UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
U.F.R FACULTÉ DES SCIENCES
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées.

Laboratoire de
Mathématiques J.A. Dieudonné

Habilitation à diriger des recherches

Spécialité : MATHÉMATIQUES

par

Erwann DELAY

Analyse sur les variétés non-compactes, applications à la géométrie Riemannienne et à la relativité générale

---

Soutenue le 15 juin 2005 devant le jury composé de :

Lars ANDERSSON	**Prof. Univ. Miami**	**Rapporteur**
Alain BACHELOT	**Prof. Univ. Bordeaux**	**Rapporteur**
Piotr T. CHRUŚCIEL	**Prof. Univ. Tours**	**Examinateur**
Philippe DELANOË	**C.R. au C.N.R.S. (Nice)**	**Coordinateur**
Marc HERZLICH	**Prof. Univ. Montpellier II**	**Rapporteur**
Gilles LEBEAU	**Prof. Univ. Nice**	**Président**
François ROUVIÈRE	**Prof. Univ. Nice**	**Examinateur**

Dans la salle de conférence à 14 heures

Table des matières

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mes deux pères des "maths-relat" qui sont Philippe Delanoë et Piotr Chruściel. Le premier, mon directeur de thèse, a guidé mes premiers pas sur les opérateurs elliptiques et leurs applications à certains problèmes de géométrie riemannienne. Le deuxième a su me montrer comment les utiliser pour la relativité générale.

Je remercie Lars Andersson, Alain Bachelot et Marc Herzlich d'avoir toujours suivi mes travaux et d'avoir accepté la tâche de rapporter sur cette habilitation.

Je remercie Gilles Lebeau qui a bien voulu présider ce Jury ainsi que Francois Rouvière qui a accepté d'y participer.

Je tiens à remercier les membres du Laboratoire J. A. Dieudonné de Nice dirigé par Philippe Maisonobe, dont j'ai grand plaisir à retrouver l'entourage pour cette HDR.

Je voudrais aussi remercier l'équipe du Laboratoire de mathématiques et physique théorique de Tours dirigée par Guy Barles de m'avoir accordé leur confiance.

Enfin, je remercie l'équipe du laboratoire d'Analyse non-linéaire et géométrie d'Avignon dirigée par Marie-Claude Arnaud de m'avoir accueilli récemment.

1. Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire[1] portent essentiellement sur l'étude d'opérateurs elliptiques non-linéaires sur des variétés Riemanniennes non-compactes. Ils sont motivés par des questions naturelles provenant de la géométrie Riemannienne (section 3) ou de la relativité générale (section 4).

Une grande partie de mes recherches concerne les variétés asymptotiquement hyperbolique (AH) (voir section 2.1). Ces variétés, qui par certains de leurs comportements ressemblent au modèle à l'infini, jouent un rôle important en physique. En fait, elles entrent dans le cadre des variétés conformément compactes introduites par R. Penrose, dans les années 70, pour l'analyse du comportement asymptotique de l'énergie gravitationnelle des espaces-temps asymptotiquement plats. Plus récemment, les variétés AH d'Einstein s'avèrent jouer un rôle central dans la correspondance AdS/CFT de le théorie quantique des champs. De fait leur étude a pris une considérable expansion.

Nous aborderons aussi le cas des variétés asymptotiquement plates (AF) (voir section 2.2) elles aussi naturelles en relativité générale. Enfin, lors de certains travaux, le cas des variétés compactes (avec ou sans bord) sera évoqué.

En géométrie Riemannienne, les premiers travaux présentés ici (section 3) concernent des problèmes dits de "prescription de courbure" : par exemple, voir si l'on peut trouver une métrique Riemannienne dont la courbure de Ricci est donnée. Cette question a tout d'abord été étudiée par DeTurck [24] et Hamilton [39].

On traite ensuite (section 3.1) du spectre d'un Laplacien naturel agissant sur les (champs de) deux-tenseurs symétriques, question fortement liée a la précédente puisqu'elle est son analogue infinitésimale.

Enfin, des questions d'analyse : savoir quelle est la régularité d'une métrique sur une variété à bord, connaissant celle de sa courbure et celle de sa restriction au bord, question étudiée par de nombreux auteurs, d'abord par DeTurck et Kazdan [27], et plus récemment par M.T. Anderson, A. Katsuda, Y. Kurylev, M. Lassas et M. E. Taylor [6]. Pour les métriques d'Einstein, on sait depuis longtemps qu'elles ont la bonne régularité à l'intérieur en coordonnées harmoniques. Dans le cadre conformément compacte, nous avons pu montrer un résultat de régularité au bord (section 3.3) ; ces métriques peuvent n'être que

[1] Pour plus de clarté, les références concernant mes travaux sont repérées par des lettres et placées en début de bibliographie.

très peu régulières au bord à l'infini, en dimension impaire supérieure à 3.

En relativité générale (section 4), le premier travail presenté ici (section 4.1) concerne des ensembles appelées Horizons dans un espace-temps. Un exemple classique d'Horizon est le bord d'un trou noir. Hawking vers 1973 [40] montrait que dans un cadre assez régulier, sous des conditions naturelle d'énergie, l'aire d'un horizon est croissante avec le temps. Nous avons depuis montré que le cadre régulier peut être supprimé des hypothèses. En effet, un tel horizon a, de part sa nature, une régularité suffisante pour conclure.

Ensuite (section 4.2) nous aborderons les équations de contraintes, ou problème de Cauchy, débuté en en 1944 avec un article de A. Lichnerowicz [47]. Il s'agit de se donner de "bonnes" données initiales (métrique Riemannienne et champ de 2-formes) sur une variété de dimension n, pour obtenir une variété Lorentzienne d'Einstein de dimension $n+1$ par "évolution". Nos travaux dans cette direction ont permis de construire des espace-temps ayant des propriétés physiques et géométriques très utiles.

Enfin (section 4.3), nous verrons la classe des espaces-temps d'Einstein statiques. Le but ultime serait de pouvoir classifier au moins ce type d'espace-temps. Pour ceux qui sont sans trou noir, on sait depuis A. Lichnerowicz [46](1955) et particulièrement depuis M. Anderson [1] que le seul raisonnable possible en constante cosmologique nulle est celui de Minkowski. Selon une annonce faite par Lafontaine et Rozoy [43], il semble qu'il n'y a que De-Sitter lorsque la constante est positive. Nous avons montré que c'est loin d'être le cas lorsque la constante est négative.

Pour terminer (section 5), on proposera quelques questions ouvertes qui découlent de ces recherches ou qui entrent dans le cadre des thèmes décrits ici.

2. Variétés non-compactes et espaces à poids

Nous nous bornerons à certains types de variétés. Celles qui nous intéresseront ici sont de type asymptotiquement hyperboliques, en majorité, mais aussi asymptotiquement plates dans certains cas. Les espaces fonctionnels de types Hölder ou Sobolev, utilisés pour l'analyse, sont alors pondérés pour mesurer le comportement asymptotique des objets considérés.

2.1. **Variétés asymptotiquement hyperboliques.**

On considère une variété compacte $\overline{M}$ avec bord. On suppose que le bord ∂M est une union disjointe de sous variétés fermées nommées $\partial_0 M$ et $\partial_\infty M$, cette dernière non vide. On pose alors $M = \overline{M} \backslash \partial_\infty M$; c'est une variété non compacte (avec frontière si $\partial_0 M \neq \varnothing$) : on dira que $\partial_0 M$ est la *frontière intérieure* de M et $\partial_\infty M$ sa *frontière à l'infini.*

Lorsque la frontière intérieure est non vide, une telle variété peut être vue comme section de genre espace d'un espace temps avec trou noir.

