

N° d'ordre : 3128

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX 1

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

par **Olivier RIPOLL**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : **Mathématiques Pures**

GÉOMÉTRIE DES TISSUS DU PLAN ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Soutenue le jeudi 15 décembre 2005

Après avis de :

D. CERVEAU	Professeur, Université de Rennes	Rapporteur
M. GRANGER	Professeur, Université d'Angers	Rapporteur

Devant la commission d'examen formée de :

A. YGER	Professeur, Université de Bordeaux	Président
D. CERVEAU	Professeur, Université de Rennes	Rapporteur
M. GRANGER	Professeur, Université d'Angers	Rapporteur
A. HÉNAUT	Professeur, Université de Bordeaux	Directeur de thèse

Y. Pas un pas sans ta trace.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier mon directeur de thèse Alain Hénaut pour m'avoir conduit sur ces chemins. Je garderai un souvenir ému de ces jeudis soir où cette thèse s'est peu à peu formée. Pour cette rencontre tant mathématique qu'humaine, pour cette "humilité ambitieuse" que je ne voudrais pas trahir et pour toute l'attention et la bienveillance dont j'ai bénéficié, je tiens à lui exprimer ma plus grande gratitude.

Je remercie également Dominique Cerveau et Michel Granger d'avoir accepté la charge d'être les rapporteurs de cette thèse, de leurs lectures attentives et de leurs précieuses remarques.

Je voudrais aussi adresser mes plus vifs remerciements à Alain Yger en tant que président de ce jury, mais aussi en tant qu'enseignant. Au même titre que mon directeur de thèse, je lui dois sans doute mon goût pour la recherche et l'enseignement et je suis très heureux de compter ici encore sur sa présence.

Pour leurs encouragements et leur soutien, pour la motivation qu'ils m'ont transmise, je voudrais remercier Christophe Bavard, Jean-Luc Joly, Fayçal Maarref et Pierre Parent.

En ce jour de soutenance, j'aurai sans doute une pensée pour Jean-Marie Exbrayat, dit "Papex" à qui je dois tant.

Je remercie pour finir Stéphanie et Rodolphe pour leur présence tout au long de cette thèse, pour leur amitié qui m'est très chère, ainsi que Guillaume et Krassimira. Je voudrais aussi offrir cette thèse à Catherine et François, à défaut de pouvoir leur dire toute mon affection. Enfin, Yasmina...

Table des matières

Introduction	i
1 Objets et outils de base : l'atelier	1
1.1 Définitions	1
1.2 Tissus linéaires - Tissus algébriques	3
1.3 La courbure de Blaschke	4
1.3.1 Définition	4
1.3.2 Tissus hexagonaux	7
1.4 Une approche implicite	9
1.5 Polynôme de linéarisation du tissu	13
2 Sur quelques invariants des tissus	15
2.1 Polynômes associés	15
2.1.1 Définitions	15
2.1.2 Invariants du tissu	17
2.2 Tissus linéaires et algébriques	18
2.2.1 Lemme technique	19
2.2.2 Caractérisation <i>via</i> les polynômes associés	20
2.2.3 Équations de Clairaut	22
2.3 Invariants de base d'un tissu	23
2.3.1 Interprétation des polynômes V_i	23
2.3.2 Réduction du nombre des invariants	25
2.4 Relations abéliennes	27
2.4.1 Polynômes abéliens	27
2.4.2 Cas linéaire	31
3 Diagramme de Cartan-Spencer du tissu	33
3.1 Notations	33
3.2 Une connexion associée à un 3-tissu	36
3.2.1 Construction	36
3.2.2 Ecriture explicite de la connexion	37
3.2.3 Cas linéaire	38
3.2.4 Exemples	38
3.3 Une connexion associée à un 4-tissu	39
3.3.1 Construction	39
3.3.2 Une matrice de la connexion	41

3.3.3	Cas linéaire	44
3.4	Interprétation de la courbure d'un 4-tissu	44
3.5	Les tissus rectifiés	46
3.5.1	Obtention des invariants	46
3.5.2	Courbure d'un 4-tissu rectifié	48
4	Détermination du rang d'un tissu du plan	51
4.1	Considérations sur le rang	51
4.1.1	Détermination du rang d'un tissu du plan	51
4.1.2	Cas linéaire	55
4.2	Relations abéliennes	55
4.2.1	Relations abéliennes des tissus extraits	55
4.2.2	Forme fondamentale et relations abéliennes complètes	58
4.2.3	Les sections horizontales du fibré (E, ∇)	60
4.3	Exemples	61
4.3.1	Les 4-tissus définis par un pinceau de 1-formes	61
4.3.2	Quelques tissus remarquables	63
5	Courbure de Blaschke-Chern d'un tissu	67
5.1	Formule de la trace	67
5.1.1	Rappel sur la théorie de Chern-Weil	67
5.1.2	Formule de la trace	69
5.1.3	Le théorème de Bol	72
5.2	Tissus de courbure de Blaschke-Chern nulle	73
5.2.1	Définition	73
5.2.2	Caractérisation géométrique	75
5.3	Déterminant et résidus d'un tissu	78
6	Une approche des 5-tissus	85
6.1	La connexion associée à un 5-tissu	85
6.2	Les 5-tissus exceptionnels revisités	87
6.3	Exemples	89
6.3.1	Le 5-tissu de Bol	89
6.3.2	Un autre 5-tissu exceptionnel	94

Introduction

*Un, deux, trois ; mais le quatrième, cher Timée, où est-il ?
in Platon, Timée, 17-a.*

Le lecteur ne sera pas étonné de trouver dans ce travail les noms d'illustres précurseurs attachés à des théorèmes portant sur la géométrie des tissus. Pour n'en citer que quelques-uns, H. Poincaré, E. Cartan, N.H. Abel, G. Darboux ou S. Lie ont apporté leur pierre à un édifice qui ne s'est construit que plus tard. Sans aller jusqu'à dire qu'ils "faisaient des tissus sans le savoir", leurs travaux ont en effet porté sur des objets naturellement liés aux tissus, comme les équations différentielles ordinaires, la linéarisation de leurs solutions ou encore l'étude des surfaces définies par ces mêmes équations.

Apparue dans les années 1930 en Allemagne sous l'impulsion du trio composé de W. Blaschke, G. Bol et G. Thomsen, notre jeune discipline hérite donc d'un savoir faire propre à la géométrie, et, au-delà du patrimoine, s'inscrit pleinement comme une approche possible de ces sujets toujours d'actualité.

La référence classique concernant la géométrie des tissus est le livre *Geometrie der Gewebe* de W. Blaschke et G. Bol ([B-B]) paru en 1938, clôturant ainsi une période faste pour la discipline. Le renouveau attendu fut assuré par les mathématiciens M.A. Akivis et V.V. Goldberg dans les années 1970, puis par P.A. Griffiths et S.S. Chern (*cf.* [C-G] et [G-76]). Ce dernier, avant son année passée auprès d'Élie Cartan, a soutenu sa thèse sous la direction de W. Blaschke en géométrie des tissus. Plus récemment, et sans prétendre à l'exhaustivité, les travaux de D. Cerveau, E. Ghys, I. Nakai et A. Hénaut ont redonné un souffle nouveau au sujet, dont se réclame pour n'en citer que quelques-uns, M. Belliard, D. Marin, J.V. Pereira, L. Pirio, G. Robert, et dans lequel ce travail s'inscrit pleinement.

Considérons une équation différentielle du premier ordre de degré d , de la forme

$$F(x, y, y') = a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0,$$

polynomiale en y' et à coefficients dans \mathcal{O} , l'anneau des séries entières convergentes à deux variables complexes. En dehors du lieu singulier où le y' -résultant $R = \text{Result}(F, \partial_p F)$ s'annule, l'équation admet un ensemble de d courbes intégrales. Cet ensemble définit le tissu $\mathcal{W}(d)$ non singulier de \mathbb{C}^2 présenté par une telle équation, chaque courbe étant une *feuille* du tissu.

ii

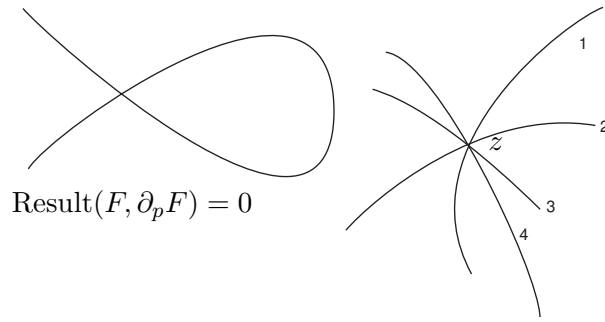


FIG. 1 – Les courbes intégrales passant par z de l'équation différentielle.

L'étude que nous proposons est locale, au voisinage d'un point non singulier du tissu. Mais la singularité, "almost invariably a clue" comme disait Sherlock Holmes, restera en point de mire, en sourdine, abritant des perspectives nouvelles pour l'étude des tissus.

L'équation différentielle présentant le tissu offre une donnée globale de ses feuilles. En revanche, la définition classique d'un d -tissu passe plutôt par la donnée scindée de chacune d'elles. En effet, un d -tissu est aussi défini comme étant l'ensemble de d familles de courbes en position générale. Il s'agit des germes d'ensembles de niveau définis par $F_i(x, y) = 0$ où $F_i \in \mathcal{O}$ avec $F_i(0) = 0$ vérifiant en outre l'inégalité $dF_i(0) \wedge dF_j(0) \neq 0$.

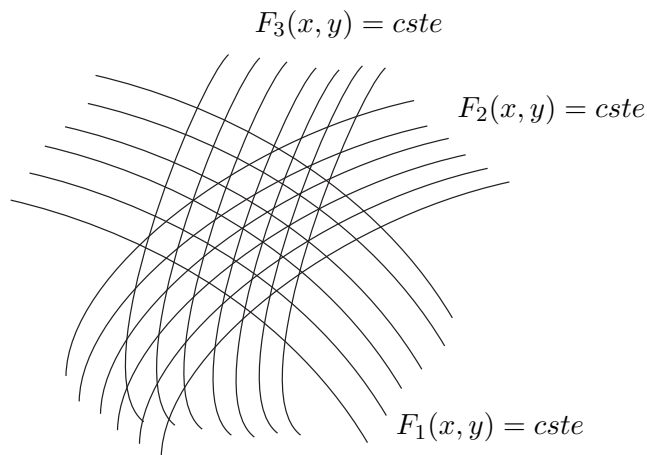


FIG. 2 – Un 3-tissu du plan

Dans la perspective géométrique que nous donnons à cette étude, la notion d'invariant tient une place primordiale. Parmi ceux mis en évidence par les fondateurs, le rang du tissu est la dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{A}(d)$ des relations abéliennes du tissu, qui lient les normales aux feuilles et qui sont à coefficients constants sur celles-ci :

$$\mathcal{A}(d) := \{(g_1(F_1), \dots, g_d(F_d)) \in \mathcal{O}^d \text{ tel que } (g_i)_{i=1 \dots d} \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i) dF_i = 0\}.$$

Notons que le rang d'un tissu est génériquement nul.

Par ailleurs, le théorème classique de majoration du rang assure que cette dimension est bornée par l'entier $\pi_d = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$. Parmi les tissus de rang maximal, on compte les tissus algébriques assurant un pont entre la géométrie des tissus et la géométrie algébrique. En effet, à l'aide de la dualité entre \mathbb{P}^2 et $\check{\mathbb{P}}^2$, toute courbe algébrique C réduite de \mathbb{P}^2 de degré d , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière, détermine en un point générique z de $\check{\mathbb{P}}^2$, un germe de d -tissu algébrique $\mathcal{L}_C(d)$ de $(\check{\mathbb{P}}^2, z)$ associé à la courbe C . Si cette courbe ne contient pas de droite, les feuilles de ce tissu sont alors les tangentes à la courbe duale de C dans $\check{\mathbb{P}}^2$.

Ces tissus sont de rang maximal π_d en vertu du théorème d'Abel.

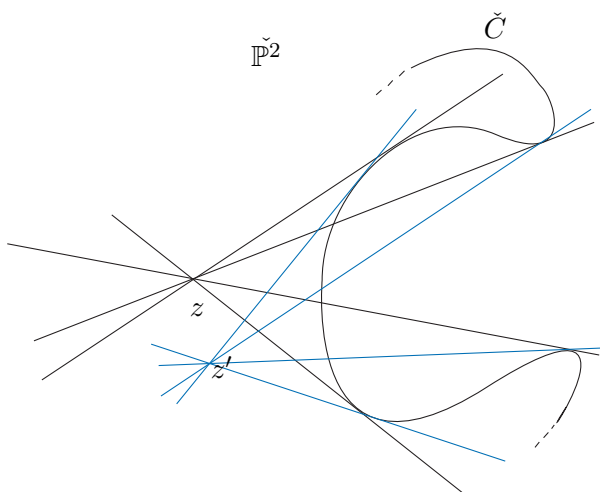


FIG. 3 – Un 4-tissu algébrique

Pour les 3-tissus, la classification suivant le rang est entreprise par Blaschke et ses élèves, comme nous le verrons dans le chapitre 1. Mais pour un tissu quelconque la question de la détermination du rang restait une question ouverte. La méthode qui nous a permis de donner une version de cette détermination passe par l'étude des systèmes différentiels.

Nous visiterons dans le premier chapitre notre “atelier”, en introduisant les objets et les notations de façon plus précise, ainsi que les outils nécessaires à cette étude.

C'est en effet autour de deux changements de point de vue concernant les relations abéliennes que s'organise ce travail. Par l'approche implicite, on peut d'abord considérer une relation abélienne comme la trace d'une 1-forme fermée sur la surface S de \mathbb{C}^3 définie par l'équation $F(x, y, p) = 0$. La fermeture d'une telle forme s'exprime grâce à un système différentiel linéaire $\mathcal{M}(d)$ en les coefficients de la forme et fait apparaître les relations abéliennes comme un *système local*. A l'aide de la théorie de Cartan-Spencer (*cf.* [S] ou encore [Gold]), ce système permet de construire une connexion sur un fibré de rang π_d non nécessairement intégrable, et dont les éventuelles sections horizontales correspondent aux relations abéliennes du tissu.

Nous avons dans un premier temps étudié cette connexion construite par Alain Hénaut dans [H-04]. Pour cela, nous avons d'abord mis en évidence quelques invariants du tissu, par l'intermédiaire d'une relation propre à l'étude de la surface S qui s'écrit, comme nous le verrons dans le chapitre 2, partie 2.3.1, sous la forme

$$\partial_x(F) + p \partial_y(F) = U \cdot F - P_{\mathcal{W}(d)} \cdot \partial_p(F),$$

où $P_{\mathcal{W}(d)}$ est un polynôme de degré $d - 1$ dans $\mathcal{O}[1/R][p]$, dit *polynôme de linéarisation* du tissu, donnant des conditions nécessaires et suffisantes à la linéarisation de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ présentant le tissu, et U un polynôme de degré $d - 2$ dans $\mathcal{O}[1/R][p]$. Cette relation, outre qu'elle fournit un certain nombre d'invariants fondamentaux pour l'étude du tissu, permet également d'obtenir une nouvelle écriture du système différentiel à étudier. On montre alors que le système $\mathcal{M}(d)$ est entièrement décrit par la donnée du polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$ et d'une 1-forme α dite fondamentale, obtenue elle aussi à partir de la relation précédente, et dont la différentielle $d\alpha$ est un invariant du tissu. Dans le cas d'un 3-tissu, cette 2-forme n'est autre que la courbure de Blaschke classique.

L'étude du système $\mathcal{M}(d)$ via la *connexion associée* au tissu est conduite en détail dans le chapitre 3, dans le cas des 3 et 4-tissus. La courbure dont on montre, cette fois à l'aide des invariants du chapitre 2, que l'écriture dans une base adaptée est un invariant du tissu, est interprétée. On montre dans le cas d'un 4-tissu, que cette matrice s'écrit

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \partial_x(k_1) + L_1 & \partial_y(k_1) + L_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où k_1 est un invariant du tissu dans \mathcal{O} à pôles sur le discriminant de F et où les invariants L_1 et L_2 sont des expressions différentielles en les coefficients du polynôme de linéarisation vérifiant $L_1 = L_2 = 0$ si et seulement si le 4-tissu est linéarisable. Un résultat analogue est obtenu pour un 5-tissu, comme nous le verrons dans le dernier chapitre. Ce résultat montre que l'information contenue dans la connexion dépasse le cadre strict du rang. On s'intéresse également au cas des tissus rectifiés, à savoir les tissus du plan dont l'une des pentes est infinie et une autre nulle.

Le chapitre 4 est consacré au problème de détermination du rang d'un d -tissu. Le noyau de la connexion est un système local dont on incarne le fibré associé comme étant le noyau d'une application \mathcal{O} -linéaire explicite. Le rang du tissu est alors le corang de cette application. Nous établissons à la suite quelques généralités concernant les relations abéliennes, suivant le point de vue choisi. Notamment, les invariants fondamentaux des tissus extraits seront explicités grâce aux invariants du tissu initial. Dans ce cadre, quelques exemples seront traités.

Nous revenons sur un invariant de base mis à jour par la connexion dans le

chapitre 5. Il s'agit de la trace de la courbure que la théorie de Chern-Weil nous invite à distinguer. On montre que pour $d = 3, 4, 5$ et 6 , le fibré déterminant $(\det E, \det \nabla)$ du fibré (E, ∇) associé au tissu est isomorphe en tant que fibré muni d'une connexion au fibré en droites obtenu par le produit tensoriel des fibrés en droites (L_k, ∇_k) associés aux 3-tissus extraits :

$$(\det E, \det \nabla) \cong \left(\bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} L_k, \bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} \nabla_k \right).$$

Ceci découle de la formule de la trace démontrée dans les mêmes cas :

$$\text{tr}(K) = \sum_{k=1}^{\binom{d}{3}} d\gamma_k,$$

où K est la courbure de la connexion et où les $d\gamma_k$ désignent les courbures de Blaschke des 3-tissus extraits.

Ces résultats, probablement vrais pour tout $d \geq 3$, sont conditionnés par l'obtention de l'expression de la trace de la matrice de connexion en toute généralité. Mais les calculs dans les jets offrent une grande résistance à la généralisation car ils sont vite très compliqués et difficilement formalisables.

Une étude plus fine des tissus dont la courbure de *Blaschke-Chern* k_1 est nulle est toujours en cours, mais nous pouvons cependant déjà établir par ce biais le théorème de Bol pour $d = 4$ et caractériser géométriquement ces tissus par une généralisation de la construction de l'hexagone de Thomsen. A nouveau, des exemples sont traités.

La considération des singularités du tissu n'était pas au cœur de ce travail, cependant, tous les calculs ont été conduits méromorphiquement. Ainsi, les exemples traités et la formule de la trace permettent d'illustrer de nouveaux invariants comme le *déterminant* et les *résidus* d'un tissu, liés au lieu singulier du tissu et qui font l'objet de travaux en cours d'Alain Hénaut. L'étude de ces invariants insiste sur l'intérêt que l'on porte au fibré déterminant $(\det E, \det \nabla)$.

Le dernier chapitre est consacré à l'étude des 5-tissus, dans la perspective offerte par leur connexion associée. Si la construction de celle-ci n'est pas détaillée, nous montrons cependant par le calcul que la matrice de courbure d'un 5-tissu dans une base adaptée contient à l'instar de celle associée aux 4-tissus de nombreux invariants. On redémontre alors des résultats connus concernant la linéarisation de tels tissus. Ceci permet également de revisiter l'approche des tissus exceptionnels, puisque l'équation les présentant s'avère vérifier des conditions différentielles explicites.

Concrètement, le calcul des invariants fondamentaux d'un tissu $\mathcal{W}(d)$ est implémenté *via* le logiciel de calcul *Maple*, pour $d = 3, 4$ et 5 . Pour ne pas accroître le volume de ce travail, nous avons renoncé à les produire en annexe, mais ils restent disponibles. C'est donc aussi au travers d'exemples que nous verrons œuvrer les invariants mis en place tout au long de ce travail.

Chapitre 1

Objets et outils de base : l'atelier

Cette partie regroupe les objets et les bases nécessaires à ce travail. Les outils qui se déploieront dans toute la suite y sont également présentés. En somme, nous proposons au lecteur une visite de notre atelier, avant d'y travailler pleinement.

1.1 Définitions

La référence classique sur laquelle nous nous sommes appuyé dans cette partie est bien sûr le livre fondateur [B-B] de W. Blaschke et G. Bol, ou encore l'article de S.S. Chern [C], mais nous avons également puisé dans les articles de D. Cerveau [Ce], de A. Beauville [Be] et dans le livre [W].

La géométrie des tissus est consacrée à l'étude des propriétés géométriques des familles de feuilletages en position générale.

Soit $\mathcal{O} = \mathbb{C}\{x, y\}$ l'anneau des séries convergentes à deux variables et à coefficients complexes. Soit d un entier non nul. Un d -tissu $\mathcal{W}(d)$ non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ est la donnée d'une famille de *feuilles*, germes de courbes de niveau

$$\{F_i(x, y) = cste\}$$

où $F_i \in \mathcal{O}$ vérifie $F_i(0) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq d$, et satisfaisant l'hypothèse de position générale

$$dF_i(0) \wedge dF_j(0) \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i < j \leq d.$$

Considérant uniquement les propriétés géométriques du tissu, les objets fondamentaux le définissant sont alors à un inversible de \mathcal{O} près, les 1-formes suivantes :

$$\begin{cases} \omega_1 & = & \partial_x(F_1)dx + \partial_y(F_1)dy \\ & \vdots & \\ \omega_d & = & \partial_x(F_d)dx + \partial_y(F_d)dy, \end{cases}$$

ou encore les d champs de vecteurs

$$\begin{cases} X_1 &= \partial_y(F_1)\partial_x - \partial_x(F_1)\partial_y \\ &\vdots \\ X_d &= \partial_y(F_d)\partial_x - \partial_x(F_d)\partial_y, \end{cases}$$

où ∂_x, ∂_y désignent les opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ respectivement. Les feuilles du tissu sont alors les courbes intégrales de ces champs de vecteurs. On désignera par $\mathcal{W}(F_1, F_2, \dots, F_d)$ un tissu donné par ses feuilles.

L'étude des configurations possibles pour un tissu ne présente un véritable intérêt que dans le cas où $d \geq 3$. En effet, si $d = 1$ (*resp.* 2), le théorème d'inversion local montre que le modèle local d'un tel tissu est donné par un (*resp.* deux) pinceau de droites parallèles.

Le \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathcal{A}(d)$ des d -uplets défini par

$$\mathcal{A}(d) = \{ \{g_1(F_1), \dots, g_d(F_d)\} \in \mathcal{O}^d, \text{ tel que } (g_i)_{i=1\dots d} \in \mathbb{C}\{t\} \text{ et } \sum_{i=1}^d g_i(F_i)dF_i = 0 \}$$

est l'espace des *relations abéliennes* du tissu $\mathcal{W}(d)$.

Cet espace $\mathcal{A}(d)$ est de dimension finie, majorée, appelée le *rang du tissu* et noté $rg \mathcal{W}(d)$. En effet, le théorème classique de *majoration du rang des tissus* montre que la dimension de l'espace vectoriel des relations abéliennes d'un tissu $\mathcal{W}(d)$ vérifie l'inégalité

$$rg \mathcal{W}(d) = \dim(\mathcal{A}(d)) \leq \frac{1}{2}(d-1)(d-2).$$

En outre, le rang est un invariant du tissu, en d'autres termes, il ne dépend que du tissu et non du choix des fonctions le définissant, puisque deux telles familles de feuilles donnent lieu à deux espaces vectoriels des relations abéliennes du tissu *isomorphes*.

Notons que ce nombre $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ que nous noterons aussi π_d n'est pas inconnu en géométrie algébrique puisqu'il s'agit du genre d'une courbe algébrique lisse de \mathbb{P}^2 de degré d .

Par exemple, le rang du 3-tissu \mathcal{H} défini par les feuilles

$$\mathcal{H} = \mathcal{W}(x, y, x + y)$$

est majoré par 1. Puisque ce tissu admet la relation abélienne non triviale $dx + dy - d(x + y) = 0$, on peut donc affirmer qu'il est de rang 1.

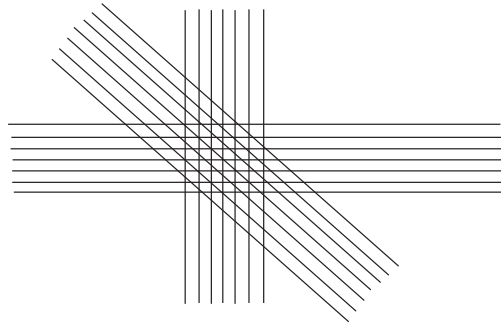


FIG. 1.1 – Le 3-tissu \mathcal{H}

La relation fonctionnelle

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x}dx - \frac{1}{y}dy$$

montre que le 3-tissu $\mathcal{W}(x, y, y/x)$ est de rang 1, puisque la relation logarithmique précédente est une relation abélienne de ce tissu.

1.2 Tissus linéaires - Tissus algébriques

Un d -tissu $\mathcal{W}(d)$ du plan dont les feuilles sont, au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$, des germes de droites, non nécessairement parallèles est dit *linéaire* et noté $\mathcal{L}(d)$.

Parmi ces tissus, les tissus *algébriques*, notés $\mathcal{L}_C(d)$ assurent le pont entre la géométrie des tissus et la géométrie algébrique. A l'aide de la dualité entre \mathbb{P}^2 et $\check{\mathbb{P}}^2$, toute courbe algébrique C réduite de \mathbb{P}^2 de degré d , non nécessairement irréductible et éventuellement singulière, détermine en un point générique z de $\check{\mathbb{P}}^2$, un germe de d -tissu $\mathcal{L}_C(d)$ de $(\check{\mathbb{P}}^2, z)$ associé à la courbe C . Si cette courbe ne contient pas de droite, les feuilles de ce tissu sont alors les tangentes à la courbe duale de C dans $\check{\mathbb{P}}^2$. Ces tissus sont de rang maximal en vertu du théorème d'Abel.

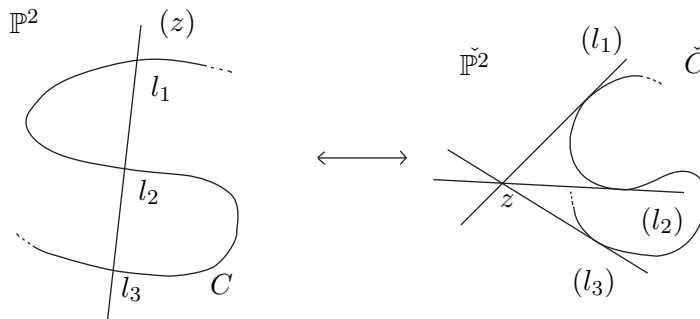


FIG. 1.2 – Obtention d'un 3-tissu par dualité

Par un théorème de type *Abel-inverse*, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.1 (Lie-Darboux-Griffiths). *Un d -tissu linéaire $\mathcal{L}(d)$ possédant une relation abélienne dont aucun terme n'est nul est algébrique.*

En particulier, un tissu linéarisable et de rang maximal est algébrisable.

Un tissu de rang maximal peut ne pas être linéarisable, du moins si $d \geq 5$, puisque pour $d = 4$, le théorème de Poincaré que nous verrons par la suite énonce qu'un 4-tissu de rang maximal est linéarisable. Un tissu *exceptionnel* est un tissu de rang maximal qui n'est pas algébrisable, ou ce qui revient donc au même, n'est pas linéarisable.

Le premier exemple de tels tissus est donné par G. Bol en 1936. Il s'agit d'un 5-tissu dont les feuilles en un point générique sont engendrées par 4 pinceaux de droites du plan en position générale et l'unique conique passant par ces 5 points.

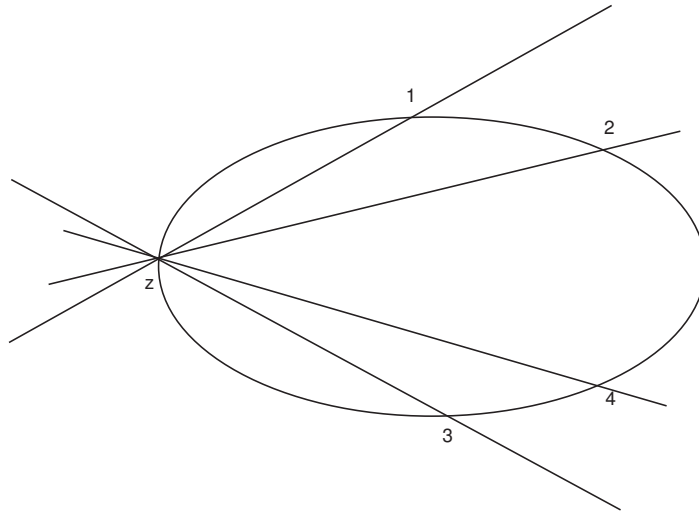


FIG. 1.3 – Le 5-tissu de Bol $\mathcal{B}(5)$

Nous verrons au chapitre 5 un développement plus complet sur ces tissus exceptionnels.

1.3 La courbure de Blaschke

1.3.1 Définition

Soit $\mathcal{W}(3)$ un 3-tissu du plan et soit ω_1, ω_2 et ω_3 trois 1-formes définissant ce tissu. L'hypothèse de position générale assure alors que ces trois formes sont indépendantes deux à deux en 0, donc il existe ρ_2 et ρ_3 nécessairement inversibles dans \mathcal{O} , tels que

$$\omega_1 = \rho_2 \omega_2 + \rho_3 \omega_3.$$

Comme les formes ω et $\rho\omega$ définissent le même feuilletage si ρ est inversible dans \mathcal{O} , on supposera ici que

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$$

et on dira que ces 3 formes sont *normalisées*. On définit alors la 2-forme (non singulière) $\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2$ et dans ce cas, on a les égalités

$$\Omega = \omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_3 = \omega_3 \wedge \omega_1.$$

Si l'on pose $\tilde{\omega}_i = \rho_i \omega_i$ où ρ_i est inversible dans \mathcal{O} , avec $\sum_i \tilde{\omega}_i = 0$ alors

$$\tilde{\Omega} = \rho_1 \rho_2 \Omega = \rho_2 \rho_3 \Omega = \rho_1 \rho_3 \Omega,$$

ce qui prouve que $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ et si ρ désigne cette valeur commune, on a

$$\tilde{\Omega} = \rho^2 \Omega.$$

Puisque dans \mathbb{C}^2 , on a pour toute 1-forme ω l'identité $\omega \wedge d\omega = 0$, le théorème de Frobenius donne l'existence pour $i = 1, 2$ et 3 d'une fonction inversible $g_i \in \mathcal{O}^*$, et d'une fonction $F_i \in \mathcal{O}$ vérifiant $F_i(0) = 0$ et $dF_i(0) \neq 0$ telles que

$$\omega_i = g_i dF_i.$$

Donc on peut écrire que

$$d\omega_i = dg_i \wedge dF_i = \frac{dg_i}{g_i} \wedge \omega_i$$

et puisque le système des ω_i est normalisé, on a

$$\sum_{i=1}^3 \frac{dg_i}{g_i} \wedge \omega_i = 0.$$

Puisque $-\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, on a

$$\left(\frac{dg_1}{g_1} - \frac{dg_3}{g_3} \right) \wedge \omega_1 = \left(\frac{dg_2}{g_2} - \frac{dg_3}{g_3} \right) \wedge \omega_2 = 0.$$

Les deux formes ω_1 et ω_2 étant indépendantes, le *lemme de E. Cartan* assure qu'il existe α, β et δ dans \mathcal{O} telles que

$$\begin{cases} \frac{dg_1}{g_1} - \frac{dg_3}{g_3} = \alpha \omega_1 + \beta \omega_2 \\ \frac{dg_2}{g_2} - \frac{dg_3}{g_3} = \beta \omega_1 + \delta \omega_2 \end{cases}.$$

On vérifie alors que l'on a

$$\frac{dg_1}{g_1} - (\alpha - \beta) \omega_1 = \frac{dg_2}{g_2} + (\beta - \delta) \omega_2 = \frac{dg_3}{g_3} - \beta \omega_3;$$

la 1-forme ainsi définie sera notée γ et vérifie pour tout i ,

$$d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i.$$

Pour une autre normalisation $\sum_i \tilde{\omega}_i = 0$ où l'on a vu que $\tilde{\omega}_i = \rho \omega_i$, on a $d\tilde{\omega}_i = \tilde{\gamma} \wedge \tilde{\omega}_i = d\rho \wedge \omega_i + \rho d\omega_i = \rho \tilde{\gamma} \wedge \omega_i$. Comme les 1-formes ω_1, ω_2 engendrent Ω^1 , on obtient

$$\tilde{\gamma} = \gamma + \frac{d\rho}{\rho}.$$

On appelle *courbure de Blaschke* du 3-tissu $\mathcal{W}(3)$ la 2-forme

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)} = d\gamma.$$

D'après ce qui précède, la courbure de Blaschke est un invariant du tissu, au sens où elle ne dépend que du tissu et non pas de la normalisation qui a permis de la définir.

La 2-forme Ω que nous avons construite étant non singulière, on peut écrire pour tout i , que $d\omega_i = h_i\Omega$ et ainsi, on vérifie que

$$\gamma = h_2\omega_1 - h_1\omega_2 = h_3\omega_2 - h_2\omega_3 = h_1\omega_3 - h_3\omega_1.$$

Par exemple, le 3-tissu \mathcal{H} de rang 1, défini précédemment est de courbure nulle. En effet, avec la normalisation

$$dx + dy - d(x + y) = 0,$$

on obtient

$$\Omega = dx \wedge dy$$

et ainsi $h_1 = h_2 = h_3 = 0$ ce qui prouve que

$$\gamma = 0.$$

Pour un 3-tissu $\mathcal{W}(F_1, F_2, F_3)$ où F_1, F_2 et F_3 sont dans \mathcal{O} , l'hypothèse de position générale et le théorème d'inversion locale permettent de montrer que l'application

$$\phi = (F_1, F_2)$$

de \mathbb{C}^2 dans lui-même est un difféomorphisme local et donc la donnée de ce 3-tissu revient à la donnée d'une fonction f dans \mathcal{O} , nulle en 0, telle que le tissu soit défini, *via* ϕ , par le triplet

$$(x = cte, y = cte, f(x, y) = cte).$$

On peut alors calculer la courbure d'un tel tissu *rectifié* $\mathcal{W}(x, y, f(x, y))$. En effet, on a la normalisation suivante

$$\partial_x(f)dx + \partial_y(f)dy - df = 0$$

et ainsi, avec les notations de la remarque précédente, $\Omega = \partial_x(f)\partial_y(f)dx \wedge dy$, et

$$h_1 = -h_2 = \frac{\partial_x\partial_y(f)}{\partial_x(f)\partial_y(f)} \quad \text{et} \quad h_3 = 0.$$

On en déduit que la 1-forme γ est donnée par

$$\gamma = \frac{\partial_x\partial_y(f)}{\partial_y(f)}dx + \frac{\partial_x\partial_y(f)}{\partial_x(f)}dy$$

et donc la courbure \mathcal{K} de ce tissu s'exprime sous la forme

$$\mathcal{K} = d\gamma = \left\{ \partial_x \left(\frac{\partial_x\partial_y(f)}{\partial_x(f)} \right) - \partial_y \left(\frac{\partial_x\partial_y(f)}{\partial_y(f)} \right) \right\} dx \wedge dy$$

et on vérifie que l'on peut l'écrire abusivement

$$\mathcal{K} = \partial_x\partial_y \log \frac{\partial_x(f)}{\partial_y(f)} dx \wedge dy.$$

1.3.2 Tissus hexagonaux

On dit qu'un 3-tissu est *parallélisable* si, après un éventuel changement de variables, les feuilles du tissu sont les feuilles du tissu \mathcal{H} .

