MÉMOIRE présenté par

Mihai GRADINARU

en vue d'obtenir le diplôme

d'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Sujet : Applications du calcul stochastique à l'étude de certains processus

soutenu le 7 décembre 2005

à l'Institut de Mathématiques Élie Cartan

devant le jury composé de :

Gérard Ben Arous	École Polytechnique Fédérale de Lausanne	
Michel Emery	Université Louis Pasteur, Strasbourg	
Michel Ledoux	Université Paul Sabatier, Toulouse	Rapporteur
David Nualart	University of Kansas, Lawrence	Rapporteur
Bernard Roynette	Université Henri Poincaré, Nancy	
Zhan Shi	Université Pierre et Marie Curie, Paris	Rapporteur
Marc Yor	Université Pierre et Marie Curie, Paris	Président du jury

DFD Mathématiques - École Doctorale IAEM Lorraine - UFR STMIA

à Dor,

Remerciements

L'habileté à formuler les remerciements caractérise le spécialiste de haut vol. [...]
Toute recherche sans dette est une recherche suspecte [...]. [1]
(Umberto Eco)

C'est un réel plaisir pour moi d'écrire ces lignes par lesquelles je tiens à remercier les nombreuses personnes qui ont contribué, de diverses manières, à ce travail.

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde gratitude à Bernard Roynette pour les questions de mathématiques qu'il m'a posées toutes ces années, pour son enthousiasme et son intuition remarquables dont il sait me faire profiter, pour son "Alors, on termine ça !" *lors des séances de mathématiques ou de course à pied, pour ses conseils et ses encouragements quasi-permanents, pour sa confiance en moi, pour sa générosité, mais surtout pour son amitié. J'ai pu réaliser ce travail, en grande partie, grâce à lui.*

Mes premiers pas dans la recherche ont été guidés par Gérard Ben Arous, mon directeur de thèse de doctorat. Je suis très content d'avoir été son élève. Son sens mathématique très aigu et ses conseils sont toujours présents dans mon esprit. Malgré l'éloignement, les messages réguliers témoignent du regard attentif qu'il a toujours porté sur mon travail. Je suis particulièrement heureux qu'il fasse partie de ce jury.

Michel Ledoux connaît bien mon travail mathématique depuis le début de ma thèse de doctorat. Son chaleureux intérêt s'est manifesté à chacune de nos rencontres, lors de diverses occasions. Je le remercie vivement pour la gentillesse avec laquelle il a accepté d'être rapporteur de ma thèse d'habilitation et de participer au jury.

Je tiens à remercier David Nualart pour l'intérêt qu'il a porté à cette thèse d'habilitation en acceptant d'en être rapporteur. Les échanges réguliers de travaux mathématiques que nous avons eus m'ont beaucoup stimulé.

Je remercie également Zhan Shi qui a eu l'amabilité d'analyser mon travail, de rédiger un rapport sur cette thèse, ainsi que d'accepter de faire partie du jury.

Collaborer avec Marc Yor fut pour moi une expérience extraordinaire. J'ai appris énormément et je reste encore fasciné par l'énergie avec laquelle il a entraîné notre travail : en effet, les questions et, souvent, les réponses se succédaient dans ses fax quasi-journaliers. Je le remercie de me faire l'honneur de participer à ce jury.

Michel Emery me connaît pratiquement depuis mon arrivée à Nancy par le biais des Journées Strasbourg-Nancy-Évry. Ses remarques et ses questions, lors de mes premiers exposés sur les sujets de cette thèse ont ouvert, sans doute plus d'une fois, des directions inexplorées. Avec sa gentillesse caractéristique il a accepté d'être présent dans ce jury et je lui en sais gré.

Je suis spécialement reconnaissant à Pierre Vallois avec lequel j'ai collaboré à maintes reprises, en recherche, pour l'enseignement, mais aussi en dehors du cadre professionnel. J'ai pris exemple de son inventivité, de sa rigueur, de sa force de travail et de ses "petits calculs"*. Son aide et ses conseils ont été (et seront) toujours très précieux. Bien que rarement, faire du VTT ensemble fut une belle expérience.*

[1] "Comment voyager avec un saumon : nouveaux pastiches et postiches", Éditions Grasset 1998.

Mes remerciements s'adressent aussi à Francesco Russo. J'ai eu la chance de collaborer avec lui et j'en garde un excellent souvenir. Avec Pierre Vallois, il m'a initié au calcul stochastique généralisé. Travailler avec lui fut (et j'espère sera) très enrichissant et très agréable. Je le remercie aussi pour les longues conversations que nous avons eues, ainsi que pour les conseils qu'il m'a prodigués plus d'une fois.

Merci à Samy Tindel pour le dynamisme avec lequel il me fait partager son ambition mathématique et son aisance à faire face à des difficultés imprévues : notre collaboration est stimulante, fructueuse et amicale.

Samuel Herrmann et Ivan Nourdin ont été mes étudiants : ils sont devenus mes pairs, mes proches collaborateurs et surtout mes amis. Une grande partie de cette thèse est basée sur des travaux communs, fruits de longues séances de réflexion et calculs. Travailler avec eux est un vrai partage de connaissances, d'idées, d'égarements quelquefois. J'espère que cela continuera. Merci à Samuel pour son calme olympien et merci à Ivan pour sa bonne humeur. Je les remercie pour ce que j'apprends d'eux maintenant, à mon tour.

Merci également à Madalina Deaconu et à Jean-Rodolphe Roche pour la collaboration que nous avons eue au tout début de mon arrivée à Nancy. Merci à Madalina pour avoir partagé des séances de travail sur des questions du projet Omega. J'en profite pour souligner le support essentiel et permanent que j'ai eu par le biais de ce projet.

Mes remerciements vont ensuite à Francis Hirsch pour m'avoir accueilli dans l'équipe d'Évry durant deux ans et de m'avoir soutenu chaleureusement. Rémi Léandre m'a constamment encouragé et soutenu après mon arrivée à Nancy : je le remercie sincèrement. Je voudrais remercier chaleureusement les responsables de l'Institut Élie Cartan, Daniel Barlet, Lionel Bérard-Bergery, Jean-Claude Fort et Antoine Henrot, pour m'avoir permis de travailler dans d'excellentes conditions. Je remercie sincèrement tous les collègues de Nancy et particulièrement ceux de l'équipe de Probabilités. J'adresse un vif remerciement à Didier Gemmerlé qui m'a amicalement poussé à soutenir cette habilitation, pour ses remarques concernant la rédaction, pour ses formidables réponses à toute question informatique et autres, et pour ses encouragements. Je remercie Patricia Georges et Chantal Lecomte pour leur patience et leur gentillesse lors de mes innombrables passages dans leurs bureaux avec plein de questions. Merci aussi à Hélène Zganic pour son support constructif et efficace. Merci à Nathalie Piérache et Raymonde Michel pour leur aide permanente mais aussi, depuis peu, pour leur collaboration en tout ce qui concerne la bibliothèque. Je remercie André Stef pour son amitié et son soutien constant et appuyé. Je ne pourrais pas citer ici tous mes amis. Toutefois, j'ai une pensée toute particulière pour Colette, Denis et Fanny. Enfin, à tous ceux et celles que j'oublie, merci.

Merci à mon père de m'avoir donné l'éducation, l'amour et mes premières leçons de mathématiques. Merci à ma famille pour m'avoir soutenu avec beaucoup d'affection.

C'est à Dorina que je dois tout : sa joie de vivre, sa confiance en moi, son soutien permanent et son amour m'ont permis d'avancer dans la vie jusqu'à maintenant et je l'espère, pour toujours.

Préface

Mathematics is not a deductive science – that's a cliché. When you try to prove a theorem, you don't just list the hypotheses, and then start to reason. What you do is trial and error, experimentation, guesswork. [1]

(Paul R. Halmos)

Mon activité de recherche concerne le calcul stochastique en général et se concentre en particulier sur la caractérisation et le comportement des trajectoires des processus stochastiques. Depuis la fin de mon DEA, cette activité de recherche a été menée d'une part dans l'équipe de Modélisation Stochastique et Statistique d'Orsay, Université de Paris-Sud, durant ma thèse (1991-1995), et d'autre part à l'Institut Élie Cartan de Nancy, Université Henri Poincaré (depuis 1996). Mes travaux de recherche sont l'objet de diverses collaborations et ont donné lieu à des publications dans divers journaux (voir la liste à la fin de cette introduction). Les travaux [6][2], [7] et [9,10] font aussi partie des thèses, respectivement, de Madalina Deaconu, Samuel Herrmann et Ivan Nourdin.

Pendant la thèse je me suis intéressé à deux problèmes proposés par Gérard Ben Arous. Le premier problème concerne la description précise de la singularité près de la diagonale de la fonction de Green associée à un opérateur hypoelliptique (sous l'hypothèse de Hörmander forte et avec une géométrie des crochets de Lie localement constante). La fonction de Green G est la densité de la mesure d'occupation de la diffusion associée et l'étude est basée sur une analyse fine des trajectoires de cette diffusion. Nous montrons que la limite $\lim_{y\to x} G(x,y)|y|_x^{\mathtt{Q}(x)-2}$ n'existe pas, où $|\cdot|_x$ est une norme localement homogène adaptée à la géométrie des crochets de Lie et $\mathtt{Q}(x)$ est la dimension graduée en x. Il s'agit d'un comportement différent par rapport à la situation elliptique, à celle du groupe d'Heisenberg plat ou à la situation du groupe d'Heisenberg "non-plat"[3]. La limite ci-dessus existe seulement de façon radiale et ce comportement est décrit à l'aide d'un processus non-markovien qui est la projection d'une diffusion invariante sur un groupe de Lie nilpotent. L'étude repose sur des résultats de développement de Taylor stochastiques[4] et sur les estimations a priori de la fonction de Green et de ses dérivées[5]. Des exemples et des applications à la théorie du potentiel sont présentés. Ce travail a donné lieu à deux publications en collaboration avec Gérard Ben Arous [3,14]. La deuxième partie de ma thèse porte sur le théorème de support en norme γ-hölderienne, $0 < \gamma < 1/2$. Il s'agit d'une généralisation du résultat de Stroock et Varadhan pour la topologie uniforme[6]. Nous montrons que le support de la loi de la diffusion $\mathbb{P}_x$ est encore l'adhérence du même ensemble de trajectoires, mais pour la topologie γ-hölderienne. Nous avons suivi la stratégie de Stroock et Varadhan et l'outil de base est une estimation de la probabilité que le mouvement brownien ait une grande norme

[1] "I Want to be a Mathematician ; an automathography", Springer 1985.

[2] Les références [1-15] de cette préface correspondent à la liste de publications.

