

# Annulation d'un signal périodique à travers une fonction de transfert périodique

Pierre GRANJON<sup>1</sup>, Christine SERVIÈRE<sup>1</sup>, Albert FOGGIA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LIS, UPRESA CNRS 5083

domaine universitaire, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France

<sup>2</sup>LEG, UMR CNRS 5529

domaine universitaire, BP 46, 38402 Saint Martin d'Hères, France

pierre.granjon@lis.inpg.fr, christine.serviere@lis.inpg.fr

albert.foggia@leg.ensieg.inpg.fr

**Résumé** – Nous proposons une méthode de compensation active des vibrations d'une machine synchrone. Ceci revient à annuler un signal périodique à travers une fonction de transfert linéaire non-stationnaire périodique. Nous exprimons les coefficients de Fourier du signal de commande, préalablement montré périodique. Ces coefficients convergent vers des valeurs optimales stationnaires, malgré la non-stationnarité du transfert. Un algorithme du gradient est ensuite proposé et testé sur des signaux de vibration.

**Abstract** – We propose an active control method of synchronous machine vibrations. It comes to cancel a periodic signal through a periodically time-varying transfer function. We express the input signal Fourier coefficients, first shown periodic. They converge to stationary values, in spite of the time-varying transfer function. A gradient descent algorithm is next developed, and its results on real vibration signals are investigated.

## 1 Introduction

L'origine de cette étude est un problème de compensation active des vibrations d'une machine synchrone. Le principe physique utilisé est le suivant : une des bobines statoriques de la machine, fonctionnant en alternateur à vide, est alimentée par un courant  $i(t)$  afin de créer un champ magnétique additionnel au champ magnétique naturel de la machine. On note  $\alpha$  la position angulaire par rapport à l'axe de la bobine. Ce champ génère sur le stator une force  $x(t, \alpha)$ , et donc une vibration supplémentaire  $y(t, \alpha)$ . Le but de la méthode présentée dans cet article est d'élaborer un courant de commande  $i(t)$  qui engendre une vibration s'opposant aux vibrations naturelles de la machine. La fonction de transfert globale entre  $i(t)$  et  $y(t, \alpha)$ , exposée à la Fig. 1, a été déterminée et validée dans [1] :

- La relation liant  $i(t)$  à  $x(t, \alpha)$  est une modulation d'amplitude par un signal sinusoïdal  $m(t, \alpha)$  :

$$x(t, \alpha) = \underbrace{X \cos(p\alpha)}_{m(t, \alpha)} \cdot \cos(2\pi\nu_m t - p\alpha) \times i(t) \quad (1)$$

où  $X$  est une constante,  $p$  est le nombre de paires de pôles de la machine, et  $\nu_m$  sa fréquence de rotation. Ce signal de modulation peut être déterminé en temps-réel par un capteur angulaire placé en bout d'arbre rotorique.

- Le système mécanique constitué par le stator est modélisé par un système linéaire et stationnaire de

fonction de transfert  $G(\nu)$ . Ce transfert est supposé avoir été préalablement identifié.

La vibration supplémentaire  $y(t, \alpha)$  engendrée par le courant de commande s'ajoute alors aux vibrations naturelles de la machine  $d(t, \alpha)$  pour former la vibration totale du moteur. Un accéléromètre permet d'en mesurer une image notée  $e(t, \alpha)$  et appelée signal d'erreur. Le spectre de  $d(t, \alpha)$  est principalement constitué de raies spectrales, de fréquences harmoniques à celle de la fréquence de rotation [1]. Ce signal est donc modélisé par un ensemble de sinusoïdes de fréquences  $k\nu_m$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).

Les méthodes classiques de contrôle actif visant à min-

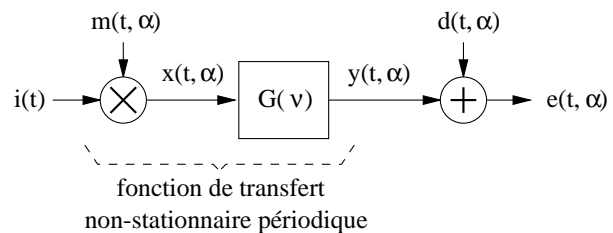


Figure 1: Fonction de transfert globale du système.

imiser la puissance du signal d'erreur et utilisant des algorithmes adaptatifs temporels tels que le FxLMS [2, 3], ont des performances très limitées pour cette application du fait de la non-stationnarité de la fonction de transfert [4]. Dans ce papier, cet inconvénient est contourné en faisant agir l'algorithme sur les coefficients de Fourier de la commande, préalablement montrée périodique. Ces coeffi-

cients convergent vers des valeurs optimales *stationnaires*, ce qui permet d'atténuer fortement le signal d'erreur. Dans la section 2, une étude théorique conduit à l'expression de la commande optimale, et à un algorithme adaptatif simple permettant de l'atteindre. Cette méthode est ensuite appliquée sur des signaux synthétiques puis sur des signaux réels de vibration, afin de juger de son efficacité.

