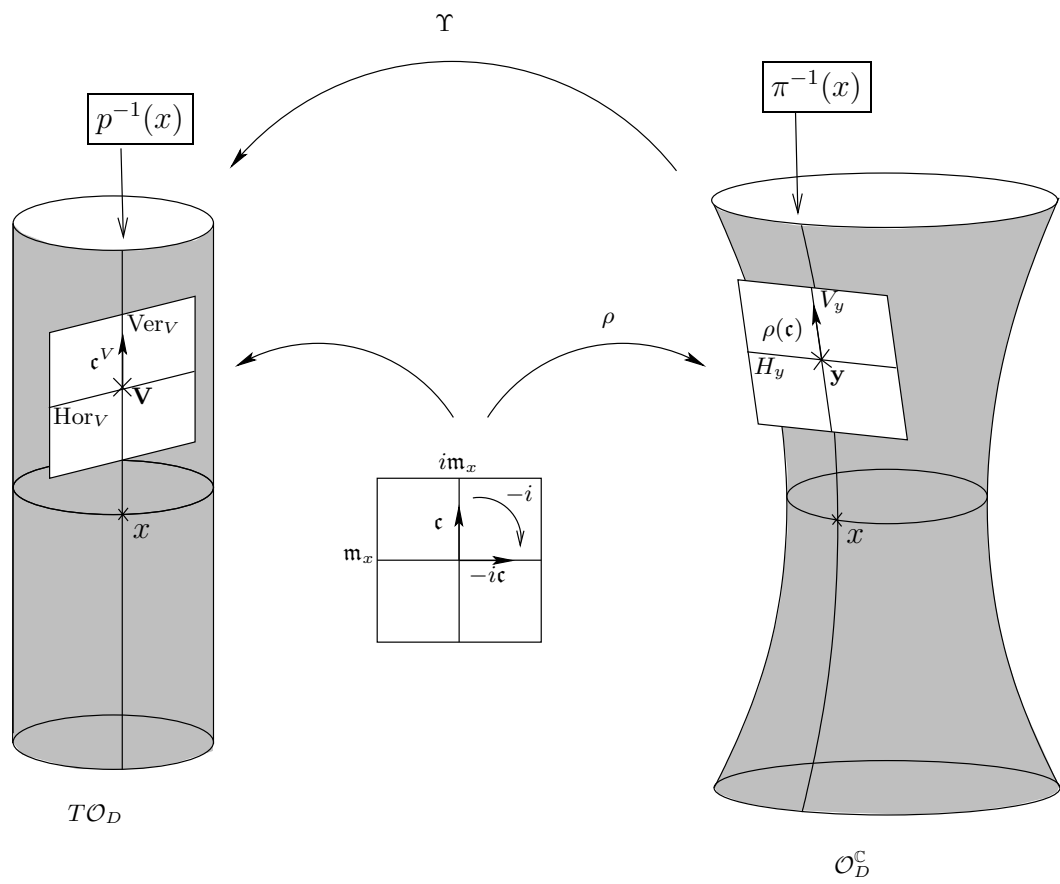


FIG. 2.1 – L'expression de la métrique hyperkählérienne de TO_D se déduit de l'expression de la métrique hyperkählérienne de O_D^C

Annexe A

Structures géométriques sur les variétés banachiques

Le lecteur trouvera dans cet appendice les bases de la géométrie sur les variétés banachiques et l'étude des exemples les plus naturels. Pour plus de détails sur les notions abordées, nous renvoyons le lecteur à [Lan], [Car], [Bou], [Bou2] et [Bou3]. Les résultats décrits ici sont classiques, mais ne figurent pas toujours dans la littérature. En particulier, on trouvera en A.1.5 exemple 2 et 3, une démonstration de l'équation (7.5.3) de [PS] utilisée pour définir l'injection de Plücker de la grassmannienne restreinte Gr_{res} dans l'espace projectif (proposition 7.5.2 de [PS]). Nous invitons le lecteur intéressé par l'injection de Plücker à consulter également [SpVa].

A.1 Géométrie différentielle dans le cadre banachique

A.1.1 Différentielle d'une application entre deux espaces de Banach

Définition A.1.1 Soient E et F deux espaces de Banach et U un ouvert de E . Une application $f : U \rightarrow F$ est différentiable en $x \in E$ s'il existe une application linéaire continue $A \in B(E, F)$ telle que $\forall h \in E$:

$$\lim_{\|h\|_E \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|_E} \|f(x+h) - f(x) - Ah\|_F = 0$$

Une application $f : E \rightarrow F$ est différentiable sur $U \subset E$ si elle l'est en chaque point de U . On note $df(x)$ ou $d_x f$ l'application linéaire continue différentielle de f en $x : df(x) \in B(E, F)$.

Remarque A.1.2 La condition de continuité de la différentielle exigée dans la définition implique qu'une fonction différentiable en un point est continue en ce point.

Définition A.1.3 Une application $f : E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $U \subset E$ ssi $df : U \rightarrow B(E, F)$, où $B(E, F)$ est muni de la topologie associée à la norme d'opérateur, est continue.

Remarque A.1.4 On ne demande pas seulement que l'application $df : U \times E \rightarrow F$ soit continue.

Définition A.1.5 Une application $f : E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $U \subset E$ ssi $df : U \rightarrow B(E, F)$ est \mathcal{C}^1 sur U . On note d^2f la différentielle d'ordre 2. On a :

$$\begin{aligned} d^2f : U &\longrightarrow B(E, B(E, F)) \\ x &\longmapsto \{h_1 \mapsto (h_2 \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(df(x + \varepsilon h_2)(h_1) - df(x)(h_1)))\} \end{aligned}$$

Remarque A.1.6 Il existe une isométrie naturelle entre l'espace de Banach $B(E, B(E, F))$ et l'espace de Banach $B^{(2)}(E, F)$ des applications bilinéaires continues de E dans F . Plus généralement, l'espace de Banach $B^{(k)}(E, F)$ des applications k -linéaires continues de E dans F est identifié isométriquement à l'espace $B(E, B^{k-1}(E, F))$.

Définition A.1.7 Une application $f : E \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^{k+1} sur $U \subset E$ ssi $d^k f : U \rightarrow B^{(k)}(E, F)$ est \mathcal{C}^1 sur U . Elle est de classe \mathcal{C}^∞ ssi elle est de classe \mathcal{C}^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exemple 5 Soit H un espace de Hilbert et $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui à $x \in H$ associe $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$. On a :

$$\begin{aligned} df : H &\longrightarrow B(H, \mathbb{R}) \\ x &\longmapsto \{h_1 \mapsto 2\Re\langle h_1, x \rangle\} \end{aligned}$$

L'application df est continue car $\|df(x_1) - df(x_2)\| \leq 2\|x_1 - x_2\|$. De plus :

$$\begin{aligned} d^2f : H &\longrightarrow B(H, B(H, \mathbb{R})) \\ x &\longmapsto \{h_1 \mapsto (h_2 \mapsto 2\Re\langle h_1, h_2 \rangle)\} \end{aligned}$$

L'application d^2f est une application bilinéaire symétrique constante sur H . Les dérivées d'ordre $k > 2$ de f sont donc nulles.

Définition A.1.8 Soient E un espace de Banach et γ une application \mathcal{C}^1 de \mathbb{R} dans E . La différentielle de γ en un point $t \in \mathbb{R}$ est une application linéaire continue de \mathbb{R} dans E . On appelle dérivée de γ en t et on note : $\gamma'(t)$ l'élément $d_t\gamma(1) \in E$. On a : $d_t\gamma : u \mapsto u \cdot \gamma'(t)$.

Proposition A.1.9 Soient E, F, G trois espaces de Banach, $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications différentiables respectivement sur $U \subset E$ et $V \subset F$ contenant $f(U)$. Alors la composée $h = g \circ f$ est différentiable sur U et : $dh(x) = dg(f(x)) \circ df(x)$.

A.1.2 Variétés banachiques

Définition A.1.10 Soit M un ensemble. On appelle carte de M un triplet $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ où \mathcal{U} est une partie de M , E un espace de Banach, et φ une bijection de \mathcal{U} sur un ouvert de E . On dit que deux cartes $(\mathcal{U}_1, \varphi_1, E_1)$ et $(\mathcal{U}_2, \varphi_2, E_2)$ sont \mathcal{C}^r -compatibles si :

- $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ (resp. $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$) est un ouvert de E_1 (resp. E_2)
- l'application $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ (resp. $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$) de $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ dans $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ (resp. $\varphi_1(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$ dans $\varphi_2(\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2)$) est de classe \mathcal{C}^r .

On appelle \mathcal{C}^r -atlas de M un ensemble de cartes deux à deux \mathcal{C}^r -compatibles et dont les domaines recouvrent M . Deux atlas sont dits \mathcal{C}^r -équivalents si leur réunion est encore un atlas \mathcal{C}^r . Une variété banachique de classe \mathcal{C}^r est un ensemble M muni d'une classe d'équivalence d'atlas de classe \mathcal{C}^r .

Remarque A.1.11 On ne demande pas que les espaces de Banach de deux cartes distinctes soient les mêmes. Lorsque tous les espaces de Banach intervenant dans la définition sont des espaces de Hilbert, on parlera de variété hilbertienne. Plus généralement, pour toute famille \mathcal{F} d'espaces de Banach, on parlera de variété banachique de type \mathcal{F} lorsque tous les espaces de Banach intervenants dans la définition appartiennent à \mathcal{F} .

Exemple 1 *La sphère unité d'un espace de Hilbert*

Soit H un espace de Hilbert réel séparable et $\mathbb{S}(H) = \{x \in H, \|x\| = 1\}$ l'ensemble des éléments de norme 1 de H . $\mathbb{S}(H)$ est une variété hilbertienne C^∞ . En effet, munissons $\mathbb{S}(H)$ de la topologie induite par H : un ensemble O de $\mathbb{S}(H)$ est ouvert s'il existe un ouvert O' de H tel que $O = O' \cap \mathbb{S}(H)$. Soit $\{e_k, k \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H permettant d'identifier H avec $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Les projections stéréographiques p_1 et p_2 respectivement de pôle nord $N = e_0$ et de pôle sud $S = -e_0$ définissent les applications cartes de $\mathbb{S}(H)$. De manière explicite :

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{S}(H) \setminus \{N\} &\longrightarrow e_0^\perp \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longmapsto p_1(x) = \frac{1}{1-x_0} (x_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \\ p_2 : \mathbb{S}(H) \setminus \{S\} &\longrightarrow e_0^\perp \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} &\longmapsto p_2(x) = \frac{1}{1+x_0} (x_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \end{aligned}$$

Les applications p_1 et p_2 sont des homéomorphismes et l'application de changement de cartes $p_2 \circ p_1^{-1}$ définie de $e_0^\perp \setminus \{0\}$ dans lui-même est donnée par : $y \mapsto \frac{y}{\|y\|^2}$ et est C^∞ .

Remarque A.1.12 En général la boule unité d'un espace de Banach n'est pas une variété, même en dimension finie (penser à $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ ou $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$). La différentiabilité de la norme est étroitement liée aux propriétés de séparabilité, d'uniforme convexité et de réflexivité de l'espace de Banach considéré. (voir par exemple B. Beauzamy ([Beau]) et J. Diestel ([Die]).

Exemple 2 *L'espace projectif complexe*

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $\mathbb{P}(H)$ l'ensemble des droites vectorielles complexes de H , défini comme espace quotient de $H \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence \sim qui identifie x et y de H dès lors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$. On notera $p : H \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(H)$ l'application quotient. On munit $\mathbb{P}(H)$ de la topologie quotient : un ensemble $O \subset \mathbb{P}(H)$ sera dit ouvert si $p^{-1}(O)$ est un ouvert de $H \setminus \{0\}$ pour la topologie induite par la norme. Identifiant H à $l^2(\mathbb{N})$ grâce au choix d'une base hilbertienne, on définit les ouverts $\mathcal{V}_i = \{x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \mid x_i \neq 0\}$ de H et les applications :

$$\begin{aligned} \varphi_i : \mathcal{V}_i &\longrightarrow l^2(\mathbb{N} - i) \\ x = (x_j)_{j \in \mathbb{N} - i} &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{\hat{x}_i}{x_i}, \dots, \frac{x_j}{x_i}, \dots \right). \end{aligned}$$

où le terme accentué doit être omis. Puisque $\varphi_i(x) = \varphi_i(y)$ si $x \sim y$, ces applications passent au quotient et définissent les applications cartes $\tilde{\varphi}_i$ de l'ouvert

$\mathcal{U}_i := p(\mathcal{V}_i)$ dans $l^2(\mathbb{N} - i)$ par : $\tilde{\varphi}_i(p(x)) = \varphi_i(x)$. Les applications φ_i étant continues et ouvertes, les applications $\tilde{\varphi}_i$ sont des homéomorphismes. Les applications réciproques $\tilde{\varphi}_i^{-1}$ sont données par :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_i^{-1} : l^2(\mathbb{N} - i) &\rightarrow \mathcal{U}_i \\ y = (y_j, j \in \mathbb{N} - i) &\mapsto p((y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_j, \dots)) \end{aligned}$$

Les applications de changement de cartes sont explicitées par :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_j \circ \tilde{\varphi}_i^{-1} : l^2(\mathbb{N} - i, j) &\rightarrow l^2(\mathbb{N}) \\ y = (y_j, j \in \mathbb{N} - i, j) &\mapsto \left(\frac{y_0}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \frac{y_i}{y_j}, \frac{y_{j+1}}{y_j}, \dots \right) \end{aligned}$$

et sont C^∞ .

Exemple 3 *La grassmannienne des p -plans de H*

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable et $Gr^{(p)}(H)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension p de H :

$$Gr^{(p)}(H) = \{P \text{ s.e.v. de } H, \dim P = p\}.$$

Pour tout $P \in Gr^{(p)}(H)$ soit :

$$\mathcal{U}(P) = \{P' \in Gr^{(p)}(H) \mid P' \cap P^\perp = \{0\}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{U}(P)$ est en bijection avec $L(P, P^\perp)$. En effet, la condition $P' \cap P^\perp = \{0\}$ implique que la projection orthogonale $pr_P : P' \rightarrow P$ est injective, donc surjective car P est de dimension finie. Soit $(pr_P)^{-1}$ l'application réciproque de P dans P' . En notant pr_{P^\perp} la projection orthogonale de P' dans P^\perp et i_P (resp. i_{P^\perp}) l'injection naturelle de P (resp. P^\perp) dans H , tout élément $p' \in P'$ s'écrit :

$$\begin{aligned} p' &= i_P \circ pr_P(p') + i_{P^\perp} \circ pr_{P^\perp}(p') \\ &= (i_P + i_{P^\perp} \circ pr_{P^\perp} \circ (pr_P)^{-1})(pr_P(p')). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout P' tel que $P' \cap P = \{0\}$, il existe une application appartenant à $L(P, P^\perp)$ (à savoir $pr_{P^\perp} \circ (pr_P)^{-1}$) dont P' est le graphe. L'unicité de cette application provient de l'unicité dans la décomposition d'un élément de P' en la somme d'un élément de P et d'un élément de P^\perp . L'application :

$$\begin{aligned} \varphi_P : \mathcal{U}(P) &\rightarrow L(P, P^\perp) \\ P' &\mapsto \varphi_P(P') = pr_{P^\perp} \circ (pr_P)^{-1} \end{aligned}$$

est donc injective. Elle est aussi surjective car pour tout élément $u \in L(P, P^\perp)$ l'application $i_P + i_{P^\perp} \circ u$ est de rang p et son image est donc un élément de $\mathcal{U}(P)$. Nous allons montrer que $\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P, L(P, P^\perp)), P \in Gr^{(p)}\}$ est un atlas de classe C^∞ (même C^ω) de $Gr^{(p)}$. Soient P_1 et P_2 deux points de $Gr^{(p)}(H)$ et $P' \in \mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)$ que l'on suppose non vide, c'est-à-dire que P' est à la fois le graphe d'une application T_1 de P_1 dans P_1^\perp et le graphe d'une application T_2 de P_2 dans P_2^\perp . Relativement aux décompositions orthogonales de H selon $P_1 \oplus P_1^\perp$ et $P_2 \oplus P_2^\perp$, l'application identité $Id : P_1 \oplus P_1^\perp \rightarrow P_2 \oplus P_2^\perp$ à une décomposition par blocs :

$$Id = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où $a \in L(P_1, P_2)$, $b \in L(P_1^\perp, P_2)$, $c \in L(P_1, P_2^\perp)$ et $d \in L(P_1^\perp, P_2^\perp)$. La condition $P' \in \mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)$ équivaut à : $a + bT_1 \in \text{Isom}(P_1, P_2)$. Ainsi :

$$\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) = \{T_1 \in L(P_1, P_1^\perp) \mid a + bT_1 \in \text{Isom}(P_1, P_2)\}$$

est un ouvert de $L(P_1, P_1^\perp)$. En effet, pour $u \in L(P_1, P_1^\perp)$ tel que $\|(a+bT_1)^{-1}bu\| < 1$, l'application $(a + b(T_1 + u))$ est inversible. De même : $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$ est un ouvert de $L(P_2, P_2^\perp)$. De plus l'application de changement de cartes :

$$\begin{aligned} \varphi_{P_2} \circ \varphi_{P_1}^{-1} : \varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) &\rightarrow \varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \\ T_1 &\mapsto T_2 = (c + d \circ T_1) \circ (a + bT_1)^{-1} \end{aligned}$$

est une application rationnelle en la variable T_1 et donc C^∞ (même C^ω) pour la topologie de la norme d'opérateur de l'ouvert $\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_1, P_1^\perp)$ dans l'ouvert $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_2, P_2^\perp)$. Les cartes $\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P), P \in \text{Gr}^{(p)}(H)\}$ munissent $\text{Gr}^{(p)}(H)$ d'une structure de variété banachique C^∞ (même C^ω).

Exemple 4 La grassmannienne des espaces de dimension et de codimension infinies d'un espace de Hilbert

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. On s'intéresse maintenant aux sous-espaces vectoriels fermés de dimension et de codimension infinies de H . On note :

$$\text{Gr}(H) = \{P \subset H \text{ s.e.v. fermé de } H, \dim P = +\infty, \text{codim } P = +\infty\}.$$

Nous allons munir $\text{Gr}(H)$ d'une structure de variété banachique modélée sur l'espace de Banach des applications linéaires continues d'un espace de Hilbert séparable de dimension infinie dans un autre, muni de la topologie de la convergence forte. La construction est l'analogue de celle de $\text{Gr}^{(p)}(H)$. Pour tout $P \in \text{Gr}(H)$, on définit l'ensemble $\mathcal{U}(P) = \{P' \subset \text{Gr}(H) \mid pr_P \in \text{Isom}(P', P)\}$ et l'application $\varphi_P : \mathcal{U}(P) \rightarrow B(P, P^\perp)$ qui à $P' \in \mathcal{U}(P)$ associe l'unique application de P dans P^\perp dont P' est le graphe. Etant donnés deux éléments P_1 et P_2 de $\text{Gr}(H)$, la décomposition par blocs de l'application identité

$$\text{Id} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

relative aux décompositions orthogonales de H selon $P_1 \oplus P_1^\perp$ et $P_2 \oplus P_2^\perp$, où $a \in L(P_1, P_2)$, $b \in L(P_1^\perp, P_2)$, $c \in L(P_1, P_2^\perp)$ et $d \in L(P_1^\perp, P_2^\perp)$, fournit la caractérisation suivante de l'ensemble :

$$\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) = \{T_1 \in L(P_1, P_1^\perp) \mid a + bT_1 \in \text{Isom}(P_1, P_2)\},$$

qui est donc un ouvert dans l'espace de Banach $L(P_1, P_1^\perp)$. De même :

$$\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$$

est un ouvert de $L(P_2, P_2^\perp)$. De plus, l'application de changement de cartes :

$$\begin{aligned} \varphi_{P_2} \circ \varphi_{P_1}^{-1} : \varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) &\rightarrow \varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \\ T_1 &\mapsto T_2 = (c + d \circ T_1) \circ (a + bT_1)^{-1} \end{aligned}$$

est une application rationnelle en la variable T_1 et donc C^∞ pour la topologie de la norme d'opérateur de l'ouvert $\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_1, P_1^\perp)$ dans l'ouvert $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2)) \subset L(P_2, P_2^\perp)$. Les cartes

$$\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P, L(P, P^\perp)), P \in Gr(H)\}$$

munissent ainsi $Gr(H)$ d'une structure de variété banachique C^∞ (même C^ω).

Exemple 5 *Les grassmanniennes associées aux idéaux de Schatten*

Munissons un espace de Hilbert séparable d'une polarisation $H = H_+ \oplus H_-$ c'est-à-dire d'une décomposition orthogonale en deux sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie. Pour tout $p \geq 1$, on note $L^p(H_+, H_-)$ l'idéal bilatère de $L(H_+, H_-)$ formé des éléments T tels que :

$$\|T\|_p = (Tr(T^*T)^{\frac{p}{2}})^{\frac{1}{p}}$$

est finie. En notant $L^\infty(H_+, H_-)$ l'ensemble des opérateurs compacts de H_+ dans H_- , on a les injections continues suivantes :

$$L^1(H_+, H_-) \subset L^p(H_+, H_-) \subset L^2(H_+, H_-) \subset L^q(H_+, H_-) \subset L^\infty(H_+, H_-)$$

où $1 \leq p \leq 2$ et $2 \leq q \leq +\infty$. En notant p_+ (resp. p_-) la projection orthogonale sur H_+ (resp. H_-) et $Fred(H_+, H_-)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm de H_+ dans H_- , on définit la suite des grassmanniennes restreintes modélées sur les idéaux de Schatten $L^p(H_+, H_-)$, $1 \leq p \leq +\infty$ suivante :

$$Gr_p(H) = \{P \in Gr(H) \mid \begin{array}{l} p_+ : P \rightarrow H_+ \in Fred(H_+, H_-), \\ p_- : W \rightarrow H_- \in L^p(H_+, H_-) \end{array}\}.$$

On définit de manière analogue à celle des deux exemples précédents les ensembles :

$$\mathcal{U}(P) = \{P' \in Gr_p(H) \mid pr_P \in Isom(P', P)\},$$

où pr_P désigne la projection orthogonale sur P , et les applications :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_P : \mathcal{U}(P) & \rightarrow & L(P, P^\perp) \\ P' & \mapsto & \varphi_P(P') = pr_{P^\perp} \circ (pr_P)^{-1}. \end{array}$$

On remarque en premier lieu que puisque $\mathcal{U}(P) \subset Gr_p(H)$, φ_P est en fait à valeur dans $L^p(P, P^\perp)$ et établit une bijection entre $\mathcal{U}(P)$ et $L^p(P, P^\perp)$. En second lieu, P_1 et P_2 étant deux éléments de $Gr_p(H)$, les ensembles $\varphi_{P_1}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$ (resp. $\varphi_{P_2}(\mathcal{U}(P_1) \cap \mathcal{U}(P_2))$) sont des ouverts de $L^p(P_1, P_1^\perp)$ (respectivement de $L^p(P_2, P_2^\perp)$) pour la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_p$ (ceci résulte du fait que l'ensemble des éléments inversibles d'un espace de Banach est un ouvert pour la topologie induite par la norme). De même, les applications de changements de cartes sont des applications rationnelles et donc C^∞ (C^ω) pour la topologie induite par la norme $\|\cdot\|_p$. Ainsi les cartes $\{(\mathcal{U}(P), \varphi_P, L^p(P, P^\perp)), P \in Gr_p(H)\}$ munissent $Gr_p(H)$ d'une structure de variété banachique C^∞ (même C^ω) et on a les injections continues suivantes :

$$Gr_1(H) \subset Gr_p(H) \subset Gr_2(H) \subset Gr_q(H) \subset Gr_\infty(H) \subset Gr(H)$$

où $1 \leq p \leq 2$ et $2 \leq q \leq +\infty$. La grassmannienne $Gr_2(H)$ sera également notée Gr_{res} comme dans [PS].