[3] Chaleyat-Maurel, M., Le Gall, J.-F. Green function, capacity and sample paths properties for a class of hypoelliptic diffusion processes, *Probab. Theory Related Fields* **83**, 219-264 (1989).

[4] Castell, F. Asymptotic expansion of stochastic flows, *Probab. Theory Related Fields* **96**, 225-239 (1993).

[5] Nagel, A., Stein, E.M., Wainger, S. Balls and metrics defined by vector fields I. Basic Properties *Acta Math.* **155**, 103-147 (1985).

[6] Stroock, D.W., Varadhan, S.R.S. On the support of diffusion processes with applications to the strong maximum principle. *Proceedings of Sixth Berkeley Symposium of Math. Statist. Probab.* 1970, University of California Press, 333-359, 1972.

γ-hölderienne, conditionnellement au fait qu'il ait une petite norme uniforme (ou γ'-hölderienne, $\gamma' < \gamma$). Ces estimations impliquent un cas particulier de l'inégalité de corrélation et constituent l'outil central d'un résultat de grandes déviations en norme hölderienne[7]. Cette collaboration avec Gérard Ben Arous et Michel Ledoux a donné aussi lieu à deux publications [2,13]. Les détails de tous ces travaux peuvent être trouvés dans ma thèse [15], soutenue en juin 1995.

Mes travaux de recherche après ma thèse, bien qu'orientés dans plusieurs directions, sont restés concentrés sur l'étude fine des trajectoires de processus stochastiques : diffusions, mouvement brownien fractionnaire, solutions d'équations aux dérivées partielles stochastiques. Ce document contient la synthèse de ces travaux. Pour guider la lecture de cette synthèse, les principales directions de recherche seront décrites dans les quatre premiers chapitres, les deux derniers chapitres contenant d'autres travaux. L'organisation de ce document ne respecte donc pas l'ordre chronologique stricte de ces recherches.

Le premier thème, résumé dans le **Chapitre 1**, est l'étude et l'identification des lois d'intégrales par rapport au temps local d'une diffusion (plus particulièrement du processus de Bessel de dimension $0 < d < 2$). L'intérêt de cette étude est multiple : retrouver et compléter des résultats de même type connus, illustrer le lien entre ces fonctionnelles et l'opération d'intégration fractionnaire (l'opérateur d'Abel) et donner une approche originale pour ce type de questions, basée sur deux représentations probabilistes de solutions d'un problème aux limites. Ces travaux font l'objet de deux publications [4,5] en collaboration avec Bernard Roynette, Pierre Vallois et Marc Yor.

Le **Chapitre 2** contient un autre problème auquel je me suis également intéressé : peut-on donner la description précise du comportement des trajectoires de la diffusion obtenue comme une petite perturbation brownienne d'un système dynamique dépourvu de la propriété d'unicité de solutions (le phénomène de Peano) ? Nous illustrons un nouveau phénomène singulier de grandes déviations pour la densité d'une telle diffusion. À partir de ce résultat on peut obtenir un principe singulier de grandes déviations pour sa loi[8]. Le travail [7] , fruit d'une collaboration avec Samuel Herrmann et Bernard Roynette, est basé sur des outils de grandes déviations, mais aussi sur l'étude des solutions de viscosité pour des équations aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi.

Une autre partie importante de mon travail de recherche est résumée au **Chapitre 3**. Cela concerne l'étude du mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $0 < H < 1/2$ et l'élaboration d'une approche du calcul stochastique (et plus particulièrement de la formule d'Itô) par rapport à ce processus gaussien (non-markovien, non-semimartingale). Dans une série de trois publications [8,9,10] nous nous sommes intéressés à la construction des intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien fractionnaire et à l'obtention de la formule d'Itô. D'autre part nous avons étudié les approximations trajectorielles de ces intégrales (mais aussi pour des intégrales d'Itô classiques par rapport aux semimartingales, un cas en dehors "du monde gaussien"). Notre approche, basée sur une méthode de régularisation de Russo et Vallois, utilise une analyse gaussienne fine et la régularité Hölder des trajectoires. Les résultats peuvent être utilisés pour étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement brownien fractionnaire[9]. Ces travaux ont débuté en collaboration avec Francesco Russo et Pierre Vallois, puis avec Ivan Nourdin et ce sont poursuivis par une collaboration à quatre.

Les idées utilisées pour l'étude du mouvement brownien fractionnaire ont inspiré une autre partie de mon travail de recherche actuel. Il s'agit de la possibilité de développer des idées du calcul stochastique classique (formule d'Itô, formule de Tanaka, temps local) pour les solutions de certaines équations aux dérivées partielles stochastiques. Dans le **Chapitre 4** nous décrivons ces résultats pour l'équation de la chaleur stochastique linéaire. Des outils de calcul de Malliavin et du calcul stochastique par rapport au mouvement

[7]Ben Arous, G., Ledoux, M. Grandes déviations de Freidlin-Wentzell en norme hölderienne, *Séminaire de Probabilités XXVIII*, Lect. Notes in Math. **1583**, 293-299, Springer-Verlag 1994.

[8]Herrmann, S., Phénomène de Peano et grandes déviations, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332**, 1019-1024, 2001.

[9]Nourdin, I., Schémas d'approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction hölderienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340**, 611-614, 2005.

brownien fractionnaire sont adaptés pour l'étude de cette convolution stochastique en dimension infinie. Cette étude fait l'objet d'une publication [11] en collaboration avec Ivan Nourdin et Samy Tindel. Avec Samy Tindel, nous poursuivons l'étude de l'équation de la chaleur stochastique non-linéaire et nous avons obtenu récemment une formule de type Itô (non contenue dans ce document).

Le **Chapitre 5** est issu d'une collaboration avec Madalina Deaconu et Jean-Rodolphe Roche (et inspiré des travaux de ce dernier[10]). Il s'agit d'une tentative de calcul le plus exact possible de l'espérance du temps de sortie du disque unité du mouvement brownien plan réfléchi sur un petit disque intérieur (d'un autre point de vue, il s'agit de la solution d'un problème aux limites mixte). À notre connaissance, seuls les problèmes de Dirichlet et de Neumann étaient traités. Nous étudions la densité de ce processus et nous utilisons une famille de transformations fractionnaires linéaires du plan complexe. Cette étude est contenue dans la publication [6].

Enfin, le dernier **chapitre** est un travail encore en cours [12], en collaboration avec Ivan Nourdin, et concerne l'estimation (de point de vue statistique) de la volatilité stochastique (le coefficient diffusion d'une équation différentielle stochastique) à partir d'une observation discrétisée de la trajectoire sur un intervalle de temps donné. Nous nous sommes aussi intéressés à la construction d'un test d'adéquation basé sur cette estimation. Le modèle d'une semimartingale est également étudié et l'approche de ce travail est basée sur le calcul stochastique, mais aussi sur certaines idées utilisées pour l'étude du mouvement brownien fractionnaire.

Les six chapitres de ce document sont organisés de la manière suivante : après une courte introduction et motivation de chaque problème nous décrivons les résultats centraux et nous donnons ensuite les principales idées de preuve. Chaque chapitre se termine avec un certain nombre de perspectives et de références. L'ensemble de toutes les références bibliographiques est réunie à la fin du document.

Liste de publications

Articles parus

1. Gradinaru, M., On the derivative with respect to a function with applications to Riemann-Stieltjes integral, *Seminar on Mathematical Analysis, 1989-1990, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca*, **90-7**, 21-28, 1990.

2. Ben Arous, G., Gradinaru, M., Ledoux M., Hölder norms and the support theorem for diffusions, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **30**, 415-436, 1994.

3. Ben Arous, G., Gradinaru, M., Singularities of hypoelliptic Green functions, *Potential Analysis* **8**, 217-258, 1998.

4. Gradinaru, M., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M., The laws of Brownian local time integrals, *Comput. and Appl. Math.* **18**, 259-331, 1999.

5. Gradinaru, M., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M., Abel transform and integrals of Bessel local times, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **35**, 531-572, 1999.

6. Deaconu, M., Gradinaru, M., Roche, J.-R., Sojourn time of some reflected Brownian motion in the unit disk, *Probab. and Math. Statis.* **20**, 19-38, 2000.

7. Gradinaru, M., Herrmann, S. Roynette, B., A singular large deviations phenomenon, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **37**, 555-580, 2001.

[10]Roche, J.R., Algorithmes numériques en optimisation des formes et électromagnétisme, *Habilitation à diriger des recherches Université Henri Poincaré Nancy I*, 1996.

8. Gradinaru, M., Russo, F., Vallois, P., Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index greater or equal than $1/4$, *Ann. Probab.* **31**, 1772-1820, 2003.

9. Gradinaru, M., Nourdin. I., Approximation at first and second order of m-order integrals of certain semimartingales and of the fractional Brownian motion, *Electron. J. Probab.* **8**, Paper 18, 1-26, 2003.

10. Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F., Vallois, P., m-order integrals and generalized Itô's formula ; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 781-806, 2005.

11. Gradinaru, M., Nourdin, I., Tindel, S., Itô's and Tanaka's type formulae for the stochastic heat equation : the linear case, *J. Funct. Anal.*, **228**, 114-143, 2005.

Articles soumis

12. Gradinaru, M., Nourdin. I., Stochastic volatility : approximation and goodness-of-fit test, Prépublication IECN no. 53 bis, 2003 (soumis à *Bernoulli* ; en revision après rapports).
http ://www.iecn.u-nancy.fr/Preprint/publis/preprints-2005.html

Résumés d'articles

13. Ben Arous, G., Gradinaru, M., Normes hölderiennes et support de diffusions, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **316**, 283-286, 1993.

14. Ben Arous, G., Gradinaru, M., Singularités des fonctions de Green hypoelliptiques, *Ann. Math. Blaise Pascal* **3**, 23-32, 1996.

Thèse de Doctorat

15. Gradinaru, M., *Fonctions de Green et support des diffusions hypoelliptiques*, thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, 1995, dont sont tirés les articles [2] et [3] et les résumés [13] et [14]
http ://www.iecn.u-nancy.fr/~gradinar/these.pdf

Table des matières

Chapitre 1

Intégrales par rapport aux temps locaux

1.1 Introduction

L'objet de l'étude est le processus

$$\left\{ \mathrm{L}_t^{(\varphi)}(X) := \int_0^t \varphi(s) d\mathrm{L}_s(X),\ t \geqslant 0 \right\}, \tag{1.1}$$

où :

- X est une diffusion réelle (*e.g.* mouvement brownien B, pont brownien b, processus de Bessel R, pont de Bessel r, processus d'Ornstein-Uhlenbeck etc),
- $\{\mathrm{L}_t(X) : t \geqslant 0\}$ est le temps local de X en 0,
- φ est une fonction borélienne positive localement bornée.

Le but est de décrire le plus explicitement possible les lois des variables aléatoires $\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(X)$, $t \geqslant 0$.