## 2 Étude théorique

### 2.1 Description des signaux

Le spectre du signal de perturbation  $d(t, \alpha)$  est principalement constitué d'harmoniques de la fréquence de rotation  $\nu_m$ . Pour atteindre des taux d'atténuation élevés, la contre-vibration  $y(t, \alpha)$  doit être fortement corrélée avec  $d(t, \alpha)$ , et doit donc avoir elle aussi des composantes spectrales en  $k\nu_m$ . Le transfert  $G(\nu)$  étant linéaire et stationnaire, et la modulation d'amplitude par  $m(t, \alpha)$  ne provoquant que des décalages fréquentiels de  $p\nu_m$  Hertz ( $p \in \mathbb{N}^*$ ), le spectre de  $i(t)$  doit aussi vérifier cette propriété. Les transformées de Fourier des différents signaux du système de compensation sont donc formées d'une somme de distributions de Dirac localisées en  $k\nu_m$ . Par exemple, pour  $d(t, \alpha)$ , on peut écrire<sup>1</sup> :

$$D(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} d_k \cdot \delta(\nu - k\nu_m) = \boldsymbol{\delta}^H \cdot \mathbf{d} \quad (2)$$

avec  $\begin{cases} \boldsymbol{\delta} = [\dots & \delta(\nu + \nu_m) & \delta(\nu) & \delta(\nu - \nu_m) & \dots]^T \\ \mathbf{d} = [\dots & d_{-1} & d_0 & d_1 & \dots]^T \end{cases}$

Les indices  $H$  et  $T$  indiquent respectivement le transconjugué et le conjugué, tandis que  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac. La même notation utilisée pour les signaux  $e(t, \alpha)$  et  $i(t)$  conduit à la définition des vecteurs  $\mathbf{e}$  et  $\mathbf{i}$ .

La transformée de Fourier du signal d'erreur est (Fig. 1) :

$$E(\nu) = D(\nu) + G(\nu) \times [M(\nu) * I(\nu)] \quad (3)$$

où  $*$  symbolise l'opérateur de convolution. La transformée de Fourier du signal de modulation  $M(\nu)$  est facilement calculée à partir de (1). En utilisant les notations introduites dans (2), l'Eq. (3) devient alors :

$$E(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e_k \cdot \delta(\nu - k\nu_m) = \boldsymbol{\delta}^H \cdot \mathbf{e} \quad (4)$$

où l'élément d'indice  $k$  du vecteur  $\mathbf{e}$  est :

$$e_k = d_k + \frac{X \cos(p\alpha)}{2} G(k\nu_m) [e^{jp\alpha} \cdot i_{k+p} + e^{-jp\alpha} \cdot i_{k-p}]$$

Les signaux de vibration sont supposés être à bande limitée, et sont approchés par leurs  $N$  premiers harmoniques. La dimension des vecteurs devient alors  $2N + 1$ , et (4) peut s'écrire sous la forme matricielle :

$$E(\nu) = \boldsymbol{\delta}^H \cdot \mathbf{e} = \boldsymbol{\delta}^H \cdot [\mathbf{d} + \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{i}] \quad (5)$$

avec  $\mathbf{G} = \text{diag}[G(-N\nu_m) \dots G(0) \dots G(N\nu_m)]$

La matrice  $\mathbf{G}$  est donc une matrice diagonale dont la diagonale principale contient le gain complexe  $G(\nu)$  aux

<sup>1</sup>Afin d'alléger la notation, la dépendance à  $\alpha$  dans le domaine fréquentiel est omise

fréquences  $k\nu_m$  avec  $k \in [-N, N]$ . Elle représente l'effet de filtrage de la partie stationnaire du transfert global. La matrice  $\mathbf{M}$  représente la modulation d'amplitude sinusoïdale, qui est un transfert non-stationnaire provoquant des décalages fréquentiels de  $p\nu_m$  Hertz. Ces décalages induisent l'apparition de termes non nuls sur les sous-diagonales décalées de  $p$  par rapport à la diagonale principale originale. Elle est donnée par :

$$\mathbf{M} = \frac{X \cos(p\alpha)}{2} \begin{pmatrix} e^{-jp\alpha} & \overbrace{0 \dots 0}^{2p-1 \text{ fois}} & e^{+jp\alpha} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & e^{-jp\alpha} & \overbrace{0 \dots 0} & e^{+jp\alpha} \end{pmatrix} \quad (6)$$