Remarque A.1.13 Il est possible de définir de la même manière une grassmannienne associée à tout autre idéal de Schatten. (cf [Sat]).

A.1.3 Morphismes de variétés, espace tangent et application tangente

Définition A.1.14 Soient N et M deux variétés banachiques de classe \mathcal{C}^r , et $f : N \rightarrow M$ une application. On dit que f est un morphisme de variétés de classe \mathcal{C}^r si pour toutes cartes $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ de N et (\mathcal{V}, ψ, F) de M l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \rightarrow F$ est de classe \mathcal{C}^r .

Définition A.1.15 Soit M une variété banachique de classe \mathcal{C}^∞ . Un vecteur tangent à M en un point $x \in M$ est une classe d'équivalence de couples (c, h) , où $c = (\mathcal{U}, \varphi, E)$ est une carte locale en $x \in M$ et h un vecteur de E , pour la relation d'équivalence : $(c, h) \sim (c', h')$ ssi $d_{\varphi(x)}(\psi \circ (\varphi)^{-1})(h) = h'$, où $c = (\mathcal{U}, \varphi, E)$ et $c' = (\mathcal{V}, \psi, F)$. L'espace tangent en un point $x \in M$ est l'espace vectoriel formé par les vecteurs tangents à M en x .

Remarque A.1.16 L'espace tangent en un point x d'un espace de Banach E s'identifie naturellement à E . Une carte locale $c = (\mathcal{U}, \varphi, E)$ en x d'une variété banachique M étant donnée, l'espace tangent $T_x M$ s'identifie à E via l'application qui au couple (c, h) associe h .

Proposition A.1.17 L'espace tangent à M , noté TM , ensemble des vecteurs tangents à M , muni de l'atlas $\{(\mathcal{U}_\alpha \times E), (\varphi_\alpha, d\varphi_\alpha), E_\alpha \times E_\alpha, \alpha \in \Delta\}$, où l'ensemble $\{(\mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha, E_\alpha), \alpha \in \Delta\}$ est un atlas de M , est une variété banachique.

Définition A.1.18 Soient N et M deux variétés de classe \mathcal{C}^r , $r \leq 1$, f un morphisme de variétés de N dans M , $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ une carte locale en $x \in N$ et (\mathcal{V}, ψ, F) une carte locale en $f(x)$ telle que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. La différentielle $d_{\varphi(x)}\Phi$ de l'application $\Phi = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de l'ouvert $\varphi(\mathcal{U})$ de l'espace de Banach E dans l'espace de Banach F est une application linéaire continue indépendante des cartes choisies. On la note $d_x f$ et on l'appelle l'application linéaire tangente de f en $x \in N$.

Exemple 1 L'espace tangent à la sphère $\mathbb{S}(H)$ en un point x s'identifie à l'hyperplan H_x de H tangent à $\mathbb{S}(H)$ en x . En effet, tout $Y \in H_x$ représente bien une classe d'équivalence de couple (c, h) avec $c = (\mathbb{S}(H) \setminus \{N\}, p_1, e_0^\perp)$ ou $(\mathbb{S}(H) \setminus \{S\}, p_2, e_0^\perp)$ et $h \in e_0^\perp$, muni de la relation d'équivalence : $((\mathbb{S}(H) \setminus \{N\}, p_1, e_0^\perp), h) \sim ((\mathbb{S}(H) \setminus \{S\}, p_2, e_0^\perp), h')$ si $h' = d_x p_2 \circ d_{p_1^{-1}(x)} p_1^{-1}(h)$, en posant : $h = d_x p_1(Y)$ et $h' = d_x p_2(Y)$.

Exemple 2 La projection p d'un espace de Hilbert complexe H sur l'espace projectif complexe $\mathbb{P}(H)$ lu dans la carte $(U_i, \tilde{\varphi}_i)$ a pour différentielle en $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} d_x(\tilde{\varphi}_i \circ p) = d_x \varphi_i : H &\rightarrow l^2(\mathbb{N} - i) \\ X = (X_i)_{i \in \mathbb{N}} &\mapsto \frac{1}{x_i^2} (X_k x_i - x_k X_i)_{k \in \mathbb{N} - i}. \end{aligned}$$

Pour tout i , $\text{Ker } d_x \varphi_i = \mathbb{C}x$ et, pour tout $\lambda \neq 0$, $d_x \varphi_i(X) = d_{\lambda x} \varphi_i(\lambda X)$. Ainsi tout couple $(y, Y) \in l^2(\mathbb{N} - i) \times l^2(\mathbb{N} - i)$ définit une unique application $u : \mathbb{C}x \rightarrow \mathbb{C}x^\perp$ telle que $(\varphi_i(\lambda x), d_{\lambda x} \varphi_i \lambda X) = (y, Y)$, permettant d'identifier l'espace tangent en $l = \mathbb{C}x \in \mathbb{P}(H)$ à $L(l, l^\perp)$.

A.1.4 Les briques de la théorie

Théorème A.1.19 (Inégalité des accroissements finis) Soient E et F deux espaces de Banach, f une application de classe \mathcal{C}^1 d'un ouvert $\mathcal{U} \subset E$ dans F , x et y deux points de \mathcal{U} tels que le segment $[x, y]$ appartienne à \mathcal{U} , et $k = \sup_{z \in [x, y]} \|df(z)\|$. Alors :

$$\|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E.$$

Théorème A.1.20 (Théorème de point fixe de Picard) Soit (M, d) un espace métrique complet et $f : M \rightarrow M$ une application contractante, i.e. telle qu'il existe une constante k , $0 < k < 1$ vérifiant :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Alors f possède un unique point fixe et pour tout $x_0 \in M$, la suite des itérées $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ce point lorsque n tend vers $+\infty$.

■ **Preuve du théorème A.1.20 :**

Simple conséquence de la convergence d'une série géométrique de raison $k < 1$.

Théorème A.1.21 (Théorème de Hahn-Banach) Soit E une espace vectoriel réel et p une sous-norme sur E i.e. vérifiant :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall x \in E, \forall \lambda > 0,$$

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Soit G un sous-espace vectoriel de E et $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle, pour tout $x \in G$, $g(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et telle que $f(x) \leq p(x)$ pour tout $x \in E$.

■ **Preuve du théorème A.1.21 :**

Découle du lemme de Zorn. ■

Corollaire A.1.22 Soit E un espace vectoriel normé et E' son dual continu muni de la norme : $\|f\|_{E'} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$. Alors l'application canonique :

$$\begin{aligned} i : E &\rightarrow E'' \\ x &\mapsto (f \mapsto f(x)), \end{aligned}$$

est une injection continue de E dans son bi-dual.

Théorème A.1.23 (Théorème de l'application ouverte) Soient E et F deux espaces de Banach et soit T une application linéaire continue et surjective de E sur F . Alors il existe une constante $c > 0$ telle que l'image de la boule ouverte de E de centre 0 et de rayon 1 contienne la boule ouverte de F de centre 0 et de rayon c .

■ **Preuve du théorème A.1.23 :**

Repose sur le fait qu'un espace de Banach est de Baire. ■

Corollaire A.1.24 Soient E et F deux espaces de Banach et T une application linéaire continue et bijective. Alors T^{-1} est continue de F dans E .

Théorème A.1.25 (Théorème d'inversion locale) Soient E et F deux espaces de Banach, \mathcal{U} un ouvert de E et $f : \mathcal{U} \rightarrow F$ une application de classe \mathcal{C}^k avec $k \geq 1$ telle que la différentielle de f en un point $x_0 \in E$ soit inversible. Alors f est un \mathcal{C}^k -difféomorphisme local au voisinage de x_0 .

■ **Preuve du théorème A.1.25 :**

D'après le théorème de l'application ouverte, la différentielle est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de E sur F , ainsi, quitte à considérer $(d_{x_0}f)^{-1} \circ f$ au lieu de f , on peut supposer que $E = F$ et $d_{x_0}f = Id_E$. Quitte à considérer la fonction $f(x + x_0) - f(x_0)$, on peut aussi supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.

Soit $u(x) = x - f(x)$. La différentielle de u en 0 étant 0, et l'application $du : \mathcal{U} \rightarrow B(E, E)$ étant continue, il existe un rayon $r > 0$ telle que pour tout point x de la boule de rayon $2r$ centrée en 0, $B_{2r}(0)$, la norme de l'application linéaire $du(x)$ est inférieure à $1/2$. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|u(x)\| < \frac{1}{2}\|x\|$, ainsi l'image de la boule fermée de rayon r est incluse dans la boule fermée de rayon $r/2$.

Montrons que f réalise une bijection de la boule fermée $\bar{B}_r(0)$ sur la boule fermée $\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$. Soit $y \in \bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, le théorème de point fixe de Picard va nous donner l'existence et l'unicité d'une solution $x \in \bar{B}_r(0)$ de l'équation $f(x) = y$. Considérons en effet la fonction $u_y(x) = y + u(x) = y + x - f(x)$. Il est immédiat que $u_y(x) = x$ équivaut à $f(x) = y$. Comme $\|y\| \leq \frac{r}{2}$, on a $\|u_y(x)\| \leq r$ pour tout $x \in \bar{B}_r(0)$. Donc u_y envoie la boule fermée $\bar{B}_r(0)$ dans elle-même. Celle-ci étant un espace métrique complet, il reste à montrer que u_y est contractante. Grâce à l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\|u_y(x_1) - u_y(x_2)\| = \|u(x_1) - u(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|.$$

On a ainsi démontré l'existence de la bijection inverse $g = f^{-1} : \bar{B}_{\frac{r}{2}}(0) \rightarrow \bar{B}_r(0)$.

La continuité de l'inverse g provient de la majoration :

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|u(x_1) - u(x_2)\| + \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|,$$

c'est-à-dire :

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|f(x_1) - f(x_2)\|.$$

Montrons que g est différentiable dans $\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$ et que $dg(y) = (df(g(y)))^{-1}$. Observons d'abord que pour $r > 0$ suffisamment petit, $df(x)$ est inversible pour tout $x \in \bar{B}_r(0)$. Pour tout y_1 et y_2 de $\bar{B}_{\frac{r}{2}}(0)$, en notant $x_1 = g(y_1)$ et $x_2 = g(y_2)$, on a :

$$\begin{aligned} \|g(y_1) - g(y_2) - (df(x_2))^{-1}(y_1 - y_2)\| &= \|x_1 - x_2 - (df(x_2))^{-1}(f(x_1) - f(x_2))\| \\ &\leq \|(df(x_2))^{-1}\| \times \|(df(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2))\|. \end{aligned}$$

La différentiabilité de f permet d'obtenir :

$$\|df(x_2)(x_1 - x_2) - f(x_1) + f(x_2)\| = o(\|x_1 - x_2\|),$$

et la continuité de g implique que $\|x_1 - x_2\| = o(\|y_1 - y_2\|)$, ce qui permet de conclure.

La continuité de g , de df et de la prise de l'inverse permettent de déduire de l'égalité $dg(y) = (df(g(y)))^{-1}$ que g est de classe \mathcal{C}^1 pour tout $y \in \bar{B}_{\frac{1}{2}}(0)$. L'opération d'inversion étant \mathcal{C}^∞ et la différentielle df de classe \mathcal{C}^{k-1} , en itérant le processus, on obtient que g est de classe \mathcal{C}^k . ■

Corollaire A.1.26 Soit f une application \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace de Banach E dans le produit de deux espaces de Banach $F_1 \times F_2$, et $x_0 \in \mathcal{U}$. Supposons que $f(x_0) = (0, 0)$ et que $d_{x_0}f$ est un isomorphisme continu de E dans $F_1 = F_1 \times \{0\}$. Alors il existe un difféomorphisme local g de $F_1 \times F_2$ fixant $(0, 0)$ tel que $g \circ f : \mathcal{U} \rightarrow F_1 \times F_2$ envoie un ouvert \mathcal{U}_1 de \mathcal{U} sur $F_1 \times \{0\}$ et se restreigne en un difféomorphisme local de \mathcal{U}_1 sur un voisinage ouvert de $0 \in F_1$.

Corollaire A.1.27 Soit f une application \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) d'un ouvert \mathcal{U} d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F , et $x_0 \in \mathcal{U}$. Supposons que $d_{x_0}f$ est surjective et que son noyau K possède un supplémentaire topologique L . Alors il existe un ouvert \mathcal{U}_1 de \mathcal{U} contenant x_0 , un ouvert \mathcal{V}_1 de K , un ouvert \mathcal{V}_2 de L et un isomorphisme $h : \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{U}_1$ de classe \mathcal{C}^k tel que $f \circ h(v_1, v_2) = f \circ h(0, v_2)$.

Théorème A.1.28 (Théorème des fonctions implicites) Soient E, F, G trois espaces de Banach, \mathcal{U} un ouvert de E , \mathcal{V} un ouvert de F et $f : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \rightarrow G$ une application de classe \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$. Supposons que la différentielle de f en (x_0, y_0) selon la seconde variable $D_2f(x_0, y_0) : F \rightarrow G$ soit un isomorphisme. Alors il existe un voisinage \mathcal{U}_1 de x_0 dans E , un voisinage \mathcal{V}_1 de y_0 dans F et une application $g : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{V}_1$ de classe \mathcal{C}^k telle que $\forall x \in \mathcal{U}_1, \forall y \in \mathcal{V}_1$,

$$f(x, y) = z_0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

En particulier $g(x_0) = y_0$ et $\forall x \in \mathcal{U}_1, f(x, g(x)) = z_0$. De plus si \mathcal{U}_1 est une boule suffisamment petite, g est uniquement déterminé.

Remarque A.1.29 On trouvera dans la proposition A.1.32 (resp. A.1.43) du paragraphe A.1.5 une application importante du corollaire A.1.26 (resp. A.1.27), permettant de donner du contenu à la notion de sous-variété banachique. Le corollaire du théorème de Hahn-Banach sera utilisé entre autre pour définir le crochet de champs de vecteurs. Cependant un théorème important manque encore à la liste des "briques fondamentales de la théorie", il s'agit du théorème de Frobenius, qui nécessite les notions de fibrés vectoriels, champs de vecteurs et formes différentielles et qui sera donc exposé plus loin.

A.1.5 Sous-variétés banachiques

Définition

Définition A.1.30 Soient M une variété banachique et N un sous-ensemble de M muni de la topologie induite. N est une sous-variété banachique de M si pour tout $x \in N$ il existe une carte locale $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ de M , appelée carte adaptée à N en x , telle que $x \in \mathcal{U}$ et φ induise un homéomorphisme de $\mathcal{U} \cap N$ sur l'intersection de $\varphi(\mathcal{U})$ avec un sous-espace fermé de E admettant un supplémentaire topologique.

Exemple 1 La sphère unité d'un espace de Hilbert H est une sous-variété hilbertienne de H . Une carte de H adaptée à $\mathbb{S}(H)$ en un point appartenant à l'hémisphère nord est par exemple l'application qui à $y \in H - \{N\}$ associe le point $p_1(y) + (y - x)$, où p_1 désigne la projection stéréographique de pôle nord et x le point de $\mathbb{S}(H)$ sur la droite reliant N à y . De manière explicite, on pose $\mathcal{U} = \{y \in H, y_0 > 0, y \neq N\}$ et $\varphi : H \rightarrow H$ associant à y le point $z = \varphi(y)$ de coordonnées :

$$z_0 = (y_0 - 1)\left(1 + \frac{2(y_0 - 1)}{1 - 2y_0 + \|y\|^2}\right)$$

$$z_k = \left(\frac{1}{1 - y_0} + 1 + \frac{2(y_0 - 1)}{1 - 2y_0 + \|y\|^2}\right)y_k \quad \text{pour tout } k > 0$$

Alors $\varphi(\mathcal{U} \cap N) = \varphi(\mathcal{U}) \cap \{z_0 = 0\}$. En considérant diverses applications de la sorte, on recouvre $\mathbb{S}(H)$ de cartes adaptées.

Immersion

Définition A.1.31 Soient N et M deux variétés banachiques, et $f : N \rightarrow M$ un morphisme de variétés. On dit que f est une immersion en $x \in N$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- $df_x : T_x N \rightarrow T_{f(x)} M$ est injective, son image est fermée et admet une supplémentaire topologique dans $T_{f(x)} M$.
- il existe un espace de Banach F , un sous-espace vectoriel fermé E de F possédant un supplémentaire topologique, des cartes $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ en $x \in N$ et (\mathcal{V}, ψ, F) en $f(x) \in M$ tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et $\varphi = \psi \circ f|_{\mathcal{U}}$.
- il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de $x \in N$, un voisinage ouvert \mathcal{V} de $f(x)$ tels que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ et un morphisme q de \mathcal{V} dans N tel que $q(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathcal{U}$.

On dit que f est une immersion, si c'est une immersion en tout point de N .

Proposition A.1.32 Soit f une immersion d'une variété banachique N dans une variété banachique M . On suppose que f induit un homéomorphisme de N sur $f(N)$. Alors $f(N)$ est une sous-variété de M .

Définition A.1.33 On appelle plongement une immersion induisant un homéomorphisme sur son image.

Exemple 2 L'injection de Plücker $Gr^{(p)} \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^p H) :$

Proposition A.1.34 L'injection de Plücker :

$$i_P : Gr^{(p)}(H) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^p H)$$

$$W = \text{vect}\{w_1, w_2, \dots, w_p\} \mapsto [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p]$$

est un plongement holomorphe.

□ **Preuve de la proposition A.1.34 :**

Soient $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ une base hilbertienne de l'espace de Hilbert H . L'espace de Hilbert $\Lambda^p H$ a alors pour base hilbertienne $\{e_{s(1)} \wedge e_{s(2)} \wedge \dots \wedge e_{s(p)}\}_{s \in \mathcal{S}}$, où \mathcal{S} est l'ensemble des injections de $\{1, \dots, p\}$ dans \mathbb{Z} telles que $s(1) < s(2) < \dots < s(p)$. Pour tout $s \in \mathcal{S}$, on définit les sous-espaces vectoriels :

$$H_s = \text{vect}\{e_{s(1)}, e_{s(2)}, \dots, e_{s(p)}\},$$

les ouverts de cartes :

$$\mathcal{U}_s = \{W \in Gr^{(p)}, pr_s : W \xrightarrow{\sim} H_s\},$$

où pr_s est la projection orthogonale sur H_s et les coordonnées de Plücker :

$$\begin{aligned} \pi_s : Gr^{(p)} &\rightarrow H_s \\ W &\mapsto \det(pr_s \circ w), \end{aligned}$$

où $w : vect\{e_1, \dots, e_p\} \rightarrow H$ est défini par $w(e_i) = w_i$. Les coordonnées de Plücker permettent d'explicitier i_P :

$$\begin{aligned} i_P(W) &= [w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p] = [\sum_{s \in \mathcal{S}} \det(pr_s \circ w) e_{s(1)} \wedge e_{s(2)} \wedge \dots \wedge e_{s(p)}] \\ &= [\sum_{s \in \mathcal{S}} \pi_s(W) e_{s(1)} \wedge e_{s(2)} \wedge \dots \wedge e_{s(p)}]. \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que π est bien définie, i.e. que pour toute base $\{w_1, \dots, w_p\}$ de $W \in Gr^{(p)}$, l'élément $w_1 \wedge \dots \wedge w_p$ appartient bien à $\Lambda^p H = l^2(\mathcal{S})$. Pour cela, il suffit de montrer le lemme suivant :

Lemme A.1.35

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} |\pi_s(w)|^2 = \det(w^* w).$$

Δ **Preuve du lemme A.1.35 :**

Montrons que pour tout couple (P, Q) de matrices, où $P \in L^2(H, \mathbb{C}^p)$ et $Q \in L^2(\mathbb{C}^p, H)$, on a :

$$\det PQ = \sum_{s \in \mathcal{S}} \det P_s Q_s,$$

où P_s (resp. Q_s) désigne la sous-matrice $p \times p$ de P (resp. Q) formée des lignes indexées par $s \in \mathcal{S}$. En désignant par \mathcal{S}_p le groupe des permutations de p éléments, on a :

$$\begin{aligned} \det(PQ) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p (PQ)_{\sigma(i), i} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p (\sum_{j \in \mathbb{Z}} P_{\sigma(i)j} Q_{ji}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \sum_{s : [1, p] \rightarrow \mathbb{Z}} \prod_{i=1}^p P_{\sigma(i), s(i)} Q_{s(i), i} \\ &= \sum_{s : [1, p] \rightarrow \mathbb{Z}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p P_{\sigma(i), s(i)} Q_{s(i), i} \\ &= \sum_{\{s_1, \dots, s_p\}} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p P_{\sigma(i), \sigma'(s_i)} Q_{\sigma'(s_i), i} \\ &= \sum_{\{s_1, \dots, s_p\}} \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma \circ \sigma'^{-1}) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^p P_{\sigma \circ \sigma'^{-1}(i), s_i} Q_{s_i, i} \\ &= \sum_{\{s_1, \dots, s_p\}} (\sum_{\sigma'' \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma'') \prod_{i=1}^p P_{\sigma''(i), s_i}) (\sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^p Q_{s_i, i}) \\ &= \sum_{\{s_1, \dots, s_p\}} \det P_s \det Q_s = \sum_{s \in \mathcal{S}} \det P_s \det Q_s \end{aligned}$$

Δ

Montrons maintenant que i_P est un plongement holomorphe. En notant $\phi_s : \mathcal{U}_s \rightarrow L(H_s, H_s^\perp)$ les applications cartes associées aux ouverts \mathcal{U}_s de $Gr^{(p)}$, $\mathcal{V}_s = \{p((\lambda_{s'})_{s' \in \mathcal{S}}) \in \mathbb{P}(\Lambda^p H), \lambda_s \neq 0\}$ les ouverts de cartes de $\mathbb{P}(\Lambda^p H)$ et $\tilde{\phi}_s$ les applications cartes associées, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{s_0} \circ i_P \circ \phi_{s_0}^{-1} : L(H_{s_0}, H_{s_0}^\perp) &\rightarrow l^2(\mathcal{S} - s_0) \\ T = (T_{ij})_{i \in \mathbb{Z} - \text{Im } s_0, 1 \leq j \leq p} &\mapsto (\det T_s)_{s \in \mathcal{S} - s_0}, \end{aligned}$$

où T_s est la matrice $p \times p$ obtenue à partir de la matrice $\mathbb{Z} \times p$ de l'application $\text{Id}_{H_s} + T$ en choisissant les p lignes correspondant à l'image de s . En particulier, $T_{ij} = \det(T_{s^{(ij)}})$ où $s^{(ij)}(k) = s_0(k)$ pour tout k appartenant à $\{1, \dots, p\} -$

$\{j\}$ et $s^{(ij)}(j) = i$. Chacune des coordonnées de la matrice T apparaissant comme une des composantes de l'application $\phi_{s_0} \circ i_P \circ \phi_{s_0}^{-1}$, cette application, ainsi que sa différentielle, sont injectives. Comme la variété $\mathbb{P}(\Lambda^p H)$ est une variété hilbertienne, l'image de la différentielle possède bien un supplémentaire topologique (à savoir son orthogonal), donc i_P est une immersion. Pour prouver que i_P est un plongement il suffit de montrer que i_P est (globalement) injective, c'est-à-dire que les images de deux ouverts \mathcal{U}_{s_1} et \mathcal{U}_{s_2} d'intersection vide sont d'intersection vide. Ceci est clair car les coordonnées de Plücker associées π_{s_1} et π_{s_2} ne peuvent pas être non nulles en même temps. On en déduit que i_P est un plongement. De plus, dans les cartes considérées, chacune des applications π_s est une expression polynomiale des coordonnées et est donc holomorphe. On en déduit qu'il en est de même pour i_P . \square

Exemple 3 L'injection de Plücker $Gr_2 \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$:

Soit H l'espace de Hilbert $l^2(S^1, \mathbb{C})$ muni de la polarisation $H = H_+ \oplus H_-$, où H_+ (resp. H_-) désigne le sous-espace vectoriel de H formé des applications de la variable $z \in S^1$ s'étendant en une application holomorphe à l'intérieur (resp. extérieur) du disque unité. On considère la variété banachique Gr_2 associée à cette polarisation. Les composantes connexe de Gr_2 sont indexées par l'indice de l'opérateur de Fredholm donné par la projection orthogonale sur H_+ restreinte à $W \in Gr_2$ ([PS]), appelé dimension virtuelle de W . Pour tout élément $W \in Gr_2$ de dimension virtuelle d , l'espace $z^{-d}H_+$ est un espace de référence par rapport auquel on définit la notion de bases admissibles :

Définition A.1.36 Une base admissible d'un élément $W \in Gr_2$ est une suite de vecteurs $(w_k)_{k \geq -d}$ de W , où d est la dimension virtuelle de W , vérifiant les deux conditions suivantes :

- l'application $w : z^{-d}H_+ \rightarrow W$ associant à l'élément z^k le vecteur w_k est un isomorphisme continu.
- l'opérateur $\text{pr} \circ w$, où pr désigne la projection orthogonale sur $z^{-d}H_+$, est un opérateur à déterminant.