Une *fonction définissante* de M est une fonction positive $\rho \in C^\infty(\overline{M})$ vérifiant $\rho(x) = 0$ ssi $x \in \partial_\infty M$ et $d\rho$ ne s'annule jamais sur $\partial_\infty M$.

Une métrique Riemannienne g sur la variété M est dite *conformément compacte* s'il existe une fonction définissante ρ telle que $\rho^2 g$ s'étende en une métrique assez régulière sur $\overline{M}$, notée $\overline{g}$.

Notons que la métrique $\overline{g}$ induit sur $\partial_\infty M$ une métrique $\widehat{g}$ et que deux fonctions définissantes donneront la même métrique sur la frontière infini, à un facteur conforme près. On appelle $\widehat{g}$ (ou sa classe conforme) *l'infinité conforme* de g.

Si l'on impose alors $|d\rho|_{\overline{g}} = 1$ sur $\partial_\infty M$, il est bien connu que la courbure sectionnelle de g approche -1 à l'infini, on dit alors que (M, g) est *asymptotiquement hyperbolique.* Notons que la topologie de l'infini peut être non triviale.

Les espaces de Banach $C^{k,\alpha}_s$ utilisés dans ce contexte mesurent le comportement asymptotique des fonctions ou (champs de) tenseurs *ainsi que de leurs dérivées.* Sans rentrer dans les détails, disons qu'une fonction u est dans $C^{k,\alpha}_s(M)$ si pour tout $l \in \{0, ..., k\}$, les dérivées l^{iemes} de u sont de l'ordre de ρ^{s-l} relativement à $\overline{g}$. Par exemple une fonction typique de $C^{k,\alpha}_s(M)$ est $u = \rho^s$, de même que la métrique $g = \rho^{-2}\overline{g}$ est dans $C^{k,\alpha}_{-2}(M, \mathcal{S}_2)$ et donc que $\rho^s g$ est dans $C^{k,\alpha}_{s-2}(M, \mathcal{S}_2)$.

2.2. **Variétés asymptotiquement plates.**

Les variétés asymptotiquement plates (ou asymptotiquement euclidienne) sont très largement étudiées en relativité générale mais aussi en géométrie riemannienne (en relation avec le problème de Yamabe par exemple). Contrairement au cas asymptotiquement hyperbolique, la définition que nous choisirons ici impose la topologie à l'infini comme étant celle du modèle.

Une variété Riemannienne (M, g) est *asymptotiquement plate* (à un bout) si une fois privée d'un compact, elle est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$ privé d'un boule et que dans cette carte, les coefficients de la métrique vérifient pour un $\tau > 0$,

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^{-\tau}),\ \ \partial_k g_{ij} = O(|x|^{-\tau-1}),\ \ \partial_l \partial_k g_{ij} = O(|x|^{-\tau-2}),\ ...$$

avec autant de dérivées que nécessite le cadre dans lequel on se place. Cette définition a tout d'abord été introduite par les physiciens pour traduire le fait qu'à l'infini d'un système isolé, les interactions gravitationnelles doivent décroître, et donc la métrique doit ressembler à l'infini à la métrique euclidienne. Il a été prouvé depuis que cette propriété est une notion géométrique ([10] , [20]) et que l'on peut en donner des caractérisations intrinsèques avec des conditions de type décroissance à l'infini de la courbure plus rapide que r^{-2} (r étant la distance à un point fixe sur une variété complète) et croissance sur-euclidienne des boules [9]. Noter que la décroissance de la courbure ne suffit pas pour que la variété soit asymptotiquement plate au sens défini ici [50].

De même que précédemment, on définit aussi dans ce contexte des espaces à poids mesurant le comportement à l'infini des objets considérés ainsi que de leurs dérivées.

Lorsqu'une variété (M, g) est asymptotiquement plate à un ordre $\tau > (n-2)/2$, et si sa courbure scalaire est dans L^1, on peut lui associer un invariant géométrique (voir par exemple [10] ou [20]), sa masse ADM (voir [7]) :

$$m(g) := \frac{1}{4\omega_{n-1}} \lim_{r\to\infty} \int_{S_r} \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu^i d\mu,$$

où ω_{n-1} est le volume de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$, S_r est la sphère de rayon r , $d\mu$ est la mesure standard sur S_r et ν est le vecteur unité normal sortant à S_r.

Dès lors qu'une carte asymptotiquement plate est choisie, un autre objet important est alors le centre de masse (lorsqu'il est défini). Sa k^{ieme} coordonnée est donnée par (voir [12] par exemple) :

$$c^k(g) = C_n \lim_{r\to\infty} \left[\int_{S_r} x^k \sum_{i,j} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu^i d\mu - \int_{S_r} \sum_i (g_{ik}\nu^i - g_{ii}\nu^k) d\mu \right],$$

où $C_n = \frac{-n}{4(n-1)\omega_{n-1} m(g)}$ est une constante[2].

Un exemple de métrique asymptotiquement plate de masse m et centre c sur $\mathbb{R}^n \backslash \{c\}$ est celle de Schwarzschild :

$$g(x) = \left(1 + \frac{m}{(n-2)|x-c|^{n-2}}\right)^{\frac{4}{n-2}} \delta,$$

où δ désigne la métrique euclidienne standard.

[2]Cette constante dépend des auteurs, notamment il est souvent pratique de ne pas diviser par m pour autoriser les masses nulles

3. Géométrie Riemannienne

3.1. **Etude d'opérateurs de courbure.**

Avant de décrire les problèmes, précisons quelques notations. On se donne (M, g) une variété Riemannienne de classe C^∞, de dimension n.

Considérons pour $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ le fibré des tenseurs covariants de rang p et contravariants de rang q noté $\mathcal{T}_p^q$. Notons $Riem(g) \in \mathcal{T}_3^1$ le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel défini en coordonnées locales $(x^1, ..., x^n)$ par (on utilise la convention de sommation) :

$$Riem(g) = R^q_{jlk} \frac{\partial}{\partial x^q} \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^k,$$

où

$$R^q_{jlk} = \partial_l \Gamma^q_{jk} - \partial_k \Gamma^q_{jl} + \Gamma^p_{jk}\Gamma^q_{pl} - \Gamma^p_{jl}\Gamma^q_{pk},$$
$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks}(\partial_i g_{sj} + \partial_j g_{is} - \partial_s g_{ij})$$

et où g^{ks} dénote la matrice inverse de g_{ij}.

Considérons aussi :

$$\begin{aligned} Sect(g) &= g_{iq} R^q_{jlk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^k \\ &=: S_{ijlk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^l \otimes dx^k, \end{aligned}$$

le tenseur de courbure sectionnelle dans $\mathcal{T}_4$, et :

$$Ricci(g) = R^q_{jqk} dx^j \otimes dx^k =: R_{jk} dx^j \otimes dx^k,$$

le tenseur de courbure de Ricci dans $\mathcal{S}_2$ (sous-espace de $\mathcal{T}_2$ des tenseurs symétriques), enfin :

$$Scal(g) = g^{ij} R_{ij},$$

la courbure scalaire, qui est une fonction sur M. Ces tenseurs possèdent certaines propriétés algébriques grâce auxquelles il suffit de connaître les S_{ijij} et les g_{ij} pour retrouver algébriquement toutes les courbures, $Sect(g)$, $Riem(g)$, $Ricci(g)$ et $Scal(g)$.

Cartan a montré que deux variétés Riemanniennes, ayant localement "la même" courbure sectionnelle, sont localement isométriques (Riemann l'avait prouvé pour le cas localement euclidien, de courbure nulle). Une question naturelle se pose alors : si l'on impose une courbure, existe-t-il une métrique réalisant cette courbure ? C'est aussi une question importante en relation avec les équations d'Einstein de la Relativité Générale (voir section 4.2).