### 2.2 Fonction de coût

La puissance du signal d'erreur s'écrit :

$$P_e = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\nu)^H E(\nu) d\nu = \mathbf{e}^H \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{\delta}^H d\nu \cdot \mathbf{e}$$

$$P_e = \mathbf{e}^H \cdot \mathbf{e} \quad (7)$$

De plus, le signal de commande doit minimiser  $P_e$  tout en ayant une puissance  $P_i$  minimale. La fonction de coût est donc choisie quadratique, et s'écrit en utilisant (7) :

$$C = P_e + \gamma P_i = \mathbf{e}^H \cdot \mathbf{e} + \gamma \mathbf{i}^H \cdot \mathbf{i} \quad (8)$$

La constante réelle  $\gamma$  fixée par l'utilisateur permet de quantifier l'importance de la puissance du signal d'entrée dans la fonction de coût. Plus elle est importante, plus la commande optimale a une puissance faible, mais plus la puissance du signal d'erreur après compensation sera importante. Finalement, l'Eq. (5) définissant  $\mathbf{e}$  permet d'exprimer  $C$  sous une forme quadratique hermitienne de  $\mathbf{i}$  :

$$C = \mathbf{i}^H \cdot [\mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} + \gamma \mathbf{1}] \cdot \mathbf{i} + \mathbf{i}^H \cdot [\mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{d}] + [\mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{d}]^H \cdot \mathbf{i} + \mathbf{d}^H \cdot \mathbf{d} \quad (9)$$

où  $\mathbf{1}$  représente la matrice identité.  $C$  a un minimum global unique si la matrice  $[\mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} + \gamma \mathbf{1}]$  est définie positive [2]. Ceci est ici toujours vérifié grâce à  $\gamma$  qui peut être choisie aussi grand que nécessaire. Le premier terme de (9) représente la puissance de  $y(t, \alpha)$ , sommée avec  $\gamma P_i$ . Le dernier terme est la puissance du signal de perturbation. Ces deux termes ne sont jamais négatifs. Le terme du milieu représente l'intercorrélacion entre les signaux  $y(t, \alpha)$  et  $d(t, \alpha)$ . C'est le seul terme permettant de minimiser  $C$ , car c'est le seul pouvant être négatif. La nécessité d'une corrélation maximale entre ces deux signaux est donc bien vérifiée.

### 2.3 Commande optimale et algorithme

La valeur optimale des coefficients de Fourier du signal de commande  $\mathbf{i}_{opt}$  est déterminée en annulant le gradient de  $C$  par rapport à  $\mathbf{i}$ , ce qui donne :

$$\mathbf{i}_{opt} = - [\mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{M} + \gamma \mathbf{1}]^{-1} \cdot \mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot \mathbf{d} \quad (10)$$

L'Eq. (10) donne  $i_{opt}$  en fonction des paramètres supposés connus du système ( $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{M}$ ), et des coefficients de Fourier de  $d(t, \alpha)$ . Malheureusement, le seul signal mesuré est le signal d'erreur. Afin d'avoir une solution fonction de  $e$ , un algorithme du gradient [5] est obtenu à partir de (9):

$$i_{l+1} = (1 - 2\mu\gamma)i_l - 2\mu\mathbf{M}^H \cdot \mathbf{G}^H \cdot e_l \quad (11)$$

Dans le domaine temporel, les coefficients de Fourier  $i_{opt}$  engendrent un signal périodique dont la période est celle du système, c'est à dire  $\frac{1}{p\nu_m}$  secondes. L'Eq. (11), où une variable indexée  $l$  est valable pour la période courante, doit donc être appliquée une fois par période. Cette équation permet de déterminer les coefficients de Fourier de la commande à la période suivante  $i_{l+1}$  (et donc la commande en temps par transformée de Fourier inverse) à partir des caractéristiques connues du système et des coefficients de Fourier de l'erreur  $e_l$  à la période courante. Le seul calcul à réaliser est donc une transformée de Fourier à chaque période afin de déterminer  $e_l$ . Avec un taux de convergence approprié, cet algorithme convergera vers la solution donnée par (10) puisque  $C$  n'a pas de minima locaux.

Dans la section suivante, les performances obtenues sur des signaux synthétiques et réels de vibration sont exposées.