Remarque A.1.37 Deux bases admissibles sont reliées par un opérateur à déterminant.

Proposition A.1.38 Soit $\mathcal{S} = \{S \subset \mathbb{Z}, \#(S - \mathbb{N}) < \infty, \#(\mathbb{N} - S) < \infty\}$ et $W \in Gr_2$ de dimension virtuelle d . Pour tout $S \in \mathcal{S}$, on définit le sous-espace de Hilbert H_S engendré par $(z^s)_{s \in S}$ et la dimension virtuelle de S par $\#(S - \mathbb{N}) - \#(\mathbb{N} - S)$. Alors pour tout $S \in \mathcal{S}$ de dimension virtuelle d la projection orthogonale $\text{pr}_S : W \rightarrow H_S$ est un opérateur à déterminant.

Définition A.1.39 Pour tout $S \in \mathcal{S}$ de dimension virtuelle d , et toute base admissible de $W \in Gr_2$ donnée par $w : H_+ \rightarrow W$, on définit :

$$\pi_S(w) = \det(\text{pr}_S \circ w).$$

Pour tout $S \in \mathcal{S}$ de dimension virtuelle différente de d , on pose $\pi_S(w) = 0$.

Proposition A.1.40 Les coordonnées de Plücker $\{\pi_S\}_{S \in \mathcal{S}}$ définissent une injection holomorphe $\pi : Gr_2 \hookrightarrow \mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$.

Lemme A.1.41

$$\sum_{s \in \mathcal{S}} |\pi_s(w)|^2 = \det(w^*w)$$

△ **Preuve du lemme A.1.41 :**

- Tout d'abord, w définissant une base admissible, w^*w est bien un opérateur à déterminant.
- Pour les éléments W tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+$ le déterminant $\det(w^*w)$ se réduit à un déterminant de dimension fini et se déduit du lemme A.1.35.
- L'ensemble $Gr_0 = \{W \in Gr_2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}, z^k H_+ \subset W \subset z^{-k} H_+\}$ étant dense dans Gr_2 , par un argument de continuité, on en déduit que la formule est valable pour toute base admissible w . △

□ **Preuve de la proposition A.1.40 :**

Analogue à la démonstration de la proposition A.1.34. □

Submersions

Définition A.1.42 Soient N et M deux variétés banachiques, et $f : N \rightarrow M$ un morphisme de variétés. On dit que f est une submersion en $x \in N$ si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite :

- L'application linéaire $df_x : T_x N \rightarrow T_{f(x)} M$ est surjective et son noyau admet un supplémentaire topologique dans $T_x N$.
- il existe une carte $(\mathcal{U}, \varphi, E)$ en $x \in N$, une carte (\mathcal{V}, ψ, F) en $f(x) \in M$ et une application linéaire surjective u de E dans F telles que $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$, $\psi \circ f = u \circ \varphi$ et telles que $\ker u$ admette un supplémentaire topologique dans E .
- il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de $x \in N$, un voisinage ouvert \mathcal{V} de $f(x)$ contenant $f(\mathcal{U})$ et un morphisme g de \mathcal{U} dans une variété X tels que l'application (f, g) de \mathcal{U} dans $\mathcal{V} \times X$ soit un isomorphisme.
- il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de $f(x)$ dans M et un morphisme s de \mathcal{V} dans N tels que $s(f(x)) = x$ et $f(s(y)) = y$ pour tout $y \in \mathcal{V}$.

On dit que f est une submersion si c'est une submersion en tout point de N . L'ensemble des points où f est une submersion est un ouvert de N donc une sous-variété de N .

Proposition A.1.43 L'image réciproque d'un point $c \in M$ par une submersion $f : N \rightarrow M$ est une sous-variété banachique de N .

Exemple 1 Soit H un espace de Hilbert réel et $\mathbb{S}(H)$ la sphère unité de H . On considère l'application :

$$\begin{aligned} f : H &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|^2, \end{aligned}$$

de telle sorte que $\mathbb{S}(H) = f^{-1}(1)$. La différentielle de f en $x \in H$ est :

$$\begin{aligned} d_x f : H &\rightarrow H \\ h &\mapsto 2\langle h, x \rangle. \end{aligned}$$

L'ensemble des $x \in X$ où $d_x f$ est une submersion est l'ouvert $H - \{0\}$, et $\mathbb{S}(H) = f^{-1}(1)$ est une sous variété hilbertienne de $H - \{0\}$ donc de H .

A.1.6 Groupes de Lie et algèbres de Lie banachiques

Définition A.1.44 Un groupe de Lie banachique G est une variété banachique \mathcal{C}^∞ muni d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto xy$, ainsi que l'inversion $G \rightarrow G$, $x \mapsto x^{-1}$ soient des applications \mathcal{C}^∞ .

Définition A.1.45 On appelle algèbre de Lie d'un groupe de Lie G l'espace tangent à G en l'élément neutre du groupe. Elle sera souvent notée $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$.

Exemple 1 *Le groupe linéaire $GL(H)$:*

Soit H un espace de Hilbert et $B(H)$ l'ensemble des applications linéaires continues de H dans H . $B(H)$ possède une structure naturelle d'espace de Banach pour la norme d'opérateur :

$$\|A\| = \sup_{x \in H, \|x\| \leq 1} \|A(x)\|.$$

L'ensemble des opérateurs bornés inversibles de H dans H , noté $GL(H)$, est un ouvert de $B(H)$ car pour $A \in GL(H)$ et $B \in B(H)$ tel que $\|A^{-1}B\| < 1$, la série suivante est normalement convergente et définit l'inverse de $A + B$:

$$\begin{aligned} (A + B)^{-1} &= (A(I + A^{-1}B))^{-1} = (I + A^{-1}B)^{-1}A^{-1} \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} (-1)^n (A^{-1}B)^n\right) A^{-1} \end{aligned}$$

On en déduit que $GL(H)$ est un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie $B(H)$.

Exemple 2 *Le groupe unitaire $U(H)$:*

Le groupe unitaire de H est défini par :

$$U(H) = \{u \in GL(H) \mid u^*u = \text{Id}_H\}.$$

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} f : GL(H) &\rightarrow \text{Sym}(H) \\ u &\mapsto u^*u, \end{aligned}$$

où $\text{Sym}(H)$ désigne les éléments auto-adjoints de $B(H)$ i.e. vérifiant $y^* = y$. La différentielle de f en un point u de $GL(H)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} d_u f : B(H) &\rightarrow \text{Sym}(H) \\ a &\mapsto a^*u + u^*a. \end{aligned}$$

Pour $u \in U(H)$, elle est surjective, un antécédent de $Y \in \text{Sym}(H)$ étant donné par $\frac{1}{2}uY$. De plus, son noyau est donné par :

$$\text{Ker } d_u f = \{a \in B(H) \mid a^*u + u^*a = 0\},$$

et possède un supplémentaire topologique à savoir :

$$\text{Supp}_u = \{s \in B(H) \mid s^*u - u^*s = 0\},$$

la projection sur $\text{Ker } d_u f$ parallèlement à Supp_u étant l'application que à $X \in B(H)$ associe $\frac{1}{2}(X - uX^*u)$. On en déduit que f est une submersion un tout point de $U(H)$ et que $U(H)$ est une sous-variété banachique de $GL(H)$ dont l'algèbre de Lie est l'ensemble $\mathcal{A}(H)$ des éléments anti-hermitiens de $B(H)$. Pour les détails concernant cet exemple, nous renvoyons le lecteur à [Wur1].

Exemple 3 Le groupe unitaire restreinte U_{res} :

Soit $H = H_+ \oplus H_-$ une décomposition de l'espace de Hilbert H en deux sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie en somme directe orthogonale, et U_{res} le groupe unitaire restreint défini par :

$$U_{res} = \left\{ \begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix} \in U(H) \mid \begin{array}{l} U_{-+} \in L^2(H_-, H_+), \\ U_{+-} \in L^2(H_+, H_-) \end{array} \right\}.$$

U_{res} est un sous-groupe du groupe unitaire $U(H)$ que l'on munit d'une structure de variété banachique par l'inclusion :

$$\begin{aligned} U_{res} &\hookrightarrow U(H) \times L^2(H, H) \\ u = \begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix} &\mapsto \left(u, \begin{pmatrix} 0 & U_{-+} \\ U_{+-} & 0 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Son algèbre de Lie est :

$$\mathfrak{u}_{res} = \left\{ A = \begin{pmatrix} A_+ & A_{-+} \\ A_{+-} & A_- \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} A^* + A = 0, \\ A_{+-} \in L^2(H_+, H_-), A_{-+} \in L^2(H_-, H_+) \end{array} \right\}.$$

A.1.7 Fibrés vectoriels et fibrés principaux

Définition A.1.46 Un fibré vectoriel de fibre F où F est un espace de Banach de dimension finie ou infinie sur une variété banachique B modelée sur E est une variété banachique T modelée sur $E \times F$ munie d'une projection $p : T \rightarrow B$ vérifiant :

- (i) $\forall x \in B, p^{-1}(x)$ est isomorphe à F
- (ii) $\forall x \in B$, il existe un voisinage \mathcal{U} de $x \in B$ et un isomorphisme (appelé trivialisatation locale) $\Psi : \mathcal{U} \times F \rightarrow p^{-1}(\mathcal{U})$ commutant aux projections naturelles et tel que la restriction de Ψ à une fibre soit un isomorphisme continu.

Exemple 1 *Fibré tangent de $\mathbb{S}(H)$* :

L'espace tangent en un point $x \in \mathbb{S}(H)$ s'identifie à l'orthogonal de x dans H . Le fibré tangent est alors le sous-ensemble de $H \times H$ constitué des paires $(x, y) \in H \times H$ telles que $x \in \mathbb{S}(H)$ et $y \in x^\perp$.

Exemple 2 *Fibré normal au dessus de $\mathbb{S}(H)$* :

On définit le fibré normal $\mathcal{N}(H)$ de la sphère unité $\mathbb{S}(H)$ d'un espace de Hilbert réel séparable H comme le sous-ensemble de $H \times H$ muni de la topologie produit donné par : $\mathcal{N}(H) = \{(x, \lambda.x) \in H \times H, x \in \mathbb{S}(H), \lambda \in \mathbb{R}\}$. La projection $p : \mathcal{N}(H) \rightarrow \mathbb{S}(H)$ est la projection sur le premier facteur : pour tout $x \in \mathbb{S}(H)$, $p^{-1}(x)$ est un espace vectoriel réel de dimension 1. En reprenant les notations du A.1.2, les projections stéréographiques p_1 et p_2 permettent de définir une structure de variété banachique sur $\mathcal{N}(H)$ et de fibré de rang 1 au dessus de $\mathbb{S}(H)$. Les applications cartes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : p^{-1}(\mathbb{S}(H) \setminus N) &\rightarrow l^2(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} \\ (x, \lambda.x) &\mapsto (p_1(x), \lambda) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_2 : p^{-1}(\mathbb{S}(H) \setminus S) &\rightarrow l^2(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} \\ (x, \lambda.x) &\mapsto (p_2(x), \lambda) \end{aligned}$$

L'application de changement de cartes est donnée par :

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : l^2(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} &\rightarrow l^2(\mathbb{N}) \times \mathbb{R} \\ (y, \lambda) &\mapsto \left(\frac{y}{\|y\|^2}, -\lambda \right) \end{aligned}$$

Exemple 3 *Fibré tangent de $Gr^{(p)}(H)$:*

L'espace tangent en un point $P \in Gr^{(p)}(H)$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel P de dimension p dans P^\perp . Le fibré tangent de $Gr^{(p)}(H)$ est l'ensemble $\{(P, T) \in Gr^{(p)}(H) \times B(H) \mid T|_{P^\perp} = 0, \text{Im } T \subset P^\perp\}$.

Exemple 4 *Fibré tautologique au dessus de $Gr^{(p)}(H)$:*

Le fibré tautologique associé à $Gr^{(p)}(H)$ est le fibré vectoriel de rang p dont la fibre en $P \in Gr^{(p)}(H)$ est l'espace vectoriel P . C'est le sous-ensemble des couples $(P, x) \in Gr^{(p)}(H) \times H$ tels que $x \in P$.

Exemple 5 *Fibré tangent de $Gr_p(H)$:*

L'espace tangent en un point $P \in Gr_p(H)$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de l'espace vectoriel fermé P de dimension infinie dans P^\perp appartenant à l'idéal de Schatten $L^p(P, P^\perp)$. Le fibré tangent de $Gr_p(H)$ est l'ensemble $\{(P, T) \in Gr_p(H) \times L^p(H) \mid T|_{P^\perp} = 0, \text{Im } T \subset P^\perp\}$.

Exemple 6 *Fibré tautologique au-dessus de $Gr_p(H)$:*

Le fibré tautologique associé à $Gr_p(H)$ est le fibré vectoriel en espaces de Hilbert de dimension infinie dont la fibre en $P \in Gr_p(H)$ est l'espace vectoriel fermé P . C'est le sous-ensemble des couples $(P, x) \in Gr_p(H) \times H$ tels que $x \in P$.

Définition A.1.47 Soient B une variété banachique et G un groupe de Lie banachique. Un fibré principal de groupe G et de base B est une variété banachique Q munie d'une projection $p : Q \rightarrow B$ et d'une action de G sur Q telles que :

- G agit sur Q à droite en laissant stables les fibres et cette action restreinte à chaque fibre est libre et transitive.
- $\forall x \in B$, il existe un voisinage \mathcal{U} de x dans B et un isomorphisme Ψ G -invariant tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \mathcal{U} \times G & \longrightarrow & Q|_{\mathcal{U}} = p^{-1}(\mathcal{U}) \\ p_1 \searrow & & \swarrow p \\ & \mathcal{U} & \end{array}$$

Exemple 7 *Fibration de Hopf :*

La projection canonique $H - \{0\}$ sur $\mathbb{P}(H)$ restreinte à $\mathbb{S}(H)$ muni $\mathbb{S}(H)$ d'une structure de S^1 -fibré principal au-dessus de $\mathbb{P}(H)$ appelé fibré de Hopf.

Exemple 8 *Fibré des repères de $Gr^{(p)}(H)$:*

Le sous-ensemble de $Gr^{(p)}(H) \times L(\mathbb{C}^p, H)$ formé des couples (P, x) tels que $\text{Im } x = P$ et $\det(x^*x) > 0$ est un fibré principal de groupe $\text{GL}(p, \mathbb{C})$ au-dessus de $Gr^{(p)}(H)$ appelé le fibré des repères de $Gr^{(p)}(H)$.

A.1.8 Champs de vecteurs

Définition A.1.48 Un champ de vecteurs sur un ouvert \mathcal{U} d'une variété banachique M est une section C^∞ du fibré TM . On notera $\Gamma(\mathcal{U}, TM)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur \mathcal{U} .

Exemple 9 Soit G un groupe de Lie et X un élément de son algèbre de Lie. Alors il existe un unique champs de vecteurs \tilde{X} sur G invariant à gauche valant X en l'élément neutre e du groupe. Il est défini par $\tilde{X}(g) = dL_g(X)$, où L_g désigne la multiplication à gauche par $g \in G$.

Définition A.1.49 Soit X un champs de vecteurs dépendant du temps sur une variété banachique M , et $x_0 \in M$. On appelle flot ou courbe intégrale du champs de vecteurs X en x_0 une application $\varphi : J \rightarrow M$, où J est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0, telle que $\varphi(0) = x_0$ et telle que $\varphi'(t) = X(t, \varphi(t))$.

Théorème A.1.50 (Existence et unicité du flot local) Soient J un intervalle de \mathbb{R} contenant 0, x_0 un point d'un espace de Banach E , \mathcal{U} un ouvert de E contenant la boule fermée $\bar{B}_{3a}(x_0)$ de centre x_0 et de rayon $3a$ avec $0 < a < 1$, et $X : J \times \mathcal{U} \rightarrow E$ un champs de vecteurs continu dépendant du temps, vérifiant :

- $\exists L \geq 1, \|X(t, x)\| \leq L, \forall (t, x) \in J \times \mathcal{U}$
- $\exists K \geq 1, \|X(t, x) - X(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \forall x, y \in \mathcal{U}, t \in J$.

Soit $b < \frac{a}{LK}$. Alors $\forall x \in B_a(x_0)$, il existe un unique flot :

$$\varphi :]-b, b[\times B_a(x_0) \rightarrow \mathcal{U}$$

tel que $\varphi(0, x) = x$ et :

$$\frac{d}{dt}\varphi(t, x) = X(t, \varphi(t, x)).$$

De plus, si X est de classe C^p , il en est de même de toute courbe intégrale $t \rightarrow \varphi(t, x)$ pour tout $x \in B_a(x_0)$.

■ **Preuve du théorème A.1.50 :**

Remarquons que le flot φ cherché vérifie :

$$\varphi(t, x) = x + \int_0^t X(s, \varphi(s, x)) ds.$$

Nous allons l'obtenir comme point fixe de l'opérateur S_x agissant sur l'espace métrique complet $\mathcal{C} := \mathcal{C}^0([-b, b], \bar{B}_{2a}(x_0))$ muni de la distance :

$$d(\alpha, \beta) = \sup_{t \in [-b, b]} \|\alpha(t) - \beta(t)\|,$$

défini par :

$$S_x : \alpha \mapsto (S_x(\alpha)) : t \mapsto x + \int_0^t X(s, \alpha(s)) ds.$$

• S_x préserve \mathcal{C} car, X étant continu, pour α continue, $S_x(\alpha)$ est continue et :

$$\begin{aligned} \|S_x(\alpha)(t) - x_0\| &= \|x - x_0 - \int_0^t X(s, \alpha(s)) ds\| \\ &\leq \|x - x_0\| + \int_0^t \|X(s, \alpha(s))\| ds \leq a + bL \leq 2a. \end{aligned}$$

• D'autre part S_x est contractante car :

$$\begin{aligned} \|S_x(\alpha) - S_x(\beta)\| &= \sup_{t \in [-b, b]} \left\| \int_0^t (X(s, \alpha(s)) - X(s, \beta(s))) ds \right\| \\ &\leq \sup_{t \in [-b, b]} \int_0^t \|X(s, \alpha(s)) - X(s, \beta(s))\| ds \\ &\leq \sup_{t \in [-b, b]} Kt \|\alpha - \beta\| \leq \frac{a}{L} d(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

On en déduit que s_x possède un unique point fixe γ dans \mathcal{C} qui vérifie :

$$\gamma(t) = x + \int_0^t X(s, \gamma(s)) ds.$$

La continuité de γ permet d'écrire :

$$\gamma'(t) = X(t, \gamma(t)),$$

et d'en conclure que γ est de classe \mathcal{C}^1 . En itérant l'argument, on obtient que γ est de classe \mathcal{C}^k . ■

Remarque A.1.51 Pour tout $x \in B_a(x_0)$ on a montré l'existence et l'unicité d'une courbe intégrale γ partant de x à $t = 0$, mais le théorème précédent ne dit rien sur la dépendance du flot par rapport à la condition initiale x .

Proposition A.1.52 Soient \mathcal{U} un ouvert de M et $Der(C^\infty(\mathcal{U}))$ l'ensemble des dérivations sur \mathcal{U} i.e l'ensemble de formes linéaires sur $C^\infty(\mathcal{U})$ vérifiant la règle de Leibnitz. L'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \Gamma(\mathcal{U}, TM) &\rightarrow Der(C^\infty(\mathcal{U})) \\ X &\mapsto (f \mapsto X.f = df(X)) \end{aligned}$$

est injective.

□ **Preuve de la proposition A.1.52 :**
provient de l'injection canonique de E dans son bidual continu E'' (théorème de Hahn-Banach). Nous renvoyons le lecteur à [MR] pour les détails. □

Remarque A.1.53 Cette proposition permet de définir le crochet de deux champs de vecteurs :

Définition A.1.54 Soient X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathcal{U} \subset M$. Il existe un unique champ de vecteur sur \mathcal{U} appelé crochet de X et Y et noté $[X, Y]$ vérifiant : $[X, Y].f = X.(Y.f) - Y.(X.f)$ pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathcal{U})$.

Proposition A.1.55 (Identité de Jacobi pour les champs de vecteurs)
Soient X, Y, Z trois champs de vecteurs définient sur une variété banachique M . Alors :

$$[Z, [X, Y]] = [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]].$$

Proposition A.1.56 Soient \tilde{X} et \tilde{Y} deux champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie G . Alors le crochet $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ est un champs de vecteurs invariant à gauche sur G .

Remarque A.1.57 Cette proposition permet de définir le crochet de Lie sur l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G par :

$$[X, Y] = [\tilde{X}, \tilde{Y}](e),$$

où \tilde{X} (resp. \tilde{Y}) est le champs de vecteurs invariant à gauche valant X (resp. Y) en e .

Définition A.1.58 Soient M et N deux variétés banachiques et $f : M \rightarrow N$ une application différentiable surjective. On dit qu'un champ de vecteurs X sur M est projetable si $\forall n \in N, \forall m, m' \in f^{-1}\{n\}$, on a : $d_m f(X) = d_{m'} f(X)$.

Proposition A.1.59 Un champ de vecteurs X sur M projetable pour $f : M \rightarrow N$ définit un unique champ de vecteurs sur N , noté f_*X , par : $\forall g : N \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable :

$$f_*X(g)(f(m)) = X(g \circ f)(m).$$

Les flots ϕ_X et ϕ_{f_*X} de X et f_*X vérifient :

$$f \circ \phi_X(t, x) = \phi_{f_*X}(t, f(x)).$$

□ **Preuve de la proposition A.1.59 :**

Le flot ϕ_X est solution de :

$$\begin{aligned} \phi_X(0, x) &= x \\ \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_X(t, x) &= X(x). \end{aligned}$$

Le flot ϕ_{f_*X} est solution de :

$$\begin{aligned} \phi_{f_*X}(0, y) &= y \\ \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_{f_*X}(t, y) &= f_*X(y). \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \phi_X(t, x) = df \circ \frac{d}{dt}|_{t=0} \phi_X(t, x) = df(X(x)) = f_*X(f(x)).$$

Ainsi $f \circ \phi_X(t, x) = \phi_{f_*X}(t, f(x))$. □

Proposition A.1.60 Soient M et N deux variétés banachiques, f une application différentiable surjective de M sur N et X et Y deux champs de vecteurs sur M projetables. Alors :

$$f_*[X, Y] = [f_*X, f_*Y].$$

□ **Preuve de la proposition A.1.60 :**

En notant ϕ_U le flot d'un champ de vecteurs U on a :

$$\begin{aligned} \phi_{f_*[X, Y]}(t, f(x)) &= f \circ \phi_{[X, Y]}(t, x), \\ \phi_{f_*X}(t, f(x)) &= f \circ \phi_X(t, x), \\ \phi_{f_*Y}(t, f(x)) &= f \circ \phi_Y(t, x). \end{aligned}$$

Ainsi pour toute fonction différentiable $g : N \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} &[f_*X, f_*Y](g)(f(m)) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} |_{t=0, s=0} (g(\phi_{f_*Y}(t, \phi_{f_*X}(s, f(m)))) - g(\phi_{f_*X}(t, \phi_{f_*Y}(s, f(m)))))) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} |_{t=0, s=0} (g(\phi_{f_*Y}(t, f \circ \phi_X(s, m))) - g(\phi_{f_*X}(t, f \circ \phi_Y(s, m)))) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} |_{t=0, s=0} (g \circ f \circ \phi_Y(t, \phi_X(s, m)) - g \circ f \circ \phi_X(t, \phi_Y(s, m))) \\ &= [X, Y](g \circ f)(m) \\ &= f_*[X, Y](g)(f(m)). \end{aligned}$$

A.1.9 Formes différentielles

Définition A.1.61 Soit E un espace de Banach et $B^{(k)}(E)$ l'ensemble des applications k -linéaires continues sur E . On note $\Lambda^k E'$ le sous-espace vectoriel fermé de $B^{(k)}(E)$ composé des applications k -linéaires alternées i.e vérifiant :

$$T(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)T(e_1, \dots, e_k)$$

pour tous $e_1, \dots, e_k \in E$ et tout élément σ du groupe de permutation de k éléments.