Dans ma thèse j'ai étudié la prescription de la courbure de Ricci sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, au voisinage de la métrique hyperbolique. Rappelons le contexte.

On se donne R dans $\mathcal{S}_2$ et on cherche à résoudre l'équation quasi-linéaire

$$Ricci(g) = R.$$

DeTurck [24], en 1981, a tout d'abord montré un résultat d'existence locale au voisinage d'un point p dans $\mathbb{R}^n$ sous l'hypothèse (intrinsèque) que la matrice de $R(p)$ est inversible (il a depuis entrepris une longue étude systématique pour le cadre local, comme le montrent ses travaux en 1999 [26]).

Puis il y a eu des résultats *globaux* : DeTurck [25], en 1982, a traité le cas très particulier de la dimension 2, pour les surfaces *compactes*. Il obtient une condition nécessaire et suffisante faisant intervenir la caractéristique d'Euler-Poincaré. Hamilton [39], en 1984, a traité le cas de la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $n > 2$) en prouvant un résultat d'inversion locale au voisinage de la métrique standard.

Résultat complémentaire de celui de Hamilton sur la sphère (cf. supra), j'ai obtenu le théorème suivant concernant la prescription de la courbure de Ricci sur l'espace hyperbolique (voir [D4] théorème 1 et [D5] théorème 4.5 pour une généralisation) :

Théorème 3.1. *Sur la boule unité B de $\mathbb{R}^n$, je considère la métrique hyperbolique standard g_0 dont la courbure de Ricci vaut : $R_0 = -(n-1)g_0$ (c'est une métrique d'Einstein). Si $n \geq 10$, posons $s^\pm = n - 1/2 \pm \sqrt{(n-1)^2/4 - 2n}$, alors pour tout $s \in]s^-, s^+[$ et pour tout tenseur R suffisamment proche de R_0 dans $C^{k,\alpha}_{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$, il existe une métrique unique g (dépendant continûment de R) proche de g_0 dans $C^{k,\alpha}_{s-2}(B, \mathcal{S}_2)$, dont la courbure de Ricci vaut R.*

Notons que ce théorème est démontré pour des métriques g asymptotiques à g_0 à l'infini ($s > 0$).

L'équation de Ricci est un système différentiel quasi linéaire du second ordre en la métrique. Les opérateurs utilisés dans notre contexte sont totalement caractéristiques (chaque dérivation est compensée par une multiplication par ρ ce qui a pour effet de conserver le même poids s).

La méthode de résolution, utilisée par DeTurck [24] et dont l'idée remonte Choquet-Bruhat [34], consiste à perturber l'équation de Ricci en une équation cette fois-ci elliptique $Q(g, R) = 0$, résoudre cette dernière équation par un argument de fonctions implicites, puis montrer que ces solutions vérifient l'équation de Ricci.

Corollairement à mon premier résultat, j'ai obtenu un *scindage* du sous-fibré des tenseurs de type Riemann-Christoffel, au voisinage de celui de la métrique hyperbolique g_0. Ce scindage m'a permis de donner, dans le cadre C^∞, le théorème suivant :

Théorème 3.2. *L'image de $g \longrightarrow Riem(g)$ au voisinage de g_0 est une sous-variété, graphe d'une application (pour le scindage précédent) lisse.*

Ce résultat a été généralisé depuis à deux autres cas où l'on sait résoudre l'équation de Ricci ([DH] et [D5]).

Il existe aussi des résultats d'obstruction sur la courbure de Ricci : DeTurck-Koiso [28](1984), Baldès [8](1986), Hamilton [39](1984) , dans le cadre de la courbure *positive*. Sur l'espace hyperbolique, j'ai obtenu l'obstruction suivante (qui peut être vue comme un théorème de rigidité) :

Théorème 3.3. *Soit $R = R_0 + \mu\rho^s g_0$, où $\mu \neq 0$ est un réel assez petit et s un entier plus grand que $n-1$. Alors pour tout $t > n-1$, il n'existe pas de métrique g voisine de g_0 dans $C^{k,\alpha}_{t-2}(B, \mathcal{S}_2)$, qui admette R pour tenseur de Ricci.*

Après ma thèse, j'ai d'abord obtenu un résultat concernant la prescription du tenseur d'Einstein (au voisinage de l'espace hyperbolique) :

$$Ein(g) = Ricci(g) - \frac{1}{2}Scal(g)g,$$

qui est à divergence nulle (identité de Bianchi). Ce théorème est démontré en dimension $n \geq 3$ pour des poids $s \in]0, n-1[$, par une méthode semblable à celle de la résolution de l'équation de Ricci ; il est intégré dans [D4].

Ensuite j'ai travaillé en collaboration avec Marc Herzlich (Montpellier II) à l'extension des résultats de ma thèse concernant les courbures de Ricci et de Riemann, au cas des espaces symétriques non compacts de rang 1. Nous avons notamment légèrement amélioré, et ainsi rendu optimal, l'intervalle de poids dans lequel s'applique les théorèmes 3.1 et 3.2. Nous avons aussi obtenu un théorème de type rigidité analogue au théorème 3.3, cette fois-ci optimal concernant le poids. Par ailleurs, nous nous sommes intéressés au poids 0 qui permet de modifier la structure conforme à l'infini, et là aussi nous donnons quelques obstructions, par exemple nous avons le ([DH] théorème 3.2 et exemple 3.3) :

Théorème 3.4. *Soit f est une fonction harmonique sur l'espace hyperbolique réel (B, g_0) et ne s'annulant jamais à l'infini. Il n'existe pas de courbe différentiable $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[\to h(t) \in C^0_{-2} \cap C^2$ de formes bilinéaires symétriques vérifant $h(0) = 0$ et*

$$\frac{d}{dt} Ric(g_0 + h(t)) = f g_0.$$

Cet article est paru au *Journal of Geometric Analysis* [DH].

J'ai aussi généralisé des résultats de [D4] au cas des variétés d'Einstein asymptotiquement hyperboliques sans frontière intérieure. J'ai obtenu à ce sujet des théorèmes analogues aux théorèmes 3.1 et 3.2, concernant l'équation de prescription (E donné) :

$$Ein(g) := Ric(g) - \frac{1}{2}Scal(g)g + \Lambda g = E,$$

où Λ est un réel. On a par exemple ([D5] théorème 5.5) :

Théorème 3.5. *Soit (M, g_0) une variété d'Einstein asymptotiquement hyperbolique de dimension $n \geq 3$, de courbure sectionnelle plus petite que -1 et dont l'invariant de Yamabe de la structure conforme à l'infini vérifie $\mathcal{Y}[\widehat{g}_0] \geq 0$. Supposons $-\frac{(n-1)^2(n-2)}{2} \leq \Lambda < \frac{(n-1)^2(n-2)}{8}$ et $\Lambda \neq -\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Soit $s^{\pm} := \frac{n-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(n-1)^2}{4} - \frac{2}{n-2}\Lambda}$. Alors pour tout $s \in]s^-, s^+[$, $s \geq 0$ et pour tout 2-tenseur covariant symétrique E voisin de $Ein(g_0)$ dans $C^{k,\alpha}_{s-2}(M, \mathcal{S}_2)$ il existe une unique métrique proche de g_0 dans le même espace, solution de l'équation $Ein(g) = E$.*

Dans la démonstration j'utilise des résultats de Lee [44] liant l'invariant de Yamabe de la structure conforme à l'infini à la première valeur propre du Laplacien sur les fonctions.