## 3 Simulations

### 3.1 Signaux synthétiques

#### 3.1.1 Conditions de simulation

Les simulations ont été réalisées à l'aide de signaux synthétiques discrets. Les unités du domaine fréquentiel sont donc des fréquences réduites, comprises entre 0 et  $\frac{1}{2}$ . Les différentes variables du modèle de la Fig. 1 choisies pour ces simulations sont les suivantes :

**Signal de modulation :** La machine synchrone est supposée avoir une paire de pôles ( $p = 1$ ) et être entraînée à la fréquence réduite  $\nu_m = 0.005$ .

**Gain complexe  $G(\nu)$  :** La partie stationnaire du transfert global est modélisée par un filtre à réponse impulsionnelle infinie d'ordre 4 et dont le module de la fonction de transfert est représenté sur la Fig. 2.

Le spectre du signal de perturbation constitué de sinusoïdes de fréquences multiples de  $\nu_m$  (0.03, 0.07 et 0.15) et de bruit additif (rapport signal à bruit = 8 dB), est représenté en décibels à la Fig. 4(b). Les paramètres de l'algorithme sont fixés à  $\mu = 0.1$  et  $\gamma = 0.05$ .

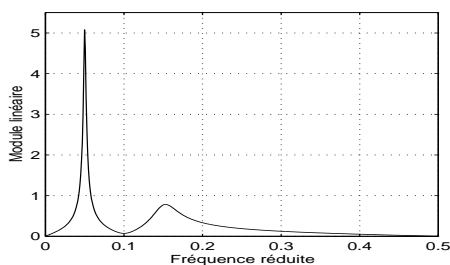


Figure 2: Module du gain complexe  $G(\nu)$ .

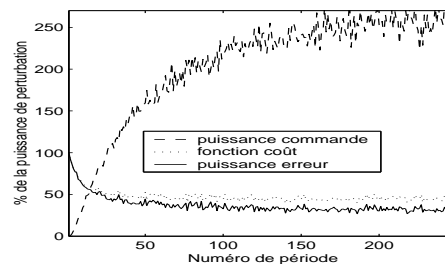
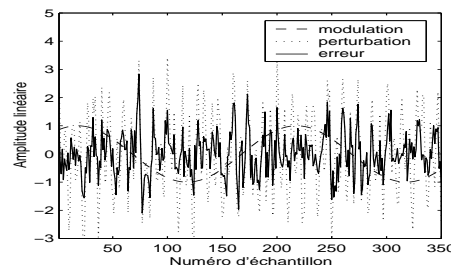
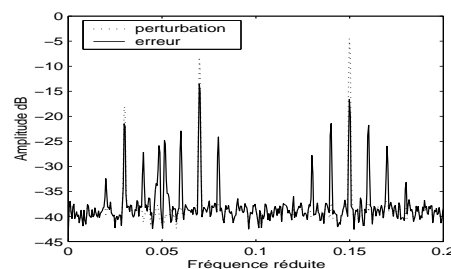


Figure 3: Courbes d'apprentissage.



(a) Signaux après convergence



(b) Spectres après convergence

Figure 4: Résultats après convergence

#### 3.1.2 Résultats

Le comportement en convergence de l'algorithme de l'Eq. (11) est exposé sur la Fig. 3, où les courbes d'apprentissage du système sont tracées. On voit que  $C$  converge vers une valeur optimale, et que le système compense finalement 70% de la puissance de la perturbation, mais nécessite une commande dont la puissance est 2.5 fois celle de la perturbation.

La Fig. 4 représente les résultats obtenus après convergence. La perturbation (pointillés), l'erreur (ligne pleine) et la modulation (tirets) sont représentées dans le domaine temporel sur la Fig. 4(a). D'après (1), lorsque le signal de modulation est proche de zéro, la commande  $i(t)$  ne peut créer aucune force  $x(t, \alpha)$  sur le stator. Ceci est bien confirmé par l'allure des différents signaux. En effet, le signal d'erreur est quasiment égal à la perturbation autour des zones où  $m(t, \alpha)$  est nul. En revanche, lorsque  $m(t, \alpha)$  est important, la perturbation est bien atténuée. La Fig. 4(b) montre le même résultat en fréquence : les spectres des signaux de perturbation (pointillés) et d'erreur (ligne pleine) y sont tracés en décibels. L'algorithme compense bien les raies spectrales de la perturbation (diminution de 5 à 10 dB), mais crée des parasites de part et d'autre de

ces raies. Ceci est dû aux décalages fréquentiels causés par la modulation d'amplitude intrinsèque au modèle du système.