Définition A.1.62 Soient M une variété banachique C^∞ modélée sur un espace de Banach E . Le produit extérieur d'ordre k de TM est défini par :
 $\Lambda^k T'M = \cup_{x \in M} \Lambda^k(T'_x M)$.

Proposition A.1.63 *Le produit extérieur d'ordre k de TM est une variété banachique modélée sur $E \times \Lambda^k E'$ et un fibré vectoriel de fibre $\Lambda^k E'$ au-dessus de M .*

Définition A.1.64 Une forme différentielle d'ordre k sur M est une section C^∞ de $\Lambda^k T'M$.

Proposition A.1.65 *Soient ξ un champ de vecteurs sur M et ω une k -forme différentielle sur M . La contraction de ω par ξ définie par $i_\xi \omega = \omega(\xi, \dots)$ est une $(k-1)$ -forme différentielle sur M .*

Définition A.1.66 La différentielle extérieure d'une k -forme différentielle ω sur M , notée $d\omega$ est une $(k+1)$ -forme différentielle sur M définie par :

$$d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) = \sum_{0 \leq i \leq k} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k)$$

Définition A.1.67 Une forme différentielle ω d'ordre k est fermée si elle vérifie $d\omega = 0$. Elle est exacte s'il existe une $(k-1)$ -forme différentielle η telle que $d\eta = \omega$.

Proposition A.1.68 *Pour toute forme différentielle ω on a : $d(d\omega) = 0$.*

Définition A.1.69 Le produit extérieur d'une r -forme différentielle ω par une s -forme différentielle η est la $(r+s)$ -forme différentielle $\omega \wedge \eta$ définie par :

$$\omega \wedge \eta(\xi_1, \dots, \xi_{r+s}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{(r+s)}} \varepsilon(\sigma) \omega(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(r)}) \eta(\xi_{\sigma(r+1)}, \dots, \xi_{\sigma(r+s)}).$$

Proposition A.1.70

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{d^\omega} \omega \wedge d\eta$$

A.1.10 Calcul de Lie

Définition A.1.71 Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de variétés banachiques. Pour toute r -forme différentielle ω sur N , on définit une r -forme différentielle $f^*\omega$ sur M , appelée pull-back de ω par f , par :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_r \in T_x M,$$

$$f^*\omega(\xi_1, \dots, \xi_r) = \omega(df(\xi_1), \dots, df(\xi_r)).$$

Proposition A.1.72 Pour tout morphisme f de variétés banachiques, on a :

$$f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta.$$

$$f^*(d\omega) = df^*\omega.$$

Lemme A.1.73 (Lemme de Poincaré) Soit \mathcal{U} une boule ouverte d'un espace de Banach E et ω une forme différentielle de degré $r \geq 1$ telle que $d\omega = 0$. Alors il existe une $(r-1)$ -forme différentielle η sur \mathcal{U} telle que $d\eta = \omega$.

Δ **Preuve du lemme A.1.73** Nous allons construire un opérateur K des r -formes différentielles dans les $(r-1)$ -formes différentielles, vérifiant :

$$dK + Kd = 0.$$

Grâce à cette relation, la condition $d\omega = 0$, implique que la $(r-1)$ -forme $\eta = K\omega$ convient.

Quitte à faire une translation, on peut supposer que le centre de la boule \mathcal{U} est 0. On définit $K\omega$ par :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_{r-1} \in E, \forall x \in \mathcal{U},$$

$$(K\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_{r-1}) = \int_0^1 t^{r-1} \omega_{tx}(x, \xi_1, \dots, \xi_{r-1}) dt.$$

Calculons la différentielle de $K\omega$:

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_r \in E, \forall x \in \mathcal{U},$$

$$\begin{aligned} (dK\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_r) &= \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{i-1} \xi_i \cdot K\omega(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i+j} K\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_r) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{i-1} \xi_i \cdot \int_0^1 t^{r-1} \omega_{tx}(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\ &= \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{r-1} (\xi_i \cdot \omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\ &+ \sum_{1 \leq i < j \leq r} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{r-1} \omega_{tx}(\xi_i, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\ (dK\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_r) &= \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^{i-1} \int_0^1 t^{r-1} (\xi_i \cdot \omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\ &+ r \int_0^1 t^{r-1} \omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_r) dt \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_r \in E, \forall x \in \mathcal{U},$$

$$\begin{aligned}
(Kd\omega)_x(\xi_1, \dots, \xi_r) &= \int_0^1 t^r (d\omega)_{tx}(x, \xi_1, \dots, \xi_r) \\
&= \int_0^1 t^r x.\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_r) dt \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i \int_0^1 t^r \xi_i.\omega_{tx}(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\
&= \int_0^1 t^r x.\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_r) dt \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i \int_0^1 t^r (\xi_i.\omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i \int_0^1 t^r \omega_{tx}(\xi_i, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\
&= \int_0^1 t^r x.\omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_r) dt \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq r} (-1)^i \int_0^1 t^r (\xi_i.\omega_{tx})(x, \xi_1, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_r) dt \\
&\quad - r \int_0^1 t^r \omega_{tx}(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_r) dt
\end{aligned}$$

On a donc bien $dK + Kd = 0$. △

Définition A.1.74 Un champ de tenseur de type (r, s) est une section \mathcal{C}^∞ du fibré $(TM)^{\otimes r} \otimes (T'M)^{\otimes s}$.

Définition A.1.75 Soit X un champ de vecteur sur une variété banachique M , $\alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ le flot local de X défini sur un voisinage de $(0, x) \in \mathbb{R} \times M$ et η un champ de tenseur sur M de type (r, s) . La dérivée de Lie de η par rapport à X est le champ de tenseur du même type que η défini par :

$$\mathcal{L}_X \eta := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\alpha_{-t})_* \circ \eta \circ \alpha_t,$$

où $(\alpha_{-t})_*$ est l'application induite par l'application tangente de $\alpha_{-t} := \alpha(-t, \cdot)$ avec pour tout champ de vecteur Y :

$$(\alpha_{-t})_*(Y) = d\alpha_{-t}(Y),$$

et pour toute 1-forme différentielle ω :

$$(\alpha_{-t})_*(\omega)(Y) := \omega(d\alpha_{-t}(Y)).$$

Remarque A.1.76 Pour toute fonction f sur M , alors :

$$\mathcal{L}_X f = X.f,$$

et pour tout champ de vecteur Y sur M :

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Proposition A.1.77

$$\mathcal{L}_X = di_X + i_X d$$

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \phi) = \mathcal{L}_X \omega \wedge \phi + \omega \wedge \mathcal{L}_X \phi.$$

Proposition A.1.78 (Formule de Cartan) Soit X_t un champ de vecteur dépendant du temps, α son flot local et ω_t une forme différentielle dépendant du temps.

Alors :

$$\frac{d}{dt} (\alpha_t)_* \omega_t = (\alpha_t)_*(\mathcal{L}_{X_t} \omega_t) = (\alpha_t)_*(di_{X_t} \omega_t + i_{X_t} d\omega_t).$$

A.1.11 Le théorème de Frobenius

Définition A.1.79 Soit E un sous-fibré vectoriel du fibré tangent à une variété banachique M . On dit que E est intégrable en $x_0 \in M$ s'il existe une sous-variété N de M contenant x_0 telle que l'application tangente de l'inclusion $i : N \hookrightarrow M$ induise un isomorphisme de fibrés vectoriels de TN sur E . On dit que E est intégrable s'il est intégrable en tout point de M .

Théorème A.1.80 (Théorème de Frobenius) Soit M une variété banachique de classe C^p avec $p \geq 2$ et E un sous-fibré vectoriel du fibré tangent de M . Alors E est intégrable ssi E satisfait l'une des deux conditions équivalentes suivantes :

1. Pour tout point $x \in M$ et tous champs de vecteurs X_1 et X_2 définis au voisinage de x et contenu dans E , le crochet $[X_1, X_2]$ est également contenu dans E .
2. Pour tout point $x \in M$ et toute 1-forme différentielle ω définie au voisinage de x et qui s'annule sur E , la forme $d_{dR}\omega$ s'annule quand appliquée aux couples de champs de vecteurs à valeurs dans E .

A.1.12 Connexions

Définition A.1.81 Une connexion générale sur un fibré E de base B est la donnée :

- soit d'une 1-forme A sur E à valeurs dans l'espace tangent à la fibre, dont la restriction à la fibre est l'identité;
- soit d'une distribution de sous-espaces vectoriels fermés H_ξ , $\xi \in E$, appelés espaces horizontaux, en tout point supplémentaires à l'espace tangent à la fibre.

Remarque A.1.82 Les deux définitions coïncident au sens où : $\forall \xi \in E, \forall X \in T_\xi B$, $A(\xi)X$ est la projection de X sur l'espace tangent à la fibre parallèlement à l'espace horizontal H_ξ , i.e. $H_\xi = \text{Ker } A(\xi)$.

Définition A.1.83 Une dérivée covariante sur un fibré E de base B est la donnée d'une application ∇ qui à toute section s de E associe un élément $\nabla s \in \Gamma(s^*TF)$, où TF est le fibré de base B dont la fibre est l'espace total du fibré tangent à la fibre F .

Remarque A.1.84 La donnée d'une connexion A équivaut à la donnée d'une dérivée covariante au sens où :

- A étant donnée, on définit ∇ par :
 $\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall X \in T_x B, \nabla_X \sigma = A(\sigma_*(X))$;
- ∇ étant donnée, on définit A par :
 $\forall \xi \in E, \forall Y \in T_\xi E, A(\xi)Y = \nabla_X \sigma$, où $\sigma \in \Gamma(E)$, $X \in T_x B$ sont tels que :
 $\sigma(x) = \xi, \sigma_*(X) = Y$.

Définition A.1.85 Une connexion linéaire sur un fibré vectoriel E de base B est la donnée d'une 1-forme A sur E à valeurs dans TE dont la restriction à la fibre est l'identité, et telle que :

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in p^{-1}(x), \forall \lambda \in \mathbb{C}, A(\xi_1 + \lambda \xi_2) = A(\xi_1) + \lambda A(\xi_2).$$

La dérivée covariante correspondante vérifie :

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(E), \forall \lambda \in \mathbb{C}, \nabla(\sigma_1 + \lambda \sigma_2) = \nabla(\sigma_1) + \lambda \nabla(\sigma_2)$$

$$\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall X \in TE, \forall f \in C^\infty(B), \nabla_X(f\sigma) = f\nabla_X\sigma + df(X)\sigma.$$

(Cette dernière égalité est la règle de Leibniz).

Définition A.1.86 Une connexion sur un G -fibré principal Q de base B est la donnée d'une 1-forme A sur Q à valeurs dans l'espace tangent à la fibre, dont la restriction à la fibre est l'identité, et telle que :

$$\begin{aligned} \forall x \in B, \forall \xi \in p^{-1}(x), \forall X \in T_\xi Q, \forall g \in G : \\ (A(\xi)X).g_* = A(\xi.g)(X.g_*) \end{aligned}$$

En identifiant l'espace tangent à la fibre à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} via l'action infinitésimale du groupe, A peut être vu comme une 1-forme à valeurs dans \mathfrak{g} vérifiant :

$$\begin{aligned} \forall x \in B, \forall \xi \in p^{-1}(x), \forall X \in T_\xi Q, \forall g \in G : \\ (A(\xi)X).g_* = \text{Ad } g \ A(\xi.g)(X.g_*) \end{aligned}$$

La dérivée covariante correspondante vérifie :

$$\forall \sigma \in \Gamma(Q), \forall X \in TM, (\nabla_X\sigma).g_* = \nabla_X(\sigma.g)$$

Définition A.1.87 Puisque la donnée d'une connexion sur un fibré vectoriel E de base B permet d'identifier les fibres voisines, elle permet aussi de dériver les p -formes sur B à valeurs dans E , i.e. les sections de $E \otimes \Lambda^p B$. On définit la différentielle extérieure d^∇ associée à une dérivée covariante ∇ par :

$$\begin{aligned} \forall \psi \in \Gamma(E \otimes \Lambda^p B), \\ d^\nabla \psi(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i \nabla_{X_i}(\psi(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \psi([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p) \end{aligned}$$

Exemple 10 Soient B une variété, G un groupe de Lie et $Q = B \times G$. Pour $(x, g) \in Q$, on notera $T_{(x,g)}Q = T_x B \oplus T_g G$ l'espace tangent au fibré. Dans ce cas particulier, une connexion sur Q est une 1-forme A sur Q à valeurs dans TG , vérifiant les conditions précédemment énoncées. Il est commode de la considérer comme une 1-forme sur Q à valeurs dans $T_e G = \mathfrak{g}$ en identifiant $T_g G$ à \mathfrak{g} via la multiplication à gauche $(L_{g^{-1}})_*$. La condition de compatibilité de A avec l'action (à droite) de G sur Q s'exprime alors de la manière suivante :

$$\forall x \in B, \forall g \in G, \forall X \in T_{(x,g)}Q, A((x, g))X = (\text{Ad } g^{-1}) (A((x, e))(X.g_*^{-1}))$$

Du fait de la décomposition $T_{(x,g)}Q = T_x B \oplus T_g G$, on peut aussi considérer une connexion \tilde{A} sur Q comme une 1-forme sur B à valeurs dans \mathfrak{g} . On retrouve la 1-forme de connexion précédente en posant :

$$\begin{aligned} A((x, e))|_{\mathfrak{g}} &= Id \\ A((x, e))|_{T_x B} &= \tilde{A} \\ A((x, g))X &= \text{Ad } g^{-1}.A((x, e))(X.g_*^{-1}) \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\tilde{A} = s^* A$$

où s est la section canonique : $s(x) = (x, e)$.

Exemple 11 Soit Q un fibré trivial de groupe G et de base B , dont on ne fixe pas la trivialisatation. L'action de G sur la fibre permet d'identifier chaque espace tangent à la fibre à \mathfrak{g} via l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie. Via cette identification, une connexion sur Q est une 1-forme A sur Q à valeurs dans \mathfrak{g} vérifiant :

$$\forall x \in B, \forall g \in G, \forall X \in T_{(x,\xi)}Q,$$

$$A((x, \xi)X) = Ad g^{-1}A(x, \xi g^{-1})(X.g_*^{-1}).$$

Dans le cas d'un fibré trivialisé, on retrouve la 1-forme précédente.

Donnons nous maintenant deux sections s et s' et considérons $\alpha = s^*A$ et $\alpha' = s'^*A$. On définit une application de jauge $\gamma : B \rightarrow G$ par $s(x) = s'(x).\gamma(x)$. Les deux formes de connexion α et α' sont liées par :

$$\alpha' = Ad \gamma \alpha - d\gamma.\gamma^{-1}$$

i.e.

$$\forall x \in B, \forall X \in T_x B,$$

$$\alpha'(X) = Ad \gamma(x) \alpha(X) - d\gamma(X).\gamma^{-1}(x).$$

En d'autres termes, une connexion sur un fibré trivial Q est une classe d'équivalence de 1-formes sur B à valeurs dans \mathfrak{g} , modulo le groupe de jauge des applications de B dans G .

Définition A.1.88 Soit une connexion A sur un fibré E quelconque de base B correspondant à une distribution horizontale H . La courbure R de la connexion A est une 2-forme sur la base B à valeurs dans le fibré vectoriel des champs de vecteurs sur E tangents aux fibres, définie par :

$$\forall x \in B, \forall X, Y \in T_x B, \forall \xi \in E_x,$$

$$R_{X,Y}\xi = A(\xi).[\tilde{X}, \tilde{Y}],$$

où $\tilde{X}, \tilde{Y} \in H_\xi$ sont des relèvements horizontaux de X et Y .

Proposition A.1.89 On a : $d^\nabla \circ d^\nabla = -R^\nabla$.

Exemple 12 Soit E un fibré vectoriel de base B muni d'une connexion linéaire. Pour $x \in B$ et $X, Y \in T_x B$ fixés, on a :

$$\forall \xi_1, \xi_2 \in E_x, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

$$R_{X,Y}(\xi_1 + \lambda \xi_2) = R_{X,Y}(\xi_1) + \lambda R_{X,Y}(\xi_2),$$

de sorte que $R_{X,Y}$ peut être vu comme un endomorphisme de E_x . En particulier si E est le fibré tangent de M , la courbure a pour expression :

$$R_{X,Y}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z,$$

où X, Y, Z sont des champs de vecteurs sur M .

Définition A.1.90 Soit une connexion linéaire sur le fibré tangent d'une variété banachique M de dérivée covariante ∇ . La torsion T^∇ de la connexion est la différentielle covariante $d^\nabla I$ de l'application identité de TM dans TM vue comme 1-forme de M dans TM . Pour tous champs de vecteurs X, Y sur M , on a :

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Définition A.1.91 Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe sur une variété banachique M , ∇ une connexion sur le fibré tangent TM , et $V : I \rightarrow TM$ un champ de vecteur le long de γ . On dit que V est parallèle le long de γ si $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}V(t) = 0$ pour tout $t \in I$.

Proposition A.1.92 (Transport parallèle) Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe sur une variété banachique dont le fibré tangent est muni d'une connexion ∇ et $a \in I$ et $V_a \in T_{\gamma(a)}M$. Il existe un unique champ de vecteurs parallèle $V(t)$ le long de γ tel que $V(a) = V_a$.

A.2 Variétés banachiques riemanniennes

A.2.1 Définition et exemples

Définition A.2.1 Soient M une variété banachique réelle (lisse) et g une section du fibré $T'M \odot T'M$ des formes bilinéaires symétriques de TM . On dit que g est une métrique faiblement riemannienne sur M ssi, pour tout $x \in M$, g_x est une application bilinéaire définie positive sur T_xM , i.e. ssi :

- $g_x(X, X) \geq 0, \forall X \in T_xM$,
- $g_x(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

Remarque A.2.2 La seconde condition ci-dessus implique en particulier que g_x réalise une injection de T_xM dans T'_xM par :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_x : T_xM &\rightarrow T'_xM \\ X &\mapsto \{i_X g_x : Y \mapsto g_x(X, Y)\} \end{aligned}$$

Définition A.2.3 On dit que g est une métrique fortement riemannienne si \tilde{g}_x réalise un isomorphisme entre T_xM et T'_xM .

Remarque A.2.4 Si P est un sous-espace vectoriel de l'espace tangent en un point d'une variété banachique faiblement riemannienne, on a :

$$P \subset (P^\perp)^\perp,$$

mais pas égalité, même si P est fermé.

Exemple 13 1. *Tout espace de Hilbert réel est une variété fortement riemannienne pour la métrique donnée par le produit scalaire.*

2. *Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni du produit scalaire : $\langle (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \rangle = \Re \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i^* y_i$ est une variété faiblement riemannienne, non fortement riemannienne.*

3. *Pour tout $2 < q \leq +\infty$ et tout espace muni d'une mesure m de masse finie, l'espace de Banach $\mathcal{L}^q(m)$ des fonctions mesurables à valeurs complexes telles que $\|f\|_q = (\int \|f\|^q dm)^{\frac{1}{q}}$ est finie est une variété faiblement riemannienne non fortement riemannienne pour le produit scalaire :*

$$\langle f, h \rangle = \Re \int \bar{f} g dm.$$

4. Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $L^p(H)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe H bornés pour la norme $\|\cdot\|_p$ est une variété faiblement riemannienne non fortement riemannienne pour le produit scalaire donné par :

$$\langle A, B \rangle = \Re \operatorname{Tr} A^* B.$$

Définition A.2.5 On dira qu'une variété banachique M modélisée sur un espace de Banach E munie d'une métrique faiblement riemannienne g est plate s'il existe en tout point x de M une carte locale dans laquelle la métrique g s'exprime comme un produit scalaire constant sur un ouvert de l'espace modèle E .

Exemple 14 Les espaces $l^p(\mathbb{Z})$, $\mathcal{L}^q(m)$ ou $L^p(H)$ pour $1 \leq p < 2$ et $2 < q \leq +\infty$ sont des variétés faiblement banachiques plates.

A.2.2 Connexion de Levi-Civita

Proposition A.2.6 (Existence et unicité de la connexion de Levi-Civita)

Étant donnée une variété banachique M munie d'une métrique **fortement** riemannienne g , il existe une unique connexion linéaire D^g sur le fibré tangent TM préservant g et à torsion nulle. On l'appelle la connexion de Levi-Civita de g .

□ **Preuve de la proposition A.2.6 :**

Une connexion D^g préserve la métrique g ssi pour tous champs de vecteurs X, Y, Z sur M :

$$X.g(Y, Z) = g(D_X^g Y, Z) + g(Y, D_X^g Z).$$

Si de plus la torsion est nulle, on a pour tous champs de vecteurs X, Y sur M :

$$[X, Y] = D_X^g Y - D_Y^g X.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} & X.g(Y, Z) - Y.g(Y, Z) - Z.g(X, Y) \\ &= g(D_X^g Y, Z) + g(Y, D_X^g Z) - g(D_Y^g X, Z) - g(Y, D_Y^g Z) - g(D_Z^g X, Y) \\ &\quad - g(X, D_Z^g Y) \\ &= g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) - g(X, [Y, Z]) - 2g(X, D_Z^g Y), \end{aligned}$$

et :

$$g(D_Z^g Y, X) = \frac{1}{2}(Y.g(X, Z) - X.g(Y, Z) + Z.g(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) - g(X, [Y, Z])).$$

Si g est une métrique fortement riemannienne, toute 1-forme sur M est donnée par le produit scalaire contre un champs de vecteurs et, pour toute fonction différentiable f sur M à valeurs réelles, on peut définir le gradient de f par :

$$g(\operatorname{grad}(f), X) = df(X) = X.f.$$

En particulier : $X.g(Y, Z) = g(\operatorname{grad}(g(Y, Z)), X)$. D'autre part, la dérivée de Lie de g a pour expression :

$$(\mathcal{L}_Y g)(X, Z) = Y.g(X, Z) - g([Y, X], Z) - g(X, [Y, Z]).$$

On en déduit que :

$$g(D_Z^g Y, X) = \frac{1}{2}(-g(\text{grad}(g(Y, Z)), X) - g([Y, Z], X) + (\mathcal{L}_Y g)(X, Z) + (\mathcal{L}_Z g)(X, Y)).$$

Finalement, en utilisant de nouveau l'isomorphisme de $T'M$ avec TM produit par g et noté \natural , on a :

$$D_Z^g Y = \frac{1}{2}(-\text{grad}g(Y, Z) - [Y, Z] + (i_Z \mathcal{L}_Y g)^\natural + (i_Y \mathcal{L}_Z g)^\natural).$$

L'expression de la dérivée covariante caractérisant de manière univale la connexion, on en déduit que la connexion de Levi-Civita existe et est unique. \square

Remarque A.2.7 Il est à noter que la connexion de Levi-Civita n'existe pas généralement dans le cas faiblement riemannien, en particulier sur les variétés banachiques modélées sur un espace de Banach non isomorphe à son dual.