Soit $\mathcal{W}(3)$ un 3-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$, donné par trois familles de feuilles que l'on note 1, 2 et 3. Par tout point z proche de 0, passe une feuille de chaque famille, d'après l'hypothèse de position générale.

On se donne alors un point A de la feuille de la famille 1 par exemple, passant par 0. On construit alors le point B comme étant l'unique point d'intersection de la feuille de la famille 3 passant par A et de la feuille de la famille 2 passant par 0.

Puis, on construit le point C à l'intersection de la feuille de 1 passant par B et de la feuille de 3 passant par 0.

On réitère ce processus en construisant successivement les points D, E, F pour enfin trouver un point G sur la feuille de 1 passant par 0.

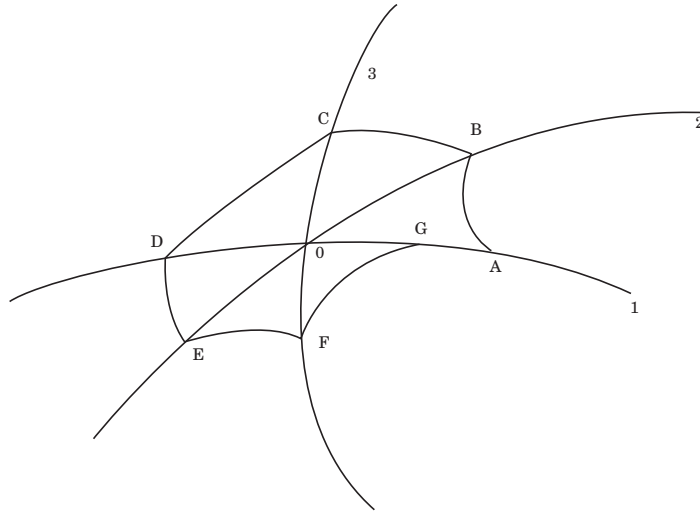


FIG. 1.4 – Construction de l'hexagone

On dira que le tissu est *hexagonal* si quelle que soit la feuille de départ et quel que soit le point A choisi au voisinage de 0 sur cette feuille, les points A et G coïncident, la construction précédente déterminant un "hexagone".

Le 3-tissu \mathcal{H} est hexagonal, comme on peut le voir en explicitant les coordonnées des sommets de l'hexagone. En fait, on peut montrer en utilisant la *série de Lie associée au flot engendré par un champ de vecteurs*, que tout 3-tissu hexagonal est parallélisable.

L'annulation de la courbure de Blaschke est invariant par changement de variables. En effet, si ϕ désigne un isomorphisme de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans lui-même, l'image réciproque des feuilles de $\mathcal{W}(3)$ définit un 3-tissu $\phi^*(\mathcal{W}(3))$ qui admet pour courbure de Blaschke la 2-forme

$$\mathcal{K}_{\phi^*(\mathcal{W}(3))} = \phi^*(\mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)}).$$

Ceci résulte du fait que l'image réciproque de la normalisation est une normalisation.

Les résultats suivant caractérisent les 3-tissus du plan.

Théorème 1.2 (Structure des 3-tissus de rang maximal). *Soit $\mathcal{W}(3)$ un 3-tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$, donné par les trois formes de Pfaff normalisées ω_1, ω_2 et ω_3 . Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) Le tissu $\mathcal{W}(3)$ est de rang 1 ;*
- ii) Le tissu $\mathcal{W}(3)$ est parallélisable ;*
- iii) Le tissu $\mathcal{W}(3)$ est hexagonal ;*
- iv) Le tissu $\mathcal{W}(3)$ est de courbure de Blaschke $\mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)}$ nulle ;*
- v) Les trois formes de Pfaff normalisées définissant le tissu $\mathcal{W}(3)$, vérifient $\omega_i = \rho du_i$ où $\rho \in \mathcal{O}^*$ et $u_i \in \mathcal{O}$.*

Démonstration. On sait déjà que $ii) \Leftrightarrow iii)$, que $ii), iii) \Rightarrow iv)$ et $i)$ puisque le rang est un invariant du tissu, et que le tissu \mathcal{H} est de rang 1. Montrons donc que $iv) \Rightarrow v)$.

La 2-forme $\mathcal{K}_{\mathcal{W}(3)} = d\gamma$ étant nulle, le lemme de Poincaré donne $\gamma = d\psi$ où ψ est dans \mathcal{O} . Donc $\rho = e^\psi$ est dans \mathcal{O}^* . De plus $d\rho/\rho = \gamma$, et donc comme $d\omega_i = \gamma \wedge \omega_i$ on a

$$d\left(\frac{\omega_i}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \wedge \omega_i + \frac{\gamma \wedge \omega_i}{\rho} = 0.$$

Ainsi à nouveau le lemme de Poincaré donne les u_i dans \mathcal{O} tels que $\omega_i = \rho du_i$. Montrons à présent que $v) \Rightarrow ii)$.

Par translation, on peut supposer que pour tout i , $u_i(0) = 0$. Alors l'hypothèse de position générale assure que

$$\omega_1 \wedge \omega_2(0) = \rho^2 du_1 \wedge du_2(0)$$

donc que l'application de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dans lui-même $\phi = (u_1, u_2)$ est un isomorphisme analytique local. Puisque les trois formes de Pfaff sont normalisées, on a aussi $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \rho d(u_1 + u_2 + u_3) = 0$ donc comme $u_i(0) = 0$, on a l'identité

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

ce qui montre que ϕ parallélise le 3-tissu.

Reste à montrer que $i) \Rightarrow ii)$.

Soit $g_1(F_1)dF_1 + g_2(F_2)dF_2 + g_3(F_3)dF_3 = 0$ une relation abélienne non triviale du tissu. En prenant des primitives convenables \tilde{g}_i de g_i , on peut supposer que l'on a $\sum_i \tilde{g}_i = 0$ et que l'on a un germe de morphisme $\phi = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$. On peut supposer que $F_1(x, y) = x$ et $F_2(x, y) = y$. Alors

$$d\phi = g_3(F_3)^2 \partial_x(F_3) \partial_y(F_3) dx \wedge dy$$

puisque $g_1(x) + g_3(F_3) \partial_x(F_3) = 0$ et $g_2(y) + g_3(F_3) \partial_y(F_3) = 0$. L'hypothèse de position générale assure que $\partial_x(F_3)(0) \partial_y(F_3)(0) \neq 0$. Si $g_3(F_3(0)) = g_3(0) = 0$, alors en dérivant successivement le système ci-dessus en x et y , on obtient les

égalités successives $0 = g_1(0) = g_1'(0) = g_1''(0) = \dots$. Il en est de même pour g_2 , ce qui est absurde car la relation abélienne est non triviale. Ainsi, l'application ϕ est un difféomorphisme local puisque $d\phi(0) \neq 0$ et donc, comme nous l'avons vu *supra*, ce difféomorphisme parallélise le tissu. \square

1.4 Une approche implicite

La définition classique d'un d -tissu par la donnée de ses feuilles, peut être ramenée à une définition implicite où les feuilles sont données globalement.

On considère une équation différentielle du premier ordre de la forme suivante :

$$F(x, y, y') := a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0 \quad (1)$$

où $F(x, y, p) \in \mathcal{O}[p]$ est sans facteurs multiples et telle que $a_0 \neq 0 \in \mathcal{O}$.

On note $R \in \mathcal{O}$ le p -résultant de F avec

$$R := \text{Result}(F, \partial_p(F)) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \cdot a_0 \cdot \Delta$$

où Δ est son p -discriminant.

En dehors du lieu singulier défini par $\{R = 0\}$, les d courbes intégrales d'une équation différentielle de la forme (1) définissent un d -tissu non singulier, en vertu du théorème de Cauchy.

Réciproquement, quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, la donnée d'un d -tissu non singulier de $(\mathbb{C}^2, 0)$ permet de construire une équation différentielle

$$F(x, y, y') := \prod_{i=1}^d (\partial_y(F_i)y' + \partial_x(F_i)) = 0$$

de la forme (1) vérifiant $R(0) \neq 0$ et dont les d solutions au voisinage de 0 ont les pentes des feuilles du tissu

$$p_i(x, y) := -\frac{\partial_x(F_i)}{\partial_y(F_i)} \in \mathcal{O}.$$

Ainsi, tout tissu du plan est *implicitement présenté* par une telle équation différentielle F de la forme (1), et ce, à un inversible près. Cette approche ne privilégie aucune des feuilles du tissu et s'inscrit dans le cadre de l'étude géométrique des équations différentielles.

Dans toute la suite, on parlera d'un d -tissu (implicitement) présenté par une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ pour désigner la donnée de ce tissu par une équation de la forme (1).

Par exemple, on peut vérifier grâce à la dualité entre \mathbb{P}^2 et $\check{\mathbb{P}}^2$ qu'un tissu algébrique $\mathcal{L}_C(d)$, associé à une courbe réduite C de \mathbb{P}^2 d'équation affine

$$P(s, t) = 0,$$

est implicitement présenté dans \mathbb{P}^2 par l'équation

$$F(x, y, p) = P(y - px, p) = 0.$$

L'approche implicite permet notamment de donner une autre interprétation des relations abéliennes d'un tissu.

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu présenté par une équation différentielle à coefficients dans \mathcal{O} de la forme

$$F(x, y, y') = a_0(x, y).(y')^d + a_1(x, y).(y')^{(d-1)} + \dots + a_d(x, y) = 0$$

que l'on peut écrire en dehors du lieu singulier $R = \text{Result}(F, \partial_p(F)) = 0$ grâce à ses d racines de la façon suivante

$$F(x, y, p) = a_0(x, y) \prod_i (p - p_i(x, y)).$$

Considérons la surface réduite S définie par $S = \{F(x, y, p) = 0\}$; son contour apparent sur \mathbb{C}^2 est donné par $\{R = 0\}$. Supposons à présent que $R(0) \neq 0$. La projection $\pi : S \rightarrow \mathbb{C}^2$; $(x, y, p) \rightarrow (x, y)$ est au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ un revêtement de degré d . Ainsi on peut construire, toujours au voisinage de 0 , les d applications π_i (pour $i = 1 \dots d$) de \mathbb{C}^2 dans S qui à tout (x, y) associe $(x, y, p_i(x, y))$.

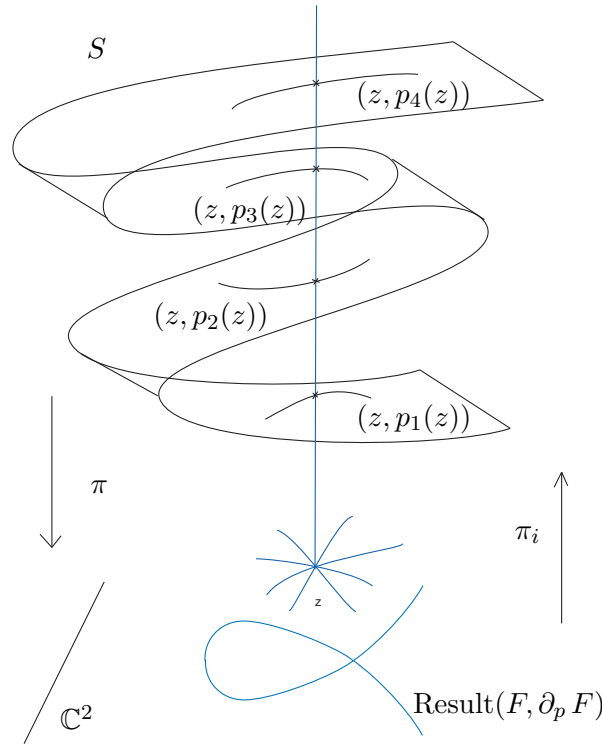


FIG. 1.5 – La surface S

La forme de contact canonique sur S , connue depuis les travaux de Sophus Lie

$$\varpi = dy - p dx,$$

détermine le plan de contact dont l'intersection avec le plan tangent en un point de la surface est une droite, définissant un champ de direction dont les courbes intégrales sur S se projettent avec π sur \mathbb{C}^2 en les feuilles du tissu.

On considère alors sur la surface S l'ensemble des germes de 1-formes différentielles

$$\Omega_S^1 = \Omega_{\mathbb{C}^3}^1 / (dF, F\Omega_{\mathbb{C}^3}^1),$$

et l'ensemble des germes de 2-formes différentielles

$$\Omega_S^2 = \Omega_{\mathbb{C}^3}^2 / (dF \wedge \Omega_{\mathbb{C}^3}^1, F\Omega_{\mathbb{C}^3}^2)$$

et, plus généralement, le complexe de de Rham (Ω_S^\bullet, d) des formes différentielles sur S .

On vérifie que tout élément de la forme

$$r \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$$

où $r = b_2 \cdot p^{d-2} + b_3 \cdot p^{d-3} + \dots + b_d$ est un polynôme à coefficients dans \mathcal{O} de degré inférieur ou égal à $d - 2$, est un élément de $\pi_*(\Omega_S^1)$. Il existe alors deux polynômes r_p et t de degré $d - 1$ au plus dans $\mathcal{O}[p]$ tels que

$$r(\partial_x(F) + p \partial_y(F)) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p) - t) \cdot F - r_p \partial_p(F).$$

De plus, si comme on le suppose à présent, r est de degré au plus $d - 3$, alors le degré de t est au plus $d - 2$ et on a en outre

$$d\left(r \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}\right) = t \frac{dx \wedge dy}{\partial_p(F)}.$$

Cette dernière égalité s'écrit comme un système en les coefficients des polynômes

$$r = b_3 \cdot p^{d-3} + \dots + b_d \text{ et } t = t_2 \cdot p^{d-2} + \dots + t_d,$$

de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x(b_d) + A_{1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{1,d-2} \cdot b_d = t_d \\ \partial_x(b_{d-1}) + \partial_y(b_d) + A_{2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{2,d-2} \cdot b_d = t_{d-1} \\ \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) + A_{d-2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-2,d-2} \cdot b_d = t_3 \\ \partial_y(b_3) + A_{d-1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-1,d-2} \cdot b_d = t_2 \end{array} \right.$$

Un système de Cramer où l'on reconnaît le déterminant de Sylvester donnant le p -résultant de F permet de déterminer les coefficients $A_{i,j}$ dans $\mathcal{O}[1/R]$, et un calcul montre qu'ils sont en fait à pôles sur Δ .

Remarquons alors que la 1-forme $r \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ est fermée si et seulement si

le polynôme t est identiquement nul ou encore, si et seulement si il existe un polynôme r_p de degré au plus $d - 1$ tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$r(\partial_x(F) + p \partial_y(F)) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p)) \cdot F - r_p \partial_p(F).$$

Soit \mathfrak{a}_F l'espace vectoriel défini par

$$\mathfrak{a}_F = \left\{ \omega = (b_3 \cdot p^{d-3} + b_4 \cdot p^{d-4} + \dots + b_d) \cdot \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)} \in \pi_*(\Omega_S^1); b_i \in \mathcal{O} \text{ et } d\omega = 0 \right\}$$

D'après ce qui précède, l'espace vectoriel \mathfrak{a}_F est entièrement déterminé par les solutions du système différentiel $\mathcal{M}(d)$ suivant :

$$\mathcal{M}(d) \begin{cases} \partial_x(b_d) + A_{1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{1,d-2} \cdot b_d = 0 \\ \partial_x(b_{d-1}) + \partial_y(b_d) + A_{2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{2,d-2} \cdot b_d = 0 \\ \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) + A_{d-2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-2,d-2} \cdot b_d = 0 \\ \partial_y(b_3) + A_{d-1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-1,d-2} \cdot b_d = 0 \end{cases}$$

De plus la formule d'interpolation de Lagrange, notamment, permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.3 (Hénaut, 2000). *Les \mathbb{C} -espaces vectoriels $\mathcal{A}(d)$ et \mathfrak{a}_F sont isomorphes.*

L'application T réalisant cet isomorphisme d'espace vectoriel associe à toute relation abélienne $(g_i(F_i))_{\{i=1\dots d\}}$ du d -tissu la 1-forme sur S suivante :

$$T(\{g_i(F_i)\}) = F \cdot \left(\sum_i \frac{g_i(F_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i} \right) \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$$

où les p_i sont les racines de l'équation $F(x, y, p) = 0$.

Nous appellerons *polynôme abélien* tout polynôme r à coefficients dans \mathcal{O} de la forme $r = b_3 \cdot p^{d-3} + \dots + b_d$ tel que $r \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)} \in \mathfrak{a}_F$. Autrement dit, le polynôme r est abélien s'il existe un polynôme r_p de degré au plus $d - 1$ tel que la relation suivante soit vérifiée :

$$r(\partial_x(F) + p \partial_y(F)) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p)) \cdot F - r_p \partial_p(F).$$

Pour un 3-tissu le système $\mathcal{M}(3)$ s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x(b) + A_1 b = 0 \\ \partial_y(b) + A_2 b = 0 \end{cases}.$$

La condition d'intégrabilité de ce système est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{K} = \partial_x(A_2) - \partial_y(A_1) = 0.$$

Le théorème suivant conforte alors dans cette approche implicite des tissus :

Théorème 1.4 (Hénaut, 2000). *La 2-forme $\mathcal{K}dx \wedge dy$ n'est autre que la courbure de Blaschke du 3-tissu considéré.*

Ceci donne donc une méthode de calcul effectif de la courbure de Blaschke d'un 3-tissu, *via* l'approche implicite que nous privilégions ici. Signalons au passage le travail de G. Mignard dans [Mi-1], qui obtint une telle formule *via* la théorie des \mathcal{D} -Modules et l'approche implicite.

Nous verrons au chapitre 3 comment cette approche permet d'obtenir pour un d -tissu quelconque un résultat analogue à celui obtenu pour un 3-tissu, à savoir qu'un tissu est de rang maximal si et seulement si une courbure associée au tissu est nulle.

1.5 Polynôme de linéarisation du tissu

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan dont on note par $p_i \in \mathcal{O}$ les pentes des feuilles pour $1 \leq i \leq d$.

Il existe alors, *via* un déterminant de Vandermonde et l'hypothèse de position générale, un *unique* polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$ à coefficients dans \mathcal{O} , de degré au plus $d - 1$ de la forme

$$P_{\mathcal{W}(d)} = l_1 \cdot p^{d-1} + l_2 \cdot p^{d-2} + \cdots + l_d$$

tel que pour tout i , l'égalité suivante soit vérifiée :

$$X_i(p_i) := \partial_x(p_i) + p_i \partial_y(p_i) = P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, p_i(x, y)).$$

On vérifie que les feuilles du tissu sont alors les graphes de solutions de l'équation différentielle

$$y'' = P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, y')$$

et l'on dit que le polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$ est le *polynôme de linéarisation* du tissu. On montre en utilisant la série de Lie associé au flot d'un champ de vecteurs que l'on retrouvera dans la dernière partie de ce travail, la propriété suivante :

$$\text{Un } d\text{-tissu est linéaire si et seulement si pour tout } i, X_i(p_i) = 0$$

Nous retrouverons également le théorème suivant démontré dans [H-93] et qui justifie par ailleurs la terminologie :

Théorème 1.5 (Hénaut, 1993). *Soit $d \geq 4$ et soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu de $(\mathbb{C}^2, 0)$ dont les champs de vecteurs associés sont $X_i := \partial_x + p_i \partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$. Le polynôme de linéarisation $P_{\mathcal{W}(d)} = l_1 \cdot p^{d-1} + l_2 \cdot p^{d-2} + \cdots + l_d$ possède les propriétés suivantes :*

1. *Le tissu $\mathcal{W}(d)$ est linéaire si et seulement si $P_{\mathcal{W}(d)} = 0$;*
2. *Le tissu $\mathcal{W}(d)$ est linéarisable si et seulement si $\deg(P_{\mathcal{W}(d)}) \leq 3$ et $(l_d, l_{d-1}, l_{d-2}, l_{d-3})$ est solution du système différentiel non linéaire suivant :*

$$\begin{cases} L_1 = -\partial_x(\partial_x(l_{d-2}) - 2\partial_y(l_{d-1})) - l_{d-1}(\partial_x(l_{d-2}) - 2\partial_y(l_{d-1})) - 3\partial_y^2(l_d) \\ \quad - 3\partial_y(l_{d-2}l_d) + 3\partial_x(l_d l_{d-3}) + 3l_d\partial_x(l_{d-3}) = 0 \\ L_2 = \partial_y(2\partial_x(l_{d-2}) - \partial_y(l_{d-1})) - l_{d-2}(2\partial_x(l_{d-2}) - \partial_y(l_{d-1})) - 3\partial_x^2(l_{d-3}) \\ \quad + 3\partial_x(l_{d-1}l_{d-3}) - 3\partial_y(l_d l_{d-3}) - 3l_{d-3}\partial_y(l_d) = 0. \end{cases}$$

Nous verrons dans la suite comment ce système différentiel apparaît naturellement dans la connexion qui sera associée au tissu.

Notons que l'on retrouve ici un résultat classique de R. Liouville, A. Tresse, E. Cartan et plus récemment V. Arnold ou encore Hajime Sato concernant la linéarisation des équations différentielles du second ordre (*cf.* [Lio], [Tr], [Car], [Ar] et [O-S]). Citons également ici les travaux récents de M.A. Akivis, V.V. Goldberg et V.V. Lychagin [A-G-L] et [Go-L] concernant la linéarisation, avec une approche différente.

Chapitre 2

Sur quelques invariants des tissus

Ce chapitre est consacré à la mise à jour d'un certain nombre d'invariants du tissu. Ils apparaissent grâce à l'étude de la surface de \mathbb{C}^3 définie par l'équation différentielle présentant le tissu (lemme 2.1).

Ces nouveaux invariants nous permettent de caractériser les tissus linéaires ainsi que les tissus algébriques dans les propositions 2.2 et 2.3. En outre, on montre que les tissus algébriques sont les tissus présentés par une équation de Clairaut à un inversible près, dans la proposition 2.4.

Parmi ces invariants figure le polynôme de linéarisation du tissu, ce qui permet une reformulation du lemme 2.1 dans le théorème 2.1. Après avoir réduit le nombre des invariants en explicitant les relations qui les lient, on montre que les coefficients du système $\mathcal{M}(d)$ sont entièrement déterminés par la connaissance d'une 1-forme α dont la différentielle est un invariant du tissu, et par le polynôme de linéarisation qui est aussi un invariant du tissu.

2.1 Polynômes associés

2.1.1 Définitions

La notion d'invariant est depuis Felix Klein et son *programme d'Erlangen* au cœur même de la géométrie. Il s'agit donc pour nous d'explicitier la notion d'invariant qui décrira au mieux la géométrie des tissus.

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu défini par d formes de Pfaff $(\omega_i)_{i=1\dots d}$. Les 1-formes $(\rho_i \cdot \omega_i)_{i=1\dots d}$, où ρ_i est un inversible de \mathcal{O} définissant le même tissu, il est donc légitime d'exiger de nos invariants qu'ils ne dépendent que du tissu, et non de la façon dont les feuilles sont données.

Modifier la façon dont les feuilles sont données revient à multiplier l'équation présentant le tissu dans l'approche implicite par un inversible de \mathcal{O} , à savoir le produit des ρ_i . Ainsi un invariant du tissu ne dépend pas de la façon dont on se donne la présentation du tissu, autrement dit, nous considérons les invariants modulo l'action du groupe des inversibles de \mathcal{O} sur les équations présentant le tissu.

Dans toute la suite, c'est sous cette acception que nous entendrons le terme d'invariant du tissu.

On considère un d -tissu $\mathcal{W}(d)$ du plan présenté par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$. On note $R = \text{Result}(F, \partial_p F)$ le p -résultant de F et de $\partial_p(F)$ que l'on suppose non identiquement nul d'après l'hypothèse de position générale. On suppose que $R(0) \neq 0$ et notre étude sera locale, au voisinage de 0 dans \mathbb{C}^2 .

Il existe une relation entre les polynômes F , $\partial_p(F)$ et $\partial_x(F) + p\partial_y(F)$ qui jouent un rôle important dans l'étude de la surface de \mathbb{C}^3 définie par l'équation $F(x, y, p) = 0$, et le résultant R . C'est une relation analogue à la relation de Bezout associée au résultant de deux polynômes qui permettra d'ailleurs de mettre à jour de nombreux invariants du tissu.

Lemme 2.1 (Polynômes associés). *Soient d un entier $d \geq 3$ et $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu présenté par une équation différentielle*

$$F(x, y, y') := a_0(x, y) \cdot (y')^d + a_1(x, y) \cdot (y')^{d-1} + \dots + a_d(x, y) = 0.$$

Pour tout entier $1 \leq i \leq d-3$, il existe deux polynômes

$$U_i := u_2^i \cdot p^{d-2} + \dots + u_d^i \text{ et } V_i := v_1^i \cdot p^{d-1} + \dots + v_d^i$$

de degré respectif $d-2$ et $d-1$ dans $\mathcal{O}[1/R][p]$ tels que l'on ait l'identité suivante :

$$p^i \cdot \left(\partial_x(F) + p\partial_y(F) \right) = U_i \cdot F + V_i \cdot \partial_p(F) \quad (\diamond_i)$$

Une telle écriture \diamond_i est unique. Pour $1 \leq i \leq d-3$, les couples de polynômes (U_i, V_i) sont appelés les *polynômes associés à F d'ordre i* .

On omet dans toute la suite l'indice 0 des polynômes U_0 et V_0 ainsi que de leurs coefficients.

La conduite des calculs sera dans tout ce travail effectuée de façon *méromorphe*. Les expressions manipulées sont en effet toutes *a priori* à pôles sur le résultant R correspondant au tissu étudié.

Démonstration. On écrit que si de tels polynômes U_i et V_i existent, leurs coefficients doivent vérifier un système $S(\diamond_i)$ déduit du fait que l'on a identiquement $U_i \cdot F + V_i \cdot \partial_p(F) = p^i(\partial_x F + p\partial_y F)$. Si l'on note \mathcal{R} la matrice carré d'ordre $2d-1$ suivante :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & da_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & & 0 & (d-1)a_1 & da_0 & & 0 \\ a_2 & a_1 & & 0 & (d-2)a_2 & (d-1)a_1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d-2} & a_{d-3} & & a_0 & 2a_{d-2} & 3a_{d-3} & \dots & 0 \\ a_{d-1} & a_{d-2} & & a_1 & a_{d-1} & 2a_{d-2} & \dots & da_0 \\ a_d & a_{d-1} & & a_2 & 0 & a_{d-1} & \dots & (d-1)a_1 \\ 0 & a_d & & a_3 & 0 & 0 & \dots & (d-2)a_2 \\ 0 & 0 & & a_4 & 0 & 0 & \dots & (d-3)a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & a_d & 0 & 0 & \dots & a_{d-1} \end{pmatrix},$$

le système s'écrit alors

$$S(\diamond_i) \quad \mathcal{R} \cdot \begin{pmatrix} u_2^i \\ \vdots \\ u_d^i \\ v_1^i \\ \vdots \\ v_d^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \vdots \\ \partial_x(a_{i-1}) + \partial_y(a_i) \\ \vdots \\ \partial_x(a_d) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième membre de cette équation comporte i zéros au niveau inférieur et donc $d - 3 - i$ au niveau supérieur. On remarque que le déterminant de la matrice \mathcal{R} n'est autre que $\text{Result}(F, \partial_p F)$ d'après la formule de Sylvester, ainsi la formule (\diamond_i) est obtenue par un système de Cramer, ce qui donne l'existence et l'unicité voulue. \square

Par exemple pour $d = 4$ le système $S(\diamond_0)$ s'écrit :

$$S(\diamond_0) \quad \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 4a_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 3a_1 & 4a_0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 \\ a_4 & a_3 & a_2 & 0 & a_3 & 2a_2 & 3a_3 \\ 0 & a_4 & a_3 & 0 & 0 & a_3 & 2a_2 \\ 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3) + \partial_y(a_4) \\ \partial_x(a_4) \end{pmatrix}.$$

2.1.2 Invariants du tissu

Les polynômes (U_i, V_i) pour $i = 0, \dots, d - 3$ définis précédemment permettent de mettre à jour un certain nombre d'invariants du tissu. En effet, on a le résultat suivant :

Proposition 2.1. Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu présenté par une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ et soit $(U_i(F), V_i(F))$ les polynômes associés à F d'ordre i . Soit également $(U_i(g \cdot F), V_i(g \cdot F))$, les polynômes associés à l'équation $g \cdot F = 0$ présentant ce même tissu où g est un inversible de \mathcal{O} . Les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} U_i(g \cdot F) = U_i(F) + \frac{1}{g} \cdot p^i \cdot (\partial_x(g) + p\partial_y(g)) \\ V_i(g \cdot F) = V_i(F) \end{cases}$$

Ainsi, les $(2d - 3)(d - 2)$ éléments de \mathcal{O}

$$\begin{cases} u_2^i, \dots, \widehat{u_{d-i-1}^i}, \widehat{u_{d-i}^i}, \dots, u_d^i, \\ v_1^i, \dots, v_d^i \end{cases}$$

et pour $k = 0, \dots, d - 2$, les $(d - 3)(d - 2)$ différences

$$\begin{cases} u_{d-i+1}^{i-1} - u_d & \text{pour } i = 2 \dots d - 2 \\ u_{d-j+1}^{j-2} - u_{d-1} & \text{pour } j = 3 \dots d - 1 \end{cases}$$

ainsi que les $d - 2$ formes

$$d(u_{d-i}^i dx + u_{d-i-1}^i dy)$$

sont des invariants du tissu.

En particulier, les polynômes V_i associés à F s'avèrent ne pas en dépendre. On parlera donc des polynômes V_i associés au tissu.

Démonstration. Il suffit d'écrire la relation vérifiée par les polynômes associés à $g \cdot F$ d'ordre i , à savoir

$$p^i(\partial_x(g \cdot F) + p\partial_y(g \cdot F)) = U_i(g \cdot F) \cdot g \cdot F + V_i(g \cdot F) \cdot \partial_p(g \cdot F),$$

ce qui s'écrit aussi :

$$p^i(\partial_x(g) + p\partial_y(g))F + p^i(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = gU_i(g \cdot F) \cdot F + V_i(g \cdot F) \cdot g\partial_p(F).$$

Ainsi on obtient un autre couple de polynômes associés à F d'ordre i , de même degré, et par l'unicité obtenue par le système de Cramer, ils sont donc les mêmes. La proposition en découle en écrivant explicitement ces égalités. \square

2.2 Tissus linéaires et algébriques

Deux classes de tissus vont particulièrement retenir notre attention à ce stade. En effet, les tissus linéaires ainsi que les tissus algébriques s'avèrent être caractérisés par des invariants définis *via* les polynômes associés.

On rappelle qu'un d -tissu *linéaire* est un d -tissu dont les feuilles sont des (germes de) droites. On note un tel tissu $\mathcal{L}(d)$. On peut montrer (*cf.* théorème 1.5) que si l'on note par p_i pour $i = 1 \dots d$ les racines (dans \mathcal{O}) de l'équation

présentant le tissu, celui-ci est linéaire, si et seulement si pour tout i , l'équation suivante est vérifiée :

$$X_i(p_i) = \partial_x(p_i) + p_i \partial_y(p_i) = 0.$$

On montre qu'un tissu *algébrique* est présenté par une équation de la forme $F(x, y, p) = g \cdot P(y - px, p)$ où $P \in \mathbb{C}[s, t]$ est l'équation affine de la courbe algébrique réduite définissant le tissu, et g est un inversible de \mathcal{O} .

2.2.1 Lemme technique

Le lemme technique suivant nous servira par la suite à manipuler les polynômes associés d'un tissu mais aussi à saisir le lien entre le lieu singulier des tissus extraits et le lieu singulier du tissu initial.

Lemme 2.2. *Soient F et G deux polynômes de $\mathcal{O}[p]$, avec $\deg F = d$ et*

$$F = (p - q) \cdot G$$

où q est un élément de \mathcal{O} , racine de F . On a alors les deux relations suivantes

$$\text{Result}(F, \partial_p F) = (-1)^{d-1} \text{Result}(G, \partial_p G) \cdot G(x, y, q)^2 \text{ et}$$

$$\begin{aligned} \text{Result}\left(F, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right) = \\ (-1)^d \left(\partial_x(q) + p \partial_y(q)\right) \cdot G(x, y, q)^2 \cdot \text{Result}\left(G, \partial_x(G) + p \partial_y(G)\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour la première relation, notons q_1, \dots, q_d les racines de F avec $q_d = q$. Ainsi les éléments q_i de \mathcal{O} pour $i = 1 \dots d-1$ sont les racines de G . Le résultant de F admet l'écriture suivante :

$$\text{Result}(F, \partial_p F) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^{2d-2} \prod_{1 \leq i < j \leq d} (q_i - q_j)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \text{Result}(F, \partial_p F) &= (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^{2d-4} \prod_{1 \leq i < j < d} (q_i - q_j)^2 \left(a_0 \prod_{1 \leq i \leq d-1} (q_i - q) \right)^2 \\ &= (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_0^{2d-4} \prod_{1 \leq i < j < d} (q_i - q_j)^2 \cdot G(x, y, q)^2 \\ &= (-1)^{d-1} (-1)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2}} a_0^{2d-4} \prod_{1 \leq i < j < d} (q_i - q_j)^2 \cdot G(x, y, q)^2 \\ &= (-1)^d \text{Result}(G, \partial_p G) \cdot F(x, y, q)^2. \end{aligned}$$

Concernant la deuxième égalité, on utilise ici le fait que

$$\text{Result}\left(F, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right) = \text{Result}\left(G, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right) \cdot \text{Result}\left(p - q, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right).$$

De plus pour tout polynôme A, B et C , on a

$$\text{Result}(A, B) = \text{Result}(A, B + CA),$$

propriété déduite de celles liées aux déterminants. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \text{Result}\left(F, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right) \\ = & \text{Result}\left(G, (\partial_x(G) + p \partial_y(G))(p-q) - (\partial_x(q) + p \partial_y(q))G\right) \cdot \text{Result}\left(p-q, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right) \\ = & \text{Result}\left(G, \partial_x(G) + p \partial_y(G)\right) \cdot \text{Result}\left(G, p-q\right) \cdot \text{Result}\left(p-q, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right). \end{aligned}$$

Or on montre que $\text{Result}(p-q, g) = g(q)$ et $\text{Result}(g, p-q) = (-1)^{\deg(g)}g(q)$ si g est un polynôme, grâce à la propriété du résultant : si $f = a_0p^n + \dots$ est un polynôme de degré n de racine x_1, \dots, x_n et si $g = b_0p^m + \dots$ est un polynôme de degré m de racines y_1, \dots, y_n , alors

$$\text{Result}(f, g) = a_0^m b_0^n \prod (x_i - y_j).$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} & \text{Result}\left(F, \partial_x(F) + p \partial_y(F)\right) \\ = & \text{Result}\left(G, \partial_x(G) + p \partial_y(G)\right) \cdot (-1)^{(d-1)}G(x, y, q) \cdot (-1) \left(\partial_x(q) + p \partial_y(q)\right) G(x, y, q). \end{aligned}$$

□

2.2.2 Caractérisation *via* les polynômes associés

Le lemme 2.2 précédent nous permet donc de caractériser les tissus linéaires *via* les polynômes V_i associés au tissu.