Notons que le cas $\Lambda < 0$ permet de déformer l'infinité conforme (puisque $s = 0$ est autorisé), un progrès par rapport au cas $\Lambda = 0$ étudié juste après ma thèse.

Ce travail est paru dans *Advances in Math.* [D5].

3.2. **Spectre du Laplacien de Lichnerowicz.**

Après l'étude des Laplaciens agissant sur les fonctions, puis ceux agissant sur les p-formes, les plus naturels sont ceux agissant sur les (champs de) 2-tenseurs symétriques. En effet c'est l'espace de vie des variations de métriques. On tombe d'ailleurs naturellement sur ce type d'opérateur lorsque l'on cherche des métriques d'Einstein, ou comme précédemment, lorsque que l'on veut prescrire la courbure de Ricci. Pour les variations infinitésimales des métriques d'Einstein, on peut citer les travaux de Koiso (voir [41]). La version infinitésimale du problème de courbure de Ricci prescrite est l'inversion du Laplacien de Lichnerowicz. Il était donc naturel que je m'intéresse à ce problème. Par ailleurs les résultats obtenus sur l'opérateur de Ricci ne passaient qu'en dimension plus grande que 9 (voir théorème 3.1), ceci dû au fait que j'utilisais une estimation minorant le bas du spectre du Laplacien de Lichnerowicz par celui sur les fonctions. Bien que le comportement asymptotique de cet opérateur suggérait qu'on ne pouvait faire mieux (sur la dimension) il restait à le prouver (voir Théorème 3.6 ci-après).

J'ai calculé le spectre essentiel du Laplacien de Lichnerowicz $\triangle_L$ sur les deux tenseurs covariants symétriques de trace nulle ; ceci sur *toutes* les variétés asymptotiquement hyperboliques. Le cas de la sphère ou du projectif réel a été auparavant résolu par Boucetta [16] d'une façon différente. Notons que Δ_L est un opérateur qui intervient lors de la linéarisation de l'opérateur de Ricci. Notons aussi que l'action de $\triangle_L$ sur la partie conforme correspond à l'action du Laplacien sur les fonctions, dont on connaît déjà le spectre [48].

J'ai obtenu le théorème suivant (ce résultat a aussi été prouvé par Lee [45]) ([D6] théorème 6.1) :

Théorème 3.6. *Soit (M, g) une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension n. Le spectre essentiel de Δ_L est la demi-droite $[\frac{(n-1)(n-9)}{4}, \infty[$. Dans le cas particulier de l'espace hyperbolique, cette demi-droite est le spectre.*

La méthode de type Bochner utilisée donne aussi les résultats pour tous les Laplaciens géométriques de la forme $\nabla^*\nabla$ + termes de courbures.

Ces résulats découlent d'existence ou non d'estimations asymptotiques pour le spectre essentiel et d'estimations globales pour le spectre. L'existence ou non de ces estimations asymptotiques caractérise la propriété Semi-Fredholm de l'opérateur.
Pour ce qui concerne la partie existence, je me suis inspiré d'une estimation que Lee avait faite sur les formes et qui se trouve dans [5]. En revanche la partie non-existence est complètement indépendante. Ce travail a été publié dans le *Journal of Geometry and Physics* [D6].

3.3. **Régularité au bord.**

Avec P.T. Chruściel, J.M. Lee et D. Skinner, nous nous sommes intéressés à un problème de régularité au bord pour les métriques d'Einstein conformément compactes. Cette question a notamment été posée par M.T. Anderson [3] ; il a prouvé en dimension 4, que lorsqu'une métrique est d'Einstein, conformément compacte, avec infinité conforme lisse, alors il existe un système de coordonnées au voisinage du bord (à l'infini) où la métrique conforme est lisse jusqu'au bord. Il avait été conjecturé longtemps auparavant qu'en toutes dimensions, de telles métriques ont des développements asymptotiques à l'infini en puissances de ρ et $\ln \rho$ (voir [31] par exemple).

Nous avons répondu à ces questions par le théorème suivant (les notations sont celles de la section 3.1)([CDLS] théorème A) :

Théorème 3.7. *Soit (M, g) une variété d'Einstein asymptotiquement hyperbolique lisse de dimension $n+1 \geq 3$. On suppose que g est conformément compacte de classe C^2 (ie. $\rho^2 g$ est C^2 sur $\overline{M}$) et que son infinité conforme γ est lisse. Alors pour tout représentant lisse $\widetilde{\gamma}$ de la classe conforme $[\gamma]$ et tout $\lambda \in]0,1[$, il existe un $C^{1,\lambda}$-difféomorphisme Φ entre voisinages du bord à l'infini tel que*

$$\Phi^* g = \rho^{-2}(d\rho^2 + G(\rho)),$$

où $\{G(\rho) : \rho \in]0, R[\}$ est une famille à un paramètre de métriques lisses sur $\partial_\infty M$. De plus $d\rho^2 + G(\rho)$ est continue jusqu'au bord, $G(0) = \widetilde{\gamma}$ et

(a) Si $n+1$ est pair ou égal à 3, $d\rho^2 + G(\rho)$ est lisse jusqu'au bord.

(b) Si $n+1$ est impair et strictement plus grand que 3, $G(\rho) = \varphi(\rho, \rho^n \ln \rho)$, où $\varphi(\rho, z)$ est une famille à deux paramètres de métriques sur $\partial_\infty M$. Cette famille étant lisse en tous ces arguments comme fonction sur $\partial_\infty M \times [0, R] \times [0, R^n \ln R]$. De plus $\Phi^* g$ est C^∞ conformément compacte si et seulement si $\partial_z \varphi(0,0)$ est nulle sur $\partial_\infty M$.

Le 2-tenseur symétrique $\partial_z \varphi(0,0)$ le long de $\partial_\infty M$ peut être en principe déterminé par des calculs impliquant la classe conforme $[\gamma]$ (voir [31]). Son annulation est une condition nécessaire pour l'existence d'une métrique d'Einstein C^∞-conformément compactifiable avec $[\gamma]$ comme infinité conforme.

L'idée principale de la preuve consiste à utiliser l'équation d'application harmonique pour inscrire g dans une jauge dans laquelle elle satisfait une équation elliptique, puis d'appliquer un résultat de polyhomogénéité de [5]. La preuve se fait en quatre étapes. Tout d'abord on construit un premier difféomorphisme au voisinage du bord qui permet de faire coïncider $\rho^2 g$ au second ordre le long de $\partial_\infty M$ avec une métrique produit lisse $\overline{h}$. Ensuite on applique le théorème d'inversion locale pour l'équation d'application harmonique pour montrer qu'il existe un difféomorphisme H au voisinage du bord qui est harmonique comme application de (M, g) dans $(M, h = \rho^{-2}\overline{h})$. La métrique $\widetilde{g} = (H^{-1})^* g$ satisfait alors près du bord l'équation

$$Ric(\widetilde{g}) + n\widetilde{g} - \delta^*_{\widetilde{g}}(\Delta_{\widetilde{g}h}(Id)) = 0,$$

où $\Delta_{\widetilde{g}h}$ est le Laplacien harmonique. La troisième étape consiste a vérifier que les solutions de cette équation satisfont les hypothèses de [5] et sont donc polyhomogènes (ie : ont un développement asymptotique en puissances de ρ et $\ln \rho$). Enfin, on utilise une fonction définissante spéciale et des coordonnées de Fermi près du bord pour mettre la métrique sous la forme voulue.

Ce travail vas paraître au *Journal of Differential Geometry* [CDLS].