L'intérêt de cette étude est de triple nature :

- retrouver, compléter et étendre des résultats de même type (voir aussi §1.2) ,
- mettre en lumière la relation entre les transformées de Laplace des lois étudiées et des transformées d'Abel (intégration fractionnaire) (voir §1.3-1.5)
- illustrer une approche originale qui repose sur deux représentations probabilistes (de Dirichlet et de Fokker-Planck) d'une équation aux dérivées partielles avec conditions initiales et aux limites (voir §1.4).

Les résultats concernant cette étude ont fait l'objet de deux publications [8] et [9]. Cette dernière contient aussi un glossaire de formules obtenues dans ces deux articles.

1.2 Quelques exemples de résultats

Avant d'énoncer quelques résultats signifi catifs, revenons sur quelques faits connus au moment où l'on a démarré ce travail. Les fonctionnelles de type $\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(X)$ apparaissent d'une manière naturelle :

- $\{\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(B) : t \geqslant 0\}$ est le temps local en 0 du processus $\{\varphi(t)B_t : t \geqslant 0\}$ ou $\{\varphi(g_t)B_t : t \geqslant 0\}$; ici B est le mouvement brownien standard et $g_t := \sup\{s < t : B_s = 0\}$ (voir aussi la formule de balayage [11], p. 260) ;
- la loi de $\int_0^\infty e^{-s} d\mathrm{L}_s(B)$ a été étudiée en [3] en relation avec certains lois d'arcsinus (voir aussi [12]) ;
- $\mathrm{L}_1^{(\mathbf{1})}(B)$ et $\mathrm{L}_1^{(\mathbf{1})}(R)$ sont de loi de Mittag-Leffler (ici et ailleurs $\mathbf{1}$ note la fonction constante 1).

Par souci de concision on va illustrer les résultats seulement pour le processus de Bessel R de dimension $\mathtt{d} \in]0, 2[$ ou d'indice $\mathtt{n} \in]-1, 0[$, ainsi que pour le mouvement brownien standard B, les deux processus issus de 0. Précisons que certains résultats pour le mouvement brownien peuvent être retrouvés à partir des résultats pour le processus de Bessel en prenant $\mathtt{n} = -1/2$.

La plupart des résultats concernent la variable aléatoire $\mathrm{L}_1^{(\varphi)}(R)$ qui existe et est finie si et seulement si $\int_0^1 \varphi(s) s^{-\mathtt{n}-1} ds < \infty$ (voir aussi [10], p. 655 pour le cas du mouvement brownien).

Les résultats obtenus (pour certaines fonctions φ) sont de trois types :

i) Description de la loi de $\mathrm{L}_1^{(\varphi)}$ *à travers sa transformée de Laplace (ou ses moments).*

Pour le processus de Bessel R on montre que :

$$\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\exp\left(-\lambda \int_0^{1-u} \varphi(u+s) d\mathrm{L}_s(R)\right)\right] = \sum_{k\geqslant 0}\left(-\frac{\lambda\Gamma(|\mathtt{n}|)}{2^{\mathtt{n}+1}\Gamma(\mathtt{n}+1)}\right)^k (\mathcal{A}_\varphi^k \mathbf{1})(u),\ u \in [0,1],\ \lambda > 0. \tag{1.2}$$

Ici :

- $\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}$ l'espérance par rapport à la loi $\mathbb{P}_0^{\mathtt{n}}$ du processus de Bessel R d'indice $\mathtt{n}$ issu de 0 ;
- $\varphi : [0,1] \to [0,\infty[$ est une fonction continue telle que $\lim_{t\downarrow 0} t^{|\mathtt{n}|}\varphi(t)$ existe ;
- $(\mathcal{A}_\varphi h)(u) := (\mathtt{J}^{-\mathtt{n}}\, \widetilde{\varphi h})(1-u)$, avec $\mathtt{J}^{-\mathtt{n}}$ l'opérateur d'Abel d'indice $-\mathtt{n}$ (voir §1.3 ci-dessous) et h une fonction borélienne positive (on utilisera la notation $\widetilde{\ell}(u) := \ell(1-u)$ pour $\ell : [0,1] \to [0,\infty[$).

Pour le mouvement brownien on obtient :

$$\mathbb{E}_0\left[\exp\left(-\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{d\mathrm{L}_s(B)}{\sqrt{\frac{u}{1-u}+s}}\right)\right] = \sum_{k\geqslant 0}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^k \mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{1}_{\{P_k \geqslant u\}}}{\sqrt{P_k}}\right],\ u \in]0,1[,\ \lambda > 0, \tag{1.3}$$

où $\mathbb{E}_0$ est l'espérance par rapport à la loi $\mathbb{P}_0$ du mouvement brownien standard issu de 0 et où on a noté $P_0 = 1$ et $P_k = P_{k-1}V_k$, pour $k \geqslant 1$, avec les variables aléatoires V_k des copies indépendantes de loi de arcsinus (ou loi beta de paramètres $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$).

ii) Lois explicites avec randomisation.

Les variables aléatoires suivantes sont de même loi $\mathcal{E}(1)$, exponentielle de paramètre 1 :

$$\text{(a)}\quad \frac{2^{\mathtt{n}+1}}{\Gamma(|\mathtt{n}|)} \int_0^Z (Z-s)^{\mathtt{n}} d\mathrm{L}_s(R), \quad \text{(b)}\quad \frac{2^{\mathtt{n}+1}\Gamma(\mathtt{n}+1)}{\mathcal{B}(a,|\mathtt{n}|)} \int_0^{1-Z_{a,1}} (Z_{a,1}+s)^{\mathtt{n}} d\mathrm{L}_s(R), \tag{1.4}$$

et

$$\text{(a)}\quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{d\mathrm{L}_s(B)}{\sqrt{1-s}}, \quad \text{(b)}\quad \frac{\sqrt{2\pi}}{\mathcal{B}(a,1/2)} \int_0^1 \frac{d\mathrm{L}_s(B)}{\sqrt{\frac{Z_{a,1}}{1-Z_{a,1}}+s}}, \tag{1.5}$$

où $Z_{a,1}$ est une variable aléatoire de loi beta de paramètres $a, 1$, indépendante de B et de R, et Z est une variable aléatoire positive indépendante de R de loi quelconque.

iii) Théorèmes limites.

Il y a convergence en loi vers la loi gaussienne standard, lorsque $\beta \downarrow 0$, des familles de variables aléatoires :

$$\left\{\frac{2^{\mathtt{n}+1}\Gamma(\mathtt{n}+1)}{\sqrt{F(1)-F(|\mathtt{n}|)}}\left(\sqrt{\beta}\int_0^1 s^{\beta+\mathtt{n}} d\mathrm{L}_s(R) - \frac{1}{2^{\mathtt{n}+1}\Gamma(\mathtt{n}+1)\sqrt{\beta}}\right) : \beta > 0\right\} \quad (\text{sous } \mathbb{P}_0^{\mathtt{n}}), \tag{1.6}$$

et

$$\left\{\sqrt{\frac{\pi}{\ln 2}}\left(\sqrt{\beta}\int_0^1 s^{\beta-1/2} d\mathrm{L}_s(B) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}}\right) : \beta > 0\right\} \quad (\text{sous } \mathbb{P}_0) \tag{1.7}$$

où $F := \Gamma'/\Gamma$ est la fonction digamma.

1.3 Lien formel avec la transformée d'Abel

La transformée d'Abel (ou l'opération d'intégration fractionnaire) est donnée par

$$(\mathtt{J}^{\alpha} f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad t \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{1.8}$$

où $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne. $\mathtt{J}^1 f$ est une primitive de f. De plus, si f est dérivable et $f(0) = 0$, alors $\mathtt{J}^{\alpha+1} f' = \mathtt{J}^{\alpha} f$.

Nous allons illustrer une relation formelle entre la loi de $\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)$ pour le processus de Bessel d'indice $\mathtt{n}$ et la transformée d'Abel. On peut écrire, pour toute fonction h borélienne positive

$$\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\int_0^t h(s, R_s) ds\right] = \int_0^{\infty} m(dy) \int_0^t h(s,y) \mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}[d_s \mathrm{L}_s^y(R)] = \int_0^{\infty} m(dy) \int_0^t h(s,y) p_s^{\cdot}(0,y) ds,$$

où $\mathrm{L}_s^y(R)$ est le temps local en y, $m(dy) := 2y^{2\mathtt{n}+1} \mathbb{1}_{\{y>0\}} dy$ est la mesure vitesse associée à R et $p_s^{\cdot}(0,y)$ est la densité du semigroupe $P_s^{\mathtt{n}}(0,dy)$ par rapport à la mesure $m(dy)$. On déduit que $\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}[d_s \mathrm{L}_s^y(R)] = p_s^{\cdot}(0,y) ds$. Si on note $q(s) := p_s^{\cdot}(0,0)$, alors

$$\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)\right] = \int_0^t \varphi(s) q(s) ds.$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\left(\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)\right)^2\right] = \mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\int_0^t d_s \mathrm{L}_s^{(\varphi)}(X) \int_{s_1}^t d_{s'} \mathrm{L}_{s'}^{(\varphi)}(X)\right] = \int_0^t \varphi(s) q(s) ds \int_s^t \varphi(s') q(s'-s) ds',$$

par la propriété de Markov. Ensuite, par le théorème de Fubini on trouve :

$$\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\left(\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)\right)^2\right] = (2!) \int_0^t \varphi(s) Q_s(\varphi q) ds,$$

où $Q_t \psi := (Q\psi)(t) = \int_0^t q(t-s)\psi(s) ds$. De la même façon,

$$\mathbb{E}_0^{\mathtt{n}}\left[\left(\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)\right)^3\right] = (3!) \int_0^t \varphi(s) Q_s(\varphi Q_{\bullet}(\varphi q)) ds$$

et ainsi de suite pour tous les moments. Enfin, comme $q(s) = k_{\mathtt{n}} s^{-\mathtt{n}-1}$ (avec $k_{\mathtt{n}}$ une constante), l'opérateur Q est l'opérateur d'Abel d'indice $-\mathtt{n}$. Cela montre qu'il y a une relation, au moins formelle, entre la loi de $\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)$ et la transformée d'Abel. On précisera cette relation au paragraphe suivant.