Proposition 2.2 (Tissus linéaire). *Soient $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu présenté par l'équation $F(x, y, y') = 0$ et (U_i, V_i) les polynômes associés d'ordre $i = 0, \dots, d-3$. On a alors l'équivalence suivante :*

Une des feuilles du tissu au moins est un germe de droite si et seulement si $\text{Result}(F, \partial_x(F) + p \partial_y(F)) = 0$. De plus, il y a équivalence entre les trois propositions suivantes :

- i) Le tissu $\mathcal{W}(d)$ est linéaire ;*
- ii) Il existe un entier i , $0 \leq i \leq d-3$ tel que $V_i = 0$;*
- iii) Pour tout entier i , $0 \leq i \leq d-3$, $V_i = 0$.*

Notons que cette propriété est bien géométrique car elle ne dépend que du tissu $\mathcal{W}(d)$.

Démonstration. En adoptant les notations du lemme 2.2 précédent, considérons une des feuilles du tissu, définie par la pente p_j , le polynôme F admettant alors l'écriture $F(x, y, p) = (p - p_j) \cdot G(x, y, p)$. La première équivalence se déduit alors du lemme 2.2. A nouveau, grâce à ce lemme, on peut écrire que

$$\begin{aligned} & \text{Result}(F, \partial_p F) \cdot p^i \cdot \left(\partial_x(F) + p \partial_y(F) \right) = \\ & (-1)^{(d-1)} \text{Result}(G, \partial_p G) \cdot G(x, y, p_j)^2 \cdot p^i \left((p - p_j) \cdot (\partial_x(G) + p \partial_y(G)) - G(\partial_x(p_j) + p \partial_y(p_j)) \right) \\ & = U_i \cdot F + (p - p_j) V_i \cdot \partial_p(G) + V_i \cdot G. \end{aligned}$$

En posant $p = p_j$ dans cette équation, on obtient

$$\begin{aligned} & (-1)^d \text{Result}(G, \partial_p G) \cdot G(x, y, p_j)^3 \cdot p_j^i \cdot \left(\partial_x(p_j) + p_j \partial_y(p_j) \right) \\ & = V_i(x, y, p_j) \cdot G(x, y, p_j). \end{aligned}$$

Ainsi, si les d feuilles du tissu sont des germes de droites, le terme de gauche est nul pour chaque feuille, *i.e.* $\partial_x(p_j) + p_j \partial_y(p_j) = 0$ et donc V_i qui est un polynôme de degré $d - 1$ a d racines distinctes. Il est donc nul. Réciproquement, si V_i est nul, pour chaque feuille du tissu de pente p_j non nulle, alors $\partial_x(p_j) + p_j \partial_y(p_j) = 0$ et ces feuilles sont donc des germes de droites. Si le tissu considéré comporte une feuille de pente $p_j = 0$, cette feuille est une droite. Donc toutes les feuilles du tissu sont des germes de droites : ce tissu est bien linéaire. \square

A noter que si une des feuilles du tissu est donnée par le champ de vecteurs $X = \partial_x$ c'est à dire, si $a_d = 0$, alors $v_d^i = 0$ pour $i = 0, \dots, d - 3$.

Dans le cas des tissus algébriques, outre le fait que les polynômes V_i soient tous nuls puisque le tissu est linéaire, nous obtenons une expression spécifique des polynômes U_i comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 2.3 (Tissus algébriques). *Soient $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu présenté par l'équation $F(x, y, p) = 0$ et pour $0 \leq i \leq d - 3$ les polynômes (U_i, V_i) associés d'ordre i . On a alors l'équivalence des trois propositions suivantes :*

- i) $\mathcal{W}(d)$ est algébrique
- ii) Il existe ϕ dans \mathcal{O} et un entier i , $0 \leq i \leq d - 3$ tels que $V_i = 0$ et $U_i = p^i (\partial_y(\phi)p + \partial_x(\phi))$.
- iii) Il existe ϕ dans \mathcal{O} tel que $V_i = 0$ et $U_i = p^i (\partial_y(\phi)p + \partial_x(\phi))$ pour tout i , $0 \leq i \leq d - 3$.

De plus, dans ce cas, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[s, t]$ tel que

$$F(x, y, p) = e^\phi P(y - px, p).$$

Démonstration. Si $\mathcal{W}(d)$ est algébrique, nous avons vu qu'une équation présentant celui-ci est de la forme $F(x, y, p) = e^\phi P(y - px, p)$, où ϕ est dans \mathcal{O} et P dans $\mathbb{C}[s, t]$. Dans ce cas, on a,

$$\partial_x(P(y - px, p)) + p \partial_y(P(y - px, p)) = 0$$

ainsi, d'après le lemme 2.1 des polynômes associés, le résultat énoncé est montré. Réciproquement, posons $G(x, y, p) = e^{-\phi}F(x, y, p)$. Nous avons par hypothèse $V_i(F) = 0$ et donc $V_i(G) = 0$.

De plus, $U_i(G) = U_i(F) + e^{\phi}p^i(\partial_x(e^{-\phi}) + p\partial_y(e^{-\phi})) = 0$. Donc

$$(\star) \quad \partial_x(G) + p\partial_y(G) = 0.$$

Les polynômes $y - px$ et p sont des solutions indépendantes de (\star) . Ainsi le théorème de Frobenius assure qu'il existe une fonction γ , analytique à deux variables telle que

$$G(x, y, p) = \gamma(y - px, p).$$

Reste à montrer que $\gamma(\alpha, \beta)$ est un polynôme. On a, pour tout $d < j$, par dérivation,

$$0 = \partial_p^j(G) = (-1)^j x^j \partial_\alpha^j(\gamma) + \partial_\beta^j(\gamma).$$

Donc si $x = 0$, pour tout couple (y, p) , $\partial_\beta^j(\gamma)(y, p) = 0$ et donc, pour x non nul, et pour tout (y, p) , $\partial_\alpha^j(\gamma)(y, p) = 0$.

Comme la transformation $(y, p) \rightarrow (y - px, p)$ est bijective à x fixé, on a pour tout (x, y, p) , $\partial_\alpha^j(\gamma) = 0$ ce qui prouve que γ est un polynôme. La deuxième équivalence découle de l'équivalence précédente. \square

2.2.3 Équations de Clairaut

Nous allons nous intéresser à un type bien connu d'équations différentielles, à savoir les équations dites de Clairaut.

Rappelons qu'une telle équation est de la forme

$$y = g(y') + xy'$$

où g est une fonction analytique d'une variable. Si l'on suppose que cette fonction g vérifie, $g''(p) \neq 0$, alors une telle équation a pour solutions les droites paramétrées par m , d'équations

$$x \longrightarrow mx + g(m).$$

Elles sont tangentes à la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(m) = -g'(m) \\ y(m) = -mg'(m) + g(m) \end{cases},$$

qui est *solution singulière* de cette équation.

Considérons à présent une *équation de Clairaut polynomiale*, soit

$$F(x, y, p) = g(p) + xp - y = 0$$

où $g(p)$ est un polynôme en p , de degré d , à coefficients constants. L'équation suivante est alors vérifiée :

$$\partial_x(F(x, y, p)) + p\partial_y(F(x, y, p)) = 0.$$

Réciproquement, considérons une équation $F(x, y, p) = 0$ polynomiale en p à coefficients dans \mathcal{O} vérifiant l'équation

$$\partial_x(F(x, y, p)) + p \cdot \partial_y(F(x, y, p)) = 0,$$

alors l'équation considérée est de Clairaut. En effet comme nous l'avons vu dans la démonstration de la proposition 2.3, on peut écrire que F est de la forme

$$F(x, y, p) = \gamma(y - px, p),$$

où γ est un polynôme. Le point 0 étant supposé régulier, quitte à faire un changement linéaire de variable on peut affirmer que $\partial_\alpha(\gamma)(0, 0) \neq 0$, donc le théorème des fonctions implicites assure que l'équation $F(x, y, y') = 0$ est de la forme

$$y = g(y') + xy',$$

où l'on reconnaît une équation de Clairaut.

On obtient alors l'équivalence des deux assertions suivantes :

- i) $F(x, y, p) = 0$ est une équation de Clairaut polynomiale ;
- ii) $\partial_x(F(x, y, p)) + p \cdot \partial_y(F(x, y, p)) = 0$.

D'où la proposition qui suit :

Proposition 2.4. *Les tissus algébriques du plan sont les tissus présentés par une équation de Clairaut polynomiale, à un inversible de \mathcal{O} près.*

2.3 Invariants de base d'un tissu

2.3.1 Interprétation des polynômes V_i

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu dont on note les pentes de ses feuilles par (p_i) pour $1 \leq i \leq d$. On désigne par $P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, p)$ son polynôme de linéarisation. On rappelle qu'il est défini comme étant l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $d - 1$ tel que, avec les notations précédentes,

$$P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, p_i) = X_i(p_i) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d.$$

En considérant l'équation

$$F(x, y, p) = \prod_{i=1}^d (p - p_i)$$

présentant ce tissu et les polynômes associés d'ordre nul, on montre que

$$\begin{aligned} \partial_x(F) + p \partial_y(F) &= \sum_{i=1}^d -(\partial_x(p_i) + p \partial_y(p_i)) \prod_{j=1, j \neq i}^d (p - p_j) \\ &= U \cdot F + V \sum_{i=1}^d \prod_{j=1, j \neq i}^d (p - p_j). \end{aligned}$$

Pour $p = p_i$, on a alors

$$-X_i(p_i) = V(x, y, p_i).$$

Ceci permet d'établir la proposition suivante où le troisième point est une réécriture du lemme 2.1 :

Théorème 2.1. *Soient $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan implicitement présenté par une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ et (U, V) les polynômes associés d'ordre nul. Soit $P_{\mathcal{W}(d)}$ le polynôme de linéarisation de $\mathcal{W}(d)$. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. $P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, p) = -V(x, y, p)$;
2. Le polynôme $P_{\mathcal{W}(d)}$ est un invariant du tissu ;
3. $\partial_x(F) + p\partial_y(F) = U \cdot F - P_{\mathcal{W}(d)} \cdot \partial_p(F)$;
4. Les équations des feuilles du tissu sont solutions de l'équation différentielle du second ordre $y'' = P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, y') = -V(x, y, y')$.

Cette nouvelle équation

$$\partial_x(F) + p\partial_y(F) = U \cdot F - P_{\mathcal{W}(d)} \cdot \partial_p(F)$$

inscrit l'étude des tissus du plan dans une approche résolument orientée vers l'étude de la géométrie des équations différentielles. Par cette relation, le polynôme de linéarisation joue un rôle dans l'étude de l'équation différentielle au voisinage d'un point singulier où elle n'est pas résolue en y' , là où elle est dite *multiforme*. La classification de ces singularités a été entreprise notamment par R. Thom, J. Martinet et L. Dara. Nous renvoyons pour plus de détail à l'article [D] de ce dernier et à sa bibliographie. Un travail dans cette double perspective alimenterait sans doute de nouvelles avancées dans les deux champs.

On peut également signaler le travail en cours de D. Marin et J.V. Pereira (cf. [M-P]) sur les automorphismes d'un tissu provenant d'un feuilletage de \mathbb{P}^2 qui conduit à l'étude de la surface associée à une équation différentielle.

De façon analogue pour les ordres supérieurs, on peut voir que le polynôme V_1 vérifie

$$V_1(x, y, p_i) = -p_i X_i(p_i)$$

et plus généralement que le polynôme V_k vérifie

$$V_k(x, y, p_i) = -(p_i)^k X_i(p_i)$$

Ainsi, le polynôme V_1 est tel que les équations des feuilles du tissu sont solutions de l'équation différentielle

$$-y' \cdot y'' = V_1(x, y, y').$$

On peut donc montrer que :

Pour tout entier $k \geq 0$, les équations des feuilles du tissu sont solutions de l'équation différentielle $-(y')^k \cdot y'' = V_k(x, y, y')$.

Pour $d = 4$, On déduit de ces considérations que le polynôme $V_k - pV_{k-1}$ de degré d admet pour racines les d pentes du tissu, ce qui permet d'écrire que

$$(V_k - pV_{k-1})(x, y, p) = -v_1^{k-1} \prod_{j=1}^d (p - p_j),$$

soit de façon plus générale,

$$(V_k - pV_{k-1})(x, y, p) = -\frac{v_1^{k-1}}{a_0} F(x, y, p).$$

Or l'unicité de l'écriture (\diamond_k) assure que

$$(U_k - pU_{k-1})F + (V_k - pV_{k-1})\partial_p(F) = 0$$

Ainsi on en déduit que

$$U_k - pU_{k-1} = \frac{v_1^{k-1}}{a_0} \partial_p(F)(x, y, p).$$

Nous obtenons ainsi de proche en proche un lien entre les différents polynômes associés qui nous servira pour les calculs effectifs concernant la connexion associée au tissu. On montre ainsi la proposition suivante

Proposition 2.5. *Pour tout entier $1 \leq i \leq d - 4$, les égalités suivantes sont vérifiées :*

$$(V_{i+1} - pV_i) = -\frac{v_1^i}{a_0} \cdot F \text{ et } U_{i+1} - pU_i = \frac{v_1^i}{a_0} \cdot \partial_p(F).$$

2.3.2 Réduction du nombre des invariants

Nous allons voir que l'on peut ainsi privilégier plus particulièrement le polynôme V dans nos considérations sur les invariants du tissu liés aux polynômes associés, grâce à cette proposition 2.5.

A titre d'exemple, les résultats suivants sont explicités pour $d = 4$, mais leur formulation restera générale.

En privilégiant dans les polynômes associés d'un tissu le polynôme V_i , on peut d'abord exprimer U_i en fonction de V_i , grâce au système $S(\diamond_i)$. En effet, les $d - 1$ premières lignes de ce système s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 u_2^i & = & -da_0 v_1^i \\ a_1 u_2^i + a_0 u_3^i & = & -(d-1)a_1 v_1^i - da_0 v_2^i \\ \vdots & & \\ a_{d-3-i} u_2^i + \dots + a_0 u_{d-1-i}^i & = & \partial_y(a_0) - (3+i)a_{d-3-i} v_1^i - \dots - da_0 v_{d-2-i}^i \\ \vdots & & \\ a_{d-2} u_2^i + \dots + a_0 u_d^i & = & \partial_x(a_i) + \partial_y(a_{i+1}) - 2a_{d-2} v_1^i - \dots - da_0 v_{d-1}^i \end{array} \right. .$$

Pour $d = 4$, nous obtenons par exemple les égalités suivantes

$$\begin{cases} a_0 u_2 & = & -4a_0 v_1 \\ a_1 u_2 + a_0 u_3 & = & \partial_y(a_0) - 3a_1 v_1 - 4a_0 v_2 \\ a_2 u_2 + a_1 u_3 + a_0 u_4 & = & \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) - 2a_2 v_1 - 3a_1 v_2 - 4a_0 v_3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} a_0 u_2^1 & = & \partial_y(a_0) - 4a_0 v_1^1 \\ a_1 u_2^1 + a_0 u_3^1 & = & \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) - 3a_1 v_1^1 - 4a_0 v_2^1 \\ a_2 u_2^1 + a_1 u_3^1 + a_0 u_4^1 & = & \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) - 2a_2 v_1^1 - 3a_1 v_2^1 - 4a_0 v_3^1 \end{cases}.$$

En dehors du lieu singulier, où a_0 est non nul, on peut ainsi résoudre ces systèmes diagonaux en u_j^i pour en donner une expression dépendant des a_i et de leurs dérivées, et des v_j^i .

Toujours pour $d = 4$, on obtient après résolution :

$$\begin{cases} u_2 = -4v_1 \\ u_3 = \frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} v_1 - 4v_2 \\ u_4 = \frac{\partial_x(a_0)}{a_0} + \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + \frac{2a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} v_1 + \frac{a_1}{a_0} v_2 - 4v_3 \end{cases}$$

mais aussi

$$\begin{cases} u_2^1 = \frac{\partial_y(a_0)}{a_0} - 4v_1^1 \\ u_3^1 = \frac{\partial_x(a_0)}{a_0} + \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + \frac{a_1}{a_0} v_1^1 - 4v_2^1 \\ u_4^1 = \partial_x\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + \partial_y\left(\frac{a_2}{a_0}\right) - \frac{a_1}{a_0} \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + \frac{2a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} v_1^1 + \frac{a_1}{a_0} v_2^1 - 4v_3^1 \end{cases}$$

On déduit à présent de la proposition 2.5 que pour $d = 4$, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} v_1^1 = v_2 - \frac{a_1}{a_0} v_1 \\ v_2^1 = v_3 - \frac{a_2}{a_0} v_1 \\ v_3^1 = v_4 - \frac{a_3}{a_0} v_1 \\ v_4^1 = -\frac{a_4}{a_0} v_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_2^1 = u_3 + \frac{3a_1}{a_0} v_1 \\ u_3^1 = u_4 + \frac{2a_2}{a_0} v_1 \\ u_4^1 = \frac{a_3}{a_0} v_1 \end{cases}$$

Ainsi on obtient une nouvelle écriture des coefficients de U et U_1 en fonction de ceux de V :

$$\begin{cases} u_2 = -4v_1 \\ u_3 = \frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + \frac{a_1}{a_0} v_1 - 4v_2 \\ u_4 = \frac{\partial_x(a_0)}{a_0} + \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + \frac{2a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} v_1 + \frac{a_1}{a_0} v_2 - 4v_3 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} u_2^1 = \frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + 4\frac{a_1}{a_0}v_1 - 4v_2 \\ u_3^1 = \frac{\partial_x(a_0)}{a_0} + \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + \left(4\frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{a_0^2}\right)v_1 + \frac{a_1}{a_0}v_2 - 4v_3 \\ u_4^1 = \frac{a_3}{a_0}v_1 \end{cases}$$

Des résultats analogues sont vérifiés pour tout entier d . Ainsi le polynôme V , et donc le polynôme de linéarisation, en vertu du théorème 2.1 semble jouer un rôle crucial parmi les invariants liés au polynômes associés. L'intérêt de réduire ainsi le nombre des invariants à calculer n'est pas seulement d'ordre économique, puisqu'il rend saillant le rôle prépondérant de certains dans l'étude du tissu.

2.4 Relations abéliennes

Le premier changement de point de vue concernant les relations abéliennes d'un tissu du plan consiste à ne plus tant les considérer dans le plan, mais plutôt sur la surface S de \mathbb{C}^3 définie par l'équation présentant le tissu comme l'annonce le théorème 1.3. Nous allons voir comment les polynômes associés permettent de donner une écriture du système $\mathcal{M}(d)$.

2.4.1 Polynômes abéliens

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu présenté par l'équation $F(x, y, y') = 0$ et soit (U_i, V_i) les polynômes associés d'ordre i , pour $1 \leq i \leq d - 3$. Considérons un polynôme r à coefficients dans \mathcal{O} , de degré $d - 3$ au plus, de la forme suivante

$$r = r(x, y, p) = b_3 \cdot p^{d-3} + \dots + b_d;$$

Il existe alors deux polynômes U_r de degré $d - 2$ et V_r de degré $d - 1$ tels que

$$(\diamond_i) \quad r \cdot (\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = U_r \cdot F + V_r \cdot \partial_p(F),$$

ce que l'on montre avec la même méthode que dans la démonstration du lemme 2.1. De tels polynômes U_r et V_r sont des combinaisons des coefficients du tissu. On peut montrer que, du fait de l'unicité de l'écriture \diamond_i , on aura les égalités suivantes :

$$U_r = b_3 \cdot U_{d-3} + \dots + b_d \cdot U \text{ et } V_r = b_3 \cdot V_{d-3} + \dots + b_d \cdot V.$$

On rappelle qu'un polynôme abélien d'un d -tissu présenté par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ est un polynôme de degré $d - 3$ au plus de la forme

$$r = r(x, y, p) = b_3 \cdot p^{d-3} + \dots + b_d$$

tel qu'il existe un polynôme r_p de degré au plus $d - 1$, vérifiant

$$r(\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = (\partial_x(r) + p\partial_y(r) + \partial_p(r_p)) \cdot F - r_p \cdot \partial_p(F).$$

L'existence d'un tel polynôme assure, suivant les rappels que nous avons fait en introduction, l'existence d'une relation abélienne pour le tissu considéré. Nous pouvons affirmer la

Proposition 2.6. Avec les notations précédentes, les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) Le polynôme r est abélien ;
- ii) $U_r + \partial_p(V_r) = \partial_x(r) + p \partial_y(r)$.

Démonstration. On a donc deux écritures :

$$r(\partial_x(F) + p \partial_y(F)) = (\partial_x(r) + p \partial_y(r) + \partial_p(r_p)) \cdot F - r_p \partial_p(F)$$

et

$$r \cdot (\partial_x(F) + p \partial_y(F)) = U_r \cdot F + V_r \cdot \partial_p(F).$$

L'unicité énoncée au lemme 2.1 s'applique ici, et donne le résultat. \square

En considérant l'expression développée de U_r et de V_r à savoir

$$U_r = b_3 \cdot U_{d-3} + \dots + b_d \cdot U \text{ et } V_r = b_3 \cdot V_{d-3} + \dots + b_d \cdot V$$

et en écrivant les polynômes U_i et V_i sous leur forme polynomiale,

$$U_i := u_2^i \cdot p^{d-2} + \dots + u_d^i$$

et

$$V_i := v_1^i \cdot p^{d-1} + \dots + v_d^i,$$

on obtient le système suivant, donnant une expression des coefficients $A_{i,j}$ du système $\mathcal{M}(d)$ dont les solutions éventuelles (b_3, \dots, b_d) sont les relations abéliennes du tissu.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_x(b_d) & = & (u_d^{d-3} + v_{d-1}^{d-3})b_3 + \dots + (u_d + v_{d-1})b_d \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_x(b_{d+1-i}) + \partial_y(b_{d+2-i}) & = & \dots (u_{d+1-i}^{d-2-j} + i \cdot v_{d-i}^{d-2-j})b_j \dots \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_y(b_3) & = & (u_2^{d-3} + (d-1)v_1^{d-3})b_3 + \dots + (u_2 + (d-1)v_1)b_d \end{array} \right.$$

Concrètement, nous allons expliciter la matrice $(A_{i,j})$ pour $d = 3, 4$ et 5 .

- $d = 3$. La matrice $(A_{i,j})$ s'écrit :

$$(A_{i,j}) = - \begin{pmatrix} u_3 + v_2 \\ u_2 + 2v_1 \end{pmatrix}.$$

- $d = 4$. Pour $d = 4$, la matrice $(A_{i,j})$ s'écrit :

$$(A_{i,j}) = - \begin{pmatrix} u_4^1 + v_3^1 & u_4 + v_3 \\ u_3^1 + 2v_2^1 & u_3 + 2v_2 \\ u_2^1 + 3v_1^1 & u_2 + 3v_1 \end{pmatrix}.$$

- $d = 5$. Et pour $d = 5$ on obtient l'écriture :

$$(A_{i,j}) = - \begin{pmatrix} u_5^2 + v_4^2 & u_5^1 + v_4^1 & u_5 + v_4 \\ u_4^2 + 2v_3^2 & u_4^1 + 2v_3^1 & u_4 + 2v_3 \\ u_3^2 + 3v_2^2 & u_3^1 + 3v_2^1 & u_3 + 3v_2 \\ u_2^2 + 4v_1^2 & u_2^1 + 4v_1^1 & u_2 + 4v_1 \end{pmatrix}.$$

Bénéficiant de la réduction du nombre des invariants, on peut obtenir une écriture plus optimale de la matrice $(A_{i,j})$

- Dans le cas où $d = 3$, la matrice $(A_{i,j})$ s'écrit également de la façon suivante :

$$(A_{i,j}) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

avec

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{a_1}{a_0}v_1 + 2v_2 \text{ et } A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + v_1$$

- Pour $d = 4$ on obtient les coefficients $(A_{i,j})$ en fonction des coefficients de V uniquement, d'après les considérations précédentes sur la réduction du nombre des invariants :

$$\begin{cases} A_{11} = & -v_4 \\ A_{12} = & -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{2a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}v_1 - \frac{a_1}{a_0}v_2 + 3v_3 \\ A_{21} = & -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{2a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}v_1 - \frac{a_1}{a_0}v_2 + 2v_3 \\ A_{22} = & -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}v_1 + 2v_2 \\ A_{31} = & -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}v_1 + v_2 \\ A_{32} = & v_1 \end{cases}$$

Soit encore, en posant

$$A_1 = A_{12} = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{2a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}v_1 - \frac{a_1}{a_0}v_2 + 3v_3$$

et

$$A_2 = A_{22} = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}v_1 + 2v_2$$

la matrice devient alors

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} -v_4 & A_1 \\ A_1 - v_3 & A_2 \\ A_2 - v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons au passage que l'on peut écrire aussi, par l'intermédiaire des coefficients de Newton d'un polynôme, que

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + v_1 \sum_i p_i^2 + v_2 \sum_i p_i + 3v_3$$

et que

$$A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + v_1 \sum_i p_i + 2v_2,$$

les p_i désignant bien sûr les pentes des feuilles, autrement dit les racines de l'équation présentant le tissu.

- Enfin, pour un 5-tissu, on montre que la matrice (A_{ij}) admet l'écriture suivante :

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{a_5}{a_0}v_1 & -v_5 & A_1 \\ -2v_5 + \frac{a_4}{a_0}v_1 & A_1 - v_4 & A_2 \\ A_1 - 2v_4 + \frac{a_3}{a_0}v_1 & A_2 - v_3 & 2v_2 - \frac{a_1}{a_0}v_1 \\ A_2 - 2v_3 + \frac{a_2}{a_0}v_1 & v_2 - \frac{a_1}{a_0}v_1 & v_1 \end{pmatrix}$$

où

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + v_1 \sum_i p_i^3 + v_2 \sum_i p_i^2 + v_3 \sum_i p_i + 4v_4$$

et

$$A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + v_1 \sum_i p_i^2 + v_2 \sum_i p_i + 3v_3.$$

On montre par un calcul que pour un d -tissu, les coefficients de la 1-forme $\alpha = A_1 dx + A_2 dy$ qui n'est autre que $A_{1,\pi_{d-2}} dx + A_{2,\pi_{d-2}} dy$ vérifient

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + v_1 \sum_i p_i^{d-2} + v_2 \sum_i p_i^{d-3} + \dots + v_{d-2} \sum_i p_i + (d-1)v_{d-1}$$

et

$$A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + v_1 \sum_i p_i^{d-3} + v_2 \sum_i p_i^{d-4} + \dots + v_{d-3} \sum_i p_i + (d-2)v_{d-2}.$$

De plus, la matrice (A_{ij}) admet une écriture similaire à celle donnée pour les 4 et 5-tissus. Ceci nous conduit à la proposition suivante :

Proposition 2.7. *En terme d'invariant, la matrice (A_{ij}) ne dépend que du polynôme de linéarisation V et de la 1-forme fondamentale $\alpha := A_1 dx + A_2 dy$ dont la différentielle est un invariant du tissu.*

Ainsi, par exemple, les relations abéliennes d'un tissu sont décrites *via* une 1-forme et le polynôme de linéarisation. Dans le cas d'un 3-tissu, la forme fondamentale $d\alpha$ n'est autre que la courbure de Blaschke.

Pour être plus précis, la forme fondamentale est en fait la 2-forme $d\alpha$ qui est un invariant du tissu. Par abus de notation, nous désignerons invariablement par fondamentale la 1-forme α qui dépend de la présentation du tissu, mais qui permet de construire cette 2-forme $d\alpha$ fondamentale pour le tissu.

2.4.2 Cas linéaire

Soit $\mathcal{L}(d)$ un d -tissu linéaire, présenté par une équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$. Comme nous l'avons vu dans la proposition 2.2, les polynômes associés sont tous de la forme $(U_i, 0)$. Dès lors, le système $S(\diamond_i)$ s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 & da_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & (d-1)a_1 & da_0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & \dots & 0 & (d-2)a_2 & (d-1)a_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d-2} & a_{d-3} & \dots & a_0 & 2a_{d-2} & 3a_{d-3} & \dots & 0 \\ a_{d-1} & a_{d-2} & \dots & a_1 & a_{d-1} & 2a_{d-2} & \dots & da_0 \\ a_d & a_{d-1} & \dots & a_2 & 0 & a_{d-1} & \dots & (d-1)a_1 \\ 0 & a_d & \dots & a_3 & 0 & 0 & \dots & (d-2)a_2 \\ 0 & 0 & \dots & a_4 & 0 & 0 & \dots & (d-3)a_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_d & 0 & 0 & \dots & a_{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_2^i \\ \vdots \\ u_d^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \vdots \\ \partial_x(a_{i-1}) + \partial_y(a_i) \\ \vdots \\ \partial_x(a_d) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

et permet d'obtenir les égalités suivantes

$$\begin{cases} a_0 u_2^i = 0 \\ \dots \\ a_{d-i-4} u_2^i + \dots + a_0 u_{d-2-i}^i = 0 \end{cases}.$$

On en déduit pour $i = 0, \dots, d-4$ que

$$u_2^i = \dots = u_{d-2-i}^i = 0$$

puisque a_0 est non nul. En outre, en considérant cette fois les dernières lignes de ce système, on obtient les égalités

$$\begin{cases} a_d u_d^i = 0 \\ \dots \\ a_d u_{d-i+1}^i + \dots + a_{d-i} u_d^i = 0 \end{cases}.$$

On en déduit alors encore, pour $i = 1, \dots, d-3$ que

$$u_{d-i+1}^i = \dots = u_d^i = 0.$$

En effet, si a_d est non nul, l'égalité est bien vérifiée. Si en revanche a_d est nul, alors a_{d-1} est non nul par l'hypothèse de position générale. Donc nécessairement,

$$u_{d-i+2}^i = \dots = u_d^i = 0.$$

Mais comme dans ce cas $\partial_x(a_d) = 0$, on a donc l'égalité :

$$a_d u_{d-i}^i + a_{d-1} u_{d-i+1}^i + \dots + a_{d-i+1} u_d^i = \partial_x(a_d) = 0.$$

Il en résulte que $u_{d-i+1}^i = 0$ également. Ainsi, le système $(A_{i,j})$ dans le cas général d'un tissu linéaire s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & -u_d \\ 0 & \dots & 0 & -u_{d-1}^1 & -u_{d-1} \\ 0 & \dots & \ddots & -u_{d-2}^1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ -u_3^{d-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -u_2^{d-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, ceci prouve que les colonnes de cette matrice comportent les mêmes termes décalés. En effet, par l'écriture des u_j^i en fonction des v_j^i nuls, on vérifie que

$$u_d = u_{d-1}^1 = \dots = u_3^{d-3} = +\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} + \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right)$$

et que

$$u_{d-1} = u_{d-2}^1 = \dots = u_2^{d-3} = +\frac{\partial_y(a_0)}{a_0}.$$

On en déduit alors la proposition suivante dont nous verrons la cohérence avec la suite :

Proposition 2.8. *Avec les notations précédentes, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\mathcal{W}(d)$ est algébrique ;
- ii) $\mathcal{W}(d)$ est linéaire et la différentielle de la 1-forme fondamentale est nulle, soit, $\partial_y^2\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = 0$.

Démonstration. D'après la proposition 2.3 et l'écriture précédente de la matrice (A_{ij}) , un tissu est algébrique si et seulement si il est linéaire et le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases} \partial_y(\phi) = \partial_y(a_0)/a_0 \\ \partial_x(\phi) = \partial_x(a_0)/a_0 + \partial_y(a_1/a_0) \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité de ce système étant $\partial_y^2\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = 0$, la proposition est démontrée. \square

A nouveau, l'importance du rôle joué par la forme fondamentale est explicite par cette proposition.

Chapitre 3

Diagramme de Cartan-Spencer du tissu

Le premier changement de point de vue concernant l'étude des relations abéliennes d'un tissu consiste à les considérer sur la surface S définie par l'équation présentant le tissu.

Cela nous conduit à l'étude d'un système différentiel linéaire $\mathcal{M}(d)$, dont les solutions sont les relations abéliennes du tissu, *via* le théorème 1.3. Dans un premier temps, nous poserons quelques notations ainsi que la trame de la théorie de Cartan-Spencer nécessaire à cette étude. Puis nous construirons dans le détail la connexion pour les 3 et 4-tissu. Une interprétation plus fine est donnée dans ce dernier cas, et montre que, dans une base adaptée, la courbure de la connexion rend compte de la linéarisation du 4-tissu comme l'énonce le théorème 3.2. Ceci permet de redémontrer à l'aide du savoir-faire propre à l'étude des systèmes différentiels le théorème 3.3 classique de Poincaré. Avant de traiter quelques exemples, les tissus rectifiés sont envisagés du point de vue de la connexion.

La deuxième partie de ce chapitre, ainsi que le chapitre suivant étendent et complètent la note publiée en Août 2005 notée [R].