## 3.2 Signaux réels

### 3.2.1 Conditions de simulation

Le même algorithme est appliqué à des signaux réels discrétisés à 10 kHz. Les unités du domaine fréquentiel deviennent donc des fréquences réelles en Hertz. Les signaux de vibration  $d(t, \alpha)$  ont été mesurés sur une machine synchrone à  $p = 1$  paires de pôles, entraînée à la fréquence  $\nu_m = 23.8$  Hz. Ils ont de plus été filtrés passe-bande afin de limiter leur largeur de bande entre 1 et 2 kHz. Le signal de modulation  $m(t, \alpha)$  est fourni par un capteur angulaire placé en bout d'arbre rotorique. Le gain complexe  $G(\nu)$ , quant à lui, reste simulé par la même fonction complexe que précédemment. Il est important de noter que le transfert global de la machine synchrone est toujours simulé, et que seuls les signaux de modulation et de perturbation sont réels. Les paramètres de l'algorithme sont fixés à  $\mu = 0.1$  et  $\gamma = 0.01$ .

### 3.2.2 Résultats

Les spectres des signaux de perturbation (pointillés) et d'erreur (ligne pleine) obtenus après convergence sont exposés à la Fig. 5. Les courbes sont tracées en décibels. Le

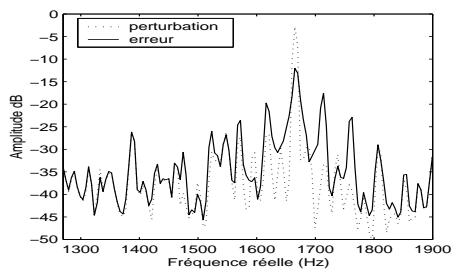


Figure 5: Spectres des signaux réels en dB.

traitement compense ici aussi 70% de la puissance de perturbation. On voit nettement une atténuation de 10 dB de la raie principale de la perturbation, alors que des raies parasites sont créées de part et d'autre de celle-ci. Cette dernière simulation laisse présager que cet algorithme, implanté sur un microprocesseur, permettra d'obtenir sensiblement les mêmes performances sur une machine réelle. La dernière observation concerne un problème mis en lumière par l'Eq. (1) : l'amplitude du signal de modulation est proportionnelle à  $\cos(p\alpha)$ . Donc si l'accéléromètre mesurant le signal d'erreur est placé sur le stator de telle sorte que  $\cos(p\alpha) = 0$ , le signal  $m(t, \alpha)$  devient nul et la compensation est impossible. De même, les meilleurs résultats sont obtenus pour une modulation maximale, c'est à dire pour  $\cos(p\alpha) = \pm 1$ . Dans les cas précédents où on a fixé  $p = 1$ , la compensation est impossible pour  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  rd, et les meilleurs résultats sont obtenus pour  $\alpha = 0$  ou  $\pi$  rd. La bobine alimentée par la commande  $i(t)$  n'agit donc pas de la même manière sur tout le stator, et les performances de compensation dépendent de la posi-

tion de l'accéléromètre mesurant le signal d'erreur. On peut cependant envisager de contourner ce problème en employant pour la commande trois bobines statoriques, spatialement déphasées de  $\frac{2\pi}{3}$  rd. La méthode présentée ici doit donc être étendue à un système multi-entrées, multi-sorties (MIMO) afin de quantifier l'effet de plusieurs commandes sur plusieurs accélérateurs placés sur la carcasse statorique.

## 4 Conclusion

Une méthode d'annulation d'un signal périodique à travers une fonction de transfert linéaire non-stationnaire périodique a donc été présentée. L'expression théorique de la commande optimale minimisant la puissance du signal d'erreur a conduit à l'élaboration d'un algorithme adaptatif simple, et implantable sur un microprocesseur. Cette méthode a été appliquée à la compensation active des vibrations d'une machine synchrone sur des signaux synthétiques puis réels. Dans les deux cas, 70% de la puissance de la perturbation est annulée. De plus, on peut espérer contourner les limitations spatiales dues au principe de compensation en étendant l'étude théorique à un système MIMO.

## References

- [1] P. Granjon, C. Servière et A. Foggia, *Compensation active des vibrations d'une machine synchrone*. 3<sup>ème</sup> Conf. Internat. sur les méthodes de surveillance acoustiques et vibratoires. Senlis, France, Oct. 1998.
- [2] P.A. Nelson et S.J. Elliot, *Active control of sound*, Academic Press, 1992.
- [3] P.A. Nelson, S.J. Elliot et C.R. Fuller, *Active control of vibration*, Academic Press, 1995.
- [4] P. Granjon, C. Servière et A. Foggia, *Sine wave cancellation through a periodic transfer function*, Proc. Internat. Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing, Antalya, Turkey, Juin 1999.
- [5] S.D. Stearns et B. Widrow, *Adaptive signal processing*, Prentice-Hall, 1985.