1.4 Idées de démonstration d'un résultat central

L'idée principale pour aborder ce problème est de relier deux représentations probabilistes de la solution d'une équation aux dérivées partielles. Le générateur infinitésimal du processus de Bessel R d'indice $\mathtt{n}$ est donné par (pour $x > 0$) :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2\mathtt{n}+1}{2x}\frac{\partial}{\partial x} \tag{1.9}$$

(pour le mouvement brownien il suffit de prendre $\mathtt{n} = -1/2$). On considère le problème suivant

$$\begin{cases} (\partial\omega/\partial t)(t,x) = (\mathcal{L}\omega)(t,x), & t, x > 0 \\ \omega(0,x) = \omega_0(x), & x \geqslant 0 \\ \omega(t,0) = f(t), & t \geqslant 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

où ω_0 et f sont deux fonctions régulières telles que $\omega_0(0) = f(0) = 0$. Si ω_0 est continue, avec une hypothèse de croissance lente à l'infini, et si f est de classe C^1, alors il y a existence et unicité pour ce problème et la solution de (1.10) admet deux représentations probabilistes.

1ère étape : représentation de type Dirichlet de la solution ω : il s'agit de résoudre le problème de Dirichlet temps-espace pour l'opérateur $\mathcal{L} - (\partial/\partial t)$ sur $[0, t] \times [0, \infty[$. Par la formule d'Itô appliquée au processus $\{(t - s, x + R_s) : s \in [0, t]\}$ on trouve :

$$\omega(t, x) = \mathbb{E}_x^{\mathfrak{n}}\left[\omega_0(R_t)\mathbb{1}_{\{t<T_0\}}\right] + \mathbb{E}_x^{\mathfrak{n}}\left[f(t - T_0)\mathbb{1}_{\{t\geqslant T_0\}}\right], \quad t, x \geqslant 0, \tag{1.11}$$

où $T_0 := \inf\{t > 0 : R_t = 0\}$ et $\mathbb{P}_x^{\mathfrak{n}}$ est la loi du processus de Bessel d'indice $\mathfrak{n}$ issu de x.

2ème étape : représentation de type Fokker-Planck de la solution ω : elle est implicite, car si on pose

$$\varphi(t) := (1/f(t)) \lim_{x\downarrow 0} x^{2\mathfrak{n}+1}(\partial\omega/\partial x)(t, x), \quad t \geqslant 0, \tag{1.12}$$

alors

$$y^{2\mathfrak{n}+1}\omega(t, y) = \int_0^\infty \omega_0(x)p_t(x, y)\,\mathbb{E}_x^{\mathfrak{n}}\left[\exp\left(-\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R)\right) \mid R_t = y\right] x^{2\mathfrak{n}+1}dx, \quad t, y \geqslant 0. \tag{1.13}$$

Ici $p_t(x, y)$ est la densité du semigroupe de Bessel par rapport à la mesure de Lebesgue dy. Cette densité peut s'obtenir ([9], p. 535) à partir de la densité du semigroupe carré de Bessel (dans [2], p. 379, on reprend l'expression de cette dernière pour un autre problème).

Pour obtenir (1.13) on considère d'abord la fonction $\overline{\omega}$ définie par

$$\langle h, \overline{\omega}\rangle_\nu = \mathbb{E}_{\omega_0\nu}^{\mathfrak{n}}\left[h(R_t)M_t\right] \quad \text{avec} \quad M_t := \exp(-\mathrm{L}_t^{(\varphi)}(R))$$

L'idée est de vérifier que la fonction $\overline{\omega}$ satisfait (1.10), d'où, par unicité de la solution on aura $\overline{\omega} = \omega$ et donc on pourra utiliser (1.11) dans la relation de définition de $\overline{\omega}$ ci-dessus. Dans cette relation de définition on a posé $\nu(dx) := x^{2\mathfrak{n}+1}dx$ la mesure invariante par rapport à laquelle le semigroupe de Bessel est symétrique, h une fonction borélienne quelconque et on a noté $\mathbb{E}_{\omega_0\nu}^{\mathfrak{n}}$ l'espérance par rapport à $\mathbb{P}_{\omega_0\nu}^{\mathfrak{n}}(\cdot) = \int_0^\infty \omega_0(x)\mathbb{P}_x^{\mathfrak{n}}(\cdot)\nu(dx)$.

Pour vérifier que $\overline{\omega}$ satisfait (1.10) on utilise essentiellement la formule d'Itô appliquée au processus $g(t, R_t)M_t$, où $g(t, x) = u(t)x^{2|\mathfrak{n}|} + v(t)$ est à support compact dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, u et v étant régulières ([9], p. 541-543). Dans ces calculs la martingale $R_t^{2|\mathfrak{n}|} - 2|\mathfrak{n}|\mathrm{L}_t(R)$ associée au processus de Bessel joue un rôle central. Cette martingale apparaît d'une manière naturelle lorsqu'on définit le temps local $\mathrm{L}_{t,x}(R)$ du processus de Bessel au niveau x comme une densité d'occupation ([9], p. 538, voir aussi [6], p. 8-9 et [11], p. 321) : pour toute fonction h borélienne positive $\int_0^t h(R_s)ds = 2\int_0^\infty h(x)\mathrm{L}_{t,x}(R)x^{2\mathfrak{n}+1}dx$ (on écrit $\mathrm{L}_t(R)$ au lieu de $\mathrm{L}_{t,0}(R)$ pour simplifier).

3ème étape : l'opérateur d'Abel apparaît. Cette étape est plutôt technique ([9], p. 544-545). L'idée est d'utiliser les expressions (1.11) et (1.13) pour calculer explicitement φ avec (1.12). La décomposition en deux termes de la représentation de Dirichlet force une décomposition en deux termes de (1.12), mais aussi de (1.13). Chaque terme est calculé séparément en employant des équivalents pour les fonctions de Bessel. Quand on refait la somme on trouve :

$$(\alpha_f + \varphi f)(t) = \frac{2^{\mathfrak{n}+1}}{\Gamma(|\mathfrak{n}|)}t^{\mathfrak{n}-1}\int_0^\infty \omega_0(y)ye^{-y^2/2t}dy, \quad t > 0, \tag{1.14}$$

où

$$\alpha_f(t) := c_{\mathfrak{n}}(\mathrm{J}^{\mathfrak{n}+1}f')(t) \tag{1.15}$$

est essentiellement la transformée d'Abel de f (ici et ailleurs $c_{\mathfrak{n}} := 2^{\mathfrak{n}+1}\Gamma(\mathfrak{n} + 1)/\Gamma(|\mathfrak{n}|)$) ([9], p. 546).

4ème étape : obtenir un résultat clé. Si $\phi(x,u)$ la densité par rapport à la mesure de Lebesgue du de la loi sous $\mathbb{P}_x^{\mathrm{n}}$ du temps d'arrêt T_0 utilisé dans la représentation de Dirichlet (1.11), alors le deuxième terme de cette relation s'écrit, pour $t = 1$:

$$\omega_2(1,x) := \mathbb{E}_x^{\mathrm{n}}\left[f(1-T_0)\mathbb{1}_{\{T_0\leqslant 1\}}\right] = \int_0^1 f(1-u)\phi(x,u)du, \tag{1.16}$$

et, par ailleurs, en utilisant (1.13) et la propriété de Markov forte,

$$\begin{aligned} y^{2\mathrm{n}+1}\omega_2(1,y) = \int_0^\infty \omega_0(x)p_{1-u}(0,y)\phi(x,u)x^{2\mathrm{n}+1}dx \\ \times \int_0^1 du\, \mathbb{E}_0^{\mathrm{n}}\left[\exp\left(-\int_0^{1-u}\varphi(u+s)d\mathrm{L}_s(R)\right) \mid R_{1-u} = y\right]. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Mais $\phi(x,u) = (2^{\mathrm{n}}/\Gamma(|\mathrm{n}|))u^{\mathrm{n}-1}x^{-2\mathrm{n}}e^{-x^2/2u}\mathbb{1}_{\{x>0,u>0\}}$ ([8], p. 311, [9], p. 537), d'où, en mettant ensemble (1.16), (1.17) et (1.14) on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{2^{\mathrm{n}+1}}{\Gamma(|\mathrm{n}|)}\, y\int_0^1 f(1-u)u^{\mathrm{n}-1}e^{-y^2/2u}du = \int_0^1 du\,(\alpha_f+\varphi f)(u)p_{1-u}(0,y) \\ \times \mathbb{E}_0^{\mathrm{n}}\left[\exp\left(-\int_0^{1-u}\varphi(u+s)d\mathrm{L}_s(R)\right) \mid R_{1-u} = y\right]. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Cette égalité ne contient plus la fonction ω_0, et les seuls paramètres sont les fonctions continues positives f et φ. Une autre forme de ce résultat est :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\alpha_f+\varphi f)(1-u)\,\mathbb{E}_0^{\mathrm{n}}\left[h(R_u)\exp\left(-\int_0^u \varphi(1-u+s)d\mathrm{L}_s(R)\right)\right] du \\ = \frac{2^{\mathrm{n}+1}}{\Gamma(|\mathrm{n}|)}\int_0^\infty yh(y)dy\int_0^1 f(1-u)u^{\mathrm{n}-1}e^{-y^2/2u}du, \end{aligned} \tag{1.19}$$

où h est une fonction borélienne positive quelconque ([9], p. 550-551). (1.18) et (1.19) sont des résultats clés et au paragraphe suivant on va montrer comment les utiliser pour obtenir les formules données au §1.2.

1.5 Autres résultats et remarques

Nous allons montrer comment obtenir (1.2). On commence par remplacer φ par $\lambda\varphi$ en (1.18) et ensuite on intègre par rapport à y. On trouve :

$$\frac{\Gamma(|\mathrm{n}|)}{2^{\mathrm{n}+1}}\int_0^1(\alpha_f+\varphi f)(u)\Lambda_\varphi(u)du = \int_0^1(1-u)^{\mathrm{n}}f(u)du, \tag{1.20}$$

où $\Lambda_\varphi(u) = \mathbb{E}_0^{\mathrm{n}}[\exp(-\lambda\int_0^{1-u}\varphi(u+s)d\mathrm{L}_s(R))]$ (on rappelle que $\alpha_f(t) = c_{\mathrm{n}}(\mathrm{J}^{\mathrm{n}+1}f')(t))$. Par ailleurs, par des manipulations simples avec la transformée d'Abel, on peut montrer que, pour une fonction régulière ℓ :

$$\frac{\Gamma(|\mathrm{n}|)}{2^{\mathrm{n}+1}}\int_0^1 \alpha_{\delta_z}(u)\ell(u)du = (1-z)^{\mathrm{n}}\ell(1)\Gamma(\mathrm{n}+1)(\mathrm{J}^{\mathrm{n}+1}\tilde{\ell}')(1-z), \tag{1.21}$$

où, comme avant $\widetilde{\ell'}(z) = -\ell'(1-z)$. Enfi n, si on prend $f = \delta_z$ en (1.20) et on utilise (1.21) avec $\ell(u) = \Lambda_\varphi(u)$, après quelques calculs ([9], p. 552-553) on trouve l'équation intégrale $(\mathcal{I}+(\lambda/c_{\mathrm{n}})\mathcal{A}_\varphi)\Lambda_\varphi = \mathbf{1}$, d'où on déduit (1.2).