3.1 Notations

Par la nature de ses symboles, les solutions analytiques de $\mathcal{M}(d)$ forment un *système local* dont nous sommes amenés à chercher le rang. Pour cela est construit à partir de $\mathcal{M}(d)$ grâce à la théorie de Cartan-Spencer un *fibré vectoriel complexe* E de rang π_d sur $(\mathbb{C}^2, 0)$, inclus dans le fibré des jets $J_{d-2}(\mathcal{O}^{d-2})$ et une *connexion* $\nabla : E \rightarrow \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} E$, *non nécessairement intégrable*, dont les *sections horizontales s'identifient* à \mathfrak{a}_F . De plus, dans une *base adaptée* de (E, ∇) , sa courbure $K : E \rightarrow \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} E$ admet une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{\pi_d} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Le théorème de Cauchy-Kowalevski assure que les tissus maximaux sont exactement ceux pour lesquels la connexion associée est intégrable. Le théorème qui en découle est le suivant :

Théorème 3.1 (Hénaut, 2004). *La connexion (E, ∇) est intégrable ($K = 0$) si et seulement si le tissu $\mathcal{W}(d)$ est de rang maximal.*

C'est donc le deuxième changement de point de vue concernant les relations abéliennes du tissu. Celles-ci sont vues à présent comme les éventuelles sections horizontales d'une connexion.

Dans le cas d'un 3-tissu, la courbure obtenue est une 2-forme qui est la courbure de Blaschke classique du tissu.

Par construction, la connexion (E, ∇) dépend de la présentation F de $\mathcal{W}(d)$, mais on montre qu'il existe une base adaptée dans laquelle la matrice de courbure soit un invariant du tissu. En revanche, l'annulation de la courbure est bien toujours un invariant du tissu.

Nous allons pour notre part détailler la construction de la connexion pour les 3-tissus et les 4-tissus du plan, ce qui nous conduira à une étude qualitative des différents invariants générés par cette connexion.

Pour un d -tissu, où d est quelconque, nous ne saurions échapper à une grande complexité des calculs qui rend parfois les résultats illisibles. Dans le cas des 5-tissus, nous ne pourrions rendre compte aussi précisément de la construction de la connexion. Cependant, dans le chapitre 6 consacré à ces tissus, nous donnerons une écriture simple de la connexion et une interprétation analogue à celle donnée pour les 4-tissus. De plus, quelques exemples seront traités.

Cette étude empruntera les notations de l'article cité *supra* [H-04] ainsi que l'article de D.C. Spencer ([S]), celui de H. Goldschmidt ([Gold]) ou encore la thèse de D.G. Quillen ([Q]) et nous y renverrons également pour les démonstrations qui ne figureront pas ici.

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan implicitement présenté par une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$. En dehors du lieu singulier $Res(F, \partial_p(F)) = 0$, les pentes du tissu seront notées $p_i = p_i(x, y)$ pour $1 \leq i \leq d$. Soit S la surface de \mathbb{C}^3 définie par l'équation $S = \{F(x, y, p) = 0\}$. Avec les notations de l'introduction, l'opérateur extérieur de différenciation sur S

$$d : \pi_*(\Omega_S^1) \longrightarrow \pi_*(\Omega_S^2)$$

$$r \cdot \frac{dy - p \, dx}{\partial_p(F)} \longrightarrow t \cdot \frac{dx \wedge dy}{\partial_p(F)}$$

donne naturellement lieu à un opérateur linéaire

$$\rho : \mathcal{O}^{d-2} \longrightarrow \mathcal{O}^{d-1}$$

qui associe aux coefficients de r , à savoir (b_3, \dots, b_d) , les coefficients de t notés (t_2, \dots, t_d) . Cet opérateur provient du système linéaire $\mathcal{M}(d)$. On peut lui faire

correspondre un morphisme de \mathcal{O} -modules

$$p_0 : J_1(\mathcal{O}^{d-2}) \longrightarrow \mathcal{O}^{d-1}$$

vérifiant

$$p_0 \circ j_1 = \rho, \text{ avec } j_1(b) = (b, \partial_x(b), \partial_y(b))$$

Par extension, nous désignerons classiquement par

$$p_k : J_{k+1}(\mathcal{O}^{d-2}) \longrightarrow J_k(\mathcal{O}^{d-1})$$

le k -ième prolongement de p_0 obtenu par dérivations successives et par R_k le noyau de p_k . Nous avons en outre une suite exacte naturelle qui concerne les symboles du prolongement :

$$0 \longrightarrow g_k \longrightarrow S_{k+1}(\mathcal{O}^{d-2}) \xrightarrow{\sigma_k} S_k(\mathcal{O}^{d-1}) \xrightarrow{\tau_k} \mathfrak{K}_k \longrightarrow 0$$

où $S_{k+1}(\mathcal{O}^{d-2})$ est le noyau de la projection naturelle

$$J_{k+1}(\mathcal{O}^{d-2}) \xrightarrow{\pi_k} J_k(\mathcal{O}^{d-2}).$$

On montre qu'au rang $d-3$, le noyau de p_{d-3} noté R_{d-3} est un fibré vectoriel de rang π_d ; On a de plus le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes, les colonnes exactes en R_k et où les applications j_{d-1} et j_{d-2} sont injectives :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Sol}(\mathcal{M}(d)) & \longrightarrow & \text{Sol}(\mathcal{M}(d)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow j_{d-1} & & \downarrow j_{d-2} & & \\
 0 & \longrightarrow & R_{d-2} & \xrightarrow{\bar{\pi}_{d-3}} & E = R_{d-3} & \xrightarrow{\beta_{d-3}} & \mathfrak{K}_{d-3} \\
 & & \downarrow D & \swarrow \nabla & \downarrow D & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega_1 \otimes_{\mathcal{O}} E & \xrightarrow{\bar{\pi}_{d-4}} & \Omega_1 \otimes_{\mathcal{O}} R_{d-4} & \xrightarrow{\beta_{d-4}} & \Omega_1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{K}_{d-4} \\
 & & \swarrow \nabla^{(1)} \downarrow D & & \downarrow D & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} g_{d-4} & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{d-4} & \xrightarrow{\bar{\pi}_{d-5}} & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{d-5} & \xrightarrow{\beta_{d-5}} & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{K}_{d-5} \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Le fibré E est muni d'une connexion

$$\nabla = \bar{\pi}_{d-4} \circ D$$

via le morphisme D du premier complexe de Spencer

$$0 \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{M}(d)) \xrightarrow{j_{d-2}} R_{d-3} \xrightarrow{D} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} R_{d-4} \xrightarrow{D} \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{d-5} \longrightarrow 0$$

et l'isomorphisme entre R_{d-4} et R_{d-3} . De même, on définit la courbure

$$\nabla^{(1)} \circ \nabla : E \longrightarrow \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} E$$

à valeurs dans $\Omega_2 \otimes_{\mathcal{O}} g_{d-4}$ où g_{d-4} est un \mathcal{O} -module libre de rang 1. Ceci assure l'existence d'une base que nous dirons adaptée, dans laquelle la matrice de courbure prendra la forme particulière que nous avons vue. C'est donc par le biais de la théorie de Cartan-Spencer concernant les systèmes différentiels qu'est envisagée l'étude du système $\mathcal{M}(d)$.

3.2 Une connexion associée à un 3-tissu

3.2.1 Construction

Le système $\mathcal{M}(3)$ associé à un 3-tissu est le suivant :

$$\mathcal{M}(3) \begin{cases} \partial_x(b) + A_1.b = 0 \\ \partial_y(b) + A_2.b = 0 \end{cases} .$$

Il induit un morphisme de \mathcal{O} -modules p_0 :

$$p_0 : J_1(\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}$$

qui à tout (z, p, q) de $J_1(\mathcal{O})$ associe $(p + A_1z, q + A_2z)$. On montre que le noyau de p_0 noté L est un fibré vectoriel de rang 1 engendré par le vecteur

$$e_1 = (1, -A_1, -A_2).$$

L'application

$$L \xrightarrow{\bar{\pi}_{-1}} \mathcal{O}$$

qui est la projection selon la première variable est un isomorphisme de fibré. On a en outre un complexe dit *premier complexe de Spencer*, exact en L

$$0 \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{M}(3)) \xrightarrow{j_1} L \xrightarrow{D} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \xrightarrow{D} 0$$

ainsi que le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \text{Sol}(\mathcal{M}(d)) \\ & & & & & & \downarrow j_1 \\ 0 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \\ & & \downarrow & \swarrow \nabla & \downarrow D & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} L & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} g_{-1} & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes et tel que les colonnes sont exactes en R_1 et L , et j_1 est injective. On vérifie que l'on définit une connexion ∇ en posant

$$\nabla = (id \otimes \bar{\pi}_{-1}) \circ D.$$

L'exactitude du premier complexe de Spencer nous donne donc l'égalité

$$D(e_1) = dx \otimes A_1 + dy \otimes A_2.$$

La connexion ainsi obtenue admet alors dans la base e_1 l'écriture suivante

$$\gamma = A_1 dx + A_2 dy$$

et la courbure s'y écrit

$$K = d\gamma + \gamma \wedge \gamma = (\partial_x(A_2) - \partial_y(A_1)) dx \wedge dy.$$

Cette courbure est la courbure de Blaschke usuelle comme nous avons pu le dire précédemment (cf. [H-00]). Nous dirons qu'au 3-tissu est associé une connexion pour désigner le fibré en droites (L, ∇) muni de sa connexion ainsi construit.

3.2.2 Ecriture explicite de la connexion

Dans le cas d'un 3-tissu $\mathcal{W}(3)$, il n'y a qu'un couple (U, V) , d'ordre 0, et l'équation \diamond_0 avec $r = b_3$,

$$r \cdot (\partial_x(F) + p\partial_y(F)) = U_r \cdot F + V_r \cdot \partial_p(F)$$

permet comme on l'a vu, d'obtenir le système

$$\begin{cases} \partial_x(b_3) = (u_3 + v_2)b_3 \\ \partial_y(b_3) = (u_2 + 2v_1)b_3 \end{cases}$$

Ainsi $A_1 = -u_3 - v_2$ et $A_2 = -u_2 - 2v_1$. La courbure de Blaschke de ce 3-tissu est donc

$$K_{\mathcal{W}(3)} = -(\partial_x(u_2 + 2v_1) - \partial_y(u_3 + v_2)) dx \wedge dy.$$

La proposition 2.1 nous permet de redémontrer que la courbure ainsi obtenue, autrement dit la courbure de Blaschke, est un *invariant du tissu*.

Dans le cas où $d = 3$, le système vérifié par (U, V) étant le suivant :

$$S(\diamond_0) \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 3a_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 2a_1 & 3a_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & a_2 & 2a_1 & 3a_0 \\ a_3 & a_2 & 0 & a_2 & 2a_1 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(a_0) \\ \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) \\ \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ \partial_x(a_3) \end{pmatrix}$$

on peut exprimer U en fonction de V de telle sorte que l'on peut obtenir l'écriture suivante de A_1 et de A_2 :

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{a_1}{a_0}v_1 + 2v_2$$

$$A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + v_1$$

On peut alors calculer explicitement la courbure de Blaschke d'un 3-tissu.

Dans le cas particulier d'un tissu explicitement donné par les 1-formes

$$\omega_1 = dy, \quad \omega_2 = dx + tdy \quad \text{et} \quad \omega_3 = \partial_x(f)dx + \partial_y(f)dy,$$

où f est dans \mathcal{O} et où t est une constante non nulle, on obtient grâce aux expressions précédentes une courbure dépendante de t . Lorsque t tend vers 0, la connexion s'écrit

$$\gamma = \frac{\partial_x \partial_y(f)}{\partial_y(f)} dx + \frac{\partial_x \partial_y(f)}{\partial_x(f)} dy$$

et on retrouve alors l'expression classique de la courbure d'un 3-tissu du type $\mathcal{W}(dx, dy, \partial_x(f)dx + \partial_y(f)dy)$ soit

$$K = d\gamma = \left\{ \partial_x \left(\frac{\partial_x \partial_y(f)}{\partial_x(f)} \right) - \partial_y \left(\frac{\partial_x \partial_y(f)}{\partial_y(f)} \right) \right\} dx \wedge dy,$$

ou encore par abus de notation,

$$K = \partial_x \partial_y \log \frac{\partial_x(f)}{\partial_y(f)} dx \wedge dy.$$

3.2.3 Cas linéaire

Ceci nous permet par exemple de voir que dans le cas d'un tissu linéaire, la courbure de Blaschke d'un 3-tissu donné sous forme implicite, est

$$K_{\mathcal{L}(3)} = \partial_y^2(a_1/a_0).$$

En effet, puisque V est nul, nous avons

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0}.$$

Ceci est cohérent avec la proposition 2.8.

3.2.4 Exemples

Prenons par exemple le cas d'un 3-tissu dont une équation associée est de la forme

$$p^3 + a = 0, \quad a \in \mathcal{O}.$$

Dans ce cas, le système $S(\diamond_0)$ devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \partial_y(a) \\ \partial_x(a) \end{pmatrix}.$$

Le polynôme de linéarisation de ce tissu est alors

$$P_{\mathcal{W}(3)} = -\frac{1}{3} \frac{\partial_y(a)}{a} p^2 - \frac{1}{3} \frac{\partial_x(a)}{a} p.$$

La connexion associée est la 1-forme fondamentale

$$\alpha = -\frac{2}{3} \frac{\partial_x(a)}{a} dx - \frac{1}{3} \frac{\partial_y(a)}{a} dy$$

et la courbure $K = d\alpha$ est

$$K_{\mathcal{W}(3)} = \frac{1}{3} \frac{a \partial_x \partial_y(a) - \partial_x(a) \partial_y(a)}{a^2} dx \wedge dy.$$

Ainsi on retrouve les résultats énoncés dans la thèse de G. Mignard (*cf.* [Mi-2] par exemple).

En reprenant à nouveau un exemple provenant de la physique emprunté à G. Mignard, considérons le tissu implicitement présenté par l'équation

$$(y')^3 - 4y \cdot y' - 4x = 0.$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta = -256y^3 + 432x^2$$

et le polynôme de linéarisation de ce tissu est

$$P_{\mathcal{W}(3)} = -2 \frac{y(4y+3)}{16y^3-27x^2} \cdot p^2 + 3 \frac{x(4y+3)}{16y^3-27x^2} \cdot p + 4 \frac{4y^2+9x^2}{16y^3-27x^2}.$$

La 1-forme α s'écrit

$$\alpha = 6 \frac{x(4y+3)}{16y^3-27x^2} dx - 2 \frac{y(4y+3)}{16y^3-27x^2} dy$$

et permet de voir que la courbure de Blaschke de ce tissu est non nulle, puisque

$$K = 12 \frac{x(36y^2 - 27y + 64y^3 + 54x^2)}{(16y^3 - 27x^2)^2} dx \wedge dy.$$

3.3 Une connexion associée à un 4-tissu

3.3.1 Construction

Comme précédemment, on définit l'application p_0 qui à tout élément

$$\begin{pmatrix} z_3, p_3, q_3 \\ z_4, p_4, q_4 \end{pmatrix} \in J_1(\mathcal{O}^2)$$

associe l'élément

$$\begin{pmatrix} p_4 + A_{11}z_3 + A_{12}z_4 \\ p_3 + q_4 + A_{21}z_3 + A_{22}z_4 \\ q_3 + A_{31}z_3 + A_{32}z_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}^3.$$

On a alors le diagramme *commutatif* et *exact* suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & g_0 & \longrightarrow & S_1(\mathcal{O}^2) & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathcal{O}^3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & J_1(\mathcal{O}^2) & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{O}^3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \bar{\pi}_{-1} & & \downarrow \pi_{-1} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R_{-1} & \longrightarrow & \mathcal{O}^2 & \xrightarrow{p_{-1}} & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

la ligne supérieure de ce diagramme

$$0 \longrightarrow g_0 \longrightarrow S_1(\mathcal{O}^2) \xrightarrow{\sigma_0} \mathcal{O}^3 \longrightarrow 0$$

concernant les symboles. Explicitement, on a :

$$\sigma_0 \begin{pmatrix} p_3, q_3 \\ p_4, q_4 \end{pmatrix} = (p_4, p_3 + q_4, q_3)$$

et le noyau g_0 de σ_0 est donc $\mathcal{O} = (p_3, 0, 0, -p_3)$. La première prolongation

$$p_1 : J_2(\mathcal{O}^2) \longrightarrow J_1(\mathcal{O}^3)$$

de p_0 s'écrit alors

$$p_1 \begin{pmatrix} z_3, p_3, q_3, r_3, s_3, t_3 \\ z_4, p_4, q_4, r_4, s_4, t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_4 + A_{11}z_3 + A_{12}z_4 & r_4 + A_{11}p_3 + A_{12}p_4 + \partial_x(A_{11})z_3 + \partial_x(A_{12})z_4 & s_4 + A_{11}q_3 + A_{12}q_4 + \partial_y(A_{11})z_3 + \partial_y(A_{12})z_4 \\ p_3 + q_4 + A_{21}z_3 + A_{22}z_4, r_3 + s_4 + A_{21}p_3 + A_{22}p_4 + \partial_x(A_{21})z_3 + \partial_x(A_{22})z_4, s_3 + t_4 + A_{21}q_3 + A_{22}q_4 + \partial_y(A_{21})z_3 + \partial_y(A_{22})z_4 \\ q_3 + A_{31}z_3 + A_{32}z_4 & s_3 + A_{31}p_3 + A_{32}p_4 + \partial_x(A_{31})z_3 + \partial_x(A_{32})z_4 & t_3 + A_{31}q_3 + A_{32}q_4 + \partial_y(A_{31})z_3 + \partial_y(A_{32})z_4 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons le diagramme *commutatif* et *exact* suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & g_1 = 0 & \longrightarrow & S_2(\mathcal{O}^2) & \xrightarrow{\sigma_1} & S_1(\mathcal{O}^3) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R_1 & \longrightarrow & J_2(\mathcal{O}^2) & \xrightarrow{p_1} & J_1(\mathcal{O}^3) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \bar{\pi}_0 & & \downarrow \pi_0 & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & R_0 & \longrightarrow & J_1(\mathcal{O}^2) & \xrightarrow{p_0} & \mathcal{O}^3 \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

A nouveau la ligne supérieure est donnée par

$$\sigma_1 \begin{pmatrix} r_3, s_3, t_3 \\ r_4, s_4, t_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_4, r_3 + s_4, s_3 \\ s_4, s_3 + t_4, t_3 \end{pmatrix}.$$

Le premier complexe de Spencer s'écrit

$$0 \longrightarrow \text{Sol}(\mathcal{M}(4)) \xrightarrow{j_2} E \xrightarrow{D} \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} R_0 \xrightarrow{D} \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{-1} \longrightarrow 0$$

où E désigne le noyau de p_1 . D'où le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes et les colonnes exactes en R_k et où les applications j_2 et j_3 sont injectives :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & 0 & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Sol}(\mathcal{M}(4)) & \longrightarrow & \text{Sol}(\mathcal{M}(4)) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow j_3 & & \downarrow j_2 & & \\
 0 & \longrightarrow & R_2 & \xrightarrow{\bar{\pi}_1} & E = R_1 & \xrightarrow{\beta_1} & \mathfrak{K}_1 \\
 & & \downarrow & \swarrow \nabla & \downarrow D & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} E & \xrightarrow{\bar{\pi}_0} & \Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} R_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow D & & \\
 0 & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} g_0 & \longrightarrow & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_0 & \xrightarrow{\bar{\pi}_{-1}} & \Omega^2 \otimes_{\mathcal{O}} R_{-1} \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On vérifie d'une part que le noyau de p_1 est un fibré vectoriel de rang 3 et d'autre part que l'application $\bar{\pi}_0$ est un isomorphisme. L'application

$$\nabla = \bar{\pi}_0^{-1} \circ D$$

est alors une connexion sur le fibré E . Le noyau de la connexion ∇ ainsi définie est isomorphe à $\text{Sol}(\mathcal{M}(4))$. C'est donc un système local. A nouveau, le 4-tissu sera dit muni de sa connexion associée pour désigner le fibré (E, ∇) ainsi défini.

3.3.2 Une matrice de la connexion

Étant donnée la connexion précédente associée au 4-tissu, on cherche à présent la matrice de cette connexion dans une base "adaptée" de $E = \text{Ker}(p_1)$. On écrit pour cela que

$$p_1 \begin{pmatrix} z_3, p_3, q_3, r_3, s_3, t_3 \\ z_4, p_4, q_4, r_4, s_4, t_4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} p_4 + A_{11}z_3 + A_{12}z_4 & r_4 + A_{11}p_3 + A_{12}p_4 + \partial_x(A_{11})z_3 + \partial_x(A_{12})z_4 & s_4 + A_{11}q_3 + A_{12}q_4 + \partial_y(A_{11})z_3 + \partial_y(A_{12})z_4 \\ p_3 + q_4 + A_{21}z_3 + A_{22}z_4, r_3 + s_4 + A_{21}p_3 + A_{22}p_4 + \partial_x(A_{21})z_3 + \partial_x(A_{22})z_4, s_3 + t_4 + A_{21}q_3 + A_{22}q_4 + \partial_y(A_{21})z_3 + \partial_y(A_{22})z_4 \\ q_3 + A_{31}z_3 + A_{32}z_4 & s_3 + A_{31}p_3 + A_{32}p_4 + \partial_x(A_{31})z_3 + \partial_x(A_{32})z_4 & t_3 + A_{31}q_3 + A_{32}q_4 + \partial_y(A_{31})z_3 + \partial_y(A_{32})z_4 \end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on peut choisir cette base e_1, e_2, e_3 ainsi :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & A_{21} + A_{12} & A_{31} & -A_{32} \\ 0 & 0 & 1 & A_{11} & -A_{12} & -A_{22} - A_{31} \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} -1 & A_{21} & A_{31} & -\partial_y(A_{11}) + \partial_x(A_{21}) - A_{21}^2 - A_{11}(A_{22} - A_{31}) & -A_{31}A_{21} - A_{32}A_{11} + \partial_x(A_{31}) & -A_{31}^2 + \partial_y(A_{31}) \\ 0 & +A_{11} & 0 & -A_{11}(A_{21} + A_{12}) + \partial_x(A_{11}) & -A_{11}A_{31} + \partial_y(A_{11}) & -\partial_x(A_{31}) + \partial_y(A_{21}) + A_{32}A_{11} \end{pmatrix}$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_{32} & \partial_y(A_{12}) - \partial_x(A_{22}) - A_{11}A_{32} & A_{32}A_{12} - \partial_x(A_{32}) & A_{32}(A_{31} + A_{22}) - \partial_y(A_{32}) \\ 1 & -A_{12} & -A_{22} & A_{12}^2 - \partial_x(A_{12}) & A_{11}A_{32} + A_{12}A_{22} - \partial_y(A_{12}) & A_{32}(A_{21} - A_{12}) + A_{22}^2 + \partial_x(A_{32}) - \partial_y(A_{22}) \end{pmatrix}$$

Puisque

$$j_2(f) = (f, \partial_x(f), \partial_y(f), \partial_x^2(f), \partial_x\partial_y(f), \partial_y^2(f)),$$

l'exactitude en E du complexe de Spencer assure que

$$D(z, p, q, r, s, t) = dx \otimes (\partial_x(z) - p, \partial_x(p) - r, \partial_x(q) - s) + dy \otimes (\partial_y(z) - q, \partial_y(p) - s, \partial_y(q) - t).$$

On calcule ainsi $D(e_1)$, $D(e_2)$, $D(e_3)$, élément de $\Omega^1 \otimes_{\mathcal{O}} R_0$, que l'on doit composer avec $\bar{\pi}_0$ pour avoir les $\nabla(e_i)$. Ceci permet d'obtenir la matrice γ de la connexion ∇ dans cette base adaptée. On trouve alors :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \eta & \xi_1 & \xi_2 \\ -dx & \beta & -A_{32}dy \\ -dy & -A_{11}dx & \alpha \end{pmatrix}$$

où

$$\xi_1 = -(\partial_y(A_{11}) - A_{11}\lambda_2)dx - (A_{32}A_{11} - \tilde{\beta})dy$$

$$\xi_2 = -(A_{11}A_{32} + \tilde{\alpha})dx - (A_{32}\lambda_1 + \partial_x(A_{32}))dy$$

$$\alpha = A_{12}dx + A_{22}dy, \quad d\alpha := \tilde{\alpha}dx \wedge dy$$

$$\beta = A_{21}dx + A_{31}dy, \quad d\beta := \tilde{\beta}dx \wedge dy$$

$$\eta = A_{12}dx + A_{31}dy, \quad d\eta := \tilde{\eta}dx \wedge dy$$

$$\lambda_1 = A_{21} - A_{12} \quad \lambda_2 = A_{31} - A_{22}.$$

La matrice de courbure a alors la forme suivante :

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

où

$$k_1 = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\eta} = 2\tilde{\beta} + \tilde{\alpha} + \partial_y(\lambda_1)$$

$$k_2 = \partial_x(\tilde{\beta}) - \lambda_1\tilde{\beta} + \partial_y^2(A_{1,1}) - \partial_y(\lambda_2A_{1,1}) - \partial_x(A_{1,1}A_{3,2}) - A_{1,1}\partial_x(A_{3,2})$$

$$k_3 = \partial_y(\tilde{\alpha}) + \lambda_2\tilde{\alpha} - \partial_x(\lambda_1A_{3,2}) - \partial_x^2(A_{3,2}) + \partial_y(A_{3,2}A_{1,1}) + A_{3,2}\partial_y(A_{1,1})$$

En posant $A_1 = A_{12}$ et $A_2 = A_{22}$ et en considérant le polynôme V , cette matrice de connexion s'écrit alors

$$\gamma = \begin{pmatrix} \eta & \xi_1 & \xi_2 \\ -dx & \beta & -v_1dy \\ -dy & v_4dx & \alpha \end{pmatrix}$$

où

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (\partial_y(v_4) + v_4v_2)dx + (v_1v_4 + \tilde{\beta})dy \\ \xi_2 &= (v_4v_1 - \tilde{\alpha})dx + (v_1v_3 - \partial_x(v_1))dy \\ A_1 &= -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{2a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}v_1 - \frac{a_1}{a_0}v_2 + 3v_3 \\ A_2 &= -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}v_1 + 2v_2 \\ \alpha &= A_1dx + A_2dy, \quad d\alpha := \tilde{\alpha}dx \wedge dy \\ \beta &= (A_1 - v_3)dx + (A_2 - v_2)dy, \quad d\beta := \tilde{\beta}dx \wedge dy \\ \eta &= A_1dx + (A_2 - v_2)dy.\end{aligned}$$

On remarque à nouveau le rôle prépondérant de la 1-forme fondamentale α puisque les deux autres formes β et η s'écrivent grâce à elle et aux coefficients du polynôme V .

La matrice de courbure est alors

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

où

$$\begin{aligned}k_1 &= 3(\partial_x(A_2) - \partial_y(A_1)) - 2\partial_x(v_2) + \partial_y(v_3) = 3\tilde{\alpha} - 2\partial_x(v_2) + \partial_y(v_3) \\ k_2 &= \partial_x(\tilde{\beta}) + v_3\tilde{\beta} - \partial_y^2(v_4) - \partial_y(v_2v_4) + \partial_x(v_4v_1) + v_4\partial_x(v_1) \\ k_3 &= \partial_y(\tilde{\alpha}) - v_2\tilde{\alpha} + \partial_x(v_3v_1) - \partial_x^2(v_1) - \partial_y(v_1v_4) - v_1\partial_y(v_4).\end{aligned}$$

La base adaptée choisie permet d'obtenir une matrice de courbure dont les coefficients sont des *invariants du tissu* grâce à la proposition 2.1.

Notons aussi que la matrice de courbure et la matrice de connexion d'un d -tissu peuvent s'écrire à l'aide de du polynôme de linéarisation $P_{\mathcal{W}(d)}$ et de la forme fondamentale α d'après la proposition 2.7.

Un exemple

Le 4-tissu présenté par l'équation différentielle

$$(y')^4 + y^2 \cdot (y')^2 - y \cdot p = 0$$

admet pour matrice de connexion dans une base adaptée la matrice de 1-formes suivante :

$$\begin{pmatrix} -\frac{(9+4y^4)}{y(27+4y^4)}dy & -16\frac{y(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^2}dy & 96\frac{y^2}{(27+4y^4)^2}dy \\ -dx & -8\frac{y^2}{27+4y^4}dx - \frac{(9+4y^4)}{y(27+4y^4)}dy & \frac{-12}{27+4y^4}dy \\ -dy & 0 & -2\frac{(9+4y^4)}{y(27+4y^4)}dy \end{pmatrix}$$

et pour matrice de courbure la matrice

$$K = \begin{pmatrix} -16\frac{y(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^2} & -128\frac{y^3(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Ce tissu n'est donc pas de rang maximal. Nous verrons dans le chapitre 4 qu'il est de rang 2.

3.3.3 Cas linéaire

Dans le cas linéaire à nouveau le polynôme V est nul ce qui permet d'écrire que la matrice de connexion dans une base adaptée est la suivante :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -dx & \alpha & 0 \\ -dy & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha = A_1 dx + A_2 dy = \left(-\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right)\right)dx + \left(-\frac{\partial_y(a_0)}{a_0}\right)dy.$$

Ainsi, avec $d\alpha := \tilde{\alpha} dx \wedge dy$, la matrice de courbure a la forme particulière suivante :

$$K = d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} 3\tilde{\alpha} & \partial_x(\tilde{\alpha}) & \partial_y(\tilde{\alpha}) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Ainsi, un 4-tissu linéaire est de rang maximal si et seulement si $d\alpha = 0$. Nous retrouvons la condition exprimée dans la proposition 2.8.

3.4 Interprétation de la courbure d'un 4-tissu

Nous allons à présent nous intéresser aux coefficients de la courbure associée à un 4-tissu. Nous laissons de côté k_1 qui fera l'objet d'une étude plus approfondie dans un chapitre ultérieur, pour nous intéresser à k_2 et k_3 . Dans l'écriture de la matrice de courbure que nous avons obtenue, nous pouvons écrire k_2 et k_3 en fonction notamment de k_1 . Nous obtenons alors

$$k_2 = \frac{1}{3}(\partial_x(k_1) + v_3 k_1 + L_1)$$

$$k_3 = \frac{1}{3}(\partial_y(k_1) - v_2k_1 + L_2)$$

où

$$L_1 = -\partial_x(\partial_x(v_2) - 2\partial_y(v_3)) - v_3(\partial_x(v_2) - 2\partial_y(v_3)) - 3\partial_y^2(v_4) - 3\partial_y(v_2v_4) + 3\partial_x(v_4v_1) + 3v_4\partial_x(v_1)$$

et

$$L_2 = \partial_y(2\partial_x(v_2) - \partial_y(v_3)) - v_2(2\partial_x(v_2) - \partial_y(v_3)) - 3\partial_x^2(v_1) + 3\partial_x(v_3v_1) - 3\partial_y(v_4v_1) - 3v_1\partial_y(v_4).$$

Par un changement de base adaptée, ou par l'action du groupe des matrices de type

$$g = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}$$

de déterminant non nul, la matrice de courbure

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

devient la matrice

$$\begin{pmatrix} k_1 & \frac{1}{a}(bk_1 + ek_2 + hk_3) & \frac{1}{a}(ck_1 + fk_2 + ik_3) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

En prenant

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}v_3 & \frac{1}{3}v_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on peut écrire la matrice de courbure suivante dans une nouvelle base :

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} k_1 & \partial_x(k_1) + L_1 & \partial_y(k_1) + L_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Nous voyons ainsi au passage, que par un changement de base (adaptée), la trace de la matrice de courbure reste la même, ce qui est bien connu en algèbre linéaire. Nous pourrions ainsi parler de cette trace sans pour autant spécifier de base.

Rappelons que le polynôme V est lié au polynôme de linéarisation puisque, comme nous l'avons vu,

$$P_{\mathcal{W}(d)}(x, y, p) = -V(x, y, p).$$

Telle qu'elle est énoncée dans le théorème 1.5 grâce aux coefficients de $P_{\mathcal{W}(d)}$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un 4-tissu soit linéarisable s'écrit avec les notations précédentes :

$$\begin{cases} L_1 = 0 \\ L_2 = 0 \end{cases}.$$

Nous obtenons ainsi de l'exploitation des coefficients de la matrice de courbure, le théorème suivant, énoncé dans [R] :

Théorème 3.2. Soit $\mathcal{W}(4)$ un 4-tissu du plan muni de sa connexion (E, ∇) associée. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :

- i) Le tissu $\mathcal{W}(4)$ est linéarisable ;
- ii) Dans une base adaptée du fibré (E, ∇) et avec les notations précédentes, la matrice de courbure du tissu s'écrit :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \partial_x(k_1) & \partial_y(k_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Nous obtenons immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.1. Si $k_1 = 0$ alors on a l'équivalence :

- i) $\mathcal{W}(4)$ est de rang maximal ;
- ii) $\mathcal{W}(4)$ est linéarisable.

Ceci permet de retrouver également qu'il existe une base adaptée dans laquelle un 4-tissu linéaire admette pour matrice de courbure la matrice suivante :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \partial_x(k_1) & \partial_y(k_1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

Le théorème 3.2 nous permet de redémontrer avec des méthodes propres aux systèmes différentiels, le théorème de Poincaré suivant :

Théorème 3.3 (Poincaré, 1901). *Tout 4-tissu de rang maximal est linéarisable.*

Démonstration. Un tel tissu est de rang maximal, ce qui signifie que la connexion est intégrable. Ainsi $k_1 = k_2 = k_3 = 0$. Cela prouve ainsi que $L_1 = L_2 = 0$ et que le tissu est linéarisable. \square

Nous établissons ici un lien entre la matrice de courbure et la linéarisation du tissu qui révèle que la connexion contient des informations sur le tissu qui n'ont pas de lien direct avec le rang.

3.5 Les tissus rectifiés

3.5.1 Obtention des invariants

Étant donné un tissu du plan $\mathcal{W}(d)$ défini par ses pentes, on peut toujours en vertu du théorème d'inversion locale se ramener au cas où l'une des pentes est nulle et une autre infinie par un changement de variable adéquat. Après un tel changement de variable ϕ , les courbures de Blaschke K_i des 3-tissus extraits \mathcal{W}_i se modifient de la façon suivante :

$$\phi^*(K_i) = K_{\phi^*(\mathcal{W}_i)}$$

Aussi, le rang du tissu $\mathcal{W}(d)$ est le même que le rang du tissu $\phi^*(\mathcal{W}(d))$. En effet, si $\sum_i g_i(F_i)dF_i = 0$ est, avec les notations usuelles une relation abélienne

du tissu $\mathcal{W}(d)$, alors $\sum_i g_i(F_i \circ \phi)d(F_i \circ \phi) = 0$ est aussi une relation abélienne de $\phi^*(\mathcal{W}(d))$.