4. Relativité générale

4.1. **Horizons et trous noirs.**

Il s'agit d'un travail en collaboration avec Piotr Chruściel (Tours), Gregory J. Galloway (Miami) et Ralph Howard (Columbia, S. C.). Notre recherche portait sur le théorème de l'aire pour les trous noirs (cf. Hawking, Ellis [40] par exemple). Un trou noir est un ensemble futur dont la frontière $\mathcal{H}$ est une hypersurface dégénérée appelée *horizon d'évènements.* Un tel horizon est engendré par des géodésiques isotropes appelées *générateurs.* Nous avons montré le théorème suivant ([CDGH] théorème 1.1) :

Théorème 4.1. *Soit $\mathcal{H}$ l'horizon d'évènements d'un trou noir dans une variété Lorentzienne lisse (M, g) satisfaisant des hypothèses naturelles. Soient Σ_a, $a = 1, 2$ deux hypersurfaces achronales plongées de genre espace de classes C^2 et soient $S_a = \Sigma_a \cap \mathcal{H}$. Alors :*

1) l'aire des S_a est bien définie

2) Si S_1 est dans le passé de S_2 alors son aire est plus petite (ou égale).

3) Si de plus l'aire de S_1 est égale à celle de S_2 alors la partie de l'horizon comprise entre les deux est une hypersurface isotrope lisse (analytique si la métrique est analytique) dont la seconde forme fondamentale est nulle.

(Une version de) ce résultat est connue sous le nom du théorème d'aire de Hawking, et est d'une importance fondamentale pour la physique de trous noirs, justifiant l'introduction d'une notion d'entropie dans ce contexte. La version démontrée par Hawking [40] fait (implicitement) l'hypothèse de différentiabilité C^3 de $\mathcal{H}$. Or Chruściel et Galloway [22] ont construit des horizons non différentiables sur un sous-ensemble dense. Notre recherche a montré que le résultat reste vrai sans aucune condition de différentiabilité de $\mathcal{H}$. La démonstration nécessite l'utilisation d'arguments de théorie de la mesure géométrique, que je décris brièvement ici. Nous montrons tout d'abord qu'un tel horizon est semi-convexe. Ainsi par le théorème d'Alexandrov (cf. [33] appendice E par exemple), il est deux fois différentiable presque partout en un sens approprié. On peut ainsi définir une divergence θ (l'expansion pour les physiciens) presque partout sur $\mathcal{H}$ et on montre qu'elle est positive. Ensuite, par des approximations de type Lusin-Whitney, on peut plonger certains sous-ensembles de l'horizon dans des variétés $C^{1,1}$. Le théorème de l'aire découle alors d'un changement de variable pour les applications lipchitziennes (cf. Federer [30]).

Le cas d'égalité est une question importante aussi bien pour la classification des trous noirs stationnaires que pour la compréhension des horizons de Cauchy compacts.

Ce travail concernant les trous noirs a fait l'objet d'une publication aux *Annales Henri Poincaré* [CDGH].

4.2. **Equations de contraintes.**

Avec Piotr Chruściel, nous nous sommes intéréssés aux équations de contraintes en relativité générale. Le problème se présente de la manière suivante. Soit $(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$ est une variété lorentzienne de dimension $(n+1)$, solution des équations d'Einstein du vide :

$$Ric(\mathfrak{g}) = 0.$$

Soit M une hypersurface de genre espace, de métrique riemannienne induite g et de seconde forme fondamentale K. Alors sur M, on a :

$$(C) \qquad \begin{cases} J(K,g)_j := {}^g\nabla^i K_{ij} - {}^g\nabla_j (tr_g\, K) = 0 \\ \rho(K,g) := Scal(g) - |K|_g^2 + (tr_g\, K)^2 = 0 \end{cases} .$$

Ces equations, dites de contraintes, sont satisfaites par les données de Cauchy pour l'équation d'Einstein $\mathrm{Ric}(\mathfrak{g}) = 0$ qui est hyperbolique en coordonnées harmoniques. Ainsi réciproquement, si on a un couple (K, g) solution de (C) sur une variété M de dimension n, il existe [19] $(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$ solution des équations d'Einstein, "autour" de M. Par ailleurs des informations supplémentaires sur M permettent de décrire $\mathcal{M}$ (voir par exemple [35]).

Lorsque l'on étudie cet opérateur de contraintes, il est naturel de s'interesser à l'opérateur linéarisé ainsi qu'à l'adjoint formel L^2 de ce dernier. Les éléments du noyau de cet adjoint sont alors appelés KID (Killing Initial Data).

Le cas $tr_g K = Cte$ (courbure moyenne constante) et plus particulièrement $K = 0$ (time symmetric) a été largement étudié par des méthodes conformes (voir [5] par exemple, pour le cadre asymptotiquement hyperbolique).

Récemment, Corvino et Schoen [18] [17], ont construit des solutions de (C) pour $K = 0$, qui sont exactement l'espace de Schwarzschild (Riemannien) en dehors d'un compact. Leur méthode, remarquable, n'est plus conforme et consiste à recoller une variété asymptotiquement plate de courbure scalaire nulle avec un espace de Schwarzschild, ceci sur un anneau $(R, 2R)$, de rayon R assez grand.

Le manque de contrôle sur le rayon de recollement ne permettait pas de bien décrire l'espace-temps correspondant. Avec P. Chruściel, nous avons montré que sous certaines conditions, le recollement pouvait se faire sur un anneau fixe, par exemple voici une forme très simplifiée de ce résultat ([CD1] théorème 2.1) :

Théorème 4.2. *Considérons une solution des équations de contraintes* $(\mathbb{R}^3, g_0, K_0 = 0)$*, de masse* m_0 *et satisfaisant la condition de parité :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, g_0(x) = g_0(-x).$$

Considérons sur $\mathbb{R}^3 \backslash B(0, R)$ *la famille des métriques de Schwarzschild de centre* $c = 0$ *paramétrées par leur masse* m*. On peut alors recoller les deux solutions sur l'anneau de centre* 0 *et de rayons* $(R, 2R)$ *pour former une nouvelle solution sur* $\mathbb{R}^3$ *à condition que les métriques soient proches sur la sphère de centre* 0 *et rayon* R*.*

La condition de parité permet d'assurer que le centre de masse est 0, alors qu'il semble très difficile à contrôler autrement. Il faut savoir que de telles métriques "paires" existent par des méthodes conformes. La conséquence la plus importante de ce résultat est la réponse affirmative à une conjecture qui remonte à R. Penrose dans les années 60 affirmant l'existence d'espaces-temps asymptotiquement simples non-triviaux. Le seul de régularité C^3 connu jusqu'alors était Minkowski, ce travail est depuis cité par de nombreux auteurs dans ce contexte (voir [36], [42] ou les proceedings de [21] par exemple).

La technique de recollement nous a aussi permis de construire des espaces-temps comportant autant de trous noirs que l'on désire et dont on connaît *exactement* la géométrie près des trous noirs et en dehors d'un compact. Ce travail est paru dans *Class. Quant. Grav.* [CD1].

Nous avons ensuite généralisé la méthode pour le cas $K \neq 0$, en recollant cette fois avec un espace de Kerr. Au passage, nous avons étudié l'opérateur de contraintes ((J, ρ) voir (C)) dans des espaces à poids, dans le cadre asymptotiquement plat, asymptotiquement hyperbolique et sur un compact à bord. Cette étude a conduit à de multiples applications. Par exemple, nous avons montré que le recollement par somme connexe de deux variétés de courbure scalaire nulle, prouvé par [38] avec une méthode conforme, peut en fait être localisé près de la région de recollement. Ainsi on ne modifie pas les métriques respectives en dehors de la zone de recollement. Nous avons aussi montré que les solutions asymptotiques formelles d'espaces statiques (resp. stationnaires) (voir section 4.3) construites par Beig et Simon [49] permettent d'obtenir des solutions exactes asymptotiquement statiques (resp. stationnaires) dont on peut prescrire le comportement à l'infini à n'importe quel ordre. Ce travail est paru aux *Mémoires de la SMF* [CD2].