Si on prend dans (1.2), $\varphi(t) = (1-t)^\beta$, $\beta \geqslant \mathfrak{n}$, on trouve une égalité qui permet de déduire plusieurs résultats :

$$\mathbb{E}_0^{\mathfrak{n}}\left[\exp\left(-\lambda\int_0^{1-u}(1-u-s)^\beta d\mathrm{L}_s(R)\right)\right] = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\left(-\frac{\lambda}{c_{\mathfrak{n}}}\right)^k (1-u)^{k(\beta-\mathfrak{n})} \times \prod_{j=1}^{k}\frac{\Gamma((\beta+1)+(j-1)(\beta-\mathfrak{n}))}{\Gamma(j(\beta-\mathfrak{n})+1)}, \quad u\in[0,1]. \quad (1.22)$$

On fait dans cette égalité $\beta = 0$ et $u = 0$, d'où

$$\mathbb{E}_0^{\mathfrak{n}}\left[\exp\left(-\lambda c_{\mathfrak{n}}\mathrm{L}_1(R)\right)\right] = 1 + \sum_{k\geqslant 1}\frac{(-\lambda)^k}{\prod_{j=1}^k\Gamma(j|\mathfrak{n}|+1)}. \quad (1.23)$$

Cette dernière égalité montre que $c_{\mathfrak{n}}\mathrm{L}_1(R)$ est de loi de Mittag-Leffler de paramètre $|\mathfrak{n}|$ (voir [5], p. 447). Ce résultat est cité dans [1], p. 25.

On prend $\beta = \mathfrak{n}$ dans (1.22). On obtient que, pour tout $u\in[0,1[$, $(2^{\mathfrak{n}+1}/\Gamma(|\mathfrak{n}|))\int_0^u(u-s)^n d\mathrm{L}_s(R)$ est de loi $\mathcal{E}(1)$. Ce résultat est cité dans [7], p. 468, où l'on souligne la méthode analytique de cette démonstration. Une réciproque de cette affirmation est la suivante : si on suppose que pour tout $u\in[0,1[$ la variable aléatoire $\int_0^{1-u}\varphi(u+s)d\mathrm{L}_s(R)$ est de loi $\mathcal{E}(1)$, alors $\varphi(t) = (2^{\mathfrak{n}+1}/\Gamma(|\mathfrak{n}|))(1-t)^{\mathfrak{n}}$. Pour démontrer ce fait on vérifi e que $(\mathfrak{I}^{-\mathfrak{n}}\widetilde{\varphi})(u) = c_{\mathfrak{n}}$ et ensuite on utilise l'injectivité de la transformée d'Abel ([9], p. 557).

Passons à la démonstration de (1.4). Pour obtenir la loi (1.4.a) il suffit de remarquer que lorsque $\beta = \mathfrak{n}$, le membre de droite de (1.22) ne dépend pas de u. (1.4.b) est un cas particulier du résultat plus général suivant. On choisit f telle que $\int_0^1\alpha_f(u)du = 1$ et soit Z est une variable aléatoire indépendante de R, de densité $\alpha_f(1-u)\mathbb{1}_{[0,1]}(u)$. Si on pose $\varphi = \alpha_f/f$, alors

$$\int_0^Z\varphi(1-Z+s)d\mathrm{L}_s(R)\ \text{ est de loi } \mathcal{E}(1). \quad (1.24)$$

En effet, à partir de (1.19) avec $h\equiv 1$ et $\lambda\varphi$ au lieu de φ, on trouve :

$$(1+\lambda)\int_0^1\alpha_f(1-u)\,\mathbb{E}_0^{\mathfrak{n}}\left[\exp\left(-\lambda\int_0^u\varphi(1-u+s)d\mathrm{L}_s(R)\right)\right]du = 1,$$

ce qui est (1.24). La loi (1.4.b) n'est alors qu'un cas particulier avec $\varphi(t) = \frac{c_{\mathfrak{n}}\Gamma(a-n)}{\Gamma(a)}t^{\mathfrak{n}}$ et $Z = Z_{a,1}$ de loi beta.

Revenons sur la formule (1.3) et prenons dans (1.19) $\mathfrak{n} = -1/2$, $f(t) = t^a$ $(a > -1/2)$ et $\lambda\varphi$ au lieu de φ. Alors :

$$\int_0^1(1-u)^{a-1/2}\mathbb{E}_0\left[h(|B_u|)\exp\left(-\lambda\int_0^u\frac{d\mathrm{L}_s(B)}{\sqrt{1-u+s}}\right)\right]du = \frac{2}{\beta_a+\lambda}\int_0^\infty yh(y)dy\int_0^1(1-u)^a u^{-3/2}e^{-y^2/2u}du, \quad (1.25)$$

où $\beta_a = 2a\mathcal{B}(a,1/2)$. Par changement d'échelle, on peut remplacer $h(|B_u|)$ par $h(\sqrt{u}\,|B_1|)$ dans l'espérance et lorsqu'on conditionne par $\{|B_1| = y\}$ on peut éliminer la fonction h ([8], p. 274-275). Ensuite, on pose $u = e^{-v}$ et on inverse la transformée de Laplace par rapport au paramètre a. Lors de ce calcul ([8], p. 275-278) on utilise le fait que $2/\beta_a$ est la transformée de Laplace (en a) de toute variable $\ln(1/V)$, avec V de loi de arcsinus. On en déduit que :

$$\frac{2}{\beta_a+\lambda} = \sum_{k\geqslant 0}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^k\left(\frac{2}{\beta_a}\right)^{k+1} = \sum_{k\geqslant 0}\left(-\frac{\lambda}{2}\right)^k g^{\star(k+1)},$$

où $g^{\star(k)}$ est la densité de $\ln(1/(V_1 \dots V_k))$, avec les variables aléatoires V_ℓ indépendantes de même loi de arcsinus. Enfin, pour déduire (1.3), on enlève le conditionnement en intégrant contre la densité de $|B_1|$.

La loi (1.5.a) est le cas particulier de la loi (1.4.a) (il suffit de prendre $\mathfrak{n} = -1/2$ et $Z = 1$). Vérifions la loi (1.5.b). Par calcul direct on voit que

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{1}_{\{P_k \geqslant Z_{a,1}\}}}{\sqrt{P_k}}\right] = \mathbb{E}\left[P_k^{a-1/2}\right] = \left(\mathbb{E}[V^{a-1/2}]\right)^k = \left(\frac{\mathcal{B}(a,1/2)}{\pi}\right)^k .$$

On en déduit que le membre de droite de (1.3) vaut $(1 + \lambda\mathcal{B}(a,1/2)/(2\pi))^{-1}$, d'où la loi recherchée.

Remarquons que lorsqu'on remplace le mouvement brownien B par le pont brownien b et la variable de loi beta $Z_{a,1}$ par une variable de loi beta $Z_{a,1/2}$ la loi (1.5.b) reste la même. En particulier, on peut prendre une variable $Z_{1/2,1/2}$ de loi de arcsinus indépendante de b, par exemple $g = \sup\{s < 1 : B_s = 0\}$. Ainsi, la variable aléatoire

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{d\mathrm{L}_s(b)}{\sqrt{\frac{1-g}{g} + s}} \tag{1.26}$$

est de loi $\mathcal{E}(1)$. La loi (1.5.a) s'obtient alors comme une conséquence du fait que les variables aléatoires $\int_0^1 \varphi(s) d\mathrm{L}_s(B)$ et $\sqrt{g}\int_0^1 \varphi(gs) d\mathrm{L}_s(b)$ ont la même loi, pour toute fonction borélienne positive φ, lui même vrai parce que les processus $\{\mathrm{L}_t(b) : t \in [0,1]\}$ et $\{\mathrm{L}_{gt}(B)/\sqrt{g} : t \in [0,1]\}$ ont la même loi.

Enfin, donnons les idées de démonstration des théorèmes limites (1.6) et (1.7). D'abord, soit dans (1.2) $\varphi(t) = t^{\beta+\mathfrak{n}}$ $(\beta > 0)$, $u = 0$ et soit $\lambda\sqrt{\beta}$ à la place de λ :

$$\mathbb{E}_0^{\mathfrak{n}}\left[\exp\left(-\lambda\sqrt{\beta}\int_0^1 s^{\beta+\mathfrak{n}} d\mathrm{L}_s(R)\right)\right] = 1 + \sum_{k \geqslant 1}\left(-\frac{\lambda}{2^{\mathfrak{n}+1}\Gamma(\mathfrak{n}+1)}\right)^k \frac{\beta^{(k/2)-1}}{k}\prod_{j=1}^{k-1}\mathcal{B}(j\beta, |\mathfrak{n}|),$$

où, au membre de droite, le premier terme de la série est $\frac{-\lambda}{2^{\mathfrak{n}+1}\Gamma(\mathfrak{n}+1)\sqrt{\beta}}$. Notons $d_{\mathfrak{n}} := 2^{\mathfrak{n}+1}\Gamma(\mathfrak{n}+1)$. On en déduit (voir [8], p. 295 et [9], p. 560) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0^{\mathfrak{n}}&\left[\exp -\lambda\left(\sqrt{\beta}\int_0^1 s^{\beta+\mathfrak{n}} d\mathrm{L}_s(R) - \frac{1}{d_{\mathfrak{n}}\sqrt{\beta}}\right)\right] \\ &= \left[1 + \sum_{k \geqslant 1}\left(-\frac{\lambda}{d_{\mathfrak{n}}}\right)^k \frac{\beta^{(k/2)-1}}{k}\prod_{j=1}^{k-1}\mathcal{B}(j\beta, |\mathfrak{n}|)\right]\left[1 + \sum_{k \geqslant 1}\left(\frac{\lambda}{d_{\mathfrak{n}}}\right)^k \frac{1}{(k!)\beta^{k/2}}\right],\end{aligned} \tag{1.27}$$

Le terme général $t_k(\beta)$ du produit des séries peut s'écrire comme :

$$t_k(\beta) = \left(\frac{\lambda}{d_{\mathfrak{n}}}\right)^k \frac{1}{\beta^{k/2}}\sum_{j=1}^{k}\frac{(-1)^j}{j!(k-j)!}\prod_{i=1}^{j-1} i\beta\,\mathcal{B}(i\beta, |\mathfrak{n}|),\ k \geqslant 1. \tag{1.28}$$

Il est connu que $x\mathcal{B}(x, |\mathfrak{n}|) = 1 + \delta_{\mathfrak{n}} x + o(x)$, lorsque $x \downarrow 0$, avec $\delta_{\mathfrak{n}} := F(1) - F(|\mathfrak{n}|)$ et $F = \Gamma'/\Gamma$ la fonction digamma. Par un raisonnement sur les coefficients des polynômes en β dans (1.28) on déduit ([8], p. 296) que $\lim_{\beta\downarrow 0} t_{2\ell}(\beta) = \left(\lambda^2\delta_{\mathfrak{n}}/d_{\mathfrak{n}}^2\right)^\ell/(\ell!)$. On passe à la limite dans (1.27) et on trouve :

$$\lim_{\beta\downarrow 0}\mathbb{E}_0^{\mathfrak{n}}\left[\exp -\lambda\left(\sqrt{\beta}\int_0^1 s^{\beta+\mathfrak{n}} d\mathrm{L}_s(R) - \frac{1}{d_{\mathfrak{n}}\sqrt{\beta}}\right)\right] = \exp\left(\frac{\lambda^2\delta_{\mathfrak{n}}}{d_{\mathfrak{n}}^2}\right). \tag{1.29}$$

Ce résultat donne la convergence (1.6). (1.7) s'obtient pour $\mathfrak{n} = -1/2$ (car $F(1) - F(1/2) = \ln 4$).