De plus, la nouvelle matrice de connexion (*resp.* de courbure) est l'image inverse de la matrice de connexion (*resp.* de courbure) initiale.

Un *d-tissu rectifié* est un *d-tissu* dont une pente est nulle et une autre est infinie. Autrement dit, il s'agit d'un tissu donné par d formes dont $\omega_1 = dx$ et $\omega_2 = dy$.

On considère ici pour simplifier un 4-tissu du plan $\mathcal{W}(4)$ de fibré associé (E, ∇) , présenté par l'équation

$$F(x, y, p) = tp^4 - (1 + a_1t)p^3 + (a_2t - a_1)p^2 - a_2p = (tp - 1) \cdot (p^3 + a_1 \cdot p^2 + a_2 \cdot p)$$

où t est un nombre non nul. Le raisonnement suivant reste valable dans le cas d'un *d-tissu*.

Ce tissu a donc pour pentes $p_1 = 1/t$, $p_2 = 0$ et deux autres pentes indéterminées p_3 et p_4 .

En utilisant le fait que $a_1 = -p_3 - p_4$ et $a_2 = p_3p_4$, nous allons expliciter la courbure d'un tel 4-tissu rectifié. Nous utiliserons donc les résultats obtenus dans la partie concernant la connexion associée à un 4-tissu.

En faisant tendre t vers 0, l'une des pentes du tissu tend vers l'infini. Nous dirons que l'équation F présente le tissu rectifié $\mathcal{W}(0, \infty, p_3, p_4)$ lorsque t tend vers 0.

Puisque l'une des pentes est nulle, le coefficient constant v_4 du polynôme de linéarisation du tissu est nul. En effet dans ce cas, 0 est une racine du polynôme de linéarisation. De même, on montre à partir de la donnée de v_1 sous la forme d'un quotient de deux déterminants, que si t tend vers zéro, alors v_1 tend vers zéro. Ainsi dans le cas présent, un calcul montre que le polynôme du tissu est de la forme :

$$P_{\mathcal{W}(4)} = v_2p^2 + v_3p$$

où

$$v_2 = -\frac{p_4X_3(p_3) - p_3X_4(p_4)}{p_3p_4(p_3 - p_4)} \quad v_3 = \frac{p_4^2X_3(p_3) - p_3^2X_4(p_4)}{p_3p_4(p_3 - p_4)}.$$

En outre, on a les égalités suivantes :

$$A_2 = v_2 \quad A_1 = -\frac{\partial_x(a_2)}{a_2}$$

Nous allons considérer à présent le 3-tissu extrait du précédent en supprimant la feuille de pente nulle.

La courbure de Blaschke de ce 3-tissu est donnée par la différentielle de la 1-forme $\gamma_0 = A_1^0 dx + A_2^0 dy$. Nous allons considérer pour la calculer le 3-tissu dont les pentes sont $1/t, p_3$ et p_4 . Le calcul de la courbure de Blaschke de ce

tissu avec les méthodes utilisées en 3.1 montre que lorsque t tend vers 0, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$A_1^0 = A_1 - v_3 \quad \text{et} \quad A_2^0 = A_2 - v_2 = 0$$

Ainsi,

$$\gamma_0 = (A_1 - v_3)dx$$

et la courbure de Blaschke du 3-tissu extrait est

$$K_0 dx \wedge dy = (-\partial_y(A_1) + \partial_y(v_3))dx \wedge dy.$$

L'autre 3-tissu extrait de $\mathcal{W}(4)$ que nous allons considérer est le 3-tissu extrait du précédent en supprimant la feuille de pente infinie. On montre que la courbure de Blaschke est alors donnée par la différentielle de la forme de *Pfaff*

$$\gamma_\infty = A_1 dx + v_2 dy$$

et donc, est égale à

$$K_\infty dx \wedge dy = (\partial_x(v_2) - \partial_y(A_1))dx \wedge dy.$$

Les courbures de Blaschke des deux autres trois tissus extraits (K_3 et K_4) sont bien connues, puisqu'il s'agit du calcul classique de la courbure de Blaschke des 3-tissus $\mathcal{W}(0, \infty, p_3)$ et $\mathcal{W}(0, \infty, p_4)$. Ainsi, nous avons les égalités suivantes :

$$K_3 dx \wedge dy = \partial_x \partial_y \log(p_4) dx \wedge dy \quad \text{et} \quad K_4 dx \wedge dy = \partial_x \partial_y \log(p_3) dx \wedge dy.$$

On posera

$$\gamma_3 = -\partial_x \log(p_4) dx \quad \text{et} \quad \gamma_4 = -\partial_x \log(p_3) dx$$

tel que

$$K_3 dx \wedge dy = d\gamma_3 \quad \text{et} \quad K_4 dx \wedge dy = d\gamma_4.$$

3.5.2 Courbure d'un 4-tissu rectifié

Muni des égalités précédentes, la matrice de connexion de $\mathcal{W}(4)$ dans une base adaptée s'écrit de la façon suivante :

$$\gamma = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & -K_\infty \\ -1 & A_1 - v_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_1 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & v_2 \end{pmatrix} dy$$

La trace k_1 de la matrice de courbure est

$$k_1 = 3(\partial_x(A_2) - \partial_y(A_1)) - 2\partial_x(v_2) + \partial_y(v_3),$$

on peut écrire ici que

$$k_1 = (K_0 + K_\infty - \partial_y(A_1))dx \wedge dy.$$

Or, un calcul montre que $A_1 = -\frac{\partial_x(a_2)}{a_2}$. Ainsi on constate que

$$A_1 dx = -\partial_x \log(p_3 p_4) dx = \gamma_3 + \gamma_4$$

et donc que

$$-\partial_y(A_1) = K_3 + K_4$$

ce qui démontre pour un 4-tissu rectifié la formule suivante :

$$k_1 = (K_0 + K_\infty + K_3 + K_4) dx \wedge dy$$

qui sera appelée au chapitre 5 la formule de la trace. On obtient ainsi cette écriture de la matrice γ :

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_3 + \gamma_4 & K_0 dy & -K_\infty dx \\ -dx & \gamma_0 & 0 \\ -dy & 0 & \gamma_\infty \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de courbure de $\mathcal{W}(4)$:

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} K_0 + K_\infty + K_3 + K_4 & \partial_x(K_0) + v_3 K_0 & \partial_y(K_\infty) - v_2 K_\infty \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

L'examen des tissus rectifiés que l'on vient de faire anticipe sur des propriétés plus générales des 4-tissus, comme nous le montrerons. Par exemple, on constate qu'un 4-tissu rectifié hexagonal ($K_0 = K_\infty = K_3 = K_4 = 0$) est de rang maximal. On reconnaît la version du théorème de Bol pour un 4-tissu. Remarquons pour finir que cela démontre le théorème de Bol pour un 4-tissu quelconque, puisque l'annulation d'une courbure est stable par changement de variable. Nous verrons cependant une autre démonstration directe de ce théorème.

Dans le cas d'un d -tissu quelconque, la rectification apporte une simplification toute relative des calculs, c'est pourquoi nous avons préféré privilégier l'approche générale. De plus, on ne peut à proprement parler pour ces tissus de présentation par une équation différentielle, puisque l'équation qui, en somme, présenterait le tissu $\mathcal{W}(d)$ rectifié est de degré $d-1$. En effet, faire tendre t vers 0 dans l'équation

$$F(x, y, p) = tp^4 - (1 + a_1 t)p^3 + (a_2 t - a_1)p^2 - a_2 p = (tp - 1) \cdot (p^3 + a_1 p^2 + a_2 p) = 0$$

revient à considérer que le tissu est "présenté" par l'équation

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p = 0$$

correspondant à un 3-tissu. Il n'est donc pas étonnant de voir que certains invariants associés à ce 3-tissu jouent un rôle majeur dans la compréhension du tissu rectifié.

Chapitre 4

Détermination du rang d'un tissu du plan

La détermination du rang d'un d -tissu n'était possible que dans le cas des 3-tissus. Mais l'étude de la connexion associée à un d -tissu permet comme nous allons le voir à présent de donner un moyen effectif de détermination du rang de tout tissu. Nous avons vu que le système $\mathcal{M}(d)$ est un système local, tout comme le noyau de la connexion qui lui est isomorphe, et ce, même si la connexion n'est pas intégrable. Le théorème de détermination du rang montre alors qu'il est possible d'incarner le fibré vectoriel associé au système local comme le noyau d'une application \mathcal{O} -linéaire explicite. Le rang du tissu sera alors le corang de cette application que l'on calculera dans des exemples. Les relations abéliennes du tissu seront envisagées sous différents aspects, notamment les relations provenant des tissus extraits. A nouveau, l'importance de la forme fondamentale α sera soulignée.

4.1 Considérations sur le rang

4.1.1 Détermination du rang d'un tissu du plan

Avant de commencer, nous ferons quelques rappels sur les systèmes locaux.

On sait qu'il existe une équivalence entre la catégorie des fibrés vectoriels complexes de rang d et les faisceaux de \mathcal{O} -modules localement libre de rang d . Nous pourrions donc considérer ces deux aspects du même objet. Un *système local* sur un espace topologique X est un faisceau de \mathbb{C} -espaces vectoriels sur X localement constant. Autrement dit, localement, le faisceau est isomorphe au faisceau constant \mathbb{C}^d . On renvoie à la référence classique [De] ou encore à [Sa]. Si X est un système local de rang d sur X , alors le faisceau $E = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} X$ est un fibré vectoriel de rang d . Il existe alors une unique connexion sur E , canonique, pour laquelle les sections horizontales de E sont exactement les sections locales du sous-faisceau X de E . Cette connexion est intégrable. Réciproquement, le noyau de la connexion d'un fibré intégrable est un système local.

Dans notre cas, le noyau E^∇ de la connexion associée à un d -tissu est un système local par la nature même des relations abéliennes. Mais la connexion

construite n'est cependant pas intégrable *a priori*. En incarnant donc de façon explicite le fibré $\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla}$ correspondant au système local des relations abéliennes du tissu, nous pouvons en déterminer le rang qui n'est autre que le rang du tissu.

Nous reprendrons ici en les développant une partie des résultats de l'article [R].

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan présenté par une équation différentielle $F = 0$, muni du fibré (E, ∇) de rang π_d défini précédemment. C'est l'existence de bases adaptées de (E, ∇) qui permet de donner un moyen effectif de détermination du rang, en construisant explicitement le fibré vectoriel associé au système local E^{∇} .

On note $\gamma = \gamma_x dx + \gamma_y dy$ la matrice de connexion du tissu dans une base adaptée donnée ainsi que $k = (k_1, k_2, \dots, k_{\pi_d})$ la première ligne de la matrice de courbure dans cette base. Les sections horizontales de la connexion ∇ notées

$$f = {}^t(f_1, f_2, \dots, f_{\pi_d}) \in E^{\nabla} := \text{Ker } \nabla$$

qui s'identifient aux relations abéliennes du tissu, *via* l'espace \mathfrak{a}_F , vérifient le système différentiel $df + \gamma f = 0$. La condition d'intégrabilité de ce système est alors donnée, grâce à l'existence de la base adaptée, par la *seule* relation

$$k \cdot f = k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_{\pi_d} f_{\pi_d} = 0 \quad (1).$$

Ces considérations vont nous permettre de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.1 (Détermination du rang d'un tissu planaire).

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan non singulier implicitement présenté par une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, dont on note (E, ∇) la connexion associée, munie d'une base adaptée. Il existe un fibré vectoriel \overline{K} de rang $\text{rg } \mathcal{W}(d)$, noyau d'un endomorphisme de \mathcal{O}^{π_d} , explicite, tel que l'on ait

$$\overline{K} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla}.$$

En particulier, si l'on note $(k_{m\ell})$ la matrice de cette application, le rang du tissu est explicitement donné par l'égalité suivante :

$$\text{rg } \mathcal{W}(d) = \text{corang}(k_{m\ell}).$$

Démonstration. Elle utilise fondamentalement le fait que E^{∇} soit un système local et procède ainsi. On considère les π_d équations obtenues de la dérivation jusqu'à l'ordre $d - 3$ de l'équation (1) où l'on pose $df = -\gamma f$. On obtient ainsi une matrice carrée $(k_{m\ell})$ d'ordre π_d , dont la première ligne est k .

Le \mathcal{O} -module $\overline{K} := \text{Ker}(k_{m\ell})$ est de type fini et par construction, l'inclusion

$$\mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla} \subseteq \overline{K} \quad (2)$$

est vérifiée. Pour montrer l'égalité annoncée, il suffit grâce au lemme de Nakayama de montrer que l'on a l'égalité

$$\overline{K} = \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{C}} E^{\nabla} + \mathfrak{m} \cdot \overline{K} \quad (3)$$

en notant \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O} . On considère des générateurs (g_1, \dots, g_r) de \overline{K} tels que les $g_i(0)$ soient linéairement indépendants, dont l'existence nous est donnée encore par le lemme de Nakayama.

Soit $g \in \overline{K}$. On peut écrire que

$$g = \sum_{1 \dots r} \lambda_i g_i \quad \lambda_i \in \mathcal{O}.$$

Si $g(0) = 0$, on a l'égalité

$$g(0) = \sum_{1 \dots r} \lambda_i(0) g_i(0) = 0$$

et donc $\lambda_i(0) = 0$ car les $g_i(0)$ sont linéairement indépendants. Ceci prouve que $g \in \mathfrak{m}\overline{K}$ ainsi que l'égalité voulue.

Si $g(0) \neq 0$, on peut construire une fonction analytique f dans E^∇ telle que $f(0) = g(0)$, le vecteur $g(0)$ jouant ainsi un rôle analogue aux conditions initiales dans le théorème classique de Cauchy.

En effet, par le théorème de Cauchy (à une variable), il existe une unique fonction $\sigma(y)$ telle que $\sigma(0) = g(0)$ et vérifiant $\partial_y(\sigma) + \gamma_y \sigma = 0$. Par le théorème de Cauchy encore, il existe une unique fonction $f(x, y)$ telle que $f(0, y) = \sigma(y)$ et $\partial_x(f) + \gamma_x f = 0$. Ainsi, les deux égalités suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \partial_y(f(0, y)) + \gamma_y f(0, y) = 0 & (4) \\ \partial_x(f(x, y)) + \gamma_x f(x, y) = 0 & (5) \end{cases}$$

Posons à présent $\tau = \partial_y(f) + \gamma_y f$. D'après (4), on a $\tau(0, y) = 0$. De plus, en utilisant (5),

$$\partial_x(\tau) + \gamma_x \tau = k \cdot f.$$

Puisque $g \in \overline{K}$ et $f(0) = g(0)$, on a $k(0) \cdot f(0) = 0$, et même, on montre par un calcul que toutes les dérivées successives de $k \cdot f$ sont nulles en utilisant (4) et (5) en 0 et le fait que $\overline{K}(0) \cdot g(0) = 0$. Ainsi on a l'égalité

$$k \cdot f = 0,$$

et par conséquent,

$$\partial_x(\tau) + \gamma_x \tau = 0, \quad \tau(0, y) = 0.$$

A nouveau, par le théorème d'unicité de Cauchy, on a

$$\tau = \partial_y(f) + \gamma_y f = 0$$

et donc f appartient à E^∇ puisqu'elle vérifie

$$\begin{cases} \partial_y(f) + \gamma_y f = 0 \\ \partial_x(f) + \gamma_x f = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, par l'inclusion (2), on a $g - f \in \overline{K}$ et $(g - f)(0) = 0$. Or nous avons vu que si $h \in \overline{K}$ vérifie $h(0) = 0$, alors le système de générateurs de \overline{K} permet de montrer que $h \in \mathfrak{m}\overline{K}$. Donc $g - f \in \mathfrak{m}\overline{K}$, ce qui prouve l'égalité voulue entre \mathcal{O} -modules. \square

En corollaire, nous obtenons un énoncé équivalent à celui obtenu dans le cas des 3-tissus :

Corollaire 4.1. *Avec les notations précédentes, le tissu $\mathcal{W}(d)$ est de rang au moins 1 si et seulement si $\det k_{m\ell} = 0$*

Ceci justifie au passage le fait qu'un tissu quelconque est *a priori* de rang nul. Le déterminant de la matrice $(k_{m\ell})$ est un invariant du tissu dans le cas où $d = 4$. C'est très certainement le cas également pour un d -tissu quelconque.

Plus spécifiquement dans le cas où $d = 4$, on déduit du théorème précédent de détermination du rang le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *Avec les notations précédentes,*

1. *Le rang de $\mathcal{W}(4)$ est supérieur ou égal à 1 si et seulement si $\det k_{m\ell} = 0$.*
2. *Le rang de $\mathcal{W}(4)$ est supérieur ou égal à 2 si et seulement si la comatrice de $k_{m\ell}$ est nulle.*
3. *Le rang de $\mathcal{W}(4)$ est égal à 3 si et seulement si $k_{m\ell} = 0$ si et seulement si $k = 0$.*

En effet, il s'agit de constater pour le point 2 de l'énumération précédente que la comatrice de la matrice $(k_{m\ell})$ a pour coefficients les mineurs d'ordre 2 de cette matrice. Ainsi, si tous sont nuls, le système S précédent admet un espace de solutions de dimension 2 ou 3. On remarque que ces trois conditions ne dépendent que du tissu donné.

La matrice $(k_{m\ell})$ admet l'écriture suivante :

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_{\pi_d} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2,\pi_d} \\ & & \vdots & \\ k_{\pi_d,1} & k_{\pi_d,2} & \dots & k_{\pi_d,\pi_d} \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un 4-tissu, on peut identifier les coefficients de cette matrice :

$$k_{21} = \partial_x(k_1) - A_1 k_1 + k_2$$

$$k_{22} = \partial_x(k_2) - (\partial_y(v_4) + v_4 v_2) k_1 - (A_1 - v_3) k_2 - v_4 k_3$$

$$k_{23} = \partial_x(k_3) - (v_1 v_4 - \kappa_2) k_1 - A_1 k_3$$

$$k_{31} = \partial_y(k_1) - (A_2 - v_2) k_1 + k_3$$

$$k_{32} = \partial_y(k_2) - (v_1 v_4 + \kappa_1) k_1 - (A_2 - v_2) k_2$$

$$k_{33} = \partial_y(k_3) - (v_1 v_3 - \partial_x(v_1)) k_1 + v_1 k_2 - A_2 k_3$$

Seule la première ligne de la comatrice de $(k_{m\ell})$ dépend de la donnée du tissu, mais elle s'exprime en fonction des autres coefficients. Ainsi le fait que les deux dernières lignes de la comatrice de $(k_{m\ell})$, qui ne dépendent que du tissu, soient nulles induit que toute la comatrice l'est. Au vue des coefficients de $(k_{m\ell})$, le fait que k , qui ne dépend que du tissu, soit nul équivaut au fait que cette matrice soit nulle.

4.1.2 Cas linéaire

Considérons un 4-tissu linéaire $\mathcal{L}(4)$. On sait par le théorème de *Lie-Darboux-Griffiths* que si un tel tissu admet une relation abélienne complète, à savoir une relation abélienne $(g_i(F_i))_{i=1\dots 4}$ où g_i est non nulle pour tout i , alors il est de rang maximal.

Supposons que $\mathcal{L}(4)$ n'admette pas de relation abélienne complète et soit de rang 2. Cela signifie que ce tissu admet deux relations abéliennes à trois termes, indépendantes. Ainsi ces deux relations proviennent de deux 3-tissus extraits (distincts).

On peut toujours alors trouver une combinaison linéaire de ces deux relations abéliennes qui soit une relation complète. Ceci contredit le fait que le rang de $\mathcal{L}(4)$ soit 2 en vertu du théorème énoncé précédemment.

Ainsi, *il n'existe pas de 4-tissu linéaire de rang 2.*

Ce fait est corroboré par le théorème du rang. L'annulation de tous les mineurs d'ordre 1 et 2 implique en effet que $k_1 = 0$, ce qui, pour un tissu linéaire signifie qu'il est de rang maximal.

4.2 Relations abéliennes

4.2.1 Relations abéliennes des tissus extraits

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan, présenté par l'équation $F(x, y, p) = 0$ et soit p_k l'une des pentes de ce tissu, solution de l'équation le présentant.

Le $d-1$ -tissu $\mathcal{W}_k(d-1)$ extrait de $\mathcal{W}(d)$ obtenu en ôtant cette pente p_k est présenté par l'équation $F_k(x, y, p) = 0$ définie par l'égalité suivante :

$$F(x, y, p) = (p - p_k(x, y)) F_k(x, y, p).$$

Soit S la surface de \mathbb{C}^3 définie par l'équation $S = \{ F(x, y, p) = 0 \}$ et S_k la surface d'équation $S_k = \{ F_k(x, y, p) = 0 \}$.

Nous allons exprimer les invariants fondamentaux du tissu extrait en fonction de ceux du tissu initial.

L'injection canonique $i : S_k \longrightarrow S$ détermine une image réciproque

$$i^* : \Omega_S^1 \longrightarrow \Omega_{S_k}^1$$

de l'ensemble

$$\Omega_S^1 = \Omega_{\mathbb{C}^3}^1 / (dF, F\Omega_{\mathbb{C}^3}^1)$$

des 1-formes sur S dans l'ensemble

$$\Omega_{S_k}^1 = \Omega_{\mathbb{C}^3}^1 / (dF_k, F_k\Omega_{\mathbb{C}^3}^1)$$

des 1-formes sur S_k avec les définitions que nous avons données en introduction. En particulier, l'image réciproque de la 1-forme sur S suivante :

$$\omega = (p - p_k).r_k(x, y, p) \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$$

où $r_k(x, y, p)$ est un polynôme en p à coefficients dans \mathcal{O} de degré $d - 4$ est

$$\omega_k = i^*((p - p_k) \cdot r_k(x, y, p) \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}) = r_k(x, y, p) \frac{dy - p dx}{\partial_p(F_k)}.$$

En effet, d'une part on peut écrire la dérivée partielle de F par rapport à p de la forme suivante :

$$\partial_p(F) = \partial_p(F_k)(p - p_k) + F_k$$

avec $F_k = 0$ sur S_k , d'autre part, par définition de l'image réciproque, on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} i^*(\omega) &= (p - p_k) \cdot r_k(x, y, p) \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)} = (p - p_k) \cdot r_k(x, y, p) \circ i \frac{dy - p dx}{\partial_p(F_k)(p - p_k) \circ i + F_k \circ i} \\ &= (p - p_k) \cdot r_k(x, y, p) \frac{1}{p - p_k} \frac{dy - p dx}{\partial_p(F_k)} \end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat annoncé.

De la même façon on montre concernant les 2-formes que pour un polynôme t de $\mathcal{O}[p]$, on a

$$i^*\left(t \frac{dx \wedge dy}{\partial_p(F)}\right) = t \frac{dx \wedge dy}{(p - p_k) \partial_p(F_k)}.$$

Puisque l'on sait qu'il existe un polynôme de degré $d - 1$ de $\mathcal{O}[p]$ tel que la différentielle sur S d'une 1-forme σ s'écrive $d\sigma = t_\sigma \frac{dx \wedge dy}{\partial_p(F)}$, on a donc les égalités suivantes :

$$d(i^*(\omega)) = d\omega_k = t_k \frac{dx \wedge dy}{(\partial_p(F_k))}$$

et

$$i^*(d\omega) = i^*\left(t \frac{dx \wedge dy}{\partial_p(F)}\right) = t \frac{dx \wedge dy}{(p - p_k) \partial_p(F_k)}.$$

La différentielle commutant avec l'image réciproque, soit $d(i^*(\omega)) = i^*(d\omega)$, on en déduit que

$$t = t_k \cdot (p - p_k).$$

La différentielle sur S s'écrit à l'aide d'un système que vérifient les coefficients de r que nous rappelons ici : si $r = b_3 p^{d-3} + \dots + b_d$ et $t = t_2 p^{d-2} + \dots + t_d$, alors

$$\begin{cases} \partial_x(b_d) & + & A_{1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{1,d-2} \cdot b_d & = & t_d \\ \partial_x(b_{d-1}) + \partial_y(b_d) & + & A_{2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{2,d-2} \cdot b_d & = & t_{d-1} \\ & & & & \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) & + & A_{d-2,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-2,d-2} \cdot b_d & = & t_3 \\ \partial_y(b_3) & + & A_{d-1,1} \cdot b_3 + \dots + A_{d-1,d-2} \cdot b_d & = & t_2 \end{cases}$$

De ce fait, en posant

$$r_k(x, y, p) = b_3 p^{d-4} + \dots + b_{d-1} \text{ et } t_k(x, y, p) = t_2 p^{d-3} + \dots + t_{d-1},$$

on peut écrire le système relatif à la différentielle sur S_k vérifié par ces coefficients, provenant du fait que

$$d\left(r_k \frac{dy - p dx}{\partial_p(F_k)}\right) = t_k \frac{dx \wedge dy}{(\partial_p(F_k))},$$

à savoir :

$$S(A_{ij}^k) : \begin{cases} \partial_x(b_{d-1}) & + & A_{1,1}^k \cdot b_3 + \cdots + A_{1,d-3}^k \cdot b_{d-1} & = & t_{d-1} \\ \partial_x(b_{d-2}) + \partial_y(b_{d-1}) & + & A_{2,1}^k \cdot b_3 + \cdots + A_{2,d-3}^k \cdot b_{d-1} & = & t_{d-2} \\ & & & & \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4) & + & A_{d-3,1}^k \cdot b_3 + \cdots + A_{d-3,d-3}^k \cdot b_{d-1} & = & t_3 \\ \partial_y(b_3) & + & A_{d-2,1}^k \cdot b_3 + \cdots + A_{d-2,d-3}^k \cdot b_{d-1} & = & t_2 \end{cases}$$

Le système $S(A_{ij})$ vérifié par les coefficients des deux polynômes

$$r = (p - p_k) \cdot r_k \text{ et } t = (p - p_k) \cdot t_k$$

s'écrit alors de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_x(-p_k \cdot b_{d-1}) + A_{1,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{1,d-2} \cdot (-p_k \cdot b_{d-1}) & = & -p_k \cdot t_{d-1} \\ \partial_x(b_{d-1} - p_k \cdot b_{d-2}) + \partial_y(-p_k \cdot b_{d-1}) + A_{2,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{2,d-2} \cdot (-p_k \cdot b_{d-1}) & = & t_{d-1} - p_k \cdot t_{d-2} \\ & & \vdots \\ \partial_x(b_3) + \partial_y(b_4 - b_3 \cdot p_k) + A_{d-2,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{d-2,d-2} \cdot (-p_k \cdot b_{d-1}) & = & t_3 - p_k \cdot t_2 \\ \partial_y(b_3) + A_{d-1,1} \cdot b_3 + \cdots + A_{d-1,d-2} \cdot (-p_k \cdot b_{d-1}) & = & t_2 \end{cases}$$

En remplaçant dans le système précédent la valeur obtenue du système $S(A_{ij}^k)$ des coefficients de t_k , on obtient *l'écriture des coefficients A_{ij}^k du tissu extrait en fonction des coefficients A_{ij} du tissu initial et de la pente que l'on a enlevée.*

Ainsi, on obtient pour tout $1 \leq k \leq 4$, le système suivant pour un 4-tissu :

$$\begin{cases} A_{31} - A_{32}p_k - A_2^k = 0 \\ \partial_y(p_k) - A_{21} + A_{22}p_k + A_1^k - A_2^k p_k = 0 \\ \partial_x(p_k) - A_{11} + A_{12}p_k - A_1^k p_k = 0 \end{cases} .$$

Soit

$$\begin{cases} A_2^k = A_2 - v_2 - v_1 p_k \\ A_1^k = -\partial_y(p_k) + A_1 - v_3 - v_2 p_k - v_1 p_k^2 \\ -V(p_k) = \partial_x(p_k) + p_k \partial_y(p_k) \end{cases} .$$

Ce système donne dans le cas linéaire où $A_{11} = A_{32} = 0$, $A_{12} = A_{21} = A_1$, $A_{22} = A_{31} = A_2$, les résultats suivant :

$$A_2 = A_2^k$$

$$A_1 = A_1^k - \partial_y(p_k),$$

ce qui signifie notamment *dans le cas linéaire* que la trace de la matrice de courbure associée au tissu vérifie

$$k_1 = \sum_k d\gamma_k$$

où $d\gamma_k$ est la courbure de Blaschke $\partial_x(A_2^k) - \partial_y(A_1^k)$ du 3-tissu extrait en enlevant la pente p_k . Nous reviendrons sur cette formule dans le chapitre suivant.

4.2.2 Forme fondamentale et relations abéliennes complètes

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan et $F(x, y, y') = 0$ l'équation différentielle le représentant. En dehors de son lieu singulier, les pentes de ce tissu seront notées par $p_i \in \mathcal{O}$, pour $1 \leq i \leq d$. Nous avons vu dans l'introduction que l'isomorphisme T entre l'espace $\mathcal{A}(d)$ et \mathfrak{a}_F associe à toute relation abélienne $(g_i(F_i))_{\{i=1\dots d\}}$ du d -tissu la 1-forme sur S suivante :

$$T(\{g_i(F_i)\}) = r \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$$

où

$$r = F \cdot \left(\sum \frac{g_i(F_i) \partial_y(F_i)}{p - p_i} \right).$$

Si $g_j(F_j) = 0$ pour un entier j compris entre 1 et d , autrement dit si nous sommes en présence d'une relation abélienne d'un tissu extrait, le polynôme de degré un $(p - p_j)$ est en facteur dans le polynôme r , soit $r(x, y, p_j) = 0$. Par l'hypothèse de position générale, la réciproque est vraie, ce qui prouve la proposition suivante que l'on peut également déduire des considérations de la section précédente :

Proposition 4.1. *Avec les notations précédentes, une relation abélienne de $\mathcal{W}(d)$ est une relation abélienne du tissu extrait de $\mathcal{W}(d)$ en lui ôtant la feuille de pente p_j si et seulement si le polynôme abélien $r(x, y, p)$ lui correspondant vérifie*

$$r(x, y, p_j) = 0.$$

Dans le cas d'un 4-tissu, nous pouvons donner des critères directs permettant l'obtention de certaines relations abéliennes complètes. Soit donc $\mathcal{W}(4)$ un 4-tissu du plan, présenté par l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ et muni de la connexion associée (E, ∇) . On considère les relations abéliennes de ce tissu de la forme $(g_i(F_i))_{i=1\dots 4}$ où g_i est non nulle pour tout i .

Une telle relation abélienne du tissu sera dite *complète*. Ce type de relation joue un rôle crucial dans l'algébrisation des tissus, *via* le théorème de Lie-Darboux-Griffiths.

La forme fondamentale α , dont la différentielle est un invariant important du tissu d'après le théorème 2.7, permet également de déterminer l'existence de certaines relations abéliennes, comme nous allons le voir.

On considère à présent le système A_{ij} pour $d = 4$ et la 1-forme

$$\omega = \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}.$$

On sait que

$$d\omega_i = \frac{t(x, y, p_i) dx \wedge dy}{\partial_p(F)} = \frac{(A_1 + A_2 p_i + v_1 p_i^2) dx \wedge dy}{\partial_p(F)}$$

par définition de la différentielle sur la surface S . Rappelons que la forme fondamentale est par définition la suivante :

$$\alpha = A_1 dx + A_2 dy.$$

Ainsi, si $v_1 = 0$, alors

$$d\omega_i = \alpha \wedge \omega_i.$$

Si de plus la forme fondamentale est fermée : $d\alpha = 0$, alors il existe ψ_2 tel que $\alpha = d\psi_2$ par le théorème de Poincaré sur l'exactitude locale des formes fermées. En posant $\rho = e^{\psi_2}$ les deux égalités suivantes sont valides :

$$\alpha = \frac{d\rho}{\rho}$$

et donc

$$d\left(\frac{\omega_i}{\rho}\right) = -\frac{d\rho}{\rho^2} \wedge \omega_i + \frac{1}{\rho} \alpha \wedge \omega_i = 0.$$

Ainsi, la forme $\frac{1}{\rho}\omega_i$ appartient à \mathfrak{a}_F et la relation abélienne ainsi définie est complète puisque $r(p_i) = 1(p_i) = 1$ est non nul en vertu de la proposition 4.1. Supposons à présent que $v_4 = 0$; alors de même,

$$d(p_i\omega_i) = \beta \wedge (p_i\omega_i)$$

avec $\beta = (A_1 - v_3)dx + (A_2 - v_2)dy$. En supposant que $d\beta = 0$, on montre que

$$p_i\omega_i = \rho' dg_i.$$

Ceci donne une relation abélienne, complète si $p_i \neq 0$ (puisque $r(p_i) = p_i$), et indépendante de la précédente.

La forme fondamentale détermine donc l'existence de certaines relations abéliennes complètes. Nous obtenons plusieurs variations de ces résultats qui nécessitent quelques notations. Soit (L_2, β) et (L_3, α) les deux fibrés en droites engendrés par les vecteurs de notre base adaptée e_2 et e_3 respectivement et munis de leur connexion de matrice respective β et α . Avec les notations usuelles, on montre en considérant la matrice de connexion dans une base adaptée que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) La 1-forme $b \frac{dy - pdx}{\partial_p(F)}$ appartient à \mathfrak{a}_F et correspond à une relation abélienne complète ;
- ii) La 2-forme $d\alpha$ est nulle et $v_1 = 0$;
- iii) L'équation $\nabla(e_3) = e_3 \otimes \alpha$ est vérifiée ;
- iv) Le morphisme injectif $(L_3, \alpha) \longrightarrow (E, \nabla)$ est un morphisme de connexion.

Dans ce cas, $k_3 = 0$. On remarque que la seconde condition est un invariant du tissu. De même, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) La 1-forme $b.p \frac{dy - pdx}{\partial_p(F)}$ appartient à \mathfrak{a}_F et correspond à une relation abélienne complète si une des pentes du tissu n'est pas nulle ;
- ii) La 2-forme $d\beta$ est nulle et $v_4 = 0$;
- iii) L'équation $\nabla(e_2) = e_2 \otimes \beta$ est vérifiée
- iv) Le morphisme injectif $(L_2, \beta) \longrightarrow (E, \nabla)$ est un morphisme de connexion.

Dans ce cas, $k_2 = 0$. Ici encore, la seconde condition est un invariant du tissu. Notons que si une des pentes est nulle, la forme $d\beta$ est la courbure de Blaschke du 3-tissu extrait de $\mathcal{W}(4)$ en ôtant la pente 0.