Par la suite, toujours avec Piotr Chruściel, nous nous sommes intéressés à la structure des solutions des équations (C). En effet, il est utile d'avoir une structure de variété de Banach pour les solutions asymptotiquement plates de (C) si l'on veut minimiser la masse ADM (voir [11] par exemple). Par ailleurs, une structure appropriée permet d'utiliser des théorèmes du type Smale-Sard, ou catégorie de Baire, lorsque l'on discute de la généricité de certaines propriétés des solutions. Certains résultats donnent une structure de Fréchet dans la cas compact [32] et dans le cas asymptotiquement plat [4]. Nous avons montré que l'on peut obtenir une structure de type Banach dans les cadres asymptotiquement plat, asymptotiquement hyperbolique et sur une variété compacte (avec ou sans bord). Par exemple nous avons le théorème ([CD3], théorème 6.2) :

Théorème 4.3. *Soit (M, g, K) une solution des équations de contraintes avec g asymptotiquement plate à l'ordre $o(1)$ et K de l'ordre $o(r^{-1})$. Pour $\beta \in \mathbb{R}$, on considère un Banach classique dans ce contexte $\Lambda^{-\beta}$ dont les éléments sont des couples $(\delta K, \delta g)$ de l'ordre de $(o(r^{-\beta-1}), o(r^{-\beta}))$ ayant une certaine régularité. Alors pour tout $\beta \geq 0$, $\beta \neq n-2, n-1$, toute composante connexe du sous-ensemble de $\Lambda^{-\beta}$ constitué des couples vérifiant :*
(a) $(K + \delta K, g + \delta g)$ est solutions des équations de contraintes,
(b) $(K + \delta K, g + \delta g)$ ne possède pas de KIDs de l'ordre de $o(r^{\beta+2-n})$,
(c) $g + \delta g$ et δ sont unifomements équivalentes au voisinage de l'infini, est une sous-variété plongée de $\Lambda^{-\beta}$.

Il est par ailleurs connu que lorsque $\beta \in]0, n-2[$, la condition (b) est toujours vérifiée. Notre travail a déjà été utilisé pour montrer qu'il n'y a génériquement pas de KIDs (voir [13]). Ce résultat est paru au *Journal of Geometry and Physics* [CD3].

4.3. **Espaces-temps statiques.**

En toute théorie physique il est essentiel de comprendre les solutions statiques des équations que l'on considère. En particulier il est important de classifier les solutions statiques des équations d'Einstein du vide. Par exemple, un résultat récent remarquable de Michael Anderson [1] montre que la seule solution stationnaire géodésiquement complète des équations d'Einstein du vide avec constante cosmologique égale à zéro est l'espace–temps de Minkowski. On peut aussi regarder l'annonce de Lafontaine et Rozoy [43] sur la classification des variétés compactes de dimension 3 qui admettent une solution V (de Bott-Morse) des deux dernières équations ci-dessous.

Du point de vue de la théorie des cordes, et des supergravités, il est utile d'avoir des résultats analogues dans le cas où la constante cosmologique est strictement négative. Ce problème peut alors être reformulé de la façon suivante : on se donne une variété conformément compacte (M, g) de dimension n. On suppose qu'il existe une fonction V sur M vérifiant

$$V \geq 0, \quad V(p) = 0 \iff p \in \partial_0 M$$
$$\triangle_g V = \Lambda V$$
$$V Ric(g) = {}^g\nabla\nabla V + \Lambda V g.$$

Si ρV s'étend en une fonction lisse sur $\overline{M}$ avec $\lim_{\rho \to 0} \rho V > 0$ alors la variété $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times M$ munie de la métrique Lorentzienne

$$\mathfrak{g} = -V^2 dt^2 + g$$

est statique, possède une complétion conforme $\overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup (\mathbb{R} \times \partial_\infty M)$, et est solution des équations d'Einstein du vide. Un exemple de telle métrique est la solution dite "anti-de Sitter", qui a la propriété d'être conformément compacte dans le sens décrit plus haut. Le problème est alors de classifier toutes les solutions de ce problème , et d'abord d'en construire, telles que g soit conformément compacte, avec V telle que la variété Lorentzienne associée soit géodésiquement complète (des résultats partiels ont été obtenus dans [23]).

Nous avons travaillé sur ces espaces avec M. T. Anderson et P. T. Chruściel. Nous avons ainsi construit toute une classe d'espaces-temps statiques de dimension 4 (n=3) ([ACD] théorème 1) :

Théorème 4.4. *Toute métrique Lorentzienne statique C^∞ γ sur $\mathbb{R} \times S^2$, i.e.*

$$\gamma = -\alpha^2 dt^2 + g_{S^2},$$

avec $\alpha > 0$ sur S^2, de courbure scalaire positive sur $\mathbb{R} \times S^2$, est l'infinité conforme d'une métrique Lorentzienne statique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$, solution des équations d'Einstein du vide avec constante cosmologique $\Lambda = -6$.

En fait tout le travail est fait en Riemannien de dimension 4 avant de passer en Lorentzien. On considère une variété asymptotiquement hyperbolique d'Einstein (d'aprés Lee [45] il en existe beaucoup). D'après Anderson [2], pour une telle métrique en dimension 4, s'il existe une action S^1 (ou G) conformément isométrique sur le bord à l'infini, elle s'étend en une action S^1 (ou G) isométrique sur toute la variété. L'étude de cette action et de la variété quotient (Σ, g_Σ) montre que la métrique sur $M =$ "$S^1 \times \Sigma$" a une forme du type

$$g = u^2 d\varphi^2 + g_\Sigma,$$

où φ paramétrise S^1 et u est une "fonction sur Σ". On définit alors la variété Lorentzienne statique d'Einstein $(\mathcal{M}, \mathfrak{g})$ par $\mathcal{M} =$ "$\mathbb{R} \times \Sigma$" et

$$\mathfrak{g} = -u^2 dt^2 + g_\Sigma.$$

Ce travail est paru dans le *Journal of High Energy Physics* [ACD].

Depuis, nous avons étendu ce type de résultats pour les dimensions plus grandes que 4. Cette généralisation est importante notamment en théorie des cordes, elle va paraître aux proceedings d'une conférence à Strasbourg [ACD2].

5. Perspectives de recherches

• Concernant le Laplacien de Lichnerowicz, j'essaie de voir si on peut caractériser son image et son noyau (ou au moins celui d'un autre Laplacien naturel) sur l'espace hyperbolique (les travaux de R. Mazzeo [48] sont utiles pour cela). J'espère pouvoir ainsi deviner de possibles obstructions à la résolution de l'équation de Ricci notamment pour les dimensions comprises entre 3 et 9, laissées ouvertes depuis ma thèse. Notons qu'on devrait pouvoir produire des tenseurs interdits sans connaître exactement l'image de $\triangle_L$.
Par ailleurs concernant son noyau L^2, il y a de fortes chances que, sur le modèle, il soit trivial comme c'est le cas pour les fonctions ou les formes.