1.6 Perspectives

Donnons ici quelques perspectives basées sur quelques questions, ayant des énoncés simples, issues de ces calculs :

- Pour quelles fonctions φ et ψ as-t-on l'indépendance des variables aléatoires $\int_0^{1-u}\varphi(u+s)d\mathrm{L}_s(R)$ et $\int_0^{1-u}\psi(u+s)d\mathrm{L}_s(R)$ $(u\in[0,1])$? Une idée serait de pouvoir éventuellement exprimer le produit des transformées de Laplace de ces variables à l'aide de (1.2).
- Un problème de Skorokhod : soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}_+$. Peut-on trouver une fonction φ telle que $\int_0^1\varphi(s)d\mathrm{L}_s(R)$ ait pour loi μ ?
- Soit le problème suivant :

$$\begin{cases}(\partial\omega/\partial t)(t,x)=(\mathcal{L}\omega)(t,x)-(\mathcal{L}u/u)(t,x)-((\partial u/\partial t)/u)(t,x), & t,x>0\\ \omega(0,x)=u(0,x), & x\geqslant 0\\ \omega(t,0)=u(t,0), & t\geqslant 0,\end{cases}$$

  où u est une fonction donnée. Il est clair que $\omega=u$ est une solution de ce problème. On en déduit comme à la §1.4 ci-dessus :

$$\int_0^\infty h(x)u(t,x)dx=\int_0^\infty u(0,x)dx \times\mathbb{E}_x^{\mathrm{n}}\left[h(R_t)\exp\left(-\int_0^t\frac{(\mathcal{L}u)-(\partial u/\partial t)}{u}(s,R_s)-\int_0^t\chi(s)d\mathrm{L}_s(R)\right)\right],$$

  où $\chi(t):=(1/h(t,0))\lim_{x\downarrow 0}x^{2\mathrm{n}+1}(\partial u/\partial x)(t,0)$. Peut-on trouver des “bonnes” fonctions u pour lesquelles on peut décrire les lois des couples $(\int_0^t v(s)dR_s,\int_0^t\chi(s)d\mathrm{L}_s(R))$?
- Soit b le pont brownien et notons par h_β la densité de la variable aléatoire $\int_0^1 s^\beta d\mathrm{L}_s(b)$. Est-il possible de trouver h_β ? Une idée serait de poser $g_\beta(y)=y^{\beta-1/2}h_\beta(y^{\beta+1/2})$, de voir que g_β satisfait

$$g_\beta(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)y^\beta\int_0^\infty\frac{g_\beta(y+s)}{\sqrt{s}}ds \tag{1.30}$$

  et de trouver, si possible, la solution de cette équation intégrale.

L'article [9] (qui généralise et complète [8]) est cité par plusieurs auteurs (on a déjà souligné [1], [2], [6] et [7]) et apparaît aussi dans [4], p.103.

Références

[1] Barndorff-Nielsen, O.E., Thorbjornsen, S. Regularising mappings of Lévy measures. *Preprint no. 20, University of Southern Denmark*, 2004. http ://bib.mathematics.dk/preprint.php ?id=DMF-2004-07-001

[2] Bass, R.F., Perkins, E.A. Degenerate stochastic differential equations with Hölder continuous coefficients and super-Markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**, 373-405, 2002.

[3] Baxter, M., Williams, D. Symmetry characterizations of certain distributions 1 and 2. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **111**, 387-399 and **112**, 599-611, 1992.

[4] Bertoin, J., Yor, M. On subordinators, self-similar Markov processes and some factorizations of the exponential variable. *Elect. Comm. in Probab.* **6**, 95-106, 2001.

[5] Darling, D.A., Kac, M. On occupation times for Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **84**, 444-458, 1957.

[6] Donati-Martin, C., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M. On constants related to the choice of the local time at 0, and the corresponding Itô measure for Bessel processes with dimension $d = 2(1-\alpha)$, $0 < \alpha < 1$. *Prépublication no. 26, Institut Élie Cartan*, 2005 http ://www.iecn.u-nancy.fr/Preprint/publis/preprints-2005.html

[7] Gnedin, A., Pitman, J. Regenerative composition structures. *Ann. Probab.* **33**, 445-479, 2005.

[8] Gradinaru, M., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M. The laws of Brownian local time integrals. *Comput. Appl. Math.* **18**, 259-331, 1999.

[9] Gradinaru, M., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M. Abel transform and integrals of Bessel local times. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **35**, 531-572, 1999.

[10] Rajeev, B., Yor, M. Local times and almost sure convergence of semimartingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **31**, 653-657, 1995.

[11] Revuz, D., Yor, M. *Continuous martingales and Brownian motion.* 3rd edition. Springer Verlag 2005.

[12] Sato, S., Yor, M. Computations of moments for discounted Brownian additive functionals. *J. Math. Kyoto* **38**, 475-486, 1998.

Chapitre 2

Un principe singulier de grandes déviations

2.1 Introduction

Dans ce chapitre on étudie la diffusion $\{X_t^\varepsilon : t \geqslant 0\}$ issue de x_0 et obtenue par une petite perturbation brownienne $\{\varepsilon B_t : t \geqslant 0\}$ d'une trajectoire du système dynamique $x'(t) = \mathsf{b}(x(t))$. L'hypothèse centrale est que ce système dynamique est soumis au phénomène de Peano, à savoir, on suppose que b est une fonction réelle continue, mais pas lipschitzienne ; il n'y a donc pas nécessairement d'unicité de la solution de ce système dynamique (voir §2.2).

Le but est de décrire, le plus précisément possible, le comportement de la loi $\mathbb{P}^\varepsilon$ de cette diffusion, quand $\varepsilon \to 0$. Le pas essentiel dans cette étude est la description du comportement de la densité de probabilité $p^\varepsilon(t, \cdot)$ de la variable X_t^ε. L'intérêt est l'illustration de la décroissance exponentielle de $p^\varepsilon(t, x)$ avec des vitesses différentes suivant la position du couple (t, x) dans le plan (voir §2.3).

De plus, la méthode de démonstration est originale car elle combine des arguments probabilistes (de type grandes déviations et calcul stochastique) avec des idées analytiques (la théorie des semigroupes et les solutions de viscosité pour des équations de Hamilton-Jacobi, voir §2.4).

Les résultats concernant l'étude de la densité $p^\varepsilon(t, \cdot)$ ont fait l'objet de la publication [4], qui fait aussi partie de la thèse [5].

2.2 Le phénomène de Peano

Supposons que le processus réel $\{X_t^\varepsilon : t \geqslant 0\}$ est solution sur $[0, T]$ de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX_t^\varepsilon = \varepsilon dB_t + \mathsf{b}(X_t^\varepsilon)dt, & t \in]0, T], \\ X_0^\varepsilon = x_0 \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

où b est une fonction réelle continue. Si on note la loi de la diffusion X^ε par $\mathbb{P}^\varepsilon$, alors la famille $\{\mathbb{P}^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ est étroitement relativement compacte et toute valeur d'adhérence a son support contenu dans l'ensemble des trajectoires du système dynamique

$$\begin{cases} x'(t) = \mathsf{b}(x(t)), & t \in]0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Si b est une fonction réelle lipschitzienne, alors la solution X^ε converge, uniformément sur $[0, T]$, vers l'unique solution du système dynamique. La théorie de Freidlin-Wentzell montre que la loi $\mathbb{P}^\varepsilon$ suit un principe de grandes déviations de vitesse ε^2. Autrement dit, $\mathbb{P}^\varepsilon$ décroît exponentiellement vite vers la masse de Dirac en l'unique solution de (2.2).

Lorsque la fonction b n'est pas lipschitzienne, mais vérifie la condition suivante :

$$\mathsf{b} \textit{ est continue, impaire, croissante, à dérivée continue et } \frac{1}{\mathsf{b}} \textit{ est intégrable au voisinage de 0,} \tag{2.3}$$

alors le système dynamique (2.2) admet une infinité de solutions non constantes (le phénomène de Peano). Sous l'hypothèse (2.3), dans [1] on a montré qu'il existe une unique valeur d'adhérence $\{\mathbb{P}^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ dont le support est l'ensemble des deux trajectoires extrémales de (2.2) (la trajectoire extrémale supérieure, respectivement inférieure est la solution qui quitte en premier l'intervalle $]-\infty, \delta]$, respectivement $[-\delta, \infty[$, $\delta > 0$). Autrement dit, $\mathbb{P}^\varepsilon$ tend vers une combinaison affine des deux masses de Dirac en les extrémales.

Au moment où l'on a démarré ce travail il n'y avait aucune information concernant la vitesse de convergence de $\mathbb{P}^\varepsilon$ pour ce cas, ni de principe de grandes déviations. Une idée assez naturelle est de décrire d'abord le comportement de la densité $p^\varepsilon(t, x)$.

2.3 Les résultats

On considère le cas particulier suivant :

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathsf{b} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathsf{b}(x) = |x|^\gamma \operatorname{sgn}(x), \quad 0 < \gamma < 1. \tag{2.4}$$

On peut montrer qu'il y a existence et unicité de la solution forte de (2.1) et qu'il y a une infinité de solutions de (2.2), $\{\pm c_\gamma (t-\lambda)^{1/(1-\gamma)} : \lambda \geqslant 0\}$, où c_γ est une constante. Les deux solutions extrémales de (2.2) sont :

$$\rho_{1,2}(t) := \pm\{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)}. \tag{2.5}$$

D'après [1], $\mathbb{P}^\varepsilon$ converge étroitement vers $(1/2)(\delta_{\rho_1} + \delta_{\rho_2})$. Intuitivement, la trajectoire limite "préfère" les trajectoires qui quittent zéro le plus rapidement possible.