Les coefficients k_2 et k_3 de la matrice de courbure trouvent ici une interprétation en terme de relations abéliennes. Mais nous n'avons envisagé ici que des relations abéliennes d'un type particulier, dans la mesure où elles sont peu représentatives mais plus accessibles que les relations abéliennes complètes générales de la forme $(b_3 \cdot p + b_4) \frac{dy - p dx}{\partial_p(F)}$ où l'on sait seulement que

$$b_3 \cdot p_k + b_4 \neq 0, \quad 1 \leq k \leq d.$$

4.2.3 Les sections horizontales du fibré (E, ∇)

On cherche à expliciter une relation entre les solutions du système $\mathcal{M}(4)$ et les sections horizontales de (E, ∇) , qui sont les sections du système local E^∇ . Nous nous plaçons à nouveau dans le cas d'un 4-tissu, mais des relations analogues existent dans le cas général, dans la mesure où on aura exhibé une base adaptée. Soit (b_3, b_4) une solution du système $\mathcal{M}(4)$, on cherche donc les coordonnées (f_1, f_2, f_3) de $j_2(b_3, b_4)$ dans la base adaptée de E .

Les trois vecteurs de la base adaptée de E sont, partiellement :

$$\begin{aligned} e_1 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \end{pmatrix} \\ e_2 &= \begin{pmatrix} -1 & A_{21} & A_{31} & \cdots \\ 0 & A_{11} & 0 & \cdots \end{pmatrix} \\ e_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -A_{32} & \cdots \\ 1 & -A_{12} & -A_{22} & \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cela suffit pour déterminer dans le cas d'un 4-tissu, les coordonnées cherchées. Ainsi, en écrivant que $j_2(b_3, b_4) = f_1 \cdot e_1 + f_2 \cdot e_2 + f_3 \cdot e_3$, on obtient l'égalité suivante :

$$j_2(b_3, b_4) = \begin{pmatrix} b_3 & \partial_x(b_3) & \partial_y(b_3) & \cdots \\ b_4 & \partial_x(b_4) & \partial_y(b_4) & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_2 & -f_1 + A_{21}f_2 & A_{31}f_2 - A_{32}f_3 & \cdots \\ f_3 & A_{11}f_2 - A_{12}f_3 & f_1 - A_{22}f_3 & \cdots \end{pmatrix}$$

On en déduit notamment que

$$f_1 = \partial_y(b_4) + A_{22}f_3 = -\partial_x(b_3) - A_{21}b_3$$

ce qui est cohérent avec le fait que le couple (b_3, b_4) soit solution du système $\mathcal{M}(4)$. Avec les notations usuelles, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_x(b_3) - (A_{11} - v_3) \cdot b_3 \\ -b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y(b_4) + A_2 \cdot b_4 \\ -b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

Ceci nous permet notamment de reconnaître les sections horizontales du fibré qui proviennent de relations abéliennes des tissus extraits. En effet, en

utilisant la proposition 4.1 dans le cas d'un 4-tissu, et les notations de la partie 4.2.1, on montre qu'un polynôme abélien b du 3-tissu $\mathcal{W}_k(3)$ correspond au polynôme abélien $b \cdot p - p_k \cdot b$ du tissu $\mathcal{W}(4)$, qui lui même correspond à une section horizontale du fibré associé à $\mathcal{W}(4)$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \partial_x(b) + (A_1 - v_3) \cdot b \\ b \\ b \cdot p_k \end{pmatrix}.$$

4.3 Exemples

Dans cette partie, nous donnerons quelques exemples de calculs effectifs des invariants de certains 4-tissus, dont le rang.

Commençons par les 4-tissus introduits par Isao Nakai dans [N].

4.3.1 Les 4-tissus définis par un pinceau de 1-formes

Présentation

Considérons à la suite d'Isao Nakai les 4-tissus définis par quatre 1-formes $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 , du type

$$\omega_i = dy - p_i dx,$$

vérifiant en outre les relations

$$\omega_3 = t\omega_1 + (1 - t)\omega_2$$

et

$$\omega_4 = s\omega_1 + (1 - s)\omega_2$$

pour $t, s \in \mathbb{P}^1$. On dit que ces 1-formes appartiennent à un *pinceau de 1-formes* et on montre alors que les quatre courbures de Blaschke des 3-tissus extraits sont égales (*cf.* [N]). Nous retrouvons ce résultat en écrivant explicitement les équations présentant les quatre tissus extraits et en calculant leur courbure de Blaschke.

Parmi ces tissus, on compte les 4-tissus donnés par $p_1 = cste$ et $p_2 = cste$, dont les feuilles sont donc engendrées par quatre points. Leurs quatre sous 3-tissus extraits ont donc une (même) courbure de Blaschke nulle. Le théorème de *Poincaré, Mayrhofer, Reidemeister* assure d'ailleurs que tout 4-tissu *hexagonal* est difféomorphe à un 4-tissu dont les feuilles sont générées par quatre points. On notera $\mathcal{N}(4)$, un 4-tissu dont les 1-formes sont dans un pinceau de 1-formes, mais qui n'est pas hexagonal.

Soit $\mathcal{N}(4)$ un tel 4-tissu. On calcule les polynômes associés d'un tel tissu :

$$\begin{aligned} U &= 4 \frac{\partial_y(p_2 - p_1) \cdot p + \partial_x(p_2 - p_1)}{p_2 - p_1} \\ U_1 &= 4 \frac{\partial_y(p_2 - p_1) \cdot p^2 + \partial_x(p_2 - p_1) \cdot p}{p_2 - p_1} \\ V &= \frac{-\partial_y(p_2 - p_1) \cdot p^2 + (-\partial_x(p_2 - p_1) + p_1 \partial_y(p_2) - p_2 \partial_y(p_1)) \cdot p + p_1 \partial_y(p_2) - p_2 \partial_y(p_1)}{p_2 - p_1} \\ V_1 &= \frac{-\partial_y(p_2 - p_1) \cdot p^3 + (-\partial_x(p_2 - p_1) + p_1 \partial_y(p_2) - p_2 \partial_y(p_1)) \cdot p^2 + (p_1 \partial_y(p_2) - p_2 \partial_y(p_1)) \cdot p}{p_2 - p_1} \end{aligned}$$

Remarquons le fait que

$$U_1 = p \cdot U_0 \quad V_1 = p \cdot V.$$

La matrice (A_{ij}) s'écrit alors

$$(A_{ij}) : \begin{pmatrix} A_{11} = -\frac{p_2^2 \partial_x(p_1/p_2)}{p_1 - p_2} & A_{12} = -\frac{p_2^2 \partial_y(p_1/p_2) + 3 \partial_x(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2} \\ A_{21} = -2 \frac{p_2^2 \partial_y(p_1/p_2) + \partial_x(p_1 - p_2)}{p_1 - p_2} & A_{22} = \frac{2 \partial_y(p_2 - p_1)}{p_1 - p_2} \\ A_{31} = \frac{\partial_y(p_2 - p_1)}{p_1 - p_2} & A_{32} = 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons alors qu'au niveau des invariants, un 4-tissu définit par un pinceau de 1-formes revient à se donner seulement deux de ses pentes. Autrement dit à *deux pentes distinctes, on peut associer une classe de ces 4-tissus qui partageront les mêmes invariants, dont le rang*. Si l'on se ramène au cas où l'une des pentes est nulle, par exemple $p_2 = 0$, la matrice de courbure associée, dans une base adaptée sera donc donnée par :

$$\mathcal{N}(4) \begin{cases} k_1 = \frac{4 \partial_{xy}^2(p_1) p_1 - \partial_y(p_1) \partial_x(p_1)}{p_1^2} \\ k_2 = \frac{-\partial_{yx^2}(p_1) p_1^2 + p_1 (\partial_{x^2}(p_1) \partial_y(p_1) + \partial_x(p_1) \partial_{xy}(p_1)) - (\partial_x(p_1))^2 \partial_y(p_1)}{p_1^3} \\ k_3 = \frac{\partial_{y^2x}(p_1) p_1^2 - p_1 (\partial_{y^2}(p_1) \partial_x(p_1) + 3 \partial_y(p_1) \partial_{xy}(p_1)) + (\partial_y(p_1))^2 \partial_x(p_1)}{p_1^3} \end{cases}$$

Linéarité

Pour un 4-tissu $\mathcal{N}(4)$ linéaire, nous avons vu que le polynôme de linéarisation est nul : $V = 0$ et également $V_1 = 0$. Ainsi on déduit de l'expression des V_i précédente les trois équations suivantes exprimant la linéarité :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \partial_y(p_2 - p_1) &= 0 \\ (2) \quad & p_1 \partial_y(p_2) - p_2 \partial_y(p_1) &= 0 \\ (3) \quad & -\partial_x(p_2 - p_1) + p_1 \partial_x(p_2) - p_2 \partial_x(p_1) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit les égalités suivantes :

$$\partial_y(p_2 - p_1) = 0 \quad \partial_x(p_2 - p_1) = 0 \quad p_1 \partial_y(p_2) - p_2 \partial_y(p_1) = 0.$$

Ajoutons à cela les équations de linéarité vérifiées par chacune des pentes

$$\partial_x(p_1) + p_1 \partial_y(p_1) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_x(p_2) + p_2 \partial_y(p_2) = 0,$$

on déduit que

$$\partial_y(p_2) = \partial_y(p_1) = \partial_x(p_2) = \partial_x(p_1) = 0$$

et donc que p_1 et p_2 sont constants.

Ainsi un tel 4-tissu linéaire est nécessairement un 4-tissu $\mathcal{N}(4)$ engendré par quatre pinceaux de droites. Il serait donc hexagonal, ce qui est exclu. D'où la proposition suivante.

Proposition 4.2. *Il n'existe pas de 4-tissu $\mathcal{N}(4)$ linéaire.*

Nous retrouvons ainsi un résultat obtenu par V.V. Goldberg dans [Go]. Remarquons qu'un tissu $\mathcal{N}(4)$ ne peut donc être linéarisable puisque le résultat de la linéarisation serait aussi un tissu dont les courbures de Blaschke des 3-tissus extraits seraient les mêmes, ce qui revient à dire que le tissu est défini par un pinceau de 1-formes. Ainsi, un 4-tissu $\mathcal{N}(4)$ est de rang 0, 1 ou 2, car il ne peut être de rang maximal. Sinon en effet, il serait linéarisable en vertu du théorème de Poincaré.

Rang des tissus $\mathcal{N}(4)$

Soit un 4-tissu $\mathcal{N}(4)$, dont la pente p_2 est nulle. Puisque p_1 désigne alors une pente non nulle, les pentes de ce tissu sont alors données par $p_3 = t \cdot p_1$ et $p_4 = s \cdot p_1$, avec s et t distincts dans \mathbb{P}^1 . Dans ce cas, le polynôme V du tissu est

$$V = -\partial_y \log(p_1) \cdot p^2 - \partial_x \log(p_1) \cdot p$$

et la matrice $(A_{i,j})$ est alors :

$$(A_{i,j}) : \begin{pmatrix} 0 & A_{12} = -3\partial_x \log(p_1) \\ A_{21} = -2\partial_x \log(p_1) & A_{22} = -2\partial_y \log(p_1) \\ A_{31} = -3\partial_y \log(p_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul de la courbure de Blaschke K , commune aux quatre 3-tissus extraits donne alors

$$K = \partial_x \partial_y \log(p_1),$$

ce qui permet d'obtenir l'écriture suivante de la matrice de courbure dans une base adaptée :

$$K = \begin{pmatrix} 4K & \partial_x(K) - \partial_x \log(p_1)K & \partial_y(K) + \partial_y \log(p_1)K \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ces remarques, on calcule la matrice de détermination du rang (k_{ml}) , et l'on constate que les mineurs d'ordre 2 ne sauraient être tous nuls sans que la courbure K soit nulle. Autrement dit, un 4-tissu $\mathcal{N}(4)$ n'est pas de rang 2. De ce fait, un tel tissu admet au plus une relation abélienne, nécessairement complète. Il est très probable que de tels tissus soient toujours de rang nul, mais nous n'avons pas encore pu en donner une preuve.

4.3.2 Quelques tissus remarquables

• Un exemple de tissu $\mathcal{N}(4)$

Le 4-tissu donné par le pinceau des 1-formes

$$p_1 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad p_2 = x^2 - y^2$$

est présenté par l'équation

$$p^4 + (2ty^2 + 2sy^2 - 4x^2 - 2y^2)p^3 + (6x^2y^2 - 2ty^4 + 4ty^4s + 6x^4 - 6ty^2x^2 - 2y^4s - 6x^2sy^2)p^2$$

+ $(6x^4sy^2 - 4x^6 + 4x^2ty^4 + 2y^6 + 4x^2y^4s - 6x^4y^2 + 6x^4ty^2 - 8x^2ty^4s - 2y^6t - 2y^6s)p$
 $- 2x^4ty^4 - 2x^4y^4s + 2y^6tx^2 - 2x^6sy^2 + 2y^6x^2s - 2x^6ty^2 + 2x^6y^2 - 4y^8ts - y^8 + 2y^8s + x^8 + 4x^4ty^4s - 2y^6x^2 + 2y^8t = 0$
 où t et s sont dans \mathbb{P}^1 . Son résultant est

$$R = 4096y^{24}t^2s^2(t-1)^2(s-1)^2(s-t)^2$$

et le polynôme de linéarisation s'écrit

$$P_{\mathcal{N}(4)} = 2\frac{p^2}{y} - 2\frac{x^2p}{y} + 2x.$$

La forme fondamentale est alors

$$\alpha = -2\frac{x^2}{y}dx - \frac{4}{y}dy.$$

On peut dès lors écrire la matrice de connexion associée à ce tissu dans une base adaptée :

$$\gamma = \begin{pmatrix} -2\frac{x^2dx}{y} - 2\frac{dy}{y} & -4\frac{x(-dxy+xdy)}{y^2} & 2\frac{x^2dx}{y^2} \\ -dx & -4\frac{x^2dx}{y} - 2\frac{dy}{y} & 0 \\ -dy & -2xdx & -2\frac{x^2dx}{y} - 4\frac{dy}{y} \end{pmatrix}$$

La matrice de courbure permet de voir que ce tissu n'est pas de rang maximal, puisqu'elle est non nulle :

$$K = \begin{pmatrix} -8\frac{x^2}{y^2} & -4\frac{x(y+2x^3)}{y^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang du tissu est donné par la matrice $(k_{m\ell})$ suivante :

$$(k_{m\ell}) = \begin{pmatrix} -8\frac{x^2}{y^2} & -4\frac{x(y+2x^3)}{y^3} & 0 \\ -4\frac{x(5y+6x^3)}{y^3} & -4\frac{4x^3y+y^2+8x^6}{y^4} & 16\frac{x^4}{y^4} \\ 0 & -24\frac{x^4}{y^4} & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant est

$$\det k_{m\ell} = -3072\frac{x^{10}}{y^{10}}.$$

Ce tissu $\mathcal{N}(4)$ est donc de rang nul. Le fait que k_3 soit nul n'implique donc pas que le tissu admette une relation abélienne. Par ailleurs, la courbure de Blaschke commune aux 3-tissus extraits est

$$\gamma_3 = -2\frac{x^2}{y^2}.$$

• **Un autre exemple où k_3 est nul**

Considérons le 4-tissu présenté par l'équation

$$p^4 + y^2 p^2 - yp = 0$$

que nous avons vu dans la partie 3.3.2. Son discriminant est

$$\Delta = -y^4 (27 + 4y^4)$$

et le polynôme de linéarisation s'écrit

$$P_{\mathcal{W}(4)} = -12 \frac{p^3}{27 + 4y^4} + \frac{(9 + 4y^4) p^2}{y(27 + 4y^4)} - 8 \frac{y^2 p}{27 + 4y^4}$$

La forme fondamentale est alors

$$\alpha = -2 \frac{(9 + 4y^4)}{y(27 + 4y^4)} dy.$$

On peut dès lors écrire la matrice de connexion associée à ce tissu dans une base adaptée :

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{(9+4y^4)dy}{y(27+4y^4)} & -16 \frac{y(-27+4y^4)dy}{(27+4y^4)^2} & 96 \frac{y^2 dy}{(27+4y^4)^2} \\ -dx & -8 \frac{y^2 dx}{27+4y^4} - \frac{(9+4y^4)dy}{y(27+4y^4)} & -12 \frac{dy}{27+4y^4} \\ -dy & 0 & -2 \frac{(9+4y^4)dy}{y(27+4y^4)} \end{pmatrix}$$

Remarquons que la trace est bien à pôles simples, mais non la matrice toute entière. Ce tissu n'est pas de rang maximal, mais k_3 est ici encore nul.

$$K = \begin{pmatrix} -16 \frac{y(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^2} & -128 \frac{y^3(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de ce tissu est 2, il est donné par la matrice $(k_{m\ell})$ suivante :

$$(k_{m\ell}) = \begin{pmatrix} -16 \frac{y(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^2} & -128 \frac{y^3(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^3} & 0 \\ -128 \frac{y^3(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^3} & -1024 \frac{y^5(-27+4y^4)}{(27+4y^4)^4} & 0 \\ 64 \frac{243-306y^4+8y^8}{(27+4y^4)^3} & 512 \frac{y^2(243-306y^4+8y^8)}{(27+4y^4)^4} & 0 \end{pmatrix}$$

dont le déterminant ainsi que les mineurs d'ordre 2 sont nuls.

Chapitre 5

Courbure de Blaschke-Chern d'un tissu

La théorie de Chern-Weil que nous rappelons succinctement inspira la recherche des résultats obtenus dans ce chapitre. Attirant notre attention sur la trace de la matrice de courbure, celle-ci se révèle être un invariant du tissu particulier. En effet, le lien qui unit les connexions associées aux tissus extraits à la connexion (E, ∇) du tissu considéré n'était qu'entre-vue par le biais des relations abéliennes. Le théorème 5.2 complète ces premiers résultats en établissant un isomorphisme entre le fibré déterminant de E et le produit tensoriel des fibrés en droites associés aux 3-tissus extraits. Ce résultat est équivalent à la formule de la trace (théorème 5.1). Nous n'avons pas encore établi ces deux résultats en toute généralité, mais ils ont été vérifiés par le calcul pour $d = 3, 4, 5$ et 6 .

Nous donnons ensuite une caractérisation géométrique des tissus de trace nulle, en généralisant la construction de l'hexagone de Thomsen, puis nous illustrerons ces résultats ainsi que les notions de déterminant et de résidus des tissus qui font l'objet de travaux d'Alain Hénaut, et ce, à l'aide d'exemples.

5.1 Formule de la trace

5.1.1 Rappel sur la théorie de Chern-Weil

On se donne en toute généralité un fibré vectoriel analytique complexe de rang d noté (E, ∇) muni d'une connexion, sur une variété M de dimension n . On suppose que dans un repère choisi au dessus d'un ouvert de M , la matrice de courbure de la connexion est K .

Un polynôme complexe P homogène de degré r sur l'algèbre des matrices $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ est dit invariant s'il vérifie

$$P(A) = P(gAg^{-1})$$

pour toute matrice g de $GL_d(\mathbb{C})$, et toute matrice A de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. On notera Φ l'algèbre graduée de ces polynômes.

L'exemple le plus simple de polynômes invariants est donné par la trace

ou encore par les polynômes symétriques invariants élémentaires, définis par la relation

$$\det(A + tI) = \sum_{k=0}^d P^{d-k}(A)t^k$$

pour une matrice A et I la matrice identité.

Un polynôme P invariant de degré r , permet la construction de la $2r$ -forme différentielle $P(K)$. En effet, d'une part, le produit vectoriel commute pour la forme de degré pair K , d'autre part, la forme $P(K)$ est indépendante de la trivialisaton choisie puisque le polynôme P est invariant. En outre, la théorie de Chern-Weil énonce que de telles formes différentielles définissent des invariants du fibré.

En effet l'homomorphisme d'algèbres w appelé aussi *homomorphisme de Weil*

$$\Phi \xrightarrow{w} H_{deR}^{2*}(M, \mathbb{C})$$

qui associe à tout polynôme P invariant la classe de cohomologie de $P(K)$ dans le groupe de cohomologie de de Rham $H_{deR}^{2*}(M, \mathbb{C})$

On rappelle que le *groupe de cohomologie d'ordre p de de Rham* de la variété différentielle M est le groupe quotient du groupe des p -formes différentielles d -fermées de M par le groupe des p -formes d -exactes. L'homomorphisme de Weil est bien défini car on peut vérifier que la $2r$ -forme est bien fermée.

De plus, *La classe de cohomologie de $P(K)$ dans $H_{deR}^{2r}(M, \mathbb{C})$ ne dépend que du fibré E et non de la connexion choisie pour la construire.*

En substance, la démonstration de ce théorème consiste à se donner deux connexions ∇ et $\tilde{\nabla}$ sur le fibré et d'écrire l'homotopie

$$\nabla_t = \tilde{\nabla} + t\nabla - \tilde{\nabla}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

La matrice de courbure de ∇_t est notée K_t . Puis on considère P un polynôme invariant de degré r , et l'application

$$t \longrightarrow P(K_t).$$

On cherche maintenant à montrer que le vecteur tangent $(\partial/\partial t)P(K_t)$ est une $2r - 1$ forme fermée, *i.e.* que l'application

$$t \longrightarrow [P(K_t)]$$

est constante à valeurs dans $H_{deR}^{2r}(M)$ ce qui prouve le théorème. Ce fait est prouvé par l'intermédiaire d'un lemme technique concernant les formes r -linéaires invariante.

On appelle alors la classe de cohomologie de $P(K)$ une *classe caractéristique* du fibré.

On peut ainsi définir les classes caractéristiques associées au déterminant, à savoir les classes de Chern.

Soit k un entier, $0 \leq k \leq d$. On appelle $k^{\text{ème}}$ classe de Chern du fibré E et on note $c_k(E)$ la $2k$ -forme

$$c_k(E) = P^k\left(\frac{i}{2\pi}K\right) \in H_{deR}^{2k}(M, \mathbb{C}).$$

Les classes de Chern mesurent par exemple l'obstruction à ce que le fibré soit trivial. En effet, si E est le fibré trivial *i.e.* $E = M \times \mathbb{C}^d$, alors

$$c_j(E) = 0 \text{ pour tout } j = 1, \dots, d.$$

De plus, pour tout fibré (E, ∇) et (F, ∇') , l'égalité suivante est vérifiée pour tout k :

$$c_k(E \otimes F) = c_k(E) + c_k(F).$$

Ainsi, grâce à cette théorie de Chern-Weil, on sait que, pour un fibré muni d'une connexion (E, ∇) , la trace de la courbure de la connexion joue un rôle fondamental dans la connaissance du fibré. Ceci a nourri notre approche de l'étude de la connexion associée à un tissu. Dans notre cas, la variété de base étant \mathbb{C}^2 , et vu l'écriture de la matrice de courbure dans une base adaptée, la trace est le seul polynôme invariant jouant ce rôle. C'est donc fort de cette théorie et de cette remarque que notre attention se porte sur k_1 , la trace de la matrice de courbure associée à un d -tissu, justifiant ainsi ce rappel.

5.1.2 Formule de la trace

Soit (E, ∇) un fibré vectoriel muni d'une connexion ∇ de rang π_d . On note $(e_l)_{l=1 \dots \pi_d}$ une base du fibré et γ la matrice de la connexion dans cette base.

On définit alors le fibré déterminant, noté $(\det E, \det \nabla)$, comme étant le fibré en droites de base $\bigwedge_k e_k = e_1 \wedge \dots \wedge e_{\pi_d}$ muni de la connexion $tr(\gamma)$ dans cette base.

Soit à présent $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu, présenté par une équation $F = 0$, muni du fibré (E, ∇) . Nous noterons (L_k, ∇_k) le fibré en droites associé aux 3-tissus extraits de $\mathcal{W}(d)$ pour $1 \leq k \leq \binom{d}{3}$. Nous nous sommes intéressé au lien que l'on pouvait établir entre les fibrés associés aux tissus extraits de $\mathcal{W}(d)$ et le fibré (E, ∇) du d -tissu.

Nous savons exprimer les coefficients A_{ij} d'un tissu extrait en fonction des coefficients d'un tissu le contenant, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4. En théorie, cela permet de décrire la géométrie des tissus extraits en fonction de la géométrie du tissu de départ. Cependant, en pratique, les calculs à effectuer restent souvent très compliqués et ne permettent pas d'établir par ce biais les résultats souhaités ou entrevus dans le cas des 4-tissus par exemple.

Nous obtenons le théorème suivant, que nous n'avons pas pu encore démontrer en toute généralité.

Théorème 5.1 (Formule de la trace). *Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu non singulier du plan implicitement présenté par F , dont on note (E, ∇) la connexion associée, et K sa courbure. On a alors l'égalité suivante :*

$$tr(K) = \sum_{k=1}^{\binom{d}{3}} d\gamma_k,$$

pour au moins $d = 3, 4, 5$ et 6, où les $d\gamma_k$ désignent les courbures de Blaschke des 3-tissus extraits de $\mathcal{W}(d)$.

Nous retrouvons que la trace k_1 est bien un invariant du tissu.

Démonstration. Nous donnerons une idée de la démonstration pour le cas où $d = 4$. Nous avons vu qu'il est possible de calculer les coefficients A_{ij} en fonction du polynôme de linéarisation du tissu, noté V_0 . Nous avons en effet en posant

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) - \frac{2a_2a_0 - a_1^2}{a_0^2}v_1 - \frac{a_1}{a_0}v_2 + 3v_3 = A_{12}$$

$$A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}v_1 + 2v_2 = A_{22} :$$

$$A_{ij} \begin{pmatrix} -v_4 & A_1 \\ A_1 - v_3 & A_2 \\ A_2 - v_2 & v_1 \end{pmatrix}.$$

En calculant en fonction des coefficients de V la somme des courbures de Blaschke des tissus extraits $\sum_k d\gamma_k = \sum_k \partial_x(A_2^k) - \partial_y(A_1^k)$, nous montrons qu'elle n'est autre que k_1 , la trace de la matrice de courbure. \square

L'obstacle à une démonstration de cette formule réside dans le fait que nous n'avons pas pu démontrer une écriture générale de la trace de la matrice de connexion du tissu. Pour tout entier $d \geq 3$, un bon candidat pour cette trace de la matrice de connexion serait avec les notations usuelles :

$$(*) \quad tr(\gamma) = \sum_{q=1}^{d-2} A_{d-q-1,q}dx + A_{d-q,q}dy + \sum_{q=2}^{d-2} A_{d-q-1,q}dx + A_{d-q+1,q-1}dy,$$

et l'on vérifie que pour $d = 4$ par exemple, la trace serait donc

$$tr(\gamma) = A_{21}dx + A_{31}dy + A_{12}dx + A_{22}dy + A_{12}dx + A_{31}dy$$

ce qui est bien le cas. Pour $d = 5$ et $d = 6$, cette relation a également été vérifiée. On sait par ailleurs grâce à l'écriture, établie dans le cas général, des coefficients A_{ij} des tissus extraits en fonction de ceux du tissu initial que le second membre de l'équation (*) est bien la somme des courbures de Blaschke des tissus extraits. Il suffirait donc de montrer cette formule (*) qui résiste du fait qu'il faille en passer par des calculs généraux dans les jets qui sont vite très compliqués et difficilement formalisables.

Sous réserve que l'écriture supposée de la trace de la connexion γ dans une base adaptée soit vraie, on montre que si l'on change l'équation présentant le tissu en la multipliant par un inversible g de \mathcal{O} , la matrice de connexion devient ${}^g\gamma$ et vérifie

$$tr({}^g\gamma) = tr(\gamma) - \pi_d \frac{dg}{g},$$

en vertu de la proposition 2.1. Ainsi on peut déduire qu'il existe une présentation du tissu telle que l'égalité de la formule de la trace entre ces 2-formes exactes soit valide au niveau des 1-formes, c'est-à-dire :

$$tr(\gamma) = \sum_{k=1}^{\binom{d}{3}} \gamma_k.$$

On dira qu'une telle présentation est bonne. Ceci va nous permettre de montrer le théorème principal de cette partie, attendu, puisqu'il relie explicitement les fibrés vectoriels des tissus extraits et le fibré (E, ∇) . Avec les réserves précédentes, il a été montré dans les cas $d = 3, 4, 5$ et 6 .

Théorème 5.2. *Soient $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu non singulier du plan et une bonne présentation F de ce tissu, dont on note (E, ∇) la connexion associée.*

Soient (L_k, ∇_k) les fibrés en droites associés aux 3-tissus extraits de $\mathcal{W}(d)$ pour $1 \leq k \leq \binom{d}{3}$. On a alors pour au moins $d = 3, 4, 5$ et 6 , l'isomorphisme de fibré muni de connexion τ suivant :

$$(\det E, \det \nabla) \cong \left(\bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} L_k, \bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} \nabla_k \right),$$

autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \det E & \xrightarrow{\cong} & \bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} L_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^1 \otimes \det E & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes \left(\bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} L_k \right) \end{array}$$

Démonstration. Nous définissons l'isomorphisme τ par son action sur les bases. A la base $e_1 \wedge \dots \wedge e_{\pi_d}$ de $\det E$, on associe la base $\bigotimes_k e^k$ de $\bigotimes_{k=1}^{\binom{d}{3}} L_k$ où e^k désigne une base de L_k . S'assurer de la compatibilité aux connexions revient donc à montrer l'identité suivante :

$$\bigotimes_k \gamma_k \circ \tau \left(\bigwedge_k e_k \right) = \tau \circ \det \nabla \left(\bigwedge_k e_k \right)$$

soit, en utilisant les matrices de connexions, que

$$\text{tr}(\gamma) \otimes \left(\bigotimes_k e^k \right) = \left(\sum_{k=1}^{\binom{d}{3}} \gamma_k \right) \otimes \left(\bigotimes_k e^k \right).$$

Cette dernière égalité découle du théorème précédent, qui n'a été démontré pour le moment que pour $d = 3, 4, 5$ et 6 . \square

Nous avons vérifié la formule de la trace dans quelques cas particuliers au cours de ce travail. Nous avons vu par exemple que les 4-tissus rectifiés vérifient cette propriété. Dans le cas des d -tissus linéaires, les courbures de Blaschke des 3-tissus (linéaires) sont de la forme

$$K_i = \partial_y^2 (a_1^{(i)} / a_0^{(i)})$$

pour $i = 1 \dots \binom{d}{3}$, comme nous l'avons vu dans la partie 3.2.3 avec les notations évidentes de l'équation présentant ce 3-tissu. Hors, dans le cas général d'un d -tissu présenté par une équation dont on note le terme de degré $d - 1$ par a_1 , la trace de la courbure de la connexion est

$$\text{tr}(K) = \pi_d \partial_y (a_1 / a_0),$$

(cf. [H-04]). Puisque le coefficient $-a_1/a_0$ est la somme des pentes du tissu, on montre bien que dans le cas d'un d -tissu linéaire, la formule de la trace est valide.

Nous appellerons courbure de *Blaschke-Chern* la trace de la matrice de courbure associée à un d -tissu. C'est un invariant du tissu, comme le sont les courbures de Blaschke, qui ne dépend pas de la connexion, ni du fibré. Comme dans le cas des classes de Chern, la trace de la courbure est un invariant significatif, dont nous allons poursuivre l'investigation.

Il nous faut citer ici le travail effectué par Luc Pirio dans sa thèse soutenue en Décembre 2004. En 1938, le mathématicien Roumain A. Pantazi publie un article ([Pa]) donnant une construction pour un d -tissu qui conduit à l'obtention de π_d invariants dont Pantazi affirme que l'annulation simultanée équivaut à dire que le tissu est de rang maximal. Exhumant cet article, L. Pirio le réactualise dans sa thèse pour lui donner une formulation plus moderne en terme de connexion, se rapprochant ainsi d'une formulation analogue à celle obtenue par A. Hénaut dans [H-04]. Nous ignorons toujours à ce jour si la connexion explicitée par L. Pirio est la même que celle de A. Hénaut, sauf pour la trace des deux courbures qui semble bien être la même. Cependant, comme le dit L. Pirio dans sa thèse, cette réactualisation en terme de connexion, n'a pas été rigoureusement établie.

En 1941, dans la suite de A. Pantazi, un autre mathématicien Roumain, N. Mihaileanu publie un article ([Mih]) traitant d'un des coefficients mis en valeur par Pantazi qui serait la somme des coefficients de Pantazi associés aux 3-tissus extraits. Luc Pirio a calculé dans sa thèse le coefficient de Pantazi associé à un 3-tissu ; celui-ci se révèle être la courbure de Blaschke que A. Hénaut a calculé dans [H-00]. Il y a donc une certaine analogie entre la formule des traces que nous avons obtenue et la formule de Mihaileanu, puisque nous pensons que la trace des deux courbures est bien la somme des courbures de Blaschke des 3-tissus extraits. A nouveau, en dépit d'une forte présomption que nous partageons donc, vu nos travaux respectifs, cette formule n'est pas encore démontrée. Soulignons que ces approches n'ont été connues de l'auteur que quelque temps après la soumission de sa note [R] annonçant ces derniers résultats.

5.1.3 Le théorème de Bol

Le théorème de détermination du rang et la formule de la trace trouvent une application avec les 4-tissus dont la trace k_1 de la courbure est nulle. En effet, le calcul de la matrice $(k_{m\ell})$ montre dans ce cas que les mineurs d'ordre 2 ne sauraient être tous nuls sans que la matrice de courbure du tissu le soit. Ainsi un 4-tissu de courbure de Blaschke-Chern nulle ne peut être de rang 2. Un résultat analogue est attendu en toute généralité.

Ceci nous permet de redémontrer le *théorème de Bol* que nous rappelons ici dans le cas d'un 4-tissu :

Théorème 5.3 (Bol, 1938). *Soit $\mathcal{H}(4)$ un 4-tissu hexagonal (i.e. tout les 3-*

tissus extraits sont de courbure de Blaschke nulle). Alors le tissu $\mathcal{H}(4)$ est de rang maximal.

Démonstration. On se donne donc un tel 4-tissu hexagonal. La trace de la matrice de courbure de ce tissu, avec les notations et les constructions usuelles, est donc nulle en vertu de la formule de la trace. Ainsi ce tissu est un tissu de courbure de Blaschke-Chern nulle. En outre, le tissu étant hexagonal, il existe quatre relations abéliennes à trois termes relatives aux quatre 3-tissus extraits, et deux d'entre elles prises parmi les quatre sont toujours linéairement indépendantes. Ainsi le rang d'un tissu hexagonal est toujours *au moins* 2. Or le tissu est un tissu de courbure de Blaschke-Chern nulle donc il ne peut être de rang 2, ce qui prouve que ce tissu hexagonal est de rang maximal. \square

Ceci nous permet de dire qu'un tissu hexagonal est linéarisable, en vertu de l'interprétation de la courbure donnée précédemment. Ainsi on redémontre également le théorème de *Mayrhofer et Reidemeister* :

Théorème 5.4 (Mayrhofer-Reidemeister). *Un 4-tissu hexagonal est linéarisable en un tissu généré par quatre pinceaux de droites.*

5.2 Tissus de courbure de Blaschke-Chern nulle

5.2.1 Définition

Grâce à la formule de la trace, la propriété d'être à courbure de Blaschke-Chern nulle ne dépend en fait pas du fibré E , puisque la somme des courbures de Blaschke des 3-tissus n'en dépend pas. Cependant, comme nous l'avons vu dans le théorème 5.2, les tissus à courbure de Blaschke-Chern nulle sont aussi ceux dont le fibré déterminant $(\det E, \det \nabla)$ est intégrable. Nous noterons par $\mathcal{BC}(d)$ un d -tissu de courbure de Blaschke-Chern nulle.