A.2.3 Géodésiques

Définition A.2.8 Soit M une variété banachique munie d'une métrique (faiblement) riemannienne g , et γ une courbe différentiable sur M définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . La longueur de γ est définie par :

$$L(\gamma) := \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Proposition A.2.9 Une variété banachique connexe par arcs munie d'une métrique (faiblement) riemannienne est un espace métrique pour la distance définie par :

$$\forall p, q \in M, d(p, q) = \inf_{\gamma \in \mathcal{C}} L(\gamma),$$

où \mathcal{C} désigne l'ensemble des courbes continue de classe \mathcal{C}^1 par morceaux de M joignant les points p et q . En outre la topologie définie par la distance d est la topologie de M .

Définition A.2.10 On dit qu'une courbe γ minimise la longueur entre p et q si $L(\gamma) = d(p, q)$. On appelle géodésique toute courbe $\mathcal{C}^\infty \gamma : I \rightarrow M$ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} telle que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$ et telle que γ minimise localement la longueur.

Remarque A.2.11 Pour toute courbe γ définie sur un segment $I := [a, b]$ de \mathbb{R} telle que $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ pour $t \in I$, il existe un reparamétrage $\phi : I \rightarrow I$ tel que $C := \gamma \circ \phi$ vérifie $\|\dot{C}(t)\| = cst$. En effet, en notant L_γ l'application qui à $t \in I$ associe la longueur de la courbe $\gamma|_{[a, t]}$, la reparamétrisation $\phi = L_\gamma^{-1}$ convient.

Définition A.2.12 On dira qu'une courbe γ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est paramétrée par la longueur si $\|\dot{\gamma}(t)\| = cst$ pour tout $t \in I$.

Remarque A.2.13 Soit H un espace de Hilbert et γ une géodésique paramétrée par la longueur définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . Alors :

$$\ddot{\gamma}(t) = 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

En effet, soit $\beta(u, t) :]-\varepsilon, \varepsilon[\times I \rightarrow H$ une variation de la courbe γ i.e une application \mathcal{C}^∞ telle que $\beta(0, t) = \gamma(t)$, $\forall t \in I$. La courbe γ minimisant la longueur $L_\gamma([t, t']) = \int_t^{t'} \langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle^{\frac{1}{2}} ds$ entre t et t' , on a :

$$\delta L_\gamma([t, t']) = \frac{1}{2} \int_t^{t'} \frac{\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \beta \right) (0, s), \dot{\gamma}(s) \rangle}{\langle \dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle^{\frac{1}{2}}} ds = 0.$$

Ceci étant vérifié pour tout segment $[t, t'] \subset I$, on en déduit que pour tout $s \in I$ on a :

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \beta \right) (0, s), \dot{\gamma}(s) \right\rangle = 0.$$

En particulier pour toute variation β vérifiant $\langle \dot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial u} \beta(0, s) \rangle = 0 \forall s \in I$, on a :

$$\langle \ddot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial u} \beta(0, s) \rangle = - \langle \dot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial u} \beta(0, s) \rangle = 0 \text{ pour tout } s \in I.$$

De plus, γ étant paramétrée par la longueur, on a :

$$\langle \ddot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s) \rangle = 0 \text{ pour tout } s \in I.$$

Soit $\{e_i, i \in \mathbb{N}\}$ une base hilbertienne de H telle que $e_0 = \dot{\gamma}(t_0)$ pour $t_0 \in I$. Par transport parallèle le long de γ on définit une famille de bases hilbertiennes $\{e_i(s), i \in \mathbb{N}^*\}$ de $\dot{\gamma}(s)^\perp$ telles que $e_i(t_0) = e_i$. En outre chaque courbe $s \mapsto e_i(s)$ fournit une variation de γ par :

$$\beta_i(u, s) = \gamma(s) + u e_i(s)$$

vérifiant pour $i \neq 0$: $\langle \dot{\gamma}(s), \frac{\partial}{\partial u} \beta(s) \rangle = 0 \forall s \in I$, d'où on déduit : $\langle \ddot{\gamma}(s), e_i(s) \rangle = 0 \forall s \in I$. Puisque la famille $\{e_i(s), i \in \mathbb{N}^*\} \cup \dot{\gamma}(s)$ est une base hilbertienne de H pour tout $s \in I$, on a bien : $\ddot{\gamma}(s) = 0 \forall s \in I$.

Proposition A.2.14 *Si M est une variété fortement riemannienne, une courbe γ définie sur un intervalle I de \mathbb{R} est une géodésique si et seulement si :*

$$D_{\dot{\gamma}(t)}^g \dot{\gamma}(t) = 0 \text{ pour tout } t \in I.$$

A.3 Variétés banachiques symplectiques

A.3.1 Définitions et exemples

Définition A.3.1 Une 2-forme alternée ω sur une variété banachique M est une forme faiblement symplectique si :

- ω est fermée : $d\omega = 0$
- ω est non dégénérée, i.e. $\forall x \in M$, le noyau de ω_x défini par :

$$\text{Ker } \omega_x = \{X \in T_x M, \omega_x(X, Y) = 0, \forall Y \in T_x M\}$$

est nul.

La forme ω est fortement symplectique si de plus l'injection :

$$\begin{array}{ccc} \varphi_x : & T_x M & \rightarrow & T'_x M \\ & X & \mapsto & i_X \omega \end{array}$$

est un isomorphisme.

Définition A.3.2 Soit B un espace de Banach, ω une forme bilinéaire continue alternée sur B , et P un sous-espace vectoriel de B . On appelle orthogonal de P pour ω et on note $P^{\perp\omega}$ le sous-espace vectoriel fermé :

$$P^{\perp\omega} = \{X \in B \mid \omega(X, Y) = 0, \forall Y \in P\}$$

Remarque A.3.3 Si ω est une forme bilinéaire continue sur B telle que $\text{Ker } \omega = \{0\}$, alors pour tous sous-espaces vectoriels P et Q de B , on a :

$$\begin{aligned} P^{\perp\omega} &= \bar{P}^{\perp\omega} \\ P \subset Q &\Rightarrow Q^{\perp\omega} \subset P^{\perp\omega} \\ \bar{P} &\subset (P^{\perp\omega})^{\perp\omega} \end{aligned}$$

Si ω ne réalise pas d'isomorphisme entre B et son dual alors en général $P \neq (P^{\perp\omega})^{\perp\omega}$.

Définition A.3.4 Soit P un sous-espace vectoriel d'un espace de Banach B muni d'une forme bilinéaire alternée continue. On dit que P est isotrope si $\omega|_P$ est dégénérée, i.e. si $P \cap P^{\perp\omega} \neq \{0\}$. On dit que P est totalement isotrope si $P \subset P^{\perp\omega}$.

Exemple 15 1. Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} muni d'une base hilbertienne $\{e_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. La 2-forme bilinéaire alternée ω définie par :

$$\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}, \quad \omega(e_i, e_j) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0$$

est une forme fortement symplectique sur H .

2. Soit H un espace de Hilbert sur \mathbb{C} et $H_{\mathbb{R}}$ l'espace de Hilbert sur \mathbb{R} sous-jacent muni d'une base $\mathcal{B} = \{e_i, f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ avec $f_i = \sqrt{-1}e_i$. On notera $B(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ l'espace des applications \mathbb{R} -linéaires de $H_{\mathbb{R}}$ dans lui-même. L'application J dont l'expression dans la base \mathcal{B} est :

$$J = \begin{pmatrix} O & -Id \\ Id & 0 \end{pmatrix} \in B(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$$

définit une forme fortement symplectique sur $L^2(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ par :

$$\omega_{\mathbb{R}}(A, B) = \text{Tr}(A^T J B),$$

où A^T désigne la transposée de A . Le sous-espace vectoriel

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in L^2(H_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \right\}$$

est totalement isotrope pour $\omega_{\mathbb{R}}$, et $\omega_{\mathbb{R}}$ se restreint en une forme fortement symplectique sur le sous-espace vectoriel fermé $L^2(H, \mathbb{C})$ (resp. $L^2(H, \bar{\mathbb{C}})$) des formes \mathbb{C} -linéaires (resp. \mathbb{C} -antilinéaires) d'expression :

$$\forall C, D \in L^2(H, \mathbb{C}) (\text{resp. } L^2(H, \bar{\mathbb{C}})),$$

$$\omega_{\mathbb{C}}(C, D) = -2\Im \text{Tr } C^* D.$$

3. Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni de la 2-forme : $\omega((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = -\text{Im} \sum_{i \in \mathbb{Z}} x_i^* y_i$ est une variété faiblement symplectique, non fortement symplectique.
4. Pour tout $2 < q \leq +\infty$ et tout espace muni d'une mesure m de masse finie, l'espace de Banach $\mathcal{L}^q(m)$ des fonctions mesurables à valeurs complexes telles que $\|f\|_q = (\int \|f\|^q dm)^{\frac{1}{q}}$ est finie est une variété faiblement symplectique, non fortement symplectique pour la 2-forme définie par :

$$\omega(f, h) = -\Im \int \bar{f} g dm.$$

5. Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $L^p(H)$ des opérateurs sur un espace de Hilbert complexe H bornés pour la norme $\|\cdot\|_p$ est une variété faiblement symplectique non fortement symplectique pour la 2-forme définie par :

$$\omega(A, B) = -\Im \text{Tr} A^* B.$$

A.3.2 La structure symplectique canonique d'un cotangent

Proposition A.3.5 Soit M une variété banachique et $T'M$ le fibré cotangent dont la fibre en un point $x \in M$ est le dual **continu** de l'espace tangent en x . Alors $T'M$ est une variété banachique naturellement munie d'une forme faiblement symplectique, appelée 2-forme de Liouville.

□ **Preuve de la proposition A.3.5 :**

• La variété banachique $T'M$ est naturellement munie d'une 1-forme, la 1-forme de Liouville θ , définie pour tout (x, ξ) de $T'M$ et tout vecteur tangent Z à $T'M$ en (x, ξ) par :

$$\theta_{(x, \xi)}(Z) := \xi(\pi_*(Z)),$$

où π est la projection naturelle de $T'M$ sur M .

• La 2-forme de Liouville Ω est, par définition, la différentielle de θ . C'est donc une 2-forme alternée fermée.

• Pour montrer que Ω est non-dégénérée, il suffit de raisonner dans une carte locale, ce qui permet de se ramener au cas où M est un espace de Banach. Dans ce cas, l'expression de la 1-forme de Liouville est la suivante :

$$\forall (x, \xi) \in T'M, \forall (Z, \eta) \in T_x M \oplus T'_x M,$$

$$\theta_{(x, \xi)}(Z, \eta) = \xi(Z) = \xi(\pi_*(Z, \eta)).$$

On en déduit l'expression de la 2-forme Ω suivante :

$$\forall (x, \xi) \in T'M, \forall (Z_1, \eta_1), (Z_2, \eta_2) \in T_{(x, \xi)}(T'M) = T_x M \oplus T'_x M,$$

$$\begin{aligned} \Omega_{(x, \xi)}((Z_1, \eta_1), (Z_2, \eta_2)) &= d\theta_{(x, \xi)}((Z_1, \eta_1), (Z_2, \eta_2)) \\ &= (Z_1, \eta_1) \cdot \xi(Z_2) - (Z_2, \eta_2) \cdot \xi(Z_1) - \xi([Z_1, Z_2]) \\ &= \eta_1(Z_2) + \xi(Z_1 \cdot Z_2) - \eta_2(Z_1) - \xi(Z_2 \cdot Z_1) \\ &\quad - \xi([Z_1, Z_2]) \\ &= \eta_1(Z_2) - \eta_2(Z_1). \end{aligned}$$

Soit $(x, \xi) \in T'M$ et (Z_1, η_1) un élément du noyau de $\Omega_{(x, \xi)}$. Pour tout $(Z, \xi) \in T_x M \oplus T'_x M$, on a :

$$\eta_1(Z) - \xi(Z_1) = 0,$$

en particulier pour tout $Z \in T_x M$, on a $\eta_1(Z) = 0$ donc $\eta_1 = 0$, et pour tout $\eta \in T'_x M$ on a $\eta(Z_1) = 0$ ce qui implique que $Z_1 = 0$ par l'injection de $T_x M$ dans son bidual. Ainsi Ω est non dégénérée. \square

Remarque A.3.6 Si M est une variété banachique modélisée sur un espace de Banach B réflexif, alors la forme symplectique de Liouville de $T'M$ est fortement symplectique. En effet, pour $(x, \xi) \in T'M$, considérons l'injection :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_{(x, \xi)} : T_{(x, \xi)} T'M = T_x M \oplus T'_x M &\longrightarrow T'_{(x, \xi)}(T'M) = T'_x M \oplus T''_x M \\ (Z_1, \eta_1) &\longmapsto ((Z, \eta) \mapsto \eta_1(Z) - \eta(Z_1)) \end{aligned}$$

Si $B'' = B$, cette application est surjective car pour tout $(\eta_1, \phi) \in T'_x M \oplus T''_x M$, il existe $Z_1 \in T_x M$ tel que ϕ soit l'évaluation en Z_1 et ainsi $\forall (Z, \eta) \in T_x M \oplus T'_x M$,

$$(\eta_1, \phi)(Z, \eta) = \eta_1(Z) + \phi(\eta) = \eta_1(Z) - \eta(-Z_1) = \tilde{\Omega}_{(x, \xi)}(-Z_1, \eta_1)(Z, \eta).$$

Par conséquent $\tilde{\Omega}$ est une bijection continue de l'espace de Banach $T_{(x, \xi)}(T'M)$ dans son dual et est donc bicontinue.

A.3.3 La structure symplectique canonique d'une orbite coadjointe

Proposition A.3.7 Soit G un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} et $\theta_\xi \subset \mathfrak{g}'$ l'orbite coadjointe d'un élément $\xi \in \mathfrak{g}'$. Si l'algèbre de Lie du stabilisateur de ξ est fermée dans \mathfrak{g} et possède un supplémentaire topologique, alors θ_ξ possède une structure naturelle de variété banachique faiblement symplectique, dont la forme symplectique est appelée forme de Kirillov-Kostant-Souriau.

\square **Preuve de la proposition A.3.7 :**
 . Il vient :

$$\begin{aligned} g.\xi \circ \text{ada}(\mathfrak{b}) &= g.\xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = \xi(g^{-1}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]g) \\ &= \xi([g^{-1}\mathfrak{a}g, g^{-1}\mathfrak{b}g]) = \xi \circ \text{ad}(g^{-1}\mathfrak{a}g)(g^{-1}\mathfrak{b}g). \end{aligned}$$

Ainsi on a : $g.\xi \circ \text{ada} = \xi \circ \text{ad}g^{-1}\mathfrak{a}g \circ \text{Ad}(g^{-1})$ et :

$$\begin{aligned} T_{g.\xi}\theta_\xi &:= \{g.\xi \circ \text{ada}, \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}\} \\ &= \{\xi \circ \text{ad}\mathfrak{c} \circ \text{Ad}g^{-1}, \mathfrak{c} \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

On en déduit que la fermeture et l'existence d'un supplémentaire fermé de $T_\xi\theta_\xi$ dans \mathfrak{g}' implique la fermeture et l'existence d'un supplémentaire fermé de $T_{g.\xi}\theta_\xi$ dans \mathfrak{g}' , et permet de définir sur θ_ξ une structure de sous-variété banachique de \mathfrak{g}' .

. L'application $\Omega_{g.\xi}$ qui à $\eta_1 = g.\xi \circ \text{ada}$ et $\eta_2 = g.\xi \circ \text{adb}$ de $T_{g.\xi}\theta_\xi$ associe :

$$\Omega(\eta_1, \eta_2) := g.\xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]),$$

est bien définie sur $T_{g,\xi}\theta_\xi$. En effet, si \mathbf{a}' et \mathbf{b}' sont tels que $g.\xi \circ \text{ada} = g.\xi \circ \text{ada}'$ et $g.\xi \circ \text{adb} = g.\xi \circ \text{adb}'$, alors $g.\xi \circ \text{ad}(\mathbf{a} - \mathbf{a}') = 0$, $g.\xi \circ \text{ad}(\mathbf{b} - \mathbf{b}') = 0$ et :

$$\begin{aligned} g.\xi([\mathbf{a}', \mathbf{b}']) &= g.\xi([\mathbf{a} + (\mathbf{a}' - \mathbf{a}), \mathbf{b} + (\mathbf{b}' - \mathbf{b})]) \\ &= g.\xi([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) + g.\xi \circ \text{ad}(\mathbf{a}' - \mathbf{a})(\mathbf{b}) \\ &\quad - g.\xi \circ \text{ad}(\mathbf{b}' - \mathbf{b})(\mathbf{a}) + g.\xi \circ \text{ad}(\mathbf{a}' - \mathbf{a})(\mathbf{b}' - \mathbf{b}) \\ &= g.\xi([\mathbf{a}, \mathbf{b}]). \end{aligned}$$

De plus Ω est alternée.

• Ω est fermée car si $\eta_i = g.\xi \circ \text{ada}_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$, sont trois vecteurs tangents à l'orbite en $g.\xi$, on a :

$$\begin{aligned} d\Omega(\eta_1, \eta_2, \eta_3) &= \eta_1.\Omega(\eta_2, \eta_3) - \eta_2.\Omega(\eta_1, \eta_3) + \eta_3.\Omega(\eta_1, \eta_2) \\ &\quad - \Omega([\eta_1, \eta_2], \eta_3) + \Omega([\eta_1, \eta_3], \eta_2) - \Omega([\eta_2, \eta_3], \eta_1) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \eta_1.\Omega(\eta_2, \eta_3) &= \eta_1.g\xi([\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) \\ &= \text{ad}_{\mathbf{a}_1}^*(g\xi)([\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = g\xi([\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]]), \end{aligned}$$

et : $[\eta_1, \eta_2] = g\xi([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2])$. Ainsi :

$$d\Omega(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 2g.\xi([\mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]] - [\mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3]] + [\mathbf{a}_3, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]]),$$

qui est nul d'après l'identité de Jacobi. Ainsi $d\Omega = 0$.

• Ω est non dégénérée car pour $\eta_1 = g.\xi \circ \text{ada}$, l'égalité $\Omega(\eta_1, \eta) = 0$ pour tout $\eta \in T_{g,\xi}\theta_\xi$ équivaut à : $g.\xi([a, b]) = 0$ pour tout $\mathbf{b} \in \mathfrak{g}$ c'est-à-dire $\eta_1 = 0$. Ainsi Ω définit une forme faiblement symplectique sur θ_ξ . \square

A.3.4 Exemples de $Gr^{(p)}$ et Gr_{res}

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $Gr^{(p)}$ la grassmannienne des p -plans d'un espace de Hilbert H . Pour $p = 1$, $Gr^{(1)}$ désigne l'espace projectif de H .

Proposition A.3.8 Soit P_0 un sous-espace vectoriel de dimension p de référence et P_0^\perp son orthogonal dans H . Soit ε l'élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}(H)$ du groupe unitaire de H défini par :

$$\varepsilon := i\text{pr}_{P_0},$$

où pr_{P_0} désigne la projection orthogonale sur P_0 . Alors $Gr^{(p)}$ s'identifie à l'orbite adjointe de ε dans $\mathfrak{u}(H)$ et possède une structure naturelle de variété symplectique.

\square **Preuve de la proposition A.3.8 :**

Soit :

$$\begin{aligned} \phi : Gr^{(p)} &\rightarrow \mathfrak{u}(H) \\ P &\mapsto i\text{pr}_P. \end{aligned}$$

ϕ est injective et $U(H)$ -équivariante pour l'action naturelle de $U(H)$ sur $Gr^{(p)}$ et l'action adjointe de $U(H)$ sur $\mathfrak{u}(H)$:

$$\begin{aligned} \phi(g.P) &= i\text{pr}_{g.P} \\ &= ig\text{pr}_P g^{-1}. \end{aligned}$$

L'image de $d\phi$ s'identifie à $\mathfrak{u}(H)/\text{Stab}\varepsilon = \mathfrak{u}(U)/(\mathfrak{u}(P_0) \times \mathfrak{u}(P_0^\perp)) = T_\varepsilon\theta_\varepsilon$ et ϕ définit un difféomorphisme $\tilde{\phi}$ de $Gr^{(p)}$ sur l'orbite θ_ε de ε dans $\mathfrak{u}(H)$ dont l'application tangente en $P = g.P_0 \in Gr^{(p)}$ est donnée par :

$$\begin{aligned} d\tilde{\phi}_P : T_P Gr^{(p)} = L(P, P^\perp) &\longrightarrow T_{g\varepsilon g^{-1}\theta_\varepsilon} \\ &\begin{matrix} P & P^\perp \\ A & \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & -A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} P \\ P^\perp \end{matrix} \end{matrix} \end{aligned}$$

L'espace P_0 étant de dimension finie, l'application :

$$\begin{aligned} f_\varepsilon : \mathfrak{u}(H) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\mapsto \text{Tr } \varepsilon A \end{aligned}$$

est bien définie et est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{u}(H)$. La trace identifie l'orbite adjointe de ε avec l'orbite coadjointe de $\text{Tr } \varepsilon$ et le pull-back par $\tilde{\phi}$ de $(-\frac{1}{2}$ fois) la forme de Kirillov- Kostant- Souriau est la 2-forme fortement symplectique $\Omega_{Gr^{(p)}}$ dont l'expression en P est : $\forall A, B \in L(P, P^\perp)$,

$$\begin{aligned} \Omega_{Gr^{(p)}, P}(A, B) &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= -\Im \text{Tr } A^* B. \end{aligned}$$

□

Remarque A.3.9 Pour $p = 1$, on appelle forme symplectique de Fubini-Study la forme fortement symplectique sur l'espace projectif d'un espace de Hilbert ainsi obtenue.