• Parallèlement, je m'intéresse à un problème de Dirichlet pour les opérateurs de la forme $g \to E(g) := Ric(g) + aScal(g)g + bg$ (le problème sera, à mon avis, bien posé pour certaines valeurs de a et b réels fixés). Il s'agit de se donner un 2-tenseur symétrique $E = O(\rho^{-2})$ sur une variété d'Einstein asymptotiquement hyperbolique (M, g_0, ρ) avec $\lim_{\rho\to 0} \rho^2 E \neq \lim_{\rho\to 0} \rho^2 E(g_0)$ et de chercher une métrique asymptotiquement hyperbolique (avec la même fonction définissante) solution de l'équation de $E(g) = E$. Comme d'une part on doit avoir $|d\rho|_{\overline{g}} = 1$ sur le bord à l'infini et d'autre part $Ric(g) = -(n-1)g + O(\rho^{-1})$, cela donne une condition nécessaire sur E. Une méthode serait de construire tout d'abord une solution approchée (pour certaines valeurs de a et b, il faudra peut-être supposer E polyhomogène pour ce faire), puis d'appliquer un théorème d'inversion locale. Si je ne parviens pas à prescrire l'infinité conforme, j'examinerai quelles sont les possibles obstructions (question bien plus difficile en courbure négative que positive).

• Notre travail avec P. Chruściel, concernant l'étude de l'opérateur de contraintes, nous a permis de faire des recollements localisés par sommes connexes de variétés à courbure scalaire nulle. Par ailleurs, nous avons obtenu une série d'estimations dans un cadre bien plus général. Nous espérons pouvoir les utiliser pour faire des recollements localisés à courbure scalaire constante.

• Je voudrais étudier le cas de la prescription du tenseur (au voisinage d'une métrique asymptotiquement hyperbolique g_0)

$$T(g) = Ricci(g) - \frac{1}{n} Scal(g) g,$$

qui est de trace nulle (relativement à g). Il est clair que toutes les métriques d'Einstein annulent ce tenseur et que la méthode que j'utilise pour les équations de Ricci ou d'Einstein ne passe plus. Le scindage classique des 4-tenseurs covariants de type courbure sectionnelle ([14] p. 45) utilise le tenseur T et peut-être que mon résultat concernant la structure de la courbure de Riemann permettra d'avancer.

• Il est certainement possible de généraliser mes résultats concernant la courbure scalaire conforme [D1] au cas de certaines variétés asymptotiquement hyperboliques, même avec frontière intérieure. On prescrirait la métrique cherchée sur $\partial_0 M$ ainsi que son comportement à l'infini ; l'analyse développée par Lee [44] serait un bon point de départ. Notons que la méthode pourrait être adaptable au cas de certaines équations de contraintes en relativité générale [5].

• Regardons des généralisations possibles des résultats concernant la courbure de Ricci par exemple. Que peut-on dire quand il y a un bord intérieur, ou quand l'invariant de Yamabe de la structure à l'infini n'est plus positif ? Par ailleurs, j'ai remarqué [D5] que la linéarisation de l'opérateur de Ricci perturbé (voir section 3.1) prend aussi une forme simple lorsque la courbure de Ricci (vue comme métrique semi-Riemannienne car supposée non-dégénérée) induit la même connexion de Levi-Civita que la métrique. On pourrait espérer résoudre globalement l'équation de Ricci au voisinage d'une telle métrique.

• Lee [45] a montré que toute structure conforme proche de l'infinité conforme de n'importe quelle variété d'Einstein asymptotiquement hyperbolique de courbure négative est l'infinité conforme d'une métrique d'Einstein. Cela définit alors un sous ensemble ouvert des classes conformes sur l'infini. A ce jour, personne n'a construit d'obstruction à ce problème. Questions naturelles : peut-on prouver un théorème de fermeture ? peut-on construire un contre-exemple ?

• On sait que les équations d'Einstein correspondent à l'équation d'Euler-Lagrange pour la fonctionnelle qui, à une métrique de volume fixé, associe l'intégrale de sa courbure scalaire. Peut-on trouver une fonctionnelle naturelle dont les points critiques sont les solutions des équations de contraintes ?

Bien entendu, cette liste de problèmes n'est pas exhaustive et il est évident que l'étude des sujets mentionnés ci-dessus mènera naturellement à de nouvelles questions.

Plus généralement l'étude des variétés non-compactes est un domaine encore largement inexploré, et celle des phénomènes liant la structure à l'infini à celle de l'intérieur donne des résultats remarquables. L'étude de ce type de variété est aussi importante en géométrie Riemannienne qu'en Relativité Générale.

Références

[ACD] M. T. ANDERSON, P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, Non-trivial, static, geodesically complete, vacuum space-times with a negative cosmological constant, *J. High Energy Phys.* JHEP **10** (2002) 063.

[ACD2] M. T. ANDERSON, P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, Non-trivial, static, geodesically complete, vacuum space-times with a negative cosmological constant II, *Proceedings of the Strasbourg Meeting on AdS-CFT correspondence, O.Biquard, V.Turaev, Eds., IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, de Gruyter, Berlin, New York*, in press.

[CD1] P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, Existence of non-trivial, vaccum, asymptotically simple space-times, *Class. Quantum Grav.*, 2002, **19**, p.71-79, gr-qc/0203053.

[CD2] P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, On mapping properties of the general relativistic constraints operator in weighted function spaces, with applications, *Mémoires de la S.M.F.*, 2003, n^{0}94, 103p., gr-qc/0301073.

[CD3] P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, Manifold structures for the set of solutions of the general relativistic constraints equations, *Journal of Geometry and Physics*, 2004, **51**, p. 442-472, gr-qc/0309001.

[CDGH] P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, G. J. GALLOWAY, R. HOWARD, Regularity of the horizon and the Area Theorem, *Annales Henri Poincaré*, 2001,**2**, p.109-178. gr-qc/0001003

[CDLS] P. T. CHRUSCIEL, E. DELAY, J.M. LEE, D.N. SKINNER, Boundary regularity of conformally compact Einstein metrics, *J. Diff. Geom.*, à paraître .

[D1] E. DELAY, Analyse précisée d'équations semi-linéaires elliptiques sur l'espace hyperbolique et application à la courbure scalaire conforme, *Bull. Soc. math. France.* **125** (1997), 345-381.

[D2] E. DELAY, Conformal scalar curvature on the hyperbolic space, proceedings, *General Mathematics*, Sibiu-Romania (1997), **5**, 152-156.

[D3] E. DELAY, Prescription de la courbure de Ricci au voisinage de la métrique hyperbolique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **t. 326**, Série I (1998), 335-338.

[D4] E. DELAY, Etude locale d'opérateurs de courbure sur l'espace hyperbolique *Jour. Math. Pures et Appl.*, (1999), **78**, 389-430.

[D5] E. DELAY, Study of some curvature operators in the neighbourhood of an asymptotically hyperbolic Einstein manifold, *Advances in Math.*, (2002), **168**, p.213-224.

[D6] E. DELAY, Essential spectrum of the Lichnerowicz Laplacian on two tensor on asymptotically hyperbolic manifolds, *Journal of Geometry and Physics*, (2002), **43**, p.33-44.

[DH] E. DELAY, M. HERZLICH, Ricci curvature in the neighbourhood of rank-one symmetric spaces, *J. Geometric Analysis*, (2001),Vol. 11,**4**, p.573-588.

[1] M. T. ANDERSON, On stationary vacuum solutions to the Einstein equations, *Annales H. Poincaré* (2000), p. 977-994, gr-qc/0001091.

[2] M. T. ANDERSON, Einstein metric with prescribed conformal infinity on 4-manifolds (2001), math. DG 0105243.

[3] M. T. ANDERSON, Boundary regularity, uniqueness and non-uniqueness for AH Einstein metrics on 4-manifolds, *Adv. math.* **179** (2003), p. 205-249.

[4] L. ANDERSSON, *Momenta and reduction in general relativity*, Jour. Geom. Phys. **4** (1987), 289–314.

[5] L. ANDERSSON, P. T. CHRUSCIEL, Solutions of the constraint equations in general relativity satisfaying "hyperboloidal boundary conditions", *Dissert. Math.* **355** (1996), 1-100.