Voici à présent quelques premières propriétés des tissus $\mathcal{BC}(d)$. Nous avons déjà vu qu'un tissu $\mathcal{BC}(4)$ *ne peut être de rang 2*, grâce au théorème de détermination du rang. En revanche nous verrons des exemples de ces tissus de rang 1 ou nul.

En outre *un tissu $\mathcal{BC}(d)$ ne peut être linéarisable sans être de rang maximal*. En effet, un tissu linéaire est de rang maximal si et seulement si $tr(K) = 0$, avec les notations usuelles, d'après l'écriture de la courbure d'un tissu linéaire. Puisque la propriété pour un tissu de vérifier $tr(K) = 0$ est invariante par changement de coordonnées, cela montre la propriété précédente.

Sous réserve de vérifier la formule de la trace pour tout d , un tissu hexagonal $\mathcal{H}(d)$ est de courbure de Blaschke-Chern nulle :

$$\mathcal{H}(d) \subset \mathcal{BC}(d)$$

l'égalité étant vérifiée dans le cas où $d = 3$. Mais la réciproque est fautive. En effet si l'on considère le 4-tissu dont les feuilles sont données par les équations

$$y^2 \pm 2x = cte \quad 2y \pm x^2 = cte,$$

ce tissu est de rang nul, comme nous allons le montrer.

L'équation le présentant est

$$F(x, y, p) = y^2 \cdot p^4 + (-1 - x^2 y^2) \cdot p^2 + x^2 = 0$$

puisque ses pentes sont

$$p_1 = -p_2 = x \text{ et } p_3 = -p_4 = \frac{1}{y}.$$

Son discriminant est

$$\Delta = 16 (xy - 1)^4 (xy + 1)^4 y^2 x^2$$

et son polynôme de linéarisation est :

$$P_{\mathcal{W}(4)} = \frac{1}{(xy + 1)(xy - 1)xy} (y^3 p^3 + x \cdot p^2 - y \cdot p - y \cdot x^2)$$

La 1-forme fondamentale est ici

$$\alpha = -\frac{(2x^2 y^2 - 1) dx}{(xy + 1)(xy - 1)x} - 2 \frac{x^2 y dy}{(xy - 1)(xy + 1)}.$$

Ainsi, la matrice de connexion associée à ce tissu, dans une base adaptée donnée, peut s'écrire :

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{(2x^2 y^2 - 1) dx}{(xy + 1)(xy - 1)x} - \frac{(2x^2 y^2 - 1) dy}{(xy + 1)(xy - 1)y} & -3 \frac{x(x^3 dx + y dy)}{(xy + 1)^2 (xy - 1)^2} & -3 \frac{y(x dx + y^3 dy)}{(xy + 1)^2 (xy - 1)^2} \\ -dx & -2 \frac{xy^2 dx}{(xy - 1)(xy + 1)} - \frac{(2x^2 y^2 - 1) dy}{(xy + 1)(xy - 1)y} & \frac{y^2 dy}{(xy + 1)(xy - 1)x} \\ -dy & \frac{x^2 dx}{(xy + 1)(xy - 1)y} & -\frac{(2x^2 y^2 - 1) dx}{(xy + 1)(xy - 1)x} - 2 \frac{x^2 y dy}{(xy - 1)(xy + 1)} \end{pmatrix}$$

D'où la matrice de courbure

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -12 \frac{x^2 y (x^2 - y)(x^2 + y)}{(xy - 1)^3 (xy + 1)^3} & -12 \frac{y^2 x (x - y^2)(x + y^2)}{(xy - 1)^3 (xy + 1)^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de détermination du rang de ce tissu est la suivante :

$$(k_{m\ell}) = \begin{pmatrix} 0 & -12 \frac{x^2 y (x^2 - y)(x^2 + y)}{(xy - 1)^3 (xy + 1)^3} & -12 \frac{xy^2 (x - y^2)(x + y^2)}{(xy - 1)^3 (xy + 1)^3} \\ -12 \frac{x^2 y (x^2 - y)(x^2 + y)}{(xy - 1)^3 (xy + 1)^3} & -12 \frac{xy(3x^2 y^4 + 2y^2 + 2x^6 y^2 - 7x^4)}{(xy - 1)^4 (xy + 1)^4} & 12 \frac{y^2 (-3y^6 x^2 - 2y^4 + y^2 x^4 + 4x^2)}{(xy - 1)^4 (xy + 1)^4} \\ -12 \frac{xy^2 (x - y^2)(x + y^2)}{(xy - 1)^3 (xy + 1)^3} & 12 \frac{x^2 (-x^2 y^4 - 4y^2 + 3x^6 y^2 + 2x^4)}{(xy - 1)^4 (xy + 1)^4} & 12 \frac{xy(2y^6 x^2 - 7y^4 + 3y^2 x^4 + 2x^2)}{(xy - 1)^4 (xy + 1)^4} \end{pmatrix}$$

de déterminant

$$\det k_{m\ell} = -8640 \frac{y^5 x^5 (x^6 - y^6)}{(xy + 1)^8 (xy - 1)^8}.$$

Ainsi, ce tissu de trace nulle est de rang 0.

5.2.2 Caractérisation géométrique

La caractérisation de Thomsen des 3-tissus hexagonaux que nous avons rappelée en introduction a été démontrée par Alain Hénaut dans l'article [H-90] en utilisant les séries de Lie. Cette technique peut s'étendre pour caractériser les tissus de courbure de Blaschke-Chern nulle, comme nous allons le voir après ces rappels.

Soit $X = A\partial_x + B\partial_y$ un champ de vecteurs sans singularité. Le flot local engendré par X se définit comme étant le morphisme analytique :

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^2, 0) \times (\mathbb{C}, 0) &\longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ (z, t) &\longrightarrow \exp(tX)(z) \end{aligned}$$

A z_0 fixé au voisinage de 0, le germe $t \longrightarrow \exp(tX)(z_0)$ est l'unique germe de courbe passant par z_0 en $t = 0$ dont le vecteur tangent en ce point est $A(z_0)\partial_x + B(z_0)\partial_y$. De plus on a la propriété d'additivité héritée de celle de l'exponentielle :

$$\exp(t_1X)(\exp(t_2X)(z)) = \exp((t_1 + t_2)X)(z)$$

pour tout t_1 et t_2 voisin de $0 \in \mathbb{C}$ et x voisin de $0 \in \mathbb{C}^2$. On montre en outre que les développements en série suivants sont vérifiés :

$$\exp(tX)(z) = \begin{cases} x + tA(z) + \frac{t^2}{2}X(A)(z) + \frac{t^3}{3!}X^2(A)(z) + \dots \\ y + tB(z) + \frac{t^2}{2}X(B)(z) + \frac{t^3}{3!}X^2(B)(z) + \dots \end{cases}$$

Il s'agit alors d'écrire explicitement le trajet de l'hexagone à l'aide de cette écriture. Soit $\mathcal{W}(3)$ un 3-tissu du plan donné par les champs de vecteurs

$$X_1 = \partial_x - p_1\partial_y, \quad X_2 = \partial_x - p_2\partial_y \quad \text{et} \quad X_3 = \partial_x - p_3\partial_y.$$

Soit $O = (x, y)$ un point proche de 0 ; partant d'un point A proche de O sur une feuille quelconque, un calcul assez long montre qu'après avoir effectué le trajet de l'hexagone, on atteint à nouveau la feuille de départ en un point G , dont on peut déterminer explicitement les premiers termes du développement en série de ses coordonnées ; on y retrouve la courbure de Blaschke du tissu, écrite en fonction des p_i .

On montre alors que *si le tissu est hexagonal, alors la courbure de Blaschke de ce tissu est nulle.*

Ce résultat nous permet de retrouver le théorème classique concernant les 3-tissus.

Nous allons à présent expliciter une construction visant à généraliser pour un d -tissu la construction de Thomsen. Devant la complexité des calculs, nous avons renoncé à les écrire dans ce texte, aussi, nous n'en donnerons qu'un aperçu. Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu donné par les champs de vecteurs $X_i = \partial_x - p_i\partial_y$ pour $1 \leq i \leq d$. Pour fixer les idées, nous prendrons $d = 4$, mais le raisonnement est identique quelque soit d . Considérons avec les mêmes notations que pour

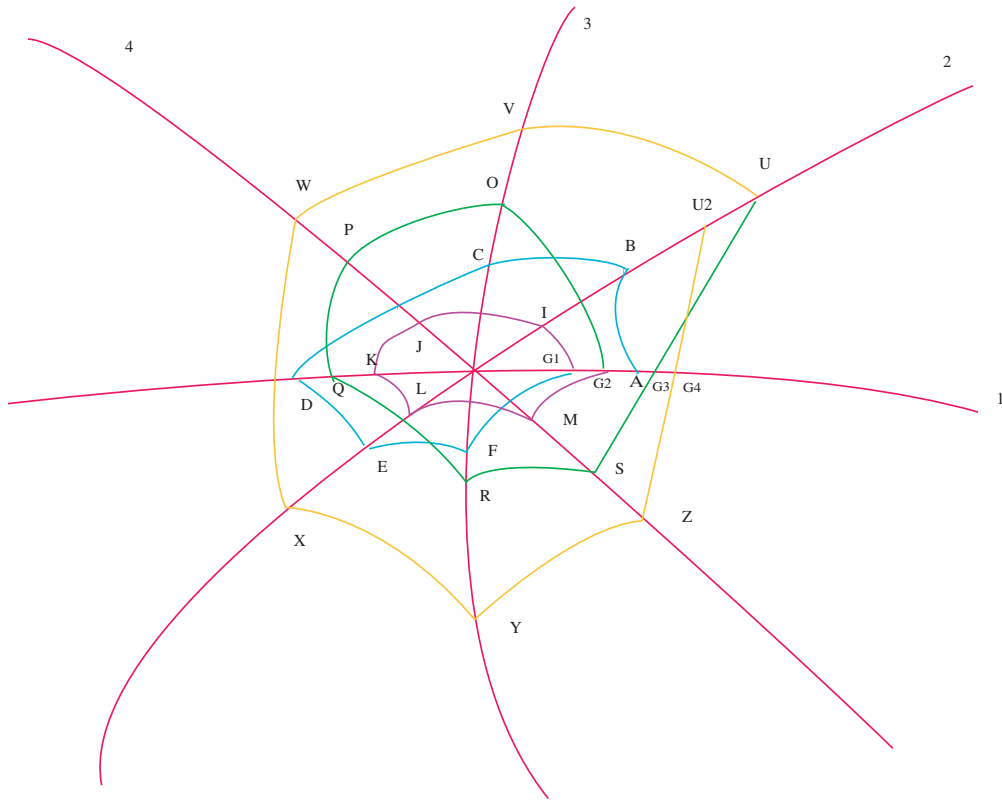


FIG. 5.1 – Généralisation de l'hexagone

un 3-tissu, l'hexagone construit à partir d'une feuille (par exemple la feuille 1 de pente p_1) du tissu sur l'un des 3-tissus extraits de $\mathcal{W}(d)$. Notons encore A le point de départ de la construction, et G_1 son point d'arrivée. Cette feuille 1 initiale étant fixée, on peut reprendre la construction de l'hexagone à partir de G , mais cette fois en considérant un autre 3-tissu contenant la feuille 1. Après ce deuxième tour, nous obtenons un point G_2 sur la feuille 1.

En répétant le processus pour tous les 3-tissus extraits contenant la feuille 1, nous obtenons une suite de point G_k dont on connaît le début du développement en série des coordonnées, grâce aux considérations précédentes qui concernaient les 3-tissus. Par additivité du flot sur cette même feuille 1, on montre donc que *si cette première construction se referme, alors la somme des courbures de Blaschke des tissus extraits contenant la feuille 1 est nulle.*

Nous devons à présent considérer la suite de cette construction, par l'intermédiaire des tissus ne contenant pas la feuille 1 choisie à l'origine. Pour un 4-tissu, notre dernier point est G_3 , qui appartient à la feuille 1 et à la feuille 3 par exemple. Par l'hypothèse de position générale, cette feuille 3 passant par G_3 rencontre la feuille 2 passant par 0 en un point noté U sur le dessin 5.1. La construction de l'hexagone à partir de ce point U pour le 3-tissu $\mathcal{W}(2, 3, 4)$ nous conduit au point U_2 appartenant à la feuille 2 passant par 0 et à une feuille 3 qui coupe la feuille 1 passant par 0 en un point G_4 . Si le tissu $\mathcal{W}(2, 3, 4)$

était hexagonal, les points G_3 et G_4 coïncideraient, car ils appartiendraient à la même feuille 3 passant par U . On montre plus précisément, toujours avec les séries de Lie que l'on retrouve dans le développement en série des coordonnées de G_4 , les coordonnées de G_3 auxquelles s'ajoutent des termes d'ordre supérieur contenant la courbure de Blaschke de $\mathcal{W}(2, 3, 4)$.

De façon toute schématique, le dessin suivant présente le trajet effectué à partir du point A , après un passage des différents hexagones en les points G_i . Nous avons essayé de convaincre le lecteur à défaut des calculs fastidieux, que "l'écart" entre deux points se mesure partiellement par les courbures de Blaschke $d\gamma_i$ des 3-tissus extraits. Nous dirons que la construction précédente se referme si l'on a $A = G_4$, ce qui veut dire que la somme des courbures de Blaschke des tissus extraits est nulle.

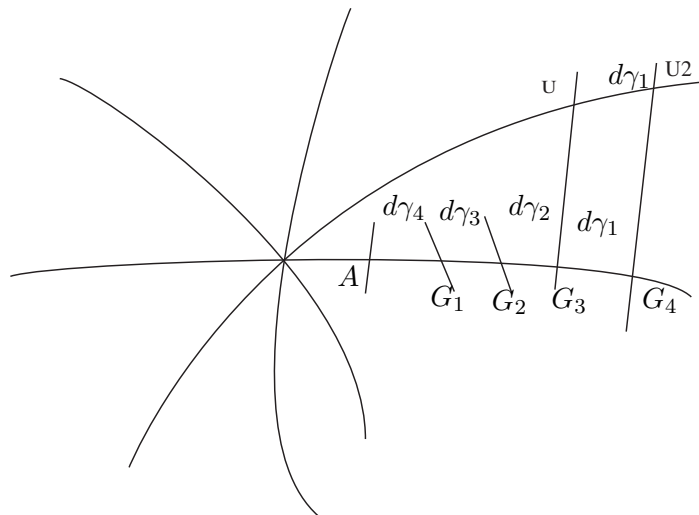


FIG. 5.2 – Détail schématique de la construction

Nous obtenons ainsi la proposition suivante, *via* la formule de la trace :

Proposition 5.1. *Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan. Si pour tout point voisin de 0 appartenant à l'une quelconque des feuilles du tissu passant par 0 la construction précédente de l'hexagone se referme, alors la courbure de Blaschke-Chern du tissu est nulle.*

L'équivalence reviendrait à dire que chaque coefficient du développement en série final s'annule si la somme des courbures de Blaschke est nulle. Ceci n'a pas pu être vérifié, faute de pouvoir calculer le terme général de ce développement.

Cette caractérisation géométrique des tissus de Blaschke-Chern a été testée pour des cas simples de tissus algébriques. Par dualité, cette propriété s'exprime sur la courbe algébrique réduite qui définit le tissu. Dans le cas d'un 3-tissu algébrique, la cubique qui définit le tissu hérite par dualité d'une propriété analogue à l'associativité de la loi de la cubique. Cette construction dans le cas

des d -tissus algébriques est donc par dualité un analogue de la loi de la cubique sur des courbes de degré d .

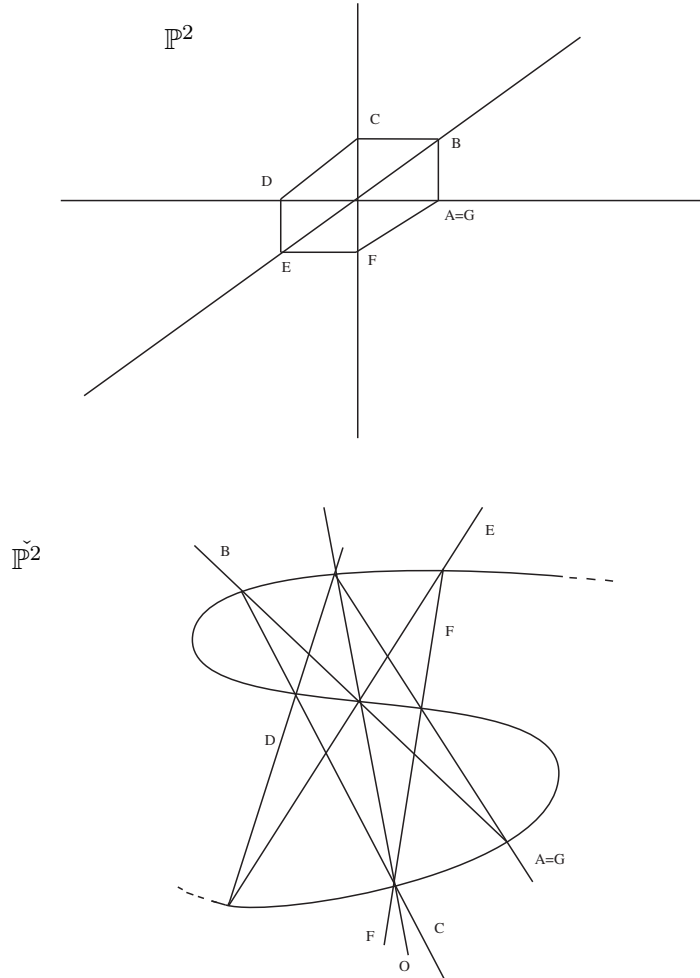


FIG. 5.3 – L'hexagone pour un tissu algébrique

5.3 Déterminant et résidus d'un tissu

Dans tout ce travail, l'étude des tissus s'est faite en dehors du lieu singulier défini par le discriminant de l'équation présentant le tissu. Cependant, il nous a été donné de travailler sur des invariants qui rendent compte du tissu au voisinage des points singuliers, introduits par Alain Hénaut dans des travaux en cours. La conduite méromorphe de tous nos calculs a permis en effet de se placer au cœur de la singularité et d'incarner des invariants tels que le *déterminant* ou les *résidus* du tissu. Nous allons en voir un aperçu succinct afin de pouvoir leur donner vie dans des exemples. D'autre part, les considérations suivantes vont illustrer et justifier l'intérêt que l'on peut porter aux tissus dont la courbure de Blaschke-Chern est nulle.

Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan, présenté implicitement par une équation différentielle de la forme $F(x, y, y') = 0$. On notera Δ le p -discriminant réduit de F , et par Δ_q les différentes composantes irréductibles de Δ . On note (E, ∇) la connexion associée à la présentation de ce tissu, dont on fixe une base adaptée. La connexion γ admet pour matrice γ . Soit K la courbure de cette connexion. Rappelons que la connexion est méromorphe, à pôles sur Δ .

Nous avons vu que si $g \cdot F$ est une autre présentation du tissu, où g est un inversible de \mathcal{O} , et si ${}^g\gamma$ désigne la matrice de connexion associée à cette présentation du tissu dans la base adaptée choisie, alors la formule suivante est valide, au moins pour $d = 3, 4, 5$ et 6 :

$$\text{tr}({}^g\gamma) = \text{tr}(\gamma) - \pi_d \frac{dg}{g}.$$

A l'aide de la suite exacte de Saito-Alexandrov, Alain Hénaut a établi le résultat suivant :

Lemme 5.1 (Hénaut, 2005). *Soit $\mathcal{BC}(d)$ un d -tissu pour lequel $\text{tr}(K) = 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\text{tr}(\gamma) \in \Omega^1(\log \Delta)$, soit ici $\Delta \cdot \text{tr}(\gamma) \in \Omega^1$;*
- ii) Quitte à modifier la présentation F de $\mathcal{BC}(d)$, on a la formule suivante :*

$$\det \mathcal{W}(d) := \sum_q \text{res}_{\Delta_q} [\mathcal{BC}(d)] \cdot \frac{d\Delta_q}{\Delta_q} = \text{tr}(\gamma)$$

où le résidu $\text{res}_{\Delta_q} [\mathcal{BC}(d)] := \text{res}_{\Delta_q} [\text{tr}(\gamma)] \in \mathbb{C}$ ne dépend que du tissu et des composantes irréductibles de son lieu singulier.

Quelques exemples illustreront les méthodes employées jusqu'ici et conforteront dans l'intérêt d'une étude plus approfondie des tissus à trace nulle.

• **Un 4-tissu $\mathcal{BC}(4)$ de rang 1**

Considérons le 4-tissu $\mathcal{W}(4)$ présenté par l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = (x^4 - 2x^3 + x^2) \cdot (y')^4 + (2y^2x - y^2 - 2y^2x^2) \cdot (y')^2 + y^4 = 0.$$

Ses pentes sont

$$p_1 = -p_2 = \frac{y}{x-1} \text{ et } p_3 = -p_4 = \frac{y}{x}.$$

Le discriminant de $F(x, y, p)$ est

$$\Delta = 16x^2y^{12}(x-1)^2(2x-1)^4.$$

On calcule le polynôme de linéarisation du tissu :

$$P_{\mathcal{W}(4)} = -\frac{x(x-1)}{y^2(2x-1)}p^3 + \frac{1}{y}p^2 - \frac{1}{2x-1}p$$

et la forme fondamentale qui est

$$\alpha = \frac{-1}{2x-1}dx - 2\frac{1}{y}dy.$$

De ces calculs, on peut exhiber la matrice (A_{ij}) :

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2x-1} \\ -\frac{2}{2x-1} & \frac{-2}{y} \\ -\frac{1}{y} & \frac{x(x-1)}{y^2(2x-1)} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la matrice de connexion associée à ce tissu, dans une base adaptée donnée, peut s'écrire :

$$\gamma = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2x-1}dx - \frac{1}{y}dy & 0 & -\frac{x^2-x+1}{y^2(2x-1)^2}dy \\ -dx & \frac{-2}{2x-1}dx - \frac{1}{y}dy & -\frac{x(x-1)}{y^2(2x-1)}dy \\ -dy & 0 & -\frac{1}{2x-1}dx - \frac{2}{y}dy \end{pmatrix}.$$

La trace de cette matrice est bien à pôles simples, comme nous l'attendions avec le lemme précédent. D'où la matrice de courbure

$$d\gamma + \gamma \wedge \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{y^2(2x-1)^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy.$$

On montre que le rang de ce tissu est 1. Cependant, aucun des 3-tissus extraits de $\mathcal{W}(4)$ n'est hexagonal, si bien que ce tissu admet une relation abélienne complète. Cela est par ailleurs confirmé par le fait que $v_4 = 0$ et $d\beta = 0$, puisqu'aucune feuille n'est de pente nulle. Plus précisément, les sections horizontales du fibré associé à ce tissu sont de la forme

$$f = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ (x(x-4))^{1/2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

La relation abélienne est alors à un scalaire près

$$F_1^{-1}dF_1 + F_2^{-1}dF_2 + F_3^{-1}dF_3 - F_4^{-1}dF_4 = 0.$$

La matrice de détermination du rang de ce tissu est la suivante :

$$(k_{m\ell}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{y^2(2x-1)^3} \\ 0 & 0 & \frac{-15}{y^2(2x-1)^4} \\ \frac{3}{y^2(2x-1)^3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant nul et dont seuls deux mineurs sont non nuls. Ainsi, ce tissu de trace nulle est de rang 1.

Le discriminant (réduit) est

$$16xy(x-1)(2x-1) = 0,$$

c'est la réunion des droites d'équation $x = 0$, $x = 1$, $x = 1/2$, et $y = 0$.

La forme de Pfaff

$$tr(\gamma) = -4 \frac{dx}{2x-1} - 4 \frac{dy}{y}$$

est bien fermée, puisque $k_1 = 0$ et le calcul des résidus donne les résultats suivants :

- Sur la droite $x = 0$ le résidu est 0
- Sur la droite $x = 1$ le résidu est 0
- Sur la droite $x = 1/2$ le résidu est -2
- Sur la droite $y = 0$ le résidu est -4

On vérifie que nous avons une bonne présentation du tissu puisque

$$tr(\gamma) = \sum_q res_q[\mathcal{W}(4)] \frac{d\Delta_q}{\Delta_q},$$

soit

$$\det \mathcal{W}(d) = 0 \cdot \frac{dx}{x} + 0 \cdot \frac{dx}{x-1} - 2 \cdot \frac{2dx}{2x-1} - 4 \cdot \frac{dy}{y}.$$

• **Un 4-tissu $\mathcal{BC}(4)$ de rang 0**

Le 4-tissu $\mathcal{W}(y^2 \pm 2x, x^2 \pm 2y)$ que nous avons vu dans la partie 5.2.1 est présenté par l'équation différentielle

$$F(x, y, y') = y^2 \cdot (y')^4 + (-1 - x^2 y^2) \cdot (y')^2 + x^2 = 0.$$

Le discriminant (réduit) est

$$\Delta = 16(xy-1)(xy+1)yx = 0.$$

Ce lieu est la réunion des droites d'équation $x = 0$, et $y = 0$, et des hyperboles $xy \pm 1 = 0$.

Le calcul des résidus montre que le résidu est -2 sur chacune des composantes irréductibles du discriminant réduit. On vérifie que la trace de la matrice de connexion est bien

$$tr(\gamma) = \sum_q res_q[\mathcal{W}(4)] \frac{d\Delta_q}{\Delta_q},$$

puisque

$$\det \mathcal{W}(4) = -2 \frac{ydx + xdy}{xy-1} - 2 \frac{ydx + xdy}{xy+1} - 2 \frac{dx}{x} - 2 \frac{dy}{y}$$

et

$$tr(\gamma) = -2 \frac{(3x^2 y^2 - 1)}{(xy+1)(xy-1)xy} (xdy + ydx)$$

- **Un 3-tissu présenté par une équation de Cauchy**

Le tissu présenté par l'équation différentielle de Cauchy :

$$(y')^3 + 4xy \cdot y' - 8y^2 = 0,$$

admet pour discriminant (réduit) $\Delta = 64y(4x^3 + 27y)$.

Cette équation est un exemple pris par Cauchy pour illustrer la difficulté à cerner les solutions singulières d'une équation différentielle.

Son polynôme de linéarisation est

$$P_{\mathcal{W}(3)} = \frac{1}{2y}p^2$$

et la connexion associée est la forme fondamentale

$$\alpha = -\frac{1}{2y}dy.$$

Ce tissu est donc de rang maximal puisque sa courbure de Blaschke est nulle. Les résidus sont alors $-1/2$ sur la droite $y = 0$ et 0 sur la courbe $4x^3 + 27y = 0$. On retrouve ainsi que le déterminant du tissu est bien la trace de la matrice de connexion α .

- **Les 3-tissus dont le lieu singulier est une cubique cuspidale**

Nous traiterons les deux 3-tissus distingués par A. Lins Neto et I. Nakai dans l'article [LN-N]. Tous deux ont pour lieu singulier une cubique cuspidale, et tous les 3-tissus de rang 1 dont le lieu singulier est difféomorphe à une cubique cuspidale sont équivalents à l'un des deux.

Le premier est le 3-tissu de Clairaut présenté par l'équation

$$F(x, y, p) = P(y - px, p) = 0 \text{ où } P(s, t) = t^3 - s.$$

C'est donc un tissu algébrique, dont la connexion ainsi que la courbure de Blaschke sont nulles. Son discriminant est bien le *cusp* $\Delta = 4x^3 + 27y^2$ et le résidu du tissu est nul.

Le second 3-tissu est présenté par l'équation

$$8(y')^3 + 2x \cdot y' + y = 0.$$

Son lieu singulier est encore une cubique cuspidale : $\Delta = -256x^3 - 1728y^2$ et la forme fondamentale est

$$\alpha = -6\frac{x^2}{4x^3 + 27y^2}dx - 27\frac{y}{4x^3 + 27y^2}dy.$$

Ainsi, la courbure de Blaschke de ce tissu est nulle. Le polynôme de linéarisation est

$$P_{\mathcal{W}(3)} = 27\frac{y}{4x^3 + 27y^2}p^2 + 3\frac{x^2}{4x^3 + 27y^2}p + \frac{9}{2}\frac{yx}{4x^3 + 27y^2}.$$

Le résidu du tissu est alors

$$\text{res}[\mathcal{W}(3)] = -\frac{1}{2}$$

et on vérifie que la présentation choisie est bonne puisque le déterminant du tissu est bien égal à α .

• **Un 3-tissu dont le lieu singulier est la réunion de deux droites**

L'équation différentielle

$$y \cdot (y')^3 + x \cdot (y')^2 - y \cdot (y') - x = 0$$

présente un 3-tissu du plan dont le lieu singulier est donné par le discriminant réduit $\Delta = 4(x - y)(x + y)$. Il s'agit de la réunion des deux droites $y = x$ et $y = -x$. Son polynôme de linéarisation est

$$P_{\mathcal{W}(3)} = \frac{-(x^2 + y^2)}{(x + y)(x - y)y} p^2 + \frac{x^2 + y^2}{(x + y)(x - y)y}$$

et l'on remarque qu'il est à pôles sur le résultant de l'équation présentant le tissu. Sa forme fondamentale est

$$\alpha = -2 \frac{x}{(x - y)(x + y)} dx + 2 \frac{y}{(x - y)(x + y)} dy,$$

donc la courbure de Blaschke de ce tissu est nulle. La forme fondamentale est en revanche bien à pôles sur le discriminant réduit. Le résidu du tissu est alors

$$\text{res}[\mathcal{W}(3)] = -1$$

sur les deux droites composant le lieu singulier et on vérifie à nouveau que la présentation choisie est bonne puisque le déterminant du tissu est bien la forme fondamentale α .

Chapitre 6

Une approche des 5-tissus

Les 5-tissus font l'objet d'un chapitre particulier. Si la construction de la connexion associée n'est pas donnée en détail, nous donnons néanmoins la forme de la matrice de courbure d'un tel tissu, ainsi que, dans les nombreux exemples qui viendront illustrer ce chapitre, la matrice de connexion. L'obstacle principal est ici la complexité des calculs qui rend leur écriture difficile. On montre néanmoins que la courbure d'un 5-tissu contient elle aussi des informations concernant sa linéarisation, comme dans le cas des 4-tissus. Les tissus exceptionnels trouvent alors une nouvelle interprétation en terme de système différentiel dans la proposition 6.1.

6.1 La connexion associée à un 5-tissu

Nous ne pourrions expliciter avec autant de détails la connexion associée à un 5-tissu car les calculs en rendraient illisible la rédaction. Dans un premier temps, nous avons explicité les coefficients A_{ij} d'un 5-tissu en les écrivant grâce aux polynômes associés.

Soit $\mathcal{W}(5)$ un 5-tissu du plan, présenté par une équation différentielle à coefficients dans \mathcal{O} suivante :

$$F(x, y, y') = a_0 \cdot (y')^5 + a_1 \cdot (y')^4 + a_2 \cdot (y')^3 + a_3 \cdot (y')^x + a_4 \cdot y' + a_5 = 0.$$

la réduction du nombre des invariants permet d'écrire la matrice (A_{ij}) à l'aide des coefficients du polynôme

$$P_{\mathcal{W}(d)} = -v_1 p^4 - v_2 p^3 - v_3 p^2 - v_4 p - v_5$$

et de la 1-forme fondamentale

$$\alpha = A_1 dx + A_2 dy,$$

comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre. On rappelle que la matrice (A_{ij}) attachée au système $\mathcal{M}(5)$ dont les solutions sont les relations abéliennes

du tissu admet l'écriture suivante :

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{a_5}{a_0}v_1 & -v_5 & A_1 \\ -2v_5 + \frac{a_4}{a_0}v_1 & A_1 - v_4 & A_2 \\ A_1 - 2v_4 + \frac{a_3}{a_0}v_1 & A_2 - v_3 & 2v_2 - \frac{a_1}{a_0}v_1 \\ A_2 - 2v_3 + \frac{a_2}{a_0}v_1 & v_2 - \frac{a_1}{a_0}v_1 & v_1 \end{pmatrix}$$

où

$$A_1 = -\frac{\partial_x(a_0)}{a_0} - \partial_y\left(\frac{a_1}{a_0}\right) + v_1 \sum p_i^3 + v_2 \sum p_i^2 + v_3 \sum p_i + 4v_4$$

et

$$A_2 = -\frac{\partial_y(a_0)}{a_0} + v_1 \sum p_i^2 + v_2 \sum p_i + 3v_3.$$

La construction décrite dans le détail pour un 4-tissu permet d'obtenir pour un 5-tissu un fibré de rang 6 muni d'une connexion dont les éventuelles sections horizontales sont les relations abéliennes du tissu.

La trace k_1 de la matrice de courbure obtenue en choisissant une base adaptée du fibré est alors

$$k_1 = 6(\partial_x(A_2) - \partial_y(A_1)) + 4\partial_y(v_4) - 8\partial_x(v_3) + 3\partial_x\left(v_1\frac{a_2}{a_0}\right) - \partial_y\left(v_1\frac{a_3}{a_0}\right)$$

et on vérifie qu'il s'agit bien d'un invariant du tissu. Par un changement de base adaptée, il est possible d'obtenir une écriture de la matrice de courbure associée au tissu où apparaissent les invariants que nous avons privilégiés, de façon similaire au cas où $d = 4$. Avec les notations du théorème 1.5, la matrice de courbure K d'un 5-tissu peut se mettre sous la forme suivante :

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \tilde{k}_2 + \langle v_1 \rangle_2 & \tilde{k}_3 + \langle v_1 \rangle_3 & \tilde{k}_4 + \langle v_1 \rangle_4 & \tilde{k}_5 + \langle v_1 \rangle_5 & \tilde{k}_6 + \langle v_1 \rangle_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

où

$$\tilde{k}_2 = \partial_x(k_1) + \frac{5}{2}L_1,$$

$$\tilde{k}_3 = \partial_y(k_1) + \frac{5}{2}L_2,$$

$$\tilde{k}_4 = \partial_x^2(k_1) + 4\partial_x(L_1) + \frac{v_4}{2}L_1 - \frac{3}{2}v_5L_2,$$

$$\tilde{k}_5 = \partial_x\partial_y(k_1) - 2\partial_x(L_2) + 2\partial_y(L_1) + \frac{v_3}{2}L_1 - \frac{v_4}{2}L_2,$$

$$\tilde{k}_6 = \partial_y^2(k_1) + 4\partial_y(L_2) + \frac{3}{2}v_2L_1 - \frac{v_3}{2}L_2,$$

et où les crochets $\langle v_1 \rangle_i$ désignent des expressions différentielles en v_1 et les coefficients de F tels que si $v_1 = 0$, alors $\langle v_1 \rangle_i = 0$. De plus, la base adaptée

choisie est telle que les coefficients k_i sont des invariants du tissu.