Proposition A.3.10 *La grassmannienne restreinte relative à la décomposition d'un espace de Hilbert H en somme directe orthogonale de deux sous-espaces vectoriels fermés H_+ et H_- de dimension infinie, définie par :*

$$Gr_2(H) = \{P \in Gr(H) \mid \begin{aligned} p_+ &: P \rightarrow H_+ \in \text{Fred}(H_+, H_-), \\ p_- &: P \rightarrow H_- \in L^2(H_+, H_-) \end{aligned}\},$$

est une variété fortement symplectique pour la 2-forme définie par :

$$\begin{aligned} \forall P \in Gr_2(H), \forall A, B \in L^2(P, P^\perp), \\ \omega_P(A, B) := -\Im \text{Tr } A^* B. \end{aligned}$$

□ **Preuve de la proposition A.3.10 :**

Le seul point délicat est de montrer que ω est fermée. Pour cela rappelons que $Gr_2(H)$ s'injecte dans l'espace projectif $\mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$ par l'injection de Plücker, où $\mathcal{S} = \{S \subset \mathbb{Z}, \sharp(S - \mathbb{N}) < \infty, \sharp(\mathbb{N} - S) < \infty\}$. De plus, la forme symplectique ω est le pull-back de la forme symplectique de Fubini-Study sur $\mathbb{P}(l^2(\mathcal{S}))$. Elle est donc fermée. □

A.3.5 Le Théorème de Darboux

Étant donnée une variété banachique (M, ω) faiblement symplectique, on dira que la structure symplectique ω est intégrable si pour tout $x \in M$ il existe

une carte locale (\mathcal{U}, Φ, E) en x dans laquelle la forme symplectique ω de M s'exprime comme une forme symplectique constante sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{U})$ de l'espace de Banach modèle E . Dans le cas de la dimension finie, le théorème de Darboux affirme que la fermeture de ω implique son intégrabilité. Ce théorème ne se généralise pas aux variétés banachiques faiblement symplectiques mais reste valable dans le cas d'une variété fortement symplectique :

Théorème A.3.11 (Darboux) *Soit ω une forme fortement symplectique sur une variété banachique M . La condition $d\omega = 0$ est équivalente à l'existence en tout point $x \in M$ d'une carte locale (\mathcal{U}, Φ, E) dans laquelle ω s'exprime comme une forme symplectique constante sur l'ouvert $\Phi(\mathcal{U}) \subset E$.*

■ **Preuve du théorème A.3.11 :**

Le problème étant local, il suffit de supposer que M est un ouvert d'un espace de Banach E . Soit \mathcal{V} un voisinage ouvert de 0 dans E et ω_0 la valeur de ω en 0. Il s'agit de trouver un difféomorphisme de \mathcal{V} , Φ , tel que $\Phi^*\omega = \omega_0$. Pour tout $x \in \mathcal{V}$, on considère dans l'espace vectoriel des formes bilinéaires alternées le segment joignant ω_x à ω_0 , et on note : $\omega_x(t) = \omega_0 + t(\omega_x - \omega_0)$. Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in M$, $\omega_x(t)$ est fermée. D'autrepart, $\text{Isom}(E, E')$ étant un ouvert de l'espace de Banach $B(E, E')$, il existe une boule $B(\omega_0, r)$ centrée en ω_0 et de rayon r entièrement contenue dans $\text{Isom}(E, E')$. Puisque l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : E &\longrightarrow B(E, E') \\ x &\longmapsto (Z \mapsto i_Z \omega_x) \end{aligned}$$

envoie 0 sur ω_0 et est continue, il existe une boule $B(0, \delta)$ centrée en $0 \in E$ telle que $\Psi(B(0, \delta)) \subset B(\omega_0, r)$. Pour tout $x \in B(0, \delta)$, le segment $[\omega_0, \omega_x]$ est contenu dans $B(\omega_0, r)$ et est donc formé de formes non dégénérées. Une forme fermée sur $B(0, \delta)$ étant exacte, il existe une 1-forme σ sur $B(0, \delta)$ telle que :

$$d\sigma = \omega - \omega_0.$$

Puisque pour $x \in B(0, \delta)$, $\omega_x(t) \in \text{Isom}(E, E')$ quel que soit $t \in [0, 1]$, il existe un champ de vecteurs dépendant du temps X_t sur $B(0, \delta)$ tel que :

$$i_{X_t} \omega_t = -\sigma.$$

Soit ϕ_t le flot du champ de vecteurs X_t partant de $\phi_0 = \text{Id}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (\phi_t^* \omega_t) &= \phi_{t_0}^* (\mathcal{L}_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \omega_t) \\ &= \phi_{t_0}^* (di_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + i_{X_{t_0}} \omega_{t_0} + \omega - \omega_0) \\ &= \phi_{t_0}^* (-d\sigma + d\sigma) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi l'application : $t \mapsto \phi_t^* \omega_t$ est constante. Comme $\phi_0 = \text{Id}$, on a : $\phi_0^* \omega_1 = \omega_1$, $\phi_0^* \omega_0 = \omega_0$ et $\phi_1^* \omega_1 = \phi_0^* \omega_0 = \omega_0$, ainsi ϕ est un difféomorphisme qui convient.

■

A.3.6 Application moment

Définition A.3.12 Soit (M, ω) une variété banachique faiblement symplectique et G un groupe de Lie banachique d'algèbre de Lie \mathfrak{g} agissant sur M par

symplectomorphismes, i.e. tel que $\forall g \in G, g_*\omega = \omega$. Une application $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}'$ est une application moment pour l'action de G si :

$$\forall \mathfrak{a} \in \mathfrak{g}, \forall x \in M, \forall X \in T_x M,$$

$$\langle d\mu_x(X), \mathfrak{a} \rangle = i_{X^\mathfrak{a}}\omega(X),$$

où \langle, \rangle est le produit de dualité entre \mathfrak{g} et \mathfrak{g}' , et $X^\mathfrak{a}$ est le champ de vecteurs engendré par l'action infinitésimale de l'élément \mathfrak{a} de l'algèbre de Lie de G .

Proposition A.3.13 *Soit θ une orbite coadjointe d'un groupe de Lie banachique G . Alors l'injection canonique μ de θ dans \mathfrak{g}' est une application moment pour l'action coadjointe de G sur θ .*

□ **Preuve de la proposition A.3.13 :**

On a pour tout élément ξ de l'orbite θ , pour tout $\eta = -\xi \circ \text{adb}$ de $T_\xi\theta$, et tout \mathfrak{a} dans \mathfrak{g} :

$$\begin{aligned} \langle d\mu(\eta), \mathfrak{a} \rangle &= \langle \eta, \mathfrak{a} \rangle = -\xi \circ \text{adb}(\mathfrak{a}) \\ &= \xi([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = \Omega(\xi^\mathfrak{a}, \eta) = i_{\xi^\mathfrak{a}}\Omega(\eta). \end{aligned}$$

A.4 Variétés banachiques presque-complexes

A.4.1 Définitions

Définition A.4.1 Une structure presque-complexe sur une variété banachique réelle M est la donnée d'une section \mathcal{C}^∞ J du fibré $\text{End}(TM)$ des endomorphismes de l'espace tangent telle que $\forall x \in M, J_x^2 = -1$.

Définition A.4.2 Une structure presque-complexe J sur une variété banachique M est dite intégrable si en tout point $x \in M$, il existe une carte locale (\mathcal{U}, ϕ, E) où \mathcal{U} est un voisinage ouvert de x , E un espace de Banach complexe et ϕ un difféomorphisme de \mathcal{U} sur un ouvert de E vérifiant :

$$d\phi \circ J = id\phi.$$

Définition A.4.3 Une structure presque-complexe J sur une variété banachique M est dite formellement intégrable si le tenseur de Nijenhuis défini par

$$N_x(X, Y) = \frac{1}{4}([X, Y] + J[JX, Y] + J[X, JY] - [JX, JY])$$

pour tout x appartenant à M et tous X, Y appartenant à $T_x M$, est nul.

A.4.2 Le Théorème de Newlander-Nirenberg

Dans la cas d'une structure presque-complexe analytique réelle sur une variété analytique réelle, le théorème de Newlander-Nirenberg ([NN]) est équivalent au théorème de Frobenius, est reste donc valable dans le cadre banachique. Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de la démonstration, que le lecteur retrouvera dans l'article de J-P. Penot ([Pen]) et nous renvoyons le lecteur à l'article de D. Beltita ([Bel]) pour les détails.

Remarquons également qu'un exemple de structure presque-complexe formellement intégrable sur une variété banachique réelle qui ne possède pas d'ouvert

biholomorphe à un ouvert d'un espace de Banach complexe est donné par I. Patyi dans [Pat], ce qui implique que le théorème de Newlander-Nirenberg n'est pas vrai en toute généralité dans le cadre banachique, et constitue une différence importante avec le cas de la dimension finie.

Théorème A.4.4 (Newlander-Nirenberg) *Une structure presque-complexe analytique réelle J sur une variété banachique analytique réelle M est intégrable si et seulement si le tenseur de Nijenhuis est nul.*

■ **Preuve du théorème A.4.4 :**

Soit $J^{\mathbb{C}}$ l'extension \mathbb{C} -linéaire de J au fibré vectoriel complexe $T^{\mathbb{C}}M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, et $T^{(1,0)}M$ (resp. $T^{(0,1)}M$) le sous-fibré de $T^{\mathbb{C}}M$ constitué des espaces propres de $J^{\mathbb{C}}$ relativement à la valeur propre $+i$ (resp. $-i$). On a : $T^{\mathbb{C}}M = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M$ en somme directe topologique, les projections pr_1 et pr_2 sur le premier et deuxième facteur étant données par :

$$\begin{aligned} \text{pr}_1 : T^{\mathbb{C}}M &\rightarrow T^{(1,0)}M \\ X &\mapsto \frac{1}{2}(X - iJX) \\ \text{pr}_2 : T^{\mathbb{C}}M &\rightarrow T^{(0,1)}M \\ X &\mapsto \frac{1}{2}(X + iJX) \end{aligned}$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} N \equiv 0 &\Leftrightarrow [T^{(1,0)}M, T^{(1,0)}M] \subset T^{(1,0)}M \\ &\Leftrightarrow [T^{(0,1)}M, T^{(0,1)}M] \subset T^{(0,1)}M. \end{aligned}$$

Le problème étant local on peut supposer que M est un ouvert d'un espace de Banach E . Soit $x_0 \in M$ et $M^{\mathbb{C}}$ l'ouvert de l'espace de Hilbert complexifié $E^{\mathbb{C}}$ formé des éléments de la forme $x + iy$ avec $x, y \in M$. D'après le théorème de Frobenius, pour tout x dans un voisinage de x_0 de $M^{\mathbb{C}}$, il existe localement des sous-variétés $\mathcal{M}_x^{(1,0)}$ et $\mathcal{M}_x^{(0,1)}$ de $M^{\mathbb{C}}$ respectivement tangentes aux distributions $T^{(1,0)}M$ et $T^{(0,1)}M$. L'opérateur $J^{\mathbb{C}}$ laissant les distributions $T^{(1,0)}M$ et $T^{(0,1)}M$ invariantes, on en déduit qu'il existe un difféomorphisme $J^{\mathbb{C}}$ -équivariant envoyant un voisinage de x_0 dans $M^{\mathbb{C}}$ sur le produit d'un ouvert de $\mathcal{M}_{x_0}^{(1,0)}$ et d'un ouvert de $\mathcal{M}_{x_0}^{(0,1)}$. Puisque la projection pr_1 est un isomorphisme $J^{\mathbb{C}}$ -linéaire, on en déduit l'existence d'un difféomorphisme local $J^{\mathbb{C}}$ -équivariant de la variété réelle M sur un ouvert de la variété complexe $\mathcal{M}_{x_0}^{(1,0)}$.

A.4.3 Fonctions analytiques et holomorphes sur un espace de Banach

Définition A.4.5 Un polynôme homogène de degré q sur un espace de Banach E (réel ou complexe) à valeur dans un espace de Banach F est la restriction à la diagonale d'une fonction q -linéaire de E^q dans F .

Définition A.4.6 Une fonction f d'un ouvert de E dans F est analytique si pour tout x de E , il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de x et une série convergente de la forme :

$$\sum_{q=0}^{+\infty} P_q,$$

où les P_q sont des polynômes homogènes de degré q de E dans F , avec rayon de convergence $R > 0$ tels que pour tout y dans l'intersection de \mathcal{V} avec la boule de rayon R centrée en x , on a :

$$f(y) = \sum_{q=0}^{+\infty} P_q(y-x).$$

Dans ce cadre, la formule de Cauchy, le principe du maximum, le lemme de Schwarz et l'unicité du prolongement analytique sont valables. On trouvera dans le livre de T. Franzoni et E. Vesentini ([FV]) quelques détails sur cette théorie.

A.4.4 La connexion de Chern

Définition A.4.7 Soit (M, J) une variété banachique presque-complexe. L'opérateur J induit un opérateur de carré -1 sur les n -formes différentielles sur M , également noté J , et défini par :

$$\forall \phi \in \Gamma(M, \Lambda^n T^*M), \forall x \in M, \forall X_1, \dots, X_n \in T_x M,$$

$$(J\phi)_x(X_1, \dots, X_n) := (-1)^n \phi(JX_1, \dots, JX_n),$$

d'inverse :

$$(J^{-1}\phi)_x(X_1, \dots, X_n) = \phi(JX_1, \dots, JX_n),$$

ainsi qu'un opérateur différentiel d^c sur les formes différentielles sur M défini par :

$$d^c := J \circ d \circ J^{-1}.$$

Définition A.4.8 Soit C l'opérateur agissant sur les formes différentielles par :

$$\forall \phi \in \Lambda^n T^*M, \forall X_1, \dots, X_n \in \Gamma(TM),$$

$$C\phi(X_1, \dots, X_n) := \sum_{j=1}^n \phi(X_1, \dots, JX_j, \dots, X_n).$$

Une forme différentielle ϕ de degré n est dite de type (p, q) si $C\phi = (p - q)i\phi$. On note $\Lambda^{p,q}M$ l'ensemble des formes de type (p, q) . On a :

$$\Lambda^n T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \sum_{\substack{p+q=n \\ p \geq 0, q \geq 0}} \Lambda^{p,q}M.$$

En particulier, le fibré $T^*M \otimes \mathbb{C}$ se décompose en :

$$T^*M \otimes \mathbb{C} = \Lambda^{(1,0)}M \oplus \Lambda^{(0,1)}M,$$

où $\Lambda^{(1,0)}M$ (resp. $\Lambda^{(0,1)}M$) est le sous-fibré de $T^*M \otimes \mathbb{C}$ constitué des sous-espaces propres de J pour la valeur propre $-i$ (resp. $+i$).

Définition A.4.9 Soit M un ouvert d'un espace de Banach réel B muni d'un opérateur J de carré -1 , $M^{\mathbb{C}}$ l'ouvert de l'espace de Banach $B^{\mathbb{C}}$ obtenu à partir de B en étendant le corps des scalaires à \mathbb{C} , $J^{\mathbb{C}}$ l'extension \mathbb{C} -linéaire de J , et $x \in M$. En notant pr_1 (resp. pr_2) la projection de $T_x M^{\mathbb{C}}$ sur $T_x^{(1,0)} M$ (resp. $T_x^{(0,1)} M$) associant à un vecteur tangent X le vecteur $\frac{1}{2}(X - iJ^{\mathbb{C}}X)$ (resp. $\frac{1}{2}(X + iJ^{\mathbb{C}}X)$), on définit deux opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$ agissant sur les fonctions \mathcal{C}^∞ sur M à valeurs complexes par :

$$\begin{aligned}\partial f &= d^{\mathbb{C}} f \circ \text{pr}_1, \\ \bar{\partial} f &= d^{\mathbb{C}} f \circ \text{pr}_2,\end{aligned}$$

où $d^{\mathbb{C}} f$ est l'extension \mathbb{C} -linéaire de df . En particulier, on a :

$$\begin{aligned}d &= \partial + \bar{\partial}, \\ \partial \bar{\partial} &= \frac{1}{2} dd^{\mathbb{C}}, \\ \partial^2 &= \bar{\partial}^2 = 0, \\ \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial &= 0.\end{aligned}$$

Définition A.4.10 Une structure pré-holomorphe sur un fibré vectoriel complexe E au-dessus d'une variété complexe M est la donnée d'un opérateur différentiel $\bar{\partial}$ d'ordre 1 agissant sur les sections de E et à valeurs dans les sections de $\Lambda^{(1,0)} M \otimes_{\mathbb{C}} E$, i.e. tel que : $\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall f \in \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{C})$,

$$\bar{\partial}(f \cdot \sigma) = f \cdot \bar{\partial} \sigma + \bar{\partial} f \cdot \sigma,$$

On note $d^{\bar{\partial}}$ l'opérateur différentiel induit par $\bar{\partial}$ sur les formes différentielles :

$$d^{\bar{\partial}} : \Lambda^{p,q} M \rightarrow \Lambda^{p,q+1} M$$

Définition A.4.11 Une structure pré-holomorphe $\bar{\partial}$ est dite formellement intégrable si

$$d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} = 0.$$

Définition A.4.12 Un fibré vectoriel complexe sur une variété complexe M est dit holomorphe s'il existe un ensemble complet de trivialisations holomorphes.

Le théorème de Newlander-Nirenberg dans le cas analytique a pour conséquence le théorème suivant :

Théorème A.4.13 (Koszul-Malgrange) *Un fibré vectoriel complexe E sur une variété complexe M , muni d'une structure pré-holomorphe $\bar{\partial}$ et possédant un ensemble complet de trivialisations analytiques réelles, est un fibré holomorphe si et seulement si :*

$$d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} = 0.$$

Théorème A.4.14 *Soit E un fibré vectoriel complexe sur une variété complexe M muni d'un produit scalaire hermitien h réalisant pour tout $x \in M$ un isomorphisme \mathbb{C} -antilinéaire entre l'espace vectoriel complexe E_x et son dual E'_x , et $\bar{\partial}$ une structure pré-holomorphe sur E . Alors il existe une unique connexion ∇ sur le fibré E , appelée **connexion de Chern**, telle que :*

1. $\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^* M \otimes_{\mathbb{C}} E)$ est \mathbb{C} -linéaire,

2. ∇ préserve h ,

3. $\forall \sigma \in \Gamma(E), \forall X \in TM, \nabla_X^{0,1} \sigma := \frac{1}{2}(\nabla_X \sigma + i\nabla_{JX} \sigma) = \bar{\partial}_X \sigma$.

■ **Preuve du théorème A.4.14 :**

Soit $\tau : E \rightarrow E'$ l'isomorphisme \mathbb{C} -antilinéaire induit par h , et $\bar{\partial}^{E'}$ la structure pré-holomorphe sur E' induite par $\bar{\partial}$:

$$\forall s \in \Gamma(E'), \forall x \in \Gamma(E),$$

$$\bar{\partial}^{E'}(s)(x) = \bar{\partial}(s(x)) - s(\bar{\partial}x).$$

Alors la connexion définie par :

$$\nabla = \bar{\partial} + \tau^{-1} \circ \bar{\partial}^{E'} \circ \tau$$

convient. ■

Proposition A.4.15 *Si E est un fibré complexe de rang 1, muni d'une structure pré-holomorphe formellement intégrable $\bar{\partial}$ sur une variété complexe M et σ une section locale sans zéro vérifiant $\bar{\partial}\sigma = 0$, l'expression de la connexion de Chern est :*

$$\nabla_X \sigma = (\partial_X \log h(\sigma, \sigma)) \cdot \sigma,$$

pour tout X appartenant à TM , et pour toute section σ de E . La courbure de la connexion de Chern a pour expression :

$$R^\nabla = \partial \bar{\partial} \log h(\sigma, \sigma) = \frac{1}{2i} dd^c \log h(\sigma, \sigma).$$

□ **Preuve de la proposition A.4.15 :**

• Soit σ une section locale de E dans le noyau de $\bar{\partial}$ et ne s'annulant pas. Soit s la section duale du fibré E' définie par : $s(\sigma) = 1$. On a :

$$\bar{\partial}^{E'} s = \bar{\partial}(s(\sigma)) - s(\bar{\partial}\sigma) = 0.$$

L'application $\tau : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E')$ a pour expression :

$$\forall \sigma' \in \Gamma(E), \tau(\sigma') = h(\sigma', \sigma) \cdot s,$$

ainsi :

$$\bar{\partial}^{E'} \tau(\sigma) = \bar{\partial}^{E'} h(\sigma, \sigma) \cdot s = \bar{\partial} h(\sigma, \sigma) \cdot s,$$

et :

$$\nabla \sigma = \partial \sigma = \tau^{-1} \circ \bar{\partial}^{E'} \tau(\sigma) = \frac{1}{h(\sigma, \sigma)} \bar{\partial} h(\sigma, \sigma) \cdot \sigma = \partial \log h(\sigma, \sigma) \cdot \sigma.$$

• On a :

$$\begin{aligned} R^\nabla &= -d^\nabla \circ d^\nabla \\ &= -d^\partial \circ d^\partial - d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} - d^\partial \circ d^{\bar{\partial}} - d^{\bar{\partial}} \circ d^\partial. \end{aligned}$$

La structure pré-holomorphe étant formellement intégrable, on a :

$$d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} = 0,$$

ce qui implique :

$$d^\partial \circ d^\partial = \tau^{-1} \circ d^{\bar{\partial}} \circ d^{\bar{\partial}} \circ \tau = 0.$$

Ainsi la courbure R^∇ est de type $(1, 1)$, et pour toute section σ dans le noyau de $\bar{\partial}$ il vient :

$$\begin{aligned} R\sigma &= -d^\partial \circ d^{\bar{\partial}}\sigma - d^{\bar{\partial}} \circ d^\partial\sigma \\ &= -d^\partial(\bar{\partial}\sigma) - d^{\bar{\partial}}(\partial \log h(\sigma, \sigma) \cdot \sigma) \\ &= -\partial \bar{\partial} \log h(\sigma, \sigma) \cdot \sigma - \partial \log h(\sigma, \sigma) \cdot \bar{\partial}\sigma \\ &= -\bar{\partial} \partial \log h(\sigma, \sigma) \cdot \sigma \\ &= +\partial \bar{\partial} \log h(\sigma, \sigma) \cdot \sigma. \end{aligned}$$

□

A.5 Variétés banachiques kählériennes

A.5.1 Définitions et exemples

Définition A.5.1 Une variété banachique faiblement (resp. fortement) kählérienne M est une variété banachique réelle munie d'une métrique faiblement (resp. fortement) riemannienne g , d'une forme faiblement (resp. fortement) symplectique ω et d'une structure presque-complexe formellement intégrable J telles que : $\forall x \in M, \forall X, Y \in T_x M$,

$$\begin{aligned} \omega(X, Y) &= g(JX, Y), \\ g(JX, JY) &= g(X, Y). \end{aligned}$$

Proposition A.5.2 Soit (M, g, ω, J) une variété fortement kählérienne. Alors $D^g J = 0$ où D^g désigne la connexion de Levi-Civita.

□ **Preuve de la proposition A.5.2 :**

On a : $\forall x \in M, \forall X, Y, Z \in T_x M$,

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= g(D_X JY, Z) + g(JY, D_X Z) - g(D_Y JX, Z) \\ &\quad - g(JX, D_Y Z) + g(D_Z JX, Y) + g(JX, D_Z Y) \\ &\quad - g(J[X, Y], Z) + g(J[X, Z], Y) - g(J[Y, Z], X) \\ &= g((D_X J)Y, Z) + g(ID_X Y, Z) + g(JY, D_X Z) \\ &\quad - g((D_Y J)X, Z) - g(JD_Y X, Z) - g(JX, D_Y Z) \\ &\quad + g((D_Z J)X, Y) + g(JD_Z X, Y) + g(JX, D_Z Y) \\ &\quad - g(J[X, Y], Z) + g(J[X, Z], Y) - g(J[Y, Z], X) \\ &= g((D_X J)Y, Z) - g((D_Y J)X, Z) + g((D_Z J)X, Y). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} d\omega(X, JY, Z) &= g((D_X J)JY, Z) - g((D_{JY} J)X, Z) + g((D_Z J)X, JY) \\ d\omega(JX, Y, Z) &= g((D_{JX} J)Y, Z) - g((D_Y J)JX, Z) + g((D_Z J)JX, Y). \end{aligned}$$

D'autrepart :

$$\begin{aligned} N(X, Y) &= [X, Y] + J[X, JY] + J[JX, Y] - [JX, JY] \\ &= D_X Y - D_Y X + JD_X JY - JD_{JY} X + JD_{JX} Y \\ &\quad - JD_Y JX - D_{JX} JY + D_{JY} JX \\ &= -(D_X J)(JY) + (D_Y J)(JX) + (D_{JY} J)(X) - (D_{JX} J)(Y), \end{aligned}$$

d'où :

$$g(N(X, Y), Z) = -g((D_X J)(JY), Z) + g((D_Y J)(JX), Z) \\ + g((D_{JY} J)X, Z) - g((D_{JX} J)Y, Z).$$

Ainsi :

$$d\omega(X, JY, Z) + d\omega(JX, Y, Z) + g(N(X, Y), Z) \\ = g((D_Z J)X, JY) + g((D_Z J)(JX), Y) \\ = g(D_Z(JX), JY) - g(JD_Z X, JY) - g(D_Z X, Y) - g(JD_Z(JX), Y) \\ = 2g(D_Z(JX), JY) - 2g(JD_Z X, JY) \\ = 2g((D_Z J)X, JY),$$

et :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega = 0 \\ N \equiv 0 \end{array} \right\} \Rightarrow DJ \equiv 0.$$

□

Proposition A.5.3 Soit (M, g) une variété fortement riemannienne et J une section de $\text{End}(TM)$ telle que :

- $g(JX, JY) = g(X, Y)$
- $J^2 = -1$
- $D^g J \equiv 0$.