Dans ce cas particulier on peut expliciter la densité $p^\varepsilon(t, x)$, ainsi que les vitesses des convergence de cette densité, lorsque $\varepsilon \to 0$ et (t, x) ne se trouve pas sur une des deux extrémales. Voici les résultats obtenus :
i) Le point (t, x) *est situé en dehors des extrémales* $|x| > \{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)}$ *et* $0 < \gamma < 1$.

Il existe une fonction strictement positive $k_t(\cdot)$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t, x) = -k_t(|x|). \tag{2.6}$$

Autrement dit, la décroissance est exponentielle avec vitesse ε^2 comme dans la théorie classique de Freidlin-Wentzell. D'une façon intuitive, si x est "grand", alors x n'est pas "visité" par les trajectoires déterministes donc il est raisonnable de retrouver l'asymptotique classique des grandes déviations.
ii) Valeur particulière $\gamma = \frac{1}{2}$.

$$\textit{Si } |x| > \frac{t^2}{4},\ \textit{alors } \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t, x) = -k_t(|x|) = -\left(\frac{|x|^2}{2t} - \frac{2|x|^{3/2}}{3} + \frac{|x|t}{4} - \frac{t^3}{96} \right) \tag{2.7}$$

et

$$\textit{si } |x| < \frac{t^2}{4},\ \textit{alors } \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2/3} \ln p^\varepsilon(t, x) \leqslant a_1'\left(\frac{t}{2} - \sqrt{|x|}\right), \tag{2.8}$$

où $a_1' = -1,01879297\ldots$ est le plus grand zéro négatif de la dérivée de la fonction d'Airy Ai.
iii) Le point (t, x) *est situé entre les deux extrémales* $|x| < \{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)}$ *et* $0 < \gamma < 1$.

Dans toute la suite de ce chapitre on notera

$$s(\varepsilon) := \varepsilon^{2(1-\gamma)/(1+\gamma)}. \tag{2.9}$$

Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln p^\varepsilon(t,x) = -\lambda_1\left(t - \frac{|x|^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right), \tag{2.10}$$

où λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur de Schrödinger :

$$\mathcal{L} := -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}V(x), \quad \text{où} \quad V : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+,\ V(x) := \frac{\gamma}{|x|^{1-\gamma}} + |x|^{2\gamma}. \tag{2.11}$$

Heuristiquement, une unique trajectoire déterministe passe par un x “petit” après être restée en 0 un certain temps ; la diffusion aura alors tendance à rester au voisinage de 0 un certain temps et évolue ensuite en restant proche de cette trajectoire déterministe. Or, la probabilité de rester un certain temps au voisinage de 0 s'exprime à l'aide d'une valeur propre de l'opérateur $\mathcal{L}$.

Enfin, notons que dans le cas $\gamma = 0$ les calculs sont encore plus explicites. On peut trouver la densité et prouver sa convergence. De plus on montre que la diffusion converge vers les solutions (généralisées) extrémales de (2.2) (qui sont dans ce cas $\pm t$) :

$$\forall (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^*, \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln p^\varepsilon(t,x) = -\frac{(|x|-t)^2}{2t} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^2\ln\mathbb{P}(||X_t^\varepsilon| - t| \geqslant \delta) = -\frac{\delta^2}{2t}. \tag{2.12}$$

2.4 Idées de démonstration

Nous allons donner ici les idées principales de démonstration des résultats (2.6)-(2.10) concernant le comportement de la densité $p^\varepsilon(t,\cdot)$ de la diffusion (2.1) (avec (2.4)).

Une application du théorème de Girsanov ainsi que de la formule d'Itô-Tanaka permet de déduire que, pour toute fonction h borélienne positive :

$$\mathbb{E}[h(X_t^\varepsilon)] = \mathbb{E}\left[h(\varepsilon B_t)\exp\left(\frac{|B_t|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^{1-\gamma}} - \frac{\gamma}{2\varepsilon^{1-\gamma}}\int_0^t |B_s|^{\gamma-1}ds - \frac{1}{2\varepsilon^{2(1-\gamma)}}\int_0^t |B_s|^{2\gamma}ds\right)\right]. \tag{2.13}$$

Cette formule est le point de départ de la preuve.

La 1ère étape est de donner plusieurs représentations de la densité $p^\varepsilon(t,x)$. On a :

$$p^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right) \times\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\int_0^1 |xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s|^{\gamma-1}ds - \frac{t}{2\varepsilon^2}\int_0^1 |xs+\varepsilon\sqrt{t}b_s|^{2\gamma}ds\right)\right], \tag{2.14}$$

où $\{b_t : t\in[0,1]\}$ est le pont brownien standard. Pour l'obtenir on fait un changement d'échelle en (2.13) et on utilise la décomposition du mouvement brownien $B_t = b_t + \mathfrak{g}\,t$, avec $\mathfrak{g}$ une variable aléatoire gaussienne standard, indépendante du pont brownien b.

Une deuxième expression est obtenue en conditionnant par rapport à $\{B_t = x\}$ et en renversant le temps (voir [4], p. 561) :

$$p^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right)\mathbb{E}_{\frac{x}{\varepsilon\, s(\varepsilon)^{1/2}}}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^{t/s(\varepsilon)} V(B_s)ds\right)\middle| B_{\frac{t}{s(\varepsilon)}} = 0\right]. \tag{2.15}$$

Ici le potentiel V est donné par (2.11) et a un point singulier. L'idée suivante remonte à Kac [9], mais pour des potentiels continus. On introduit le semi-groupe d'opérateurs, contractant et à trace, qui préserve la positivité

$$(T_t h)(x) := \mathbb{E}_x\left[h(B_t)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds\right)\right].$$

Il est connu que sa densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) admet un développement en série en termes des valeurs propres λ_j et des fonctions propres ψ_j de l'opérateur de Schrödinger (2.11). Enfin, on en déduit le développement en série de la densité :

$$p^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}} \exp\left(\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2}\right) \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda_j t}{s(\varepsilon)}} \psi_j(0)\psi_j\left(\frac{|x|}{\varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}}\right). \tag{2.16}$$

On en déduit un résultat plus faible que (2.10) : pour tout $t > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon) \ln p^\varepsilon(t, \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2}) = -\lambda_1 t$.

À partir de la première représentation (2.14) de la densité on peut *étudier le comportement de la quantité* $\varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t,x)$ *: c'est la 2ème étape* de la preuve. Soient les fonctionnelles du pont brownien b suivantes :

$$F(\varepsilon b) := \frac{\gamma t}{2} \int_0^1 |xu - \sqrt{t}\varepsilon b_u|^{\gamma-1} du \quad \text{et} \quad G(\varepsilon b) := \frac{t}{2} \int_0^1 |xu - \sqrt{t}\varepsilon b_u|^{2\gamma} du.$$

Alors (2.14) s'écrit encore

$$\begin{aligned} p^\varepsilon(t,x) &= \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-F(\varepsilon b) - \frac{G(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right)\right] \\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\frac{|x|^{\gamma+1}}{(\gamma+1)\varepsilon^2} - \frac{x^2}{2\varepsilon^2 t}\right) \mathbb{E}\left[\exp -\frac{G(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Soit l'espace $H_0^1 := \{\phi(u) = \int_0^u f(s)ds \text{ avec } f \in L^2([0,1];\mathbb{R}) \text{ et } \phi(1) = 0\}$ muni de sa norme usuelle ([4], p. 565). On introduit la fonctionnelle :

$$A(\phi) := t \int_0^1 |xu - \sqrt{t}\phi(u)|^{2\gamma} du + \int_0^1 \phi'^2(u) du, \quad \phi \in H_0^1, \tag{2.18}$$

et on peut montrer ([4], p. 567-570) qu'il existe une fonction positive $k_t(\cdot)$ telle que

$$\inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi) = A(\phi_0) = \begin{cases} \frac{2|x|^{1+\gamma}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{t}, & \text{si } |x| \leqslant \{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)} \\ \frac{2|x|^{1+\gamma}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{t} + 2k_t(|x|), & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.19}$$

Lors de la minimisation de la fonctionnelle A, on démontre l'existence de la fonction minimum ϕ_0 et on met en évidence ses propriétés. La démonstration est technique et est basée sur une étude fine des solutions de problèmes de Cauchy.

En utilisant deux outils classiques de grandes déviations, le principe de Varadhan et le théorème de Schilder (voir, par exemple [3] p. 43 et p. 81) on montre que, lorsque $|x| > \{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)}$:

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t,x) \leqslant \frac{|x|^{\gamma+1}}{\gamma+1} - \frac{x^2}{2t} - \frac{1}{2} \inf_{\phi\in H_0^1} A(\phi) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t,x), \tag{2.20}$$

d'où (2.6). L'idée de la minoration dans (2.20) est la suivante : on choisit $\mathcal{W}$ un voisinage de ϕ_0 tel que :

$$\exists \eta > 0 : \max_{\phi\in\mathcal{W}} F(\phi) \leqslant \eta \quad \text{et} \quad \forall \delta > 0 : \max_{\phi\in\mathcal{W}} G(\phi) \leqslant G(\phi_0) + \delta.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(-F(\varepsilon b) - \frac{G(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right)\right] &\geqslant \liminf_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{P}(\varepsilon b \in \mathcal{W}) - \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2\eta - \max_{\phi\in\mathcal{W}} G(\phi) \\ &\geqslant -\inf_{\phi\in\mathcal{W}\cap H_0^1} \frac{1}{2}\int_0^1 |\phi'(u)|^2 du - G(\phi_0) - \delta \geqslant -\frac{1}{2}A(\phi_0) - \delta. \end{aligned}$$

L'expression explicite (2.7) de la fonction k_t pour le cas particulier $\gamma = 1/2$ est une conséquence de (2.19) et des calculs de minimisation de la fonctionnelle A. Précisément, lorsque $|x| > (t/2)^2$, on trouve la fonction minimum $\phi_0(u) = (t^{3/2}/4)u(1-u)$ et $A(\phi_0) = xt/2 - t^3/48$.