Cette seule écriture ainsi que le théorème 1.5 redémontre pour $d = 5$ le résultat suivant, par le biais de l'approche implicite et par des moyens propres à l'étude des systèmes différentiels.

Théorème 6.1 (Hénaut, 1994). *Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu du plan de rang maximal avec $d \geq 4$, de polynôme de linéarisation $P_{\mathcal{W}(d)}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i) Le tissu $\mathcal{W}(d)$ est linéarisable ;*
- ii) Le degré de $P_{\mathcal{W}(d)}$ est inférieur ou égale à 3.*

Démonstration. En effet, l'écriture précédente de la courbure de la connexion montre que dans le cas où $\deg(P_{\mathcal{W}(d)}) \leq 3$, alors $v_1 = 0$ et la courbure de la connexion s'écrit alors

$$K = \begin{pmatrix} k_1 & \tilde{k}_2 & \tilde{k}_3 & \tilde{k}_4 & \tilde{k}_5 & \tilde{k}_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} dx \wedge dy$$

Si comme on le suppose, le tissu est de rang maximal, cette courbure est nulle. La trace k_1 est donc nulle, ainsi que L_1 et L_2 . D'après le théorème 1.5, cela équivaut à dire que le tissu est linéarisable. La réciproque est une conséquence directe du même théorème 1.5. \square

6.2 Les 5-tissus exceptionnels revisités

Comme nous l'avons vu, un tissu exceptionnel est un tissu de rang maximal qui n'est pas algébrisable, ou ce qui revient au même par le théorème de Lie-Darboux-Griffiths, qui n'est pas linéarisable. Cette configuration n'est possible que pour $d \geq 5$, du fait du théorème de Poincaré.

Le premier exemple de tels tissus est donné par G. Bol en 1936. Il s'agit d'un 5-tissu dont les feuilles en un point générique sont engendrées par 4 pinceaux de droites du plan en position générale et l'unique conique passant par ces 5 points. Ce tissu qui restera longtemps le seul tissu du plan exceptionnel, est naturellement associé à la relation fonctionnelle à 5 termes du dilogarithme. Un tissu exceptionnel potentiel fût proposé par Alain Hénaut en 2001 dans [W], à savoir un 9-tissu dit de *Spence-Kummer* associé cette fois à la relation fonctionnelle à 9 termes, qui n'est pas linéarisable. Ce dernier contient de plus le 5-tissu de Bol. Les travaux menés indépendamment par Gilles Robert et Luc Pirio conduiront à prouver que ce tissu est bien exceptionnel et qu'il contient d'autres 6 et 7 tissus exceptionnels. On peut renvoyer à l'article de P.A. Griffiths [G-02] pour un état des lieux prospectifs concernant les polylogarithmes et les tissus exceptionnels. C'est cependant à Luc Pirio que l'on doit d'avoir agrandi

le vivier des tissus exceptionnels, puisqu'il a réussi à exhiber notamment toute une famille de 5-tissus exceptionnels en collaboration avec Jean-Marie Trépreau. Les tissus de cette famille ont tous pour base 4 pinceaux de droites auquel on ajoute les feuilles définies par les fonctions elliptiques de Jacobi. Nous renvoyons à la thèse [P] ou à l'article [P-T] pour plus de détails. Nous verrons dans les exemples suivants quelques-un de ces tissus, mais citons tout de même le 5-tissu d'une simplicité étonnante, donnée par ses feuilles $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2)$ et qui appartient à la famille décrite précédemment.

Les tissus exceptionnels n'ont pas été le thème de ce travail, mais l'écriture de la connexion dans le cas des 5-tissus pourrait offrir une approche nouvelle dans l'étude de ces tissus, dont il était nécessaire d'explicitier les relations abéliennes pour montrer qu'ils sont bien de rang maximal.

En effet, le coefficient v_1 qui représente l'obstruction pour un 5-tissu de rang maximal à être algébrisable est connu. Son écriture provient d'un système de Cramer comme nous l'avons vu dans le lemme 2.1 des polynômes associés. Par définition,

$$v_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_0 & 4a_1 & 3a_2 & 2a_3 & a_4 \end{vmatrix}}$$

où

$$\begin{aligned} b_0 &= \partial_y(a_0) & b_1 &= \partial_x(a_0) + \partial_y(a_1) \\ b_2 &= \partial_x(a_1) + \partial_y(a_2) & b_3 &= \partial_x(a_2) + \partial_y(a_3) \\ b_4 &= \partial_x(a_3) + \partial_y(a_4) & b_5 &= \partial_x(a_4) + \partial_y(a_5) \\ b_6 &= \partial_x(a_5) \end{aligned}$$

Cette écriture explicite assure l'effectivité des calculs que nous pouvons mener. Ainsi le théorème 1.5 nous permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 6.1. Soit $\mathcal{W}(5)$ un 5-tissu du plan présenté par une équation différentielle à coefficients dans \mathcal{O} de la forme :

$$F(x, y, y') = a_0 \cdot (y')^5 + a_1 \cdot (y')^4 + a_2 \cdot (y')^3 + a_3 \cdot (y')^x + a_4 \cdot y' + a_5 = 0,$$

dont les coefficients de la courbure associée sont k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 et k_6 dans une base adaptée et soit v_1 le coefficient du terme de plus haut degré de $P_{\mathcal{W}(d)}$. On a alors l'équivalence suivante :

- i) Le 5-tissu est exceptionnel ;
- ii) Les conditions explicites suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0 \\ v_1 \neq 0 \in \mathcal{O} \end{cases}.$$

Notons que ces systèmes peuvent s'écrire en fonction des coefficients a_i de l'équation différentielle. Ainsi, l'étude des 5-tissus exceptionnels se ramène à l'étude d'un système de conditions différentielles, certes compliquées, qui résulte de l'annulation des 6 coefficients de la courbure et d'une relation donnée par $v_1 \neq 0$.

6.3 Exemples

6.3.1 Le 5-tissu de Bol

Pour commencer cette série d'exemples, nous allons naturellement considérer le 5-tissu de Bol $\mathcal{B}(5)$. La présentation du tissu qui nous avons choisie pour sa simplicité est la suivante : on considère les 5 pentes

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{y-1}{x} & p_2 &= \frac{y+1}{x} & p_3 &= \frac{y}{x-1} \\ p_4 &= \frac{y}{x+1} & p_5 &= -\frac{y(x^2-y^2+1)}{x(y^2-x^2+1)}. \end{aligned}$$

L'équation présentant le tissu sera

$$\begin{aligned} F(x, y, p) &= (-x^5y^2 - 2x^5 + x^7 + x^3 + x^3y^2) \cdot p^5 + (-3y^3x^2 + 6yx^4 + 5y^3x^4 - 5yx^6 - yx^2) \cdot p^4 \\ &\quad + (-10y^4x^3 + 3y^4x - x - 2xy^2 - x^5 - 4x^3y^2 + 10x^5y^2 + 2x^3) \cdot p^3 \\ &\quad + (10y^5x^2 - y - 10y^3x^4 - y^5 + 3yx^4 + 2y^3 - 2yx^2 - 4y^3x^2) \cdot p^2 \\ &\quad + (-5y^6x - 3x^3y^2 - xy^2 + 5y^4x^3 + 6y^4x) \cdot p + y^3 - y^5x^2 + y^3x^2 - 2y^5 + y^7, \end{aligned}$$

de discriminant

$$\Delta = 16(x+1-y)^6(x+1+y)^6(x-1-y)^6(x-1+y)^6x^6y^6.$$

Les invariants qui vont nous permettre d'écrire la matrice de connexion sont d'une part la 1-forme $\alpha = A_1dx + A_2dy$ où dans le cas présent

$$A_1 = -2 \frac{xy^2(x^2-y^2-3)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)}$$

et

$$A_2 = 2 \frac{3x^4y^2 - x^4 - 3y^4x^2 - 5x^2y^2 + 2x^2 - y^4 + 2y^2 - 1}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)y}$$

ainsi que le polynôme $-P_{\mathcal{B}(5)}$ dont les coefficients sont les suivants :

$$\begin{aligned} v_1 &= 2 \frac{x^2(x^4 - x^2y^2 - 2x^2 + y^2 + 1)}{(x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 1 - 2y^2)y} \\ v_2 &= -4 \frac{(2x^4 - 2x^2y^2 - 3x^2 + y^2 + 1)x}{x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 1 - 2y^2} \\ v_3 &= 2 \frac{6x^4y^2 - x^4 - 6y^4x^2 - 6x^2y^2 + 2x^2 + y^4 - 1}{(x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 1 - 2y^2)y} \\ v_4 &= -4 \frac{(2x^2y^2 - x^2 - 2y^4 - y^2 + 1)x}{x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 1 - 2y^2} \\ v_5 &= 2 \frac{(-x^2 + x^2y^2 - y^4 + 1)y}{x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2 + y^4 + 1 - 2y^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que le coefficient v_1 est non nul. Le calcul de la matrice de connexion

$$\gamma := \gamma_x dx + \gamma_y dy$$

donne alors que

$$\gamma_x = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^x & \gamma_{12}^x & \gamma_{13}^x & \gamma_{14}^x & \gamma_{15}^x & \gamma_{16}^x \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{32}^x & \gamma_{33}^x & \gamma_{34}^x & \gamma_{35}^x & \gamma_{36}^x \\ 0 & -1 & 0 & \gamma_{44}^x & \gamma_{45}^x & \gamma_{46}^x \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{64}^x & \gamma_{65}^x & \gamma_{66}^x \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{11}^x = 4 \frac{x(-x^2 + x^2y^2 - y^4 + 2y^2 + 1)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)}$$

$$\gamma_{12}^x = \frac{2}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2} (5+9y^4+40x^2y^2+8y^8x^2-14y^2x^6+42y^4x^4+y^6-16y^6x^4-26y^6x^2-x^4+8y^4x^6+3x^6-7x^2-13y^2-13x^4y^2+17y^4x^2-2y^8)$$

$$\gamma_{13}^x = \frac{4yx}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2} (-3x^6+x^4y^2+7y^4x^2+4x^4+9x^2-5y^6-10-16x^2y^2+8y^4+7y^2+4y^2x^6-8y^4x^4+4y^6x^2)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{14}^x &= \frac{4}{(x+1-y)^3(x+1+y)^3(-y+x-1)^3(x-1+y)^3} (3+34y^2x^8-125y^4x^8-5x^8+45y^4 \\ &\quad +99x^2y^2-101y^{10}x^2+88y^8x^2-70y^2x^6+268y^4x^4+11x^{10}y^2-60y^6 \\ &\quad -208y^6x^4+122y^6x^2-6x^4+72x^4y^{10}-264x^6y^8+104y^4x^6+12x^6-4x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -18y^2 - 48x^{10}y^4 + 32x^{10}y^6 - 32x^4y^{12} + 96x^6y^{10} - 96x^8y^8 + 3y^{12} + 26y^8x^4 \\
& + 186y^6x^6 + 24x^2y^{12} - 56x^4y^2 - 228y^4x^2 + 216x^8y^6 - 18y^{10} + 45y^8) \\
\gamma_{15}^x &= \frac{4y}{(x+1-y)^3(x+1+y)^3(-y+x-1)^3(x-1+y)^3}(-7+20y^2x^8+152y^4x^8-15x^8 \\
& -42y^4-68x^2y^2+36y^{10}x^2-112y^8x^2+200y^2x^6-226y^4x^4-52x^{10}y^2+28y^6+268y^6x^4 \\
& +48y^6x^2+94x^4-32x^4y^{10}+96x^6y^8-188y^4x^6-52x^6-32x^2+28y^2 \\
& +32x^{10}y^4-24y^8x^4-112y^6x^6-128x^4y^2+128y^4x^2-96x^8y^6+12x^{10}-7y^8) \\
\gamma_{16}^x &= \frac{4x}{(x+1-y)^3(x+1+y)^3(-y+x-1)^3(x-1+y)^3}(24+87y^2x^8+56y^4x^8 \\
& +4x^8-4y^4+236x^2y^2+32y^{10}x^2+11y^8x^2+68y^2x^6+120y^4x^4-40x^{10}y^2 \\
& +34y^6+138y^6x^4-180y^6x^2+108x^4-32x^4y^{10}+96x^6y^8-238y^4x^6-54x^6-85x^2-41y^2+32x^{10}y^4 \\
& -88y^8x^4+40y^6x^6-310x^4y^2+50y^4x^2-96x^8y^6+3x^{10}-y^{10}-12y^8) \\
\gamma_{32}^x &= 4 \frac{y(x^2y^2-y^4-2+3y^2)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\
\gamma_{33}^x &= 4 \frac{x(-x^2+x^2y^2-y^4+2y^2+1)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\
\gamma_{34}^x &= \frac{4y}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2x}(-3-18y^4-17x^2y^2+8y^8x^2-3y^2x^6 \\
& +35y^4x^4+12y^6-16y^6x^4-29y^6x^2+5x^4+8y^4x^6-2x^2+12y^2-20x^4y^2+40y^4x^2-3y^8) \\
\gamma_{35}^x &= \frac{2}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2}(1-41y^4+34x^2y^2+16y^8x^2-8y^2x^6 \\
& +36y^4x^4+39y^6-32y^6x^4-16y^6x^2-5x^4+16y^4x^6+3x^6+x^2+13y^2-23x^4y^2-19y^4x^2-12y^8) \\
\gamma_{36}^x &= \frac{4yx}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2}(-x^6-3x^4y^2+9y^4x^2 \\
& -8x^4+27x^2-5y^6-18-24x^2y^2+23y^2+8y^2x^6-16y^4x^4+8y^6x^2) \\
\gamma_{44}^x &= -2 \frac{3x^4y^2+x^4+5x^2y^2-3y^4x^2-2x^2+y^4+1-2y^2}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)x} \\
\gamma_{45}^x &= -2 \frac{y(3x^4-3x^2y^2-x^2-2+2y^2)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\
\gamma_{46}^x &= -2 \frac{(3x^4-3x^2y^2-6x^2+y^2+3)x}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\
\gamma_{64}^x &= -2 \frac{y^2(x^2-y^2+1)(y^2-1)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)x} \\
\gamma_{65}^x &= -2 \frac{(-y^2+x^2-1)y(y^2-1)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)}
\end{aligned}$$

$$\gamma_{66}^x = -2 \frac{xy^2(x^2 - y^2 - 3)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)}$$

et

$$\gamma_y = \begin{bmatrix} \gamma_{11}^y & \gamma_{12}^y & \gamma_{13}^y & \gamma_{14}^y & \gamma_{15}^y & \gamma_{16}^y \\ 0 & \gamma_{22}^y & \gamma_{23}^y & \gamma_{24}^y & \gamma_{25}^y & \gamma_{26}^y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{44}^y & \gamma_{45}^y & \gamma_{46}^y \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \gamma_{64}^y & \gamma_{65}^y & \gamma_{66}^y \end{bmatrix}$$

où

$$\gamma_{11}^y = -4 \frac{y(x^4 - x^2y^2 - 2x^2 - 1 + y^2)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)}$$

$$\gamma_{12}^y = \frac{-4yx}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2} (7x^4y^2 + y^4x^2 - 3y^6 - 5x^6 + 8x^4 + 7x^2 + 4y^4 + 9y^2 - 16x^2y^2 - 10 + 4y^2x^6 - 8y^4x^4 + 4y^6x^2)$$

$$\gamma_{13}^y = \frac{-2}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2} (5 + 8y^2x^8 - 2x^8 - y^4 + 40x^2y^2 - 26y^2x^6 + 42y^4x^4 + 3y^6 + 8y^6x^4 - 14y^6x^2 + 9x^4 - 16y^4x^6 + x^6 - 13x^2 - 7y^2 + 17x^4y^2 - 13y^4x^2)$$

$$\gamma_{14}^y = \frac{-4y}{(x+1-y)^3(x+1+y)^3(-y+x-1)^3(x-1+y)^3} (-24 - 11y^2x^8 + 88y^4x^8 + 12x^8 - 108y^4 - 236x^2y^2 + 40y^{10}x^2 - 87y^8x^2 + 180y^2x^6 - 120y^4x^4 - 32x^{10}y^2 + 54y^6 + 238y^6x^4 - 68y^6x^2 + 4x^4 - 32x^4y^{10} + 96x^6y^8 - 138y^4x^6 - 34x^6 + 41x^2 + 85y^2 + 32x^{10}y^4 - 56y^8x^4 - 40y^6x^6 - 50x^4y^2 + 310y^4x^2 - 96x^8y^6 + x^{10} - 3y^{10} - 4y^8)$$

$$\gamma_{15}^y = \frac{-4x}{(x+1-y)^3(x+1+y)^3(-y+x-1)^3(x-1+y)^3} (7 + 112y^2x^8 + 24y^4x^8 + 7x^8 - 94y^4 + 68x^2y^2 + 52y^{10}x^2 - 20y^8x^2 - 48y^2x^6 + 226y^4x^4 - 36x^{10}y^2 + 52y^6 + 188y^6x^4 - 200y^6x^2 + 42x^4 - 32x^4y^{10} + 96x^6y^8 - 268y^4x^6 - 28x^6 - 28x^2 + 32y^2 + 32x^{10}y^4 - 152y^8x^4 + 112y^6x^6 - 128x^4y^2 + 128y^4x^2 - 96x^8y^6 - 12y^{10} + 15y^8)$$

$$\gamma_{16}^y = \frac{-4}{(x+1-y)^3(x+1+y)^3(-y+x-1)^3(x-1+y)^3} (-3 - 88y^2x^8 - 26y^4x^8 - 45x^8 + 6y^4 - 99x^2y^2 - 3x^{12} - 24x^{12}y^2 - 11y^{10}x^2 - 34y^8x^2 - 122y^2x^6 - 268y^4x^4 + 101x^{10}y^2 - 12y^6 - 104y^6x^4 + 70y^6x^2 - 45x^4 + 48x^4y^{10} - 216x^6y^8 + 208y^4x^6 + 60x^6 + 32x^{12}y^4 + 18x^2 + 4y^2 - 72x^{10}y^4 - 96x^{10}y^6 - 32x^6y^{10} + 96x^8y^8 + 125y^8x^4 - 186y^6x^6 + 228x^4y^2 + 56y^4x^2 + 264x^8y^6 + 18x^{10} + 5y^8)$$

$$\gamma_{22}^y = -4 \frac{y(x^4 - x^2y^2 - 2x^2 - 1 + y^2)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23}^y &= -4 \frac{x(x^4 - x^2y^2 - 3x^2 + 2)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\ \gamma_{24}^y &= \frac{-4yx}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2} (9x^4y^2 - 3y^4x^2 \\ &\quad - y^6 - 5x^6 + 23x^2 - 8y^4 + 27y^2 - 24x^2y^2 - 18 + 8y^2x^6 - 16y^4x^4 + 8y^6x^2) \\ \gamma_{25}^y &= \frac{-2}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2} (1 + 16y^2x^8 - 12x^8 \\ &\quad - 5y^4 + 34x^2y^2 - 16y^2x^6 + 36y^4x^4 + 3y^6 + 16y^6x^4 - 8y^6x^2 - 41x^4 - 32y^4x^6 + 39x^6 \\ &\quad + 13x^2 + y^2 - 19x^4y^2 - 23y^4x^2) \\ \gamma_{26}^y &= \frac{-4x}{(x+1-y)^2(x+1+y)^2(-y+x-1)^2(x-1+y)^2y} (-3 + 8y^2x^8 - 3x^8 + 5y^4 \\ &\quad - 17x^2y^2 - 29y^2x^6 + 35y^4x^4 + 8y^6x^4 - 3y^6x^2 - 18x^4 - 16y^4x^6 + 12x^6 + 12x^2 - 2y^2 + 40x^4y^2 - 20y^4x^2) \\ \gamma_{44}^y &= 2 \frac{(x^2 - y^2 + 3)x^2y}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\ \gamma_{45}^y &= 2 \frac{(x^2 - y^2 + 1)x(x^2 - 1)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\ \gamma_{46}^y &= 2 \frac{x^2(-y^2 + x^2 - 1)(x^2 - 1)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)y} \\ \gamma_{64}^y &= 2 \frac{(-x^2 + 3x^2y^2 - 3y^4 - 3 + 6y^2)y}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\ \gamma_{65}^y &= 2 \frac{x(-2x^2 + 3x^2y^2 - 3y^4 + y^2 + 2)}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)} \\ \gamma_{66}^y &= 2 \frac{3x^4y^2 - x^4 - 3y^4x^2 - 5x^2y^2 + 2x^2 - y^4 + 2y^2 - 1}{(x+1-y)(x+1+y)(-y+x-1)(x-1+y)y} \end{aligned}$$

La matrice de courbure de ce tissu est alors nulle puisque

$$K = d\gamma + \gamma \wedge \gamma = 0.$$

Ce tissu est donc bien de rang maximal, et exceptionnel puisque v_1 est non nul. D'autre part, il est intéressant de remarquer que la matrice de connexion n'est pas à pôles simples mais que sa trace l'est. Le discriminant réduit est donné par

$$\Delta = (x+1-y)(x+1+y)(x-1-y)(x-1+y)xy.$$

Le calcul des résidus pour le 5-tissu de Bol montre que sur chacune de ces six droites, le résidu vaut -2 .

6.3.2 Un autre 5-tissu exceptionnel

Un des 5-tissus mis en évidence par Luc Pirio est particulièrement simple. Il est composé de 4 pincesaux de droites et d'un pinceau de cercles. Il s'agit du 5-tissu $\mathcal{W}(x, y, x + y, x - y, x^2 + y^2)$ qui est un tissu rectifié, puisque l'une de ses pentes est infinie. La méthode de calcul dans le cas d'un 5-tissu est alors la même que celle que nous avons vue pour les 4-tissus.

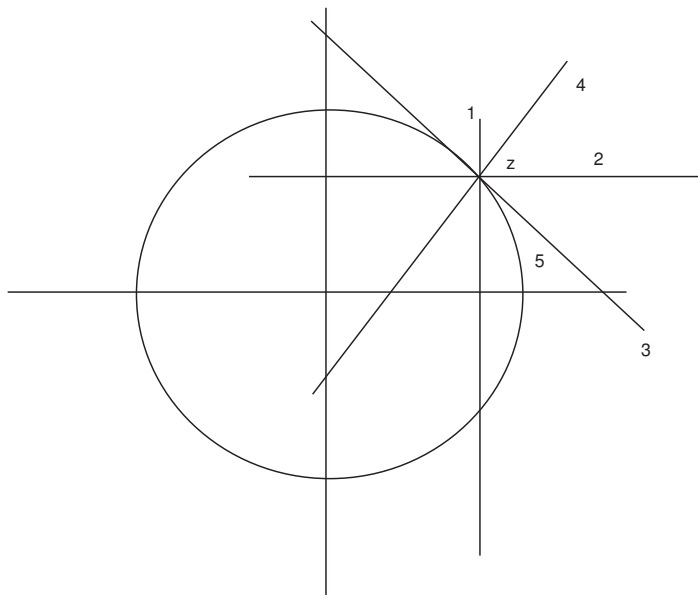


FIG. 6.1 – Un 5-tissu de Pirio

Parmi les invariants que nous avons mis en évidence, la 1-forme α s'écrit ici

$$\alpha = -\frac{1}{x}dx - 2\frac{y}{(y-x)(y+x)}dy$$

Le polynôme V qui est l'opposé du polynôme de linéarisation admet pour coefficients :

$$v_1 = 0,$$

$$v_2 = \frac{y(x^2 + y^2)}{(-x^2y + y^3)x},$$

$$v_3 = 0,$$

$$v_4 = -\frac{(x^2 + y^2)y}{(-x^2y + y^3)x},$$

et

$$v_5 = 0.$$

La matrice de connexion de ce tissu est

$$\gamma = \begin{bmatrix} \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -dx & -\frac{(3y^2-x^2)}{y(-x^2+y^2)}dy & \frac{(x^2+y^2)}{x(-x^2+y^2)}dy & -\frac{1}{xy}dy & \frac{-2}{-x^2+y^2}dy & -\frac{1}{xy}dy \\ dy & -\frac{(x^2+y^2)}{y(-x^2+y^2)}dx & -\frac{(-3x^2+y^2)}{x(-x^2+y^2)}dx & \frac{1}{xy}dx & -2\frac{1}{-x^2+y^2}dx & \frac{1}{xy}dx \\ 0 & -dx & 0 & 2\frac{x}{-x^2+y^2}dx - \frac{1}{y}dy & -2\frac{y}{-x^2+y^2}dx & \frac{(x^2+y^2)}{x(-x^2+y^2)}dx \\ 0 & dy & -dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dy & -\frac{1(x^2+y^2)}{y(-x^2+y^2)}dy & 2\frac{x}{-x^2+y^2}dy & -\frac{1}{x}dx - 2\frac{y}{-x^2+y^2}dy \end{bmatrix}$$

où

$$\eta = -\frac{(-3x^2+y^2)}{x(-x^2+y^2)}dx - \frac{(3y^2-x^2)}{y(-x^2+y^2)}dy.$$

On vérifie que ce tissu est bien de rang maximal, puisque sa courbure est nulle. Ce tissu étant rectifié, le critère que nous avons rappelé dans le théorème 6.1 n'est plus valide. Ainsi, le coefficient v_1 du polynôme de linéarisation est nul, mais les expressions L_1 et L_2 ne sont pas nulles. Elles correspondent à la linéarisation du 4-tissu que l'on déduit du tissu rectifié, comme nous l'avons vu dans la partie 3.5. Le fait qu'elles soient non nulles indique que le 4-tissu n'est pas linéarisable, ce qui veut dire qu'il en est de même du 5-tissu de Pirio. Ainsi ce tissu est bien exceptionnel.

A nouveau, le calcul des résidus de ce tissu montre que sur chacune des composantes irréductibles du discriminant réduit

$$\Delta = xy(x-y)(x+y),$$

le résidu vaut -3 .

Bibliographie

- [A-G-L] M.A. AKIVIS, V.V. GOLDBERG and V.V. LYCHAGIN, *Linearisability of d -webs, $d \geq 4$, on two-dimensional manifolds*, *Selecta Math.* **10** (4) (2004), 431-451.
- [Ar] V. ARNOLD, *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, MIR, Moscou, 1980.
- [B] W. BLASCHKE, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser, Basel, 1955.
- [B-B] W. BLASCHKE and G. BOL, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.
- [Be] A. BEAUVILLE, *Géométries des tissus (d'après S.S. Chern et P.A. Griffiths)*, Séminaire Bourbaki, exposé 531 (février 1976), *Lect. Notes Math* **770**, Springer, Berlin, 1980, 130-119.
- [C] S.S. CHERN, *Web Geometry*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1982), 1-8.
- [C-G] S.S. CHERN and P.A. GRIFFITHS, *Abel's Theorem and Webs*, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **80** (1978), 13-110 and *Corrections and Addenda to Our Paper : Abel's Theorem and Webs*, *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **83** (1981), 78-83.
- [Car] E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion projective*, *Bull. Soc. Math. France* **52** (1924), 205-241.
- [Ce] D. CERVEAU, *Théorèmes de type Fuchs pour les tissus feuilletés in Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992)*, *Astérisque* **222**, (1994), 49-92.
- [D] L. DARA, *Singularités génériques des équations différentielles multi-formes*, *Bol. Soc. Bras. Mat.* **6** (1975), 95-128.
- [De] P. DELIGNE, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, *Lect. Notes Math*, **163**, Springer, New-York, 1970.
- [G-H] P.A. GRIFFITHS and J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [G-02] P.A. GRIFFITHS, *The legacy of Abel in algebraic geometry*, in Laudal, Olav Arnfinn (ed.) et al., *The legacy of Niels Henrik Abel. Papers from the Abel bicentennial conference, University of Oslo, Oslo, Norway, June 3-8, 2002*. Springer, Berlin (2004), 179-205.
- [G-76] P.A. GRIFFITHS, *Variations on a Theorem of Abel*, *Invent. Math.* **35** (1976), 321-390.

- [Go] V.V. GOLDBERG, *4-webs in the plane and their linearizability* Acta. Appl. Math. **80** (2004), 35-55.
- [Go-L] V.V. GOLDBERG and V.V. LYCHAGIN, *On linearisation of planar three-webs and Blaschke's conjecture*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **341** (2005), 169-173.
- [Gold] H. GOLDSCHMIDT, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations*, Ann. of Math. (2) **86** (1967), 246-270.
- [H-04] A. HÉNAUT, *On planar web geometry through abelian relations and connections*, Ann. of Math. **159** (2004), 425-445.
- [H-00] A. HÉNAUT, *Sur la courbure de Blaschke et le rang des tissus de \mathbb{C}^2* , Natural Science Report of the Ochanomizu University **51** (2000), n°1, 11-25.
- [H-94] A. HÉNAUT, *Caractérisation des tissus de \mathbb{C}^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables*, Compositio Math. **94** (1994), 247-268.
- [H-93] A. HÉNAUT, *Sur la linéarisation des tissus de \mathbb{C}^2* , Topology **32** (1993), 531-542.
- [H-90] A. HÉNAUT, *\mathcal{D} -modules et géométrie des tissus de \mathbb{C}^2* , Math. Scand. **66** (1990), 161-172.
- [LN-N] A. LINS NETO and I. NAKAI, *Web geometry of solutions of first order ODEs*, Notes d'un travail en cours.
- [Lio] R. LIOUVILLE, *Sur les invariants de certaines équations différentielles et sur leurs applications*, J. Ec. Polytechnique **59** (1889), 7-76.
- [M-P] D. MARÍN and J.V. PEREIRA, *Global Web Geometry on Projective Surfaces*, Notes d'un travail en cours.
- [Mi-1] G. MIGNARD, *Rang et courbure des 3-tissus de \mathbb{C}^2* , C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **329** (1999), 629-632.
- [Mi-2] G. MIGNARD, *Rang et courbure des 3-tissus du plan et applications aux équations différentielles*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, janvier 1999.
- [Mih] M.N. MIHAILEANU, *Sur les tissus plans de première espèce*, Bull. Math. Soc. Roum. Sci. **43** (1941), 23-26.
- [N-1] I. NAKAI, *Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms : Variation on a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister*, Comment. Math. Helv. **73** (1998), 177-205.
- [O-S] T. OZAWA and H. SATO, *Linearizations of ordinary differential equations by area preserving maps*, Nagoya Math. J. **156** (1999), 109-122.
- [P] L. PIRIO, *Équations fonctionnelles abéliennes et géométrie des tissus*, Thèse de doctorat, Université Paris VI, décembre 2004.
- [P-T] L. PIRIO et J.-M. TREPRAU, *Tissus plans exceptionnels et fonction thêta*, A paraître.
- [Pa] A. PANTAZI, *Sur la détermination du rang d'un tissu plan*, C.R. Acad. Sci. Roumanie **4** (1938), 108-111.

- [Po] H. POINCARÉ, *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **29** (1901), 61-86.
- [Q] D.G. QUILLEN, *Formal properties of over-determined systems of linear partial differential equations*, Thesis, Harvard University, Cambridge, Mass., 1964 (Non publiée).
- [R] O. RIPOLL, *Détermination du rang des tissus du plan et autres invariants géométriques*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **341** (2005), 247-252.
- [S] D.C. SPENCER, *Selecta*, Vol. 3, World Scientific, Sci. Publishing co., Philadelphia, 1985.
- [Sa] C. SABBAH, *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*, EDP Sciences, CNRS Editions, 2002.
- [Tr] A. TRESSE, *Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformation*, Acta Math. **18** (1894), 1-88.
- [W] J. GRIFONE and É. SALEM (Eds), *Web Theory and Related Topics*, World Scientific, Sci. Publishing co., River Edge, NJ, 2001.

Résumé : Soit $\mathcal{W}(d)$ un d -tissu non singulier du plan implicitement présenté par une équation différentielle $F(x, y, y') = 0$, et de connexion associée (E, ∇) . De nouveaux invariants de $\mathcal{W}(d)$ sont mis à jour ; en particulier, on montre que (E, ∇) est entièrement déterminé par la connaissance d'une 1-forme fondamentale et du polynôme de linéarisation du tissu.

Nous indiquons également comment la courbure de la connexion rend compte de la linéarisation du tissu. En étudiant la trace de la courbure de la connexion, on montre que le fibré déterminant de (E, ∇) est isomorphe au produit tensoriel des fibrés en droites associés aux 3-tissus extraits. Nous donnons ensuite une caractérisation géométrique des tissus de trace nulle, en généralisant la construction de l'hexagone de Thomsen. En outre, on présente un procédé explicite de détermination du rang de $\mathcal{W}(d)$ pour d quelconque, à partir des seuls coefficients de F . En application, nous retrouvons des résultats connus en géométrie des tissus, et indiquons des perspectives nouvelles, notamment pour l'étude des tissus exceptionnels.

Mots-Clés : Géométrie des tissus du plan ; Équation différentielle ; Feuilletage analytique ; Système différentiel ; Théorie de Cartan-Spencer ; Connexion ; Déterminant ; Courbure de Blaschke-Chern ; Hexagone de Thomsen.

Abstract : Let $\mathcal{W}(d)$ be a non singular planar d -web, implicitly presented by a differential equation F and let (E, ∇) be the connection associated to F . New invariants are updated ; In particular, we show that (E, ∇) is entirely determined by a fundamental 1-form and the linearization polynome. We notice that the connection gives informations about the linearization of the web. Studying the trace of the curvature, we show that the determinant bundle of (E, ∇) is isomorphic to the tensor product of the line bundles associated to extracted 3-webs. We then give a generalisation of Thomsen's construction of the hexagon, related to the trace. We also give an explicit way of determination of the rank of any d -web $\mathcal{W}(d)$. Some well known results in web geometry are proven and we indicate some new perspectives, in particular for the study of exceptional webs.

Key-Words : Planar webs geometry ; Differential equation ; Analytic foliation ; Differential system ; Cartan-Spencer Theory ; Connection ; Determinant ; Blaschke-Chern curvature ; Thomsen Hexagon.