[6] M. T. ANDERSON, A. KATSUDA, Y. KURYLEV, M. LASSAS, M. E. TAYLOR, Boundary regularity for the Ricci equation, geometric convergence, and Gel'fand's inverse boundary problem, math.SP/0211376.

[7] R. ARNOWITT, S. DESER, C. MISNER, Coordinate invariance and energy expressions in general relativity, *Phys. Rev.* **122** (1961), 997-1006.

[8] A. BALDES, Non-Existence of Riemannian Metrics with Prescribed Ricci Tensor. *Contemporary Math.* **51** (1986), 1-8.

[9] S. BANDO, A. KASUE, H. NAKAJIMA, On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth. Invent. Math. 97 (1989), no. 2, 313–349

[10] R. BARTNIK, The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.* 39 (1986), no. 5, 661–693.

[11] R. BARTNIK, New definition of quasilocal mass. *Phys. Rev. Lett.* **62** (1989), 2346-2348.

[12] R. BEIG, N. Ó MURCHADHA, The Poincaré group as the symmetry group of canonical general relativity. *Ann. Physics*, 174 (1987), no. 2, p. 463-498.

[13] R. BEIG, P. T. CHRUSCIEL and R. SCHOEN, KIDs, are non-generic, [gr-qc/0403042], 37 pages.

[14] A. L. BESSE, Einstein Manifolds, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3) 10, Springer, Berlin (1987)

[15] O. BIQUARD, Métriques d'Einstein asymptotiquements symétriques, Ecole Polytechnique 1997, preprint.

[16] M. BOUCETTA, Spectre des laplaciens de Lichnerowicz sur les sphères et les projectifs réels. *Publ. Mat.* 43 (1999), no. 2, 451–483.

[17] J. CORVINO, Scalar curvature deformation and a gluing construction for the Einstein constraint equation, *Commun. Math. Phys.*,**214** (2000), p. 137-189.

[18] J. CORVINO, R. SCHOEN, Vacuum space times wich are indentically Schwarzschild near spatial infinty, talk given at the Santa Barbara conference on strong gravitationnal field, june 22-26, 1999.

[19] Y. CHOQUET-BRUHAT, R. GEROCH, Global aspects of the Cauchy problem, *Commun. Math. Phys.* **14** (1969), 329–335.

[20] P. T. CHRUSCIEL, Boundary Conditions at Spatial Infinity from a Hamiltonian Point of View, *Topological Properties and Global Structure of Space-Time*, ed. by P. Bergmann, V. de Sabbata, pp. 49-59, Plenum Press, New York 1986.

[21] P. T. CHRUSCIEL and H. FRIEDRICH (Editors), The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields (50 Years of the Cauchy Problem in General Relativity), *Birkhäuser Verlag* Basel Boston Berlin (2004), 484 p.

[22] P. T. CHRUSCIEL, G. J. GALLOWAY, Horizons Non-Differentiable on a Dense Set, *Commun. Math. Phys.* **193** (1998), 449-470.

[23] P. T. CHRUSCIEL, W. SIMON, Toward the classification of static vacuum spacetimes with a negative cosmological constant, *Jour. Math. Phys.* (2001) **42**, 1779-1817.

[24] D. DETURCK, Existence of Metrics With Prescribed Ricci Curvature : Local Theory, *Invent. Math.* **65** (1981), 179-207.

[25] D. DETURCK, Metrics with prescribed Ricci curvature, *Annals of Math. Studies*, *Princeton Univ. Press* **102** (1982), 525-537.

[26] D. DETURCK, H. GOLDSCHMIDT, Metrics with prescribed Ricci curvature of constant rank. I. The integrable case. *Adv. Math.* 145 (1999), no. 1, 1-97.

[27] D. DETURCK, J. L. KAZDAN, Some regularity theorems in Riemannian geometry, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 14 (1981), no. 3, 249-260.

[28] D. DETURCK, N. KOISO, Uniqueness and non-existence of metrics with prescribed Ricci curvature. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **1**, $N^0 5$ (1984), 351-359.

[29] D. DETURCK, D. YANG, Local Existence of Smooth Metrics with Prescribed Curvature. *Compemporary Math.* **51** (1986), 1-8.

[30] H. FEDERER, Geometric measure theory, *Springer-Verlag, New York, Die Grundlerhren der mathematischen Winssenschaften*, **153** (1969).

[31] C. FEFFERMAN and C. R. GRAHAM, Conformal invariants, *Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui*, The mathematical heritage of Elie Cartan, Sémin. Lyon 1984, Astérisque, Numéro Hors Série, 95-116, 1985.

[32] A.E. FISCHER, J.E. MARSDEN, and V. MONCRIEF, *The structure of the space of solutions of Einstein's equations I : One Killing field*, Ann. Inst. H. Poincaré **23** (1980), 147–194.

[33] W. H. FLEMING and H. METE SONER, Controlled Markov processes and viscosity solutions, Applications of Mathematics, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, **25** (1993).

[34] Y. FOURES-BRUHAT, Théorème d'existence pour certains systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires. *Acta Math.* **88**, (1952), 141–225.

[35] H. FRIEDRICH, On the existence of n–geodesically complete or future complete solutions of Einstein's field equations with smooth asymptotic structure, *Commun. Math. Phys.* **107** (1986), 587–609.

[36] H. FRIEDRICH Conformal geodesics on vacuum space-times.*Comm. Math. Phys.* 235 (2003), no. 3, 513–543.

[37] C. R. GRAHAM, J. M. LEE, Einstein metrics with prescribed infinity on the ball, *Adv. in Math.* **87**, $N^0 2$ (1991), 186-225.

[38] J. ISENBERG, R. MAZZEO, D. POLLACK, Gluing and wormholes for the Einstein constraint equations, *Commun Math. Phys.*, **231** (2002), p.529-568, gr-qc/0109045.

[39] R. HAMILTON, The Ricci Curvature Equation, *Seminar on Nonlinear Partial Differential Equation, Springer-Verlag,New York Berlin Heidelberg Tokyo* (1984), 47-72.

[40] S. W. HAWKING, G. F. R. ELLIS, The Large Scale Structure of Space Time, *Cambridge Univ Press*, Cambridge (1973).

[41] N. KOISO, Rigidity and infinitesimal deformability of Einstein metrics. *Osaka J. Math.* 19 (1982), no. 3, 643–668.

[42] V. KROON, J. ANTONIO, A new class of obstructions to the smoothness of null infinity, *Comm. Math. Phys.* 244 (2004), no. 1, 133–156.

[43] J. LAFONTAINE, L. ROZOY, Courbure scalaire et trous noirs, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, Grenoble, Vol. 18 (2000) 69-76.

[44] J. M. LEE, The Spectrum of an Asymptotically Hyperbolic Einstein Manifold, *Com. in Anal. and Geom.* **3** (1995), 253-272.

[45] J. M. LEE, Fredholm operators and Einstein metrics on conformally compact manifolds (2001), math. DG/0105046.

[46] A. LICHNEROWICZ, Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme, Masson, Paris, (1955).

[47] A. LICHNEROWICZ, L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps, *Jour. Math. Pures Appli.* **23** (1944), 37-63.

[48] R. MAZZEO, Elliptic Theory of Differential Edge Operators, *Comm. Partial Diff. Equ.* 16(10) (1991), 1615-1664.

[49] W. SIMON, R. BEIG, The multipole structure of stationary and axisymmetric Einstein equations, *Commun. Math. Phys.* ,**24** (1983), 1163-1171.

[50] S. UNNEBRINK Asymptotically flat 4-manifolds. *Differential Geom. Appl.* 6 (1996), no. 3, 271–274.