Alors la 2-forme ω définie par $\omega(.,.) := g(J.,.)$ est une forme fortement symplectique sur M et (M, g, ω, J) est une variété kählérienne.

□ **Preuve de la proposition A.5.3 :**

En effet :

$$d\omega(X, Y, Z) = X.g(JY, Z) - Y.g(JX, Z) + Z.g(JX, Y) \\ - g(J[X, Y], Z) + g(J[X, Z], Y) - g(J[Y, Z], X) \\ = g(D_X JY, Z) + g(JY, D_X Z) - g(D_Y JX, Z) \\ - g(JX, D_X Z) + g(D_Z JX, Y) + g(JX, D_Z Y) \\ - g(J[X, Y], Z) + g(J[X, Z], Y) - g(J[Y, Z], X) \\ = g(JY, D_X Z) - g(JX, D_Y Z) + g(D_X JZ, Y) \\ + g(JX, D_Z Y) - g(D_Y JZ, X) + g(D - Z)JY, X \\ = g(JY, D_X Z) - g(JX, D_Y Z) + g(JD_X Z, Y) \\ g(JX, D_Z Y) - g(JD_Y Z, X) + g(JD_Z Y, X) = 0,$$

et :

$$N(X, Y) = -(D_X J)(JY) + (D_Y J)(JX) + (D_{JY} J)(X) - (D_{JX} J)(Y) = 0.$$

□

Exemple 16 1. Soit H un espace de Hilbert complexe, \langle, \rangle le produit scalaire hermitien. H muni de $g := \Re\langle, \rangle$ et $\omega := -\Im\langle, \rangle$ et de la structure complexe i est une variété fortement kählérienne.

2. Pour tout $1 \leq p < 2$, l'espace de Banach $l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ muni des structures g, ω , et J définies par : $\forall (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$,

$$g((x_j)_{j \in \mathbb{N}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N}}) := \Re \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{x}_j y_j \\ \omega((x_j)_{j \in \mathbb{N}}, (y_j)_{j \in \mathbb{N}}) := -\Im \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{x}_j y_j \\ J(x_j)_{j \in \mathbb{N}} := (ix_j)_{j \in \mathbb{N}}$$

est une variété faiblement kählérienne, non fortement kählérienne.

3. Pour tout $2 < q \leq +\infty$ et tout espace muni d'une mesure de masse finie m , l'espace de Banach $\mathcal{L}^q(m)$ muni des structures g, ω , et J définies par : $\forall f, g \in \mathcal{L}^q(m)$,

$$\begin{aligned} g(f, g) &:= \Re \int \bar{f} g dm \\ \omega(f, g) &:= -\Im \int \bar{f} g dm \\ Jf &= if \end{aligned}$$

est une variété faiblement kählérienne, non fortement kählérienne.

4. Pour tout $1 \leq p < 2$ l'espace de Banach $L^p(H)$ muni des structure g, ω , et J définies par : $\forall A, B \in L^p(H)$,

$$\begin{aligned} g(A, B) &:= \Re \operatorname{Tr} A^* B \\ \omega(A, B) &:= -\Im \operatorname{Tr} A^* B \\ JA &:= iA \end{aligned}$$

est une variété faiblement kählérienne, non fortement kählérienne.

5. Pour $p < +\infty$, la grassmannienne $Gr^{(p)}$ des p -plans d'un espace de Hilbert H munie de : $\forall A, B \in T_P Gr^{(p)} = L(P, P^\perp)$,

$$\begin{aligned} g(A, B) &:= \Re \operatorname{Tr} A^* B \\ \omega(A, B) &:= -\Im \operatorname{Tr} A^* B \\ JA &:= iA \end{aligned}$$

est une variété fortement kählérienne.

6. La grassmannienne restreinte $Gr_2(H)$ d'un espace de Hilbert polarisé : $H = H_+ \oplus H_-$ munie de : $\forall A, B \in T_P Gr^{(p)} = L^2(P, P^\perp)$,

$$\begin{aligned} g(A, B) &:= \Re \operatorname{Tr} A^* B \\ \omega(A, B) &:= -\Im \operatorname{Tr} A^* B \\ JA &:= iA \end{aligned}$$

est une variété fortement kählérienne.

A.5.2 Potentiel kählérien

Définition A.5.4 Une fonction réelle ϕ sur une variété kählérienne (M, g, ω, J) est un potentiel kählérien si $\omega = dd^c \phi$.

Exemple 17 Soit H un espace de Hilbert vu comme une variété kählérienne, les définitions de g, ω, J étant celles du paragraphe précédent. Alors un quart de la norme induite par le produit scalaire hermitien est un potentiel kählérien sur H . En effet : $\forall x \in H, \forall X, Y \in T_x H$,

$$d\langle x, x \rangle(X) = \langle X, x \rangle + \langle x, X \rangle,$$

$$d^c \langle x, x \rangle(X) = -2\Re \langle JX, x \rangle,$$

et :

$$\begin{aligned} dd^c \langle x, x \rangle(X, Y) &= -2\Re \langle JY, X \rangle + 2\Re \langle JX, Y \rangle \\ &= -4\Im \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Proposition A.5.5 Soit M une variété kählérienne muni d'un potentiel kählérien ρ globalement défini et G un groupe de Lie agissant sur M en préservant ρ et la structure complexe J . Alors l'action de G possède une application moment G -équivariante μ avec, pour tout x dans M , et tout \mathfrak{a} dans $\text{Lie}(G) =: \mathfrak{g}$:

$$\mu_x^\mathfrak{a} = -d_x^c \rho(X^\mathfrak{a}) = d_x \rho(JX^\mathfrak{a}),$$

où $X^\mathfrak{a}$ est le champs de vecteurs induit par l'action de l'élément \mathfrak{a} de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} .

□ **Preuve de la proposition A.5.5 :**

Puisque G préserve J et ρ , pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} \mu_{g \cdot x}^\mathfrak{a} &= d_{g \cdot x} \rho(J_{g \cdot x} X^\mathfrak{a}(g \cdot x)) \\ &= d_{g \cdot x} \rho(J_{g \cdot x} g \cdot X^{g^{-1} \mathfrak{a} g}(x)) \\ &= d_{g \cdot x} \rho(g \cdot J_x X^{g^{-1} \mathfrak{a} g}(x)) \\ &= d_x \rho(J_x X^{g^{-1} \mathfrak{a} g}) \\ &= \mu_x^{\text{Ad}(g^{-1})(\mathfrak{a})}. \end{aligned}$$

Ainsi μ est G -équivariante. De plus :

$$\begin{aligned} d\mu_x^\mathfrak{a} &= -di_{X^\mathfrak{a}} d^c \rho \\ &= i_{X^\mathfrak{a}} dd^c \rho - \mathcal{L}_{X^\mathfrak{a}} d^c \rho \\ &= i_{X^\mathfrak{a}} \omega. \end{aligned}$$

□

A.6 Variétés banachiques hyperkähleriennes

A.6.1 Définitions et exemples

Définition A.6.1 Une variété banachique faiblement (resp. fortement) hyperkählienne M est une variété banachique munie d'une métrique faiblement (resp. fortement) riemannienne g et de deux structures complexes I_1 et I_2 telles que :

- $I_1 \circ I_2 = -I_2 \circ I_1$
- $g(I_j X, I_j Y) = g(X, Y)$, $j = 1, 2$.
- $\omega_j := g(I_j \cdot, \cdot)$ est fermée.

On appelle formes de Kähler les formes symplectiques ω_i , $i \in \{1, 2\}$.

Remarque A.6.2 L'endomorphisme $I_3 := I_1 \circ I_2$ est aussi une structure complexe sur M et plus généralement pour tout $a \in S^2$, $a = (a_1, a_2, a_3)$ avec $\sum a_i^2 = 1$, l'endomorphisme $I_a := \sum a_i I_i$ est une structure complexe sur M compatible avec g . Ainsi une variété hyperkählienne possède une famille de structures kählériennes paramétrée par S^2 .

Remarque A.6.3 L'espace tangent d'une variété hyperkählienne M est muni d'une action des quaternions, et $\forall x \in M$, $T_x M$ est un \mathbb{H} -espace vectoriel.

Proposition A.6.4 Une variété symplectique complexe (M, I_1, Ω) munie d'une métrique kählérienne g relativement à I_1 est hyperkählienne de formes de

Kähler $\omega_1(\cdot, \cdot) := g(I_1 \cdot, \cdot)$, $\omega_2 := \Re \Omega$ et $\omega_3 := \Im \Omega$ ssi l'endomorphisme I_2 défini par :

$$\omega_3(X, Y) := \Im \Omega(X, Y) = \omega_1(I_2 X, Y)$$

vérifie $(I_2)^2 = -1$.

Lemme A.6.5 Soit M une variété réelle munie de deux structures symplectiques réelles, ω_1 et ω_3 , et d'une structure presque-complexe I_2 telle que $\omega_3(X, Y) = \omega_1(I_2 X, Y)$. Alors I_2 est intégrable.

△ **Preuve du lemme A.6.5 :**

Il suffit de montrer que le crochet de deux vecteurs de types $(1, 0)$ est de type $(1, 0)$. Or :

$$\begin{aligned} I_2 X = iX &\Leftrightarrow \omega_3(X, Y) = \omega_1(iX, Y) = i\omega_1(X, Y) \forall Y \in TM \\ &\Leftrightarrow i_X \omega_3 = i \cdot i_X \omega_1. \end{aligned}$$

Ainsi il suffit de montrer que pour tous vecteurs X et Y de type $(1, 0)$, $i_{[X, Y]} \omega_3 = i \cdot i_{[X, Y]} \omega_1$. Or :

$$\begin{aligned} i_{[X, Y]} \omega_3 &= i_{\mathcal{L}_X Y} \omega_3 = \mathcal{L}_X(i_Y \omega_3) - i_Y \mathcal{L}_X \omega_3 \\ &= \mathcal{L}_X(i \cdot i_Y \omega_1) - i_Y \mathcal{L}_X(\omega_3) \\ &= i \cdot \mathcal{L}_X(i_Y \omega_1) - i_Y(i_X \circ d\omega_3 + di_X \omega_3) \\ &= i \cdot \mathcal{L}_X(I_Y \omega_1) - i \cdot i_Y(di_X \omega_1) \\ &= i \cdot (\mathcal{L}_X(i_Y \omega_1) - i_Y \mathcal{L}_X \omega_1) \\ &= i \cdot (i_{[X, Y]} \omega_1). \end{aligned}$$

△

□ **Preuve de la proposition A.6.4 :**

D'après le lemme A.6.5, I_2 est intégrable. La fermeture de Ω implique la fermeture de $\omega_2 := \Re \Omega$ et $\omega_3 := \Im \Omega$ et :

$$\begin{aligned} \Omega(I_1 X, Y) + \Omega(X, I_1 Y) &= 2i\Omega(X, Y) \\ \Rightarrow g(I_2 I_1 X, Y) + g(I_2 X, I_1 Y) &= -2g(I_1 I_2 X, Y) \\ \Leftrightarrow g(I_2 I_1 X, Y) &= -g(I_1 I_2 X, Y) \\ \Rightarrow I_1 I_2 &= -I_2 I_1. \end{aligned}$$

□

Exemple 18 1. \mathbb{H} et tout \mathbb{H} -espace vectoriel de dimension finie est une variété hyperkählérienne.

2. Si H est un espace de Hilbert, alors l'espace cotangent de H , $T'H$, muni de la structure complexe naturelle I_1 et de la forme symplectique de Liouville Ω est une variété hyperkählérienne. En notant $*$ la dualité entre H et H' , on a : $\forall (X, \xi), (Y, \eta) \in T'H$,

$$\begin{aligned} \Omega((X, \xi), (Y, \eta)) &= \xi(Y) - \eta(X) \\ g((X, \xi), (Y, \eta)) &= \Re(\langle X, Y \rangle + \langle \xi, \eta \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_1((X, \xi), (Y, \eta)) &= -\Im(\langle X, Y \rangle + \langle \xi, \eta \rangle) \\ \omega_2((X, \xi), (Y, \eta)) &= \Re(\langle \xi^*, Y \rangle - \langle X^*, \eta \rangle) \\ \omega_3((X, \xi), (Y, \eta)) &= \Im(\langle \xi^*, Y \rangle - \langle X^*, \eta \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1(X, \xi) &= (iX, i\xi) \\ I_2(X, \xi) &= (\xi^*, -X^*) \\ I_3(X, \xi) &= (i\xi^*, -iX^*) \end{aligned}$$

A.6.2 Potentiel hyperkählérien

Définition A.6.6 Un potentiel hyperkählérien sur une variété hyperkählérienne (M, g, I_1, I_2, I_3) est une fonction réelle ϕ sur M qui est un potentiel kählérien pour chacune des structures complexes.

Exemple 19 Sur un \mathbb{H} -espace vectoriel V de dimension finie, la fonction ϕ définie sur V par :

$$\phi(x) := \frac{1}{4} \|x\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de l'espace vectoriel sur \mathbb{R} sous-jacent, est un potentiel hyperkählérien. En effet, $\forall x \in V$, $\forall X \in V$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$:

$$d_x \phi(X) = \frac{1}{2} \Re \langle x, X \rangle,$$

ainsi :

$$d_x^{c_i} \phi(X) = -\frac{1}{2} \Re \langle x, I_i X \rangle,$$

et :

$$\begin{aligned} (dd^{c_i} \phi)_x(X, Y) &= -\frac{1}{2} X \cdot \Re \langle x, I_i Y \rangle + \frac{1}{2} Y \cdot \Re \langle x, I_i X \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \Re \langle X, I_i Y \rangle + \frac{1}{2} \Re \langle Y, I_i X \rangle \\ &= \Re \langle I_i X, Y \rangle = -\Im \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Annexe B

Géométrie des espaces homogènes

B.1 Définitions

Définition B.1.1 On appellera espace homogène toute variété banachique M de la forme $M = G/H$, où G est un groupe de Lie banachique et H un sous-groupe de Lie fermé connexe.

Remarque B.1.2 G agit sur la variété M par multiplication à gauche. H est le groupe d'isotropie du point base donné par la classe de H que l'on notera x_0 . L'isotropie du point $x = g.x_0$, $g \in G$ est alors $H_x = gHg^{-1}$. L'application passage au quotient $\pi : G \rightarrow G/H$ définit un G -fibré au dessus de M munit d'une action de H sur les fibres par multiplication à droite.

Définition B.1.3 L'espace homogène $M = G/H$ est dit réductif s'il existe un supplémentaire H -invariant, noté \mathfrak{m}_{x_0} de la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{x_0} = \mathfrak{h}$ de H dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Alors pour tout $x \in M$, \mathfrak{g} se décompose en :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_x \oplus \mathfrak{m}_x,$$

où \mathfrak{h}_x est l'algèbre de Lie de l'isotropie H_x et \mathfrak{m}_x se déduit de \mathfrak{m}_{x_0} par action adjointe d'un élément de G envoyant x_0 en x et vérifie $Ad(g)\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_x$ pour tout $g \in H_x$.

Exemple :

Si G est muni d'un produit scalaire G -invariant, alors l'orthogonal de \mathfrak{h}_x fournit un supplémentaire H -invariant.

Conséquence :

Dans le cas réductif, on a une identification canonique de l'espace tangent $T_x M$ avec \mathfrak{m}_x .

B.2 Connexion homogène

Notations B.2.1 Dans le cas réductif, pour tout $x \in M$ on notera $\pi_{\mathfrak{m}_x}$ (resp. $\pi_{\mathfrak{h}_x}$) la projection de \mathfrak{g} sur \mathfrak{m}_x (resp. sur \mathfrak{h}_x) parallèlement à \mathfrak{h}_x (resp. \mathfrak{m}_x).

Définition B.2.2 Dans le cas réductif, le fibré tangent TM est naturellement muni d'une connexion, appelée connexion homogène, et définie par l'expression de la dérivée covariante :

$$D_X Y = \pi_{\mathfrak{m}_x}([X, Y]),$$

pour tous vecteurs X, Y de $T_x M$ identifié à \mathfrak{m}_x , ou encore :

$$D_{\xi^a} \xi^b = \pi_{\mathfrak{m}_x}([\pi_{\mathfrak{m}_x}(\mathfrak{a}), \pi_{\mathfrak{m}_x}(\mathfrak{b})]),$$

où $a, b \in \mathfrak{g}$ et ξ^a, ξ^b sont les éléments de l'espace tangent à M en x induits par l'action infinitésimale de \mathfrak{g} .

Proposition B.2.3 La torsion T de la courbure homogène est donnée par : $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{m}_x$,

$$T(\xi^a, \xi^b) = \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]).$$

En particulier la connexion homogène est à torsion nulle ssi M est un espace homogène symétrique i.e vérifiant :

$$[\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_x] \subset \mathfrak{h}_x.$$

□ **Preuve de la proposition B.2.3 :**

Pour tous $X, Y \in T_x M$ on a :

$$T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y].$$

Pour tous \mathfrak{a} et $\mathfrak{b} \in \mathfrak{g}$:

$$T(\xi^a, \xi^b) = \pi_{\mathfrak{m}_x}([\pi_{\mathfrak{m}_x}(\mathfrak{a}), \pi_{\mathfrak{m}_x}(\mathfrak{b})]) - \pi_{\mathfrak{m}_x}([\pi_{\mathfrak{m}_x}(\mathfrak{b}), \pi_{\mathfrak{m}_x}(\mathfrak{a})]) - \xi^{[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]}.$$

En particulier, pour $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathfrak{m}_x$,

$$T(\xi^a, \xi^b) = \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]).$$

□

Corollaire B.2.4 Si M est un espace symétrique, la connexion homogène est la connexion de Levi-Cevita de toute métrique G -invariante.

Proposition B.2.5 La courbure R de la connexion homogène est donnée par :

$$R_{\xi^a, \xi^b} \mathfrak{c} = -[\pi_{\mathfrak{h}_x}[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{c}].$$

En particulier la connexion homogène est à courbure nulle ssi M vérifie :

$$[\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_x] \subset \mathfrak{m}_x.$$

□ **Preuve de la proposition B.2.5 :**

Pour tous $X, Y, Z \in T_x M$ on a :

$$R_{X, Y} Z = D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]} Z.$$

Pour tous $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathfrak{m}_x$:

$$\begin{aligned}
R_{\xi^a, \xi^b} \xi^c &= D_{\xi^a} D_{\xi^b} \xi^c - D_{\xi^b} D_{\xi^a} \xi^c - D_{\xi^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}} \xi^c \\
&= D_{\xi^a} \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{b}, \mathbf{c}]) - D_{\xi^b} \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{c}]) - \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) \\
&= \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{b}, \mathbf{c}])]) - \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{b}, \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{c}])]) - \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) \\
&= \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] - [\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] - [[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}]) - \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \pi_{\mathfrak{h}_x}([\mathbf{b}, \mathbf{c}]) \\
&\quad - \pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{b}, \pi_{\mathfrak{h}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{c}])]) \\
&= -[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] + [\mathbf{b}, [\mathbf{a}, \mathbf{c}]] - [\xi^a, \xi^{[\mathbf{b}, \mathbf{c}]}] + [\xi^b, \xi^{[\mathbf{a}, \mathbf{c}]}] \\
&= -[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] - [\xi^a, [\xi^b, \xi^c]] + [\xi^b, [\xi^a, \xi^c]] \\
&= -[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] - [[\xi^a, \xi^b], \xi^c] \\
&= -[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] - [\xi^{[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}], \xi^c \\
&= -[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] - [\pi_{\mathfrak{m}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]), \mathbf{c}] \\
&= -[\pi_{\mathfrak{h}_x}([\mathbf{a}, \mathbf{b}]), \mathbf{c}]
\end{aligned}$$

□

B.3 Exemples

Le lecteur trouvera dans [SpWu] un exposé détaillé des exemples suivants. Nous ne relatons ici que ce qui est utilisé dans le corps du texte, et nous renvoyons le lecteur à [SpWu] et à [Wur1] pour les détails.

Exemple 20 (Les grassmanniennes $Gr^{(p)}$) Soit $Gr^{(p)}$ la grassmannienne des p -plans d'un espace de Hilbert H muni d'une base hilbertienne $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Soit $U(H)$ le groupe unitaire de H et $x_0 = \text{vect}\{e_0, \dots, e_{p-1}\}$. $Gr^{(p)}$ est un espace homogène sous le groupe unitaire $U(H)$, le groupe d'isotropie de x_0 s'identifiant à $U(x_0) \times U(x_0^\perp)$. L'algèbre de lie $\mathfrak{u}(H)$ se décompose en :

$$\mathfrak{u}(H) = \mathfrak{h}_{x_0} \oplus \mathfrak{m}_{x_0},$$

$$\begin{aligned}
\text{où } \mathfrak{h}_{x_0} &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, a \in \mathfrak{u}(x_0), d \in \mathfrak{u}(x_0^\perp) \right\}, \\
\text{et } \mathfrak{m}_{x_0} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^* & 0 \end{pmatrix}, b \in B(x_0, x_0^\perp) \right\}.
\end{aligned}$$

$Gr^{(p)}$ est un espace homogène symétrique et :

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b^* & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^* & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -bc^* + cb^* & 0 \\ 0 & -b^*c + c^*b \end{pmatrix}.$$

En identifiant $T_{x_0} Gr^{(p)}$ à \mathfrak{m}_{x_0} , on en déduit l'expression de la courbure de la connexion homogène : $\forall a, b, c \in T_{x_0} Gr^{(p)} = B(x_0, x_0^\perp)$,

$$\begin{aligned}
R_{a,bc} &= \left[\begin{pmatrix} -ab^* + ba^* & 0 \\ 0 & -a^*b + b^*a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c^* & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= -ab^*c + ba^*c + ca^*b - cb^*a
\end{aligned}$$

Exemple 21 (La grassmannienne restreinte Gr_2) La grassmannienne restreinte Gr_{res} d'un espace de Hilbert polarisé $H = H_+ \oplus H_-$, où H_+ et H_- sont deux sous-espaces vectoriels fermés de dimension infinie de H en somme directe orthogonale est un espace homogène symétrique sous le groupe unitaire

restreint :

$$U_{res} = \left\{ \begin{pmatrix} U_+ & U_{-+} \\ U_{+-} & U_- \end{pmatrix} \in U(H) \mid \begin{array}{l} U_{-+} \in L^2(H_-, H_+), \\ U_{+-} \in L^2(H_+, H_-) \end{array} \right\},$$

le groupe d'isotropie étant $U(H_+) \times U(H_-)$. La courbure de la connexion homogène est donnée par :

$$\forall X, Y, Z \in L^2(H_+, H_-),$$

$$R_{X,Y}Z = -XY^*Z + YX^*Z + ZX^*Y - ZY^*X.$$

Bibliographie

- [Ada] Adams, J.F. *Lectures on Lie Groups*, Mathematics Lecture Note Series, (1969).
- [Adl] Adler, M. *On a trace functional for formal pseudo-differential operators and the symplectic structure of the Korteweg-de Vries type equations*, Inv. Math. **50**, n° **3**, (1979), 219-248.
- [AG] Alvarez-Gaume, L.; Gomez, C. *Loop groups, grassmanians and string theory*, Physics Letters B, Vol. **190**, n° **1, 2**, 21 mai 1987, 55-62.
- [AL] Andruchow, E.; Larotonda, G. *Nonpositively curved metric in the positive cone of a finite von Neumann algebra*, preprint.
- [AK] Arnold, V.I.; Khesin, B.A. *Topological methods in hydrodynamics*, Springer, New York, (1998).
- [AMR] Abraham, R.; Marsden, J.E.; Ratiu, T. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences **75**, Springer-Verlag (1983)
- [Bal] Balachandran, V.K. *Simple L^* -algebras of classical type*, Math. Ann. **180**, (1969), 205-219.
- [Bea] Beals, R.; Sattinger, D.H.; Szmigielski, J. *Acoustic Scattering and the extended Korteweg-de Vries Hierarchy*, Advances in Math. **140**, (1998), 190-206.
- [Beau] Beauzamy, B. *Introduction to Banach spaces and their geometry*, North-Holland (1983).
- [Bel] Belitiță, D. *Integrability of almost complex structures on Banach manifolds*, arXiv :math.DG/0407395v1 23 Jul 2004.
- [Biq] Biquard, O. *Sur les équations de Nahm et la structure de Poisson des algèbres de Lie semi-simples complexes*, Math. Ann. **304**, n° **2**, (1996), 253-276.
- [BG1] Biquard, O.; Gauduchon, P. *Hyperkähler metrics on cotangent bundles of Hermitian Symmetric spaces*, Geometry and Physics, *Lect. notes Pure Appl. Math. Serie* **184**, Marcel Dekker (1996), 287-298.
- [BG2] Biquard, O.; Gauduchon, P. *La métrique hyperkählérienne des orbites coadjointes de type symétrique d'un groupe de Lie complexe semi-simple*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **323**, série **I** (1996), 1259-1264.
- [BG3] Biquard, O.; Gauduchon, P. *Géométrie hyperkählérienne des espaces hermitiens symétriques complexifiés*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, Vol **16** (1998), 127-173.