À ce niveau de la démonstration, toujours pour le cas particulier $\gamma = 1/2$, nous allons mettre en évidence les idées d'une démonstration probabiliste pour la majoration (2.8) (qui n'apparaît pas dans [4], mais qui est détaillée dans [5]). On utilise encore la première représentation (2.14) ou plutôt la majoration (2.17). On commence par décomposer $\mathbb{E}[\exp -G(\varepsilon b)/\varepsilon^2]$ en deux termes $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$, suivant que εb se trouve ou non dans une boule en norme α-hölderienne, $0 < \alpha < 1$, centrée en ϕ_0. Par le principe de Varadhan pour le pont brownien en norme α-hölderienne :

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathcal{E}_2 = \limsup_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^2 \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{G(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right) \mathbb{1}_{\{\varepsilon b \notin B_\alpha(\phi_0, r)\}}\right] \leqslant -\frac{A(\phi_0)}{2} - \frac{r}{2}. \tag{2.21}$$

Pour l'autre terme on utilise les décompositions de ϕ_0 et du pont brownien dans la base de Schauder de l'espace des fonctions α-hölderiennes sur $[0, 1]$, et on obtient après calculs :

$$\mathcal{E}_1 = \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{G(\varepsilon b)}{\varepsilon^2}\right) \mathbb{1}_{\{\varepsilon b \in B_\alpha(\phi_0, r)\}}\right] \leqslant \exp\left(-\frac{A(\phi_0)}{2\varepsilon^2}\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{t^{3/2}}{2\varepsilon} \int_0^a |b_s| ds\right)\right], \tag{2.22}$$

où $a := \sup\{0 \leqslant u \leqslant 1 : \phi_0(u) = xu/\sqrt{t}\}$. Pour obtenir (2.8) à partir de (2.17), (2.21) et (2.22) il reste à estimer l'espérance de l'expression précédente. On utilise le résultat suivant qui semble avoir un intérêt en soi :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{2/3} \ln \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^a |b_s| ds\right)\right] = \frac{a_1' a}{2^{1/3}}, \quad \forall 0 \leqslant a < 1, \tag{2.23}$$

où a_1' est le plus grand zéro négatif de la dérivée de la fonction d'Airy Ai ($a_1' = -1,01879297\ldots$). L'argument central de démonstration de (2.23) est l'utilisation de la formule de Kac (voir [7], p. 54 ; voir aussi certains calculs de [13] et [15]) :

$$\mathbb{E} \int_0^\infty e^{-\beta t} \exp\left(-\int_0^t |B_s| ds\right) f(B_t) dt = \Phi(0) \int_{-\infty}^0 \Psi(y) f(y) dy + \Psi(0) \int_0^\infty \Phi(y) f(y) dy, \tag{2.24}$$

où Φ et Ψ sont deux solutions de l'équation différentielle homogène $-\frac{1}{2}w''(x) + (\beta + |x|)w(x) = 0$ telles que Φ soit bornée en $+\infty$, Ψ soit bornée en $-\infty$ et $\Phi\Psi' - \Phi'\Psi = 2$, et f est une fonction réelle bornée à support compact. On peut prouver que $\Phi(x) = \Psi(-x) = c\,Ai\left(2^{1/3}(\beta + x)\right)$, pour $x \geqslant 0$, où $c^{-2} = -2^{1/3} Ai(2^{1/3}\beta) Ai'(2^{1/3}\beta)$. La fonction $Ai(\cdot)$ apparaît naturellement car c'est une solution bornée en $+\infty$ de l'équation $-w''(x) + xw(x) = 0$. Pour obtenir (2.23) on doit d'abord conditionner par $\{B_t = x\}$ (prendre d'abord $f = (1/2\delta)\mathbb{1}_{]x-\delta, x+\delta[}$ dans (2.24) et ensuite faire $\delta \to 0$) et on déduit, après calculs et inversion de la transformée de Laplace,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t |B_s| ds\right) \middle| B_t = x\right] \frac{e^{-x^2/2t}}{t^{1/2}} = -\frac{1}{2^{1/3}} \sum_{n \geqslant 1} \frac{Ai(2^{1/3}|x| + a_n')}{a_n' Ai(a_n')} \exp\left(\frac{a_n' t}{2^{1/3}}\right), \tag{2.25}$$

où a_n' est le n-ième zéro de la dérivée Ai'. Pour éliminer le conditionnement on doit intégrer sur $\mathbb{R}_+$ par rapport à x l'égalité (2.25) et on trouve la valeur d'une expression de type

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^a |b_s^{x,a}| ds\right)\right]$$

où $b^{x,a}$ est un pont brownien allant de 0 à x sur $[0, a]$ (voir [5], p. 33-35) .

Revenons au cas d'une valeur quelconque de $\gamma \in]0,1[$. *La 3ème* (et dernière) *étape* de la démonstration est de nature analytique et repose sur *l'étude des solutions de viscosité d'une équation de Hamilton-Jacobi* (voir aussi [2]) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) = 0, \quad \text{sur } U \subset \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{2.26}$$

où $H(t,x,u,p,q)$ est un hamiltonien réel défini sur $U \times \mathbb{R}^3$, elliptique : si $q < q'$ alors $H(t,x,u,p,q) \leqslant H(t,x,u,p,q')$. Rappelons qu'une fonction u définie sur U, bornée, semi-continue supérieurement (respectivement semi-continue inférieurement) est une sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité pour (2.26) si, pour toute fonction $\varphi \in C^2(U;\mathbb{R})$ et pour $(t_0,x_0) \in U$ un point de maximum local (respectivement minimum local) de $u-\varphi$, on a :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0,x_0) + H(t_0,x_0,u(t_0,x_0),\frac{\partial \varphi}{\partial x}(t_0,x_0),\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_0,x_0) \leqslant 0 \,(\text{ respectivement } \geqslant 0).$$

Soulignons aussi que toute solution classique est une solution de viscosité.

L'idée est basée sur la remarque suivante (voir aussi [14], p. 127) : la fonction

$$(t,x) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-\frac{x^2}{2t})\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t V(B_s)ds\right)\middle| B_t = x\right]$$

est une solution classique de l'équation $(\partial u/\partial t) + \mathcal{L}u = 0$ sur $]0,T] \times \mathbb{R}^*$. Ici V est le potentiel de l'opérateur de Schrödinger $\mathcal{L}$ (2.11).

En utilisant la deuxième représentation (2.15) de la densité $p^\varepsilon(t,x)$ on peut montrer que la fonction $u^\varepsilon(t,x) := -s(\varepsilon)\ln p^\varepsilon(t,x)$ est une solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi sur le domaine $\Omega^\varepsilon := \{(t,x) : (1-\gamma)\varepsilon^{4/(1+\gamma)} < t < T, \varepsilon s(\varepsilon)^{1/2} < x < \{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)}\}$ (voir Fig. 2.1) :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + H_\varepsilon(t,x,u^\varepsilon,\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}) = 0, \quad \text{avec} \quad H_\varepsilon(t,x,u,p,q) := -\frac{\varepsilon^2}{2}q + \frac{\varepsilon^{\frac{4\gamma}{1+\gamma}}}{2}p^2 + x^\gamma p - \gamma x^{\gamma-1}s(\varepsilon). \tag{2.27}$$

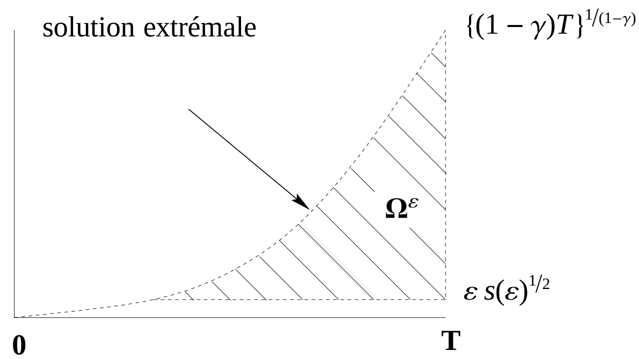

FIG. 2.1 – Domaine pour (2.27).

Une partie technique, qui généralise dans cette situation les idées de [2], est de faire ε tendre vers 0 dans (2.27). On montre que u^ε converge vers la solution de viscosité (qui est en fait une solution classique) u^0 de l'équation sur $\Omega := \{(t,x) : 0 < t < T, 0 < x < \{(1-\gamma)t\}^{1/(1-\gamma)}\}$:

$$\frac{\partial u^0}{\partial t} + H_0(x,\frac{\partial u^0}{\partial x}) = 0, \quad \text{avec} \quad H_0(x,p) = x^\gamma p. \tag{2.28}$$

Le développement (2.16) de la densité $p^\varepsilon(t,x)$ permet de déduire la condition aux limites :

$$u^0(t,0) = -\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon)\ln p^\varepsilon(t,0) = \lambda_1 t. \tag{2.29}$$

Mais l'unique solution (classique) de (2.28)-(2.29) est $u^0(t,x) = \lambda_1(t - x^{1-\gamma}/(1-\gamma))$ et (2.10) est démontrée.

2.5 Perspectives

Les perspectives ont pour point de départ quelques questions.

Une *première question* est : serait-il possible de traiter le cas d'une fonction $\mathtt{b}$ générale ? On constate que, bien qu'on ait considéré un cas particulier, le problème reste difficile. Il semble clair que ce cas général ne peut pas être abordé par les mêmes méthodes. Néanmoins, le résultat de [1] est démontré sous l'hypothèse (2.3). Peut-on être plus précis ?

Dans [5] les résultats de [4] ont été généralisés au cas où la fonction réelle $\mathtt{b}$ satisfait (2.3) ainsi que l'hypothèse suivante :

$$\textit{il existe } 0 < \gamma < 1 \textit{ et } \kappa > 0 \textit{ telles que } \mathtt{b}'(x) \sim \kappa\gamma|x|^{\gamma-1} \textit{ au voisinage de l'origine.} \tag{2.30}$$

Autrement dit, la fonction $\mathtt{b}$ a un comportement au voisinage de l'origine qui ressemble beaucoup a celui de la fonction $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)|x|^\gamma$.

Par exemple, la deuxième étape de la démonstration décrite au paragraphe §2.4, basée sur les techniques de grandes déviations, s'applique et on montre qu'il existe une fonction strictement positive k_t telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 \ln p^\varepsilon(t,x) = -k_t(|x|), \qquad \text{si} \qquad |x| > K^{-1}(t),$$

où $K^{-1}(\cdot)$ est la fonction réciproque de $K(x) := \int_0^x \frac{dy}{\mathtt{b}(y)}$. De même, par la troisième étape de la démonstration on montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon) \ln p^\varepsilon(t,x) = \lambda_1(K(|x|) - t), \qquad \text{si} \qquad |x| < K^{-1}(t),$$

où λ_1 est la première valeur propre positive de l'opérateur

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\kappa\gamma}{2|x|^{1-\gamma}} + \frac{\kappa^2|x|^{2\gamma}}{2}.$$

Une *deuxième question* naturelle est : la loi de la diffusion X^ε satisfait-elle un principe de grandes déviations ? Une discussion informelle concernant ce problème a été faite dans [8].

La réponse complète est donnée dans [5] (voir aussi [6]) et est basée sur l'étude fine de la densité de X_t^ε. On démontre un principe de grandes déviations pour $\{\mathbb{P}^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ dans lequel la vitesse de convergence de $\mathbb{P}^\varepsilon(\Gamma)$ dépend de la position du borélien Γ de l'espace des trajectoires par rapport aux solutions extrémales du système dynamique. D'