- [Bis] Bismut, J-M. *From Quillen metrics to Reidemeister metrics : some aspects of the Ray-Singer analytic torsion*, Topological methods of Modern Mathematics, (Stony-Brooks, NY, **1991**), 273–324.
- [Bou] Bourbaki, N. *Groupes et Algèbres de Lie*, Éléments de Mathématiques, chap **4-5-6**, Masson (**1981**).
- [Bou2] Bourbaki, N. *Topologie Générale*, Éléments de Mathématiques, chap **1-4**, Masson, (**1990**).
- [Bou3] Bourbaki, N. *Variétés différentielles et analytiques*, Éléments de Mathématiques, Fascicule de résultats, paragraphes **1-7**, Hermann, (**1967**).
- [BP] Beltiță, D.; Prunaru, B. *Amenability, completely bounded projections, Dynamical systems and smooth orbits*, arXiv :math.OA/0504313 v2, (**20 Apr 2005**).
- [BR] Bowick, M.J.; Rajeev, S.G. *String theory as the Kähler Geometry of Loop Space*, Physical Rev. Letters **58**, (**1987**), n° **6**, 535-53.
- [Bre] Brezis, H. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Dunod, (**1999**).
- [Bry] Brylinsky, J-L. *Loop Spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Progress in Mathematics, **107**, Birkäuser (**1992**).
- [Bur] Burns, D. *Some examples of the twistor construction*, Contributions to several complex variables : in honor of Wilhelm Stoll, Vieweg (**1986**), 51-67.
- [Cal] Calabi, E. *Métriques kählériennes et fibrés holomorphes*, Ann. Ec. Norm. Sup. **12** (**1979**), 269-294.
- [Car] Cartan, H. *Cours de Calcul Différentiel*, Hermann Paris, Collection Méthodes, (**1977**).
- [CH] Camassa, R.; Holm, D.D. *An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons*, Physical Reviews Letters **71**, (**1993**), 1661-1664.
- [Con1] Constantin, A. *The Hamiltonian Structure of the Camassa-Holm Equation*, Expo. Math **15**, (**1997**), 53-85.
- [Con2] Constantin, A.; Kolev, B. *On the geometric approach to the motion of inertial mechanical systems*, J. Physics A :Math. Gen. **35**, (**2002**), R51-R79
- [CMG] Cuenca Mira, J. A. ; Garcia Martin, A. ; Martin Gonzalez, C. *Structure theory of L^* -algebras*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **107** (**1990**), 361-365.
- [DG] Gelfand, I. M. and Dickii, L. A. *Fractional Powers of operators and Hamiltonian Systems*, Moscow State University. Translated from Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol. **10**, n° **4**, 13-29, (**1976**).
- [Die] Diestel, J. *Geometry of Banach spaces : selected topics*, Springer (**1975**).
- [Din] Dineen, S. *Complex analysis on infinite dimensional spaces*, monograph, (**1999**) Springer.
- [Dic] Dickey, L. A. *On Segal-Wilson's definition of the τ -function and the hierarchies AKNS-D and mcKP*, Babelon, Olivier (ed.) et al., Integrable systems : the Verdier memorial conference. Actes du colloque international de Luminy, France, July 1-5, **1991**.
- [DN] Dorfmeister, J.; Nakajima, K. *The fundamental conjecture for homogeneous Kähler manifolds*, Acta Math. **161**, (**1988**), 23-70.

- [Don] Donaldson, S. K. *Remarks on gauge theory, complex geometry and 4-manifold topology*, Fields Medallists' lectures, 384–403, World Sci. Ser. 20th Century Math., **5**, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (1997).
- [Don2] Donaldson, S. K. *Nahm's equations and the classification of monopoles*, Comm. Math. Phys. **96**, (1984), n° 3, 387-407.
- [Dru] Drucker, D. *Exceptional Lie algebras and the structure of Hermitian symmetric spaces*, Memoirs of the American Mathematical Society, Vol **16**, Issue 1, n° **208**, (sept 1978).
- [Ebe] Eberlein, P. B. *Geometry of Nonpositively Curved Manifolds*, Chicago Lectures in Mathematics (1996).
- [EK] van Est, W. T. ; Korthagen, Th.J. *Non-enlargible Lie algebras*, Proc. Kon. Ned. Acad. v. Wet. A **67** (1964), 15-31.
- [Eke] Ekeland, I. *The Hopf-Rinow theorem in infinite dimension*, J. Differential Geometry, **13**, (1978), 287-301.
- [Fei] Feix, B. *Hyperkähler Metrics on cotangent Bundles*, PhD dissertation, University of Cambridge, (1999).
- [Fok] Fokas, A. S. *On a class of physically important integrable equations*, Physica D **87** (1995), 145-150.
- [FV] Franzoni, T. ; Vesentini, E. *Holomorphic Maps and Invariant Distances*, North-Holland, Mathematics Studies **40** (1980).
- [Gau] Gauduchon, P. *Connexions linéaires, classes de Chern, théorème de Riemann-Roch*, Birkhäuser, Ed. Lafontaine.
- [GH] Griffiths, P. ; Harris, J. *Principles of algebraic geometry*, reprint of the 1978 original. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1994. xiv+813 pp. ISBN : 0-471-05059-8 14-01
- [Gib] Gibbons, G. W. ; Rychenkova, P. *Hyperkähler Quotient Construction of BPS Monopole Moduli Spaces*, Comm.Math.Phys. **186**, (1997), n° 3, 581-599.
- [Ha] Harris, A. *some applications of variational calculus in Hermitian geometry*, Geometric analysis and applications to quantum field theory (Adelaide, 1998/1999), 95–117, Progr. Math., **205**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
- [Har1] de la Harpe, P. *Classification of simple real L^* -algebras*, Univ. of Warwick, July 1990.
- [Har2] de la Harpe, P. *Classification des L^* -algèbres semi-simples réelles séparables*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. A **272** (1971), 1559-1561.
- [Hel] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, (1962).
- [HH] Helminck, G. ; Helminck, A. *The structure of Hilbert flag varieties*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30**, n° 3, (1994), 401-441.
- [HKLR] Hitchin, N. J. ; Karlhede, A. ; Lindström, U. and Roček, M. *Hyperkähler Metrics and Supersymmetry*, Commun. Math. phys. **108**, (1987), 535-589.
- [Hj] Harris, J. *algebraic geometry. A first course*. Corrected reprint of the 1992 original. Graduate Texts in Mathematics, **133**. Springer-Verlag, New York, 1995. xx+328 pp. ISBN : 0-387-97716-3 14-01

- [HL] Hirsch, F. ; Lacombe, G. *Éléments d'analyse fonctionnelle, cours et exercices avec réponses*, Dunod, (1997).
- [HS] Hunter, J.K. ; Saxton, R. *Dynamics of Director Fields*, SIAM J. Appl. Math. Vol. **51**, n° **6**, **1991**, 1498-1521.
- [Kac] Kac, V.G. *Infinite Dimensional Lie Algebras*, Progress in Mathematics, Edited by J. Coates and S. Helgason, Birkhäuser, **1983**.
- [Kal] Kaledin, D. *Hyperkähler structures on total spaces of holomorphic cotangent bundles*, Quaternionic structures in mathematics and physics (Rome, **1999**), 195-230.
- [Kau1] Kaup, W. *Algebraic characterization of symmetric complex Banach manifolds*, Math. Ann. **228**, (1977), 39-64.
- [Kau2] Kaup, W. *Über die Klassifikation der symmetrischen hermiteschen Mannigfaltigkeiten unendlicher Dimension I, II*, Math. Ann. **257**, (1981), 463-486, **262**, (1983), 57-75.
- [Kh1] Khesin, B. A. *A Poisson-Lie Framework for Rational Reductions of the KP Hierarchy*, Letters in Math. Phys. Vol. **58**, (2001), 101-107.
- [Kh2] Khesin, B. A. *Informal complexification and Poisson structures on moduli spaces*, AMS Transl., Ser. **2**, vol., **180**, (1997), 147-155.
- [Kir1] Kirillov, A. A. *Infinite Dimensional Lie groups ; their orbits, invariants and Representations. The Geometry of Moments*, Lectures Notes in math. springer-Verlag **970**, (1982), 101-123.
- [Kir2] Kirillov, A. A. *Orbits of the group of Diffeomorphisms of a circle and local Lie Superalgebra*, Funct. Anal. Appl. **15**, (1981), 135-136.
- [Kirw] Kirwan, F. *Momentum maps and reduction in algebraic geometry*, J. Diff. Geom. Appl. **9**, n° **1,2**, (1998), 135-171.
- [Kirw2] Kirwan, F. *Cohomology of moduli spaces*, Li, Ta Tsien (ed.) et al., Proceedings of the international congress of mathematicians, ICM 2002, Beijing, China, August 20-28, 2002. Vol. I : Plenary lectures and ceremonies. Beijing : Higher Education Press ; Singapore : World Scientific/distributor. 363-382 (2002).
- [Kirw3] Kirwan, F. *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, 1984, 210p.
- [KLS] Kajiwara, J. ; Li, Z. ; Shon, K.H. *finite or infinite dimensional complex analysis*, Lectures notes in pure and applied mathematics, Vol. **214**.
- [KM] Khesin, B. A. ; Misiolek, G. *Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits*, to appear in Adv. Math.
- [Kos] Kostant, B. *Quantization and unitary representations*, in *Lectures in Modern Analysis and Applications III*, ed. C.T. Taam, Springer Lectures Notes **170**, Springer (1970), 87-208.
- [Kov] Kovalev, A. G. *Nahm's equation and complex adjoint orbits*, Quart. J. Math., **47**, 41-58, (1993).
- [KR] Khesin, B. ; Rosly A. *Symplectic Geometry on moduli Spaces of Holomorphic Bundles over complex surfaces*, Proceedings of the Arnoldfest, Fields Institute Communications, v. **24**, (1999), 311-323.
- [Kri1] Krichever, I. M. *Integration of nonlinear Equations by Methods of Algebraic Geometry*, Funct. Anal. Appl. **11** (1), (1977), 12-26.

- [Kri2] Krichever, I. M. *Linear operators with consistent coefficients and rational reductions of KP hierarchy*, Physica D, **87** (1995), 14-19.
- [Kro1] Kronheimer, P. B. *A Hyper-kählerian structure on coadjoint orbits of a semisimple complex group*, J. London Math. Soc. (2) **42**, (1990), 193-208.
- [Kro2] Kronheimer, P. B. *Instantons and the geometry of the nilpotent variety*, J. Differential Geometry **32**, (1990), 473-490.
- [Kro3] Kronheimer, P. B. *A hyperkähler structure on the cotangent bundle of a complex Lie group*, Archiv :math.DG/0409253 (june 1988).
- [KS] Kobak, P. Z.; Swann, A. *quaternionic geometry of a nilpotent variety*, Math. Ann. **297**, (1993), 747-764.
- [Kui1] Kuiper, N. H., *Variétés hilbertiennes : aspects géométriques*. (French) Suivi de deux textes de Dan Burghlea. Séminaire de Mathématiques Supérieures, n° **38** (Été, 1969). Les Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1971, 153 pp.
- [Kui2] Kuiper, N.H., *Differential geometry*, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of the American Mathematical Society (Twentieth Annual Summer Research Institute), held at Stanford University, Stanford, Calif., July 30–August 17, 1973. Edited by S. S. Chern and R. Osserman. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XXVII, Part 1. American Mathematical Society, Providence, R.I., **1975**. x+451.
- [Kui3] Kuiper, N.H., Colloque International sur l'Analyse et la Topologie Différentielle. (French) Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, No. 210, Strasbourg, du 20 au 29 juin 1972. Organismateurs : J. Cerf, G. Glaeser et C. Godbillon. 1972 : Année du centenaire de la Société Mathématique de France. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23** (1973), no. 2. Institut Fourier, Institut de Mathématiques Pures, Université de Grenoble I, Saint-Martin-d'Hères, 1973. xvi+235.
- [Kum] Kumar, S. *Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory*, Progress in Mathematics 204, Birkhäuser, (2002).
- [KW] Kupersmidt, B.A.; Wilson, G. *Modifying Lax Equations and the Second Hamiltonian Structure*, Invent. math. **62**, (1981), 403-436
- [KY] Kirillov, A.A.; Yur'ev, D.V. *Kähler Geometry of the Infinite-Dimensional Homogeneous Space $M = \text{Diff}^+(S^1)/\text{Rot}(S^1)$* , Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozheniya, Vol **21**, n° **4**, 35-46.
- [KZ] Khesin, B.A.; Zakharevich, I. *Poisson-Lie group of pseudodifferential symbols*, Commun. Math. Phys. **171**, n° **3**, (1995), 475-530.
- [Lan] Lang, S. *Differential manifolds*, Addison- Wesley Publishing Company, Inc. (1972).
- [Lar] Larotonda, G. *Geodesic Convexity, Symmetric Spaces and Hilbert-Schmidt Operators*, PhD Thesis, Universidad Nacional de General Sarmiento, Buenos Aires, Argentina (2005).
- [Lem] Lempert, L. *Loop spaces as complex manifolds*, Journal of Differential Geometry **38**, (1993), 519-543.
- [Lie] Séminaire Sophus Lie, *Théorie des algèbres de Lie*, École normale supérieure, Paris, 1955.

- [Loo] Loomis, L.H. *An introduction to Abstract Harmonic Analysis*, The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc. **1953**.
- [Loos1] Loos, O. *Symmetric Spaces I : General Theory* Mathematics Lecture Note Series, (**1969**).
- [Loos2] Loos, O. *Symmetric Spaces II : Compact Spaces and Classification* Mathematics Lecture Note Series, (**1969**).
- [LT] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L. *On the complemented subspaces problem* Israel Journal Math. **9**, (**1971**), 263-269.
- [MFK] Mumford, D. ; Fogarty, J. ; Firwan, F. *Geometric Invariant Theory*, (3rd. ed.), Springer, (**1994**).
- [Mic] Mickelsson, J. *Current algebras and groups*, New York : Plenum Press, (**1989**).
- [Mis] Misiolek, G. *Classical Solutions of the periodic Camassa-Holm equation*, GAFA, Geom. funct. anal. Vol. **12** (**2002**), 1080-1104.
- [Miu] Miura, R.M. *The Korteweg-de Vries Equation : a survey of results*, SIAM Review, Vol. **18**, n° **3**, (**1976**)
- [Mos] Mostow, G.D. *Some new decomposition theorems for semi-simple groups*, Mem. Amer. Math. Soc. 1955 (**1955**), n° **14**, 31-54.
- [MR] Marsden, J.E. ; Ratiu, T. *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, **1999**.
- [Mul1] Mulase, M. *Solvability of the super KP equation and a generalization of the Birkhoff decomposition*, Inv.Math. **92** (**1988**), 1-46.
- [Mul2] Mulase, M. *Complete Integrability of the Kadomtsev-Petviashvili Equation*, Adv. Math. **54**, (**1984**), 57-66.
- [MW1] Marsden, J.E. ; Weinstein, A. *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Rep. Math. Phys. **5** (**1974**), 121-130.
- [MW2] Marsden, J.E. ; Weinstein, A. *Comments on the history, theory, and applications of the symplectic reduction*, Progress. Math **198** (**2001**) Springer.
- [MW3] Marsden, J.E. ; Weinstein, A. *The Hamiltonian Structure of the Maxwell-Vlasov equations*, Physica **4D**, (**1982**), 394-406.
- [MW4] Marsden, J.E. ; Weinstein, A. *Coadjoint orbits, vortices, Clebsch variables for incompressible fluids* Physica **7 D**, (**1983**), 305-323.
- [Nee1] Neeb, K-H. *Infinite-dimensional groups and their representations*, Lie theory, 213-328, Progr. Math., **228**, Birkhäuser Boston, Boston, MA, **2004**.
- [Nee2] Neeb, K-H. *Highest weight representations and infinite-dimensional Kähler manifolds*, Recent advances in Lie theory (Vigo, 2000), 367-392, Res. Exp. Math., **25**, Heldermann, Lemgo, **2002**.
- [Nee3] Neeb, K-H. *Nancy Lecture Notes on infinite-Dimensional Lie Groups*
- [Nee4] Neeb, K-H. *Classical Hilbert-Lie groups, their extension and their homotopy groups*, Geometry and analysis on finite- and infinite-dimensional Lie groups, 87-151, Banach Center Publ., **55**, Polish Acad. Sci., Warsaw, **2002**.
- [Neh] Neher, E. *Generators and relations for 3-graded Lie algebras*, J. Algebra **155**, (**1993**), 1-35.
- [NN] Newlander, A. ; Nirenberg, L. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Annals of Math. Vol. **65**, n° **3**, (May **1957**).

- [OdRa] Odziejewicz, A ; Ratiu, T. S. *Banach-Lie Poisson spaces and reduction*, Comm. Math. Phys. **243** (2003), n° 1, 1-54.
- [OrRa] Ortega, J-P ; Ratiu, T. S. *Momentum Maps and Hamiltonian Reduction*, Progress in Mathematics, Vol. **222**, Birkhäuser, 2004.
- [Ott] Ottesen, J. T. *Infinite Dimensional Groups and Algebras in Quantum Physics*, Lectures notes in Physics, Serie m **27**, Springer, 1995.
- [Pat] Patyi, I. *On the $\bar{d}el$ -equation in a Banach space*, Bull. Soc. math. France, **128**, (2002), 391-406.
- [Pen] Penot, J-P. *Sur le théorème de Frobenius*, Bull. Soc. math. France, **98**, (1970), 47-80.
- [Pre] Pressley, A. *Loop Groups, Grassmannians and KdV Equations*, Infinite dimensional groups with applications, Publ., Math. Sci. Res. Inst. **4**, 285-306 (1985).
- [PS] Pressley, A. ; Segal, G. *Loop Groups*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford (UK) : Clarendon Press. viii, 318 p. (1988)
- [PV] Penskoi, A.V. ; Veselov, A.P. *Discrete Lagrangian systems on the Virasoro group*, Moscow Univ. math. Bull. **51** (1996) n° 4, 52-54.
- [Rey] Reyes, E.G. *Geometric Integrability of the Camassa-Holm Equation*, Letters in Math. Phys. **51**, (2002), 117-131.
- [Sat] Sato, M. ; Sato, Y. *Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold*, Nonlinear partial differential equations in applied science, Proc. U.S. - Jap. Semin., Tokyo 1982, North-Holland Math. Stud. **81**, (1983), 259-271.
- [Sch1] Schiff, J. *The Camassa-Holm equation : a loop group approach*, Physica **D 121**, (1998)
- [Sch2] Schiff, J. *Symmetries of KdV and Loop groups*, arXiv solv-int/9606004
- [Schu1] Schue, J.R. *Hilbert space methods in the theory of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 69-80.
- [Schu2] Schue, J.R. *Cartan decompositions for L^* -algebras*, Trans. Amer. Math. Soc **98**, (1961), 334-349.
- [Seg1] Segal, G. *The geometry of the KdV equation*, Int. J. Mod. Phys. **A 6**, n° **16**, (1991), 2859-2869.
- [Seg2] Segal, G. *Loop groups and harmonic maps*, Advances in homotopy theory, Proc. Conf. in Honour of I. M. James, Cortona/Italy 1988, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. **139**, (1989), 153-164.
- [Seg3] Segal, G. *Unitary Representations of some Infinite Dimensional Groups*, Comm. Math. Phys **80**, n° **3**, (1981), 301-342.
- [Ser] Serre, J-P. *Représentations linéaires et espaces homogènes kählériens des groupes de Lie compacts*, Séminaire Bourbaki (Mai 1954) 100-01/100-07
- [Sim] Simon, *Trace ideals and their applications*, Cambridge University Press, Cambridge 1979.
- [SpVa] Spera, M. ; Valli, G. *Plücker embedding of the Hilbert space Grassmannian and the CAR algebra*, Russian J. Math. Phys. **2**, n° **3**, (1994), 383-392.

- [SpWu] Spera, M. ; Wurzbacher, T. *Differential geometry of Grassmannian embeddings of based loop groups*, Differential Geometry and its Applications **13**, (2000), 43-75, North-Holland.
- [Stu] Stumme, N. *The structure of locally finite split Lie algebras*, Ph.D. thesis, Darmstadt University of technology, (1999).
- [SW] Segal, G. ; Wilson, G. *Loop Groups and equations of KdV type*, Terng, Chuu Lian (ed.) et al., Surveys in differential geometry. Vol. IV. A supplement to the Journal of Differential Geometry. Integral systems (integrable systems). Lectures on geometry and topology. Cambridge, MA : International Press, (1998), 403-466.
- [Uns1] Unsain, I. *Classification of the simple real separable L^* -algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **72**, (1971) 462-466.
- [Uns2] Unsain, I. *Classification of the simple real separable L^* -algebras*, J. Diff. Geom. **7**, (1972), 423-451.
- [Ver] Vergne, M. *Groupe symplectique et seconde quantification*, Comptes Rendus de l'academie des Sciences **285**, (1977), 191-194.
- [Wil1] Wilson, G. *Habillage et τ -fonction* Comptes Rendus de l'Academie des sciences **299**, (1984), 587-590.
- [Wil2] Wilson, G. *Commuting flows and the conservation laws for Lax equations*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1979), n° **86**, 131-143.
- [Wit] Witten, E. *Coadjoint Orbits of the Virasoro Group*, Commun. Math. Phys. **114**, 1-53.
- [Wol1] Wolf, J.A. *Fine structure of Hermitian Symmetric Spaces*, Symmetric Spaces, short Courses presented at Washington Univ., pure appl. Math. **8**, (1972), 271-357.
- [Wol2] Wolf, J.A. *On the classification of Hermitian Symmetric Spaces*, J. Math. Mech., **13**, (1964), 489-496.
- [Wol3] Wolf, J.A. *Spaces of Constant Curvature*, mc Graw-Hill Series in higher Mathematics (1977).
- [Wur1] Wurzbacher, T. *Fermionic Second Quantization and the Geometry of the Restricted Grassmannian*, in Infinite Dimensional Kähler Manifolds, DMV Seminar, Band 31, Birkhäuser, 2001.
- [Wur2] Wurzbacher, T. *La grassmannienne d'un espace de Hilbert comme réduction symplectique*, exposé au séminaire Sud-Rhodanien de géométrie intitulé "Autour de la réduction symplectique", CIRM, Luminy, (1-5/12/97).
- [Yam] Yamada, H. *The Virasoro Algebra and the KP Hierarchy*, Infinite Dimensional Groups with applications, Edited by Kac, Springer-Verlag, (1985).
- [Zak] Zakharevich, I. *The Second Gelfand-Dickey Bracket as a Bracket on a Poisson-Lie Grassmannian*, Commun. Math. Phys. **159**, n° **1**, (1994), 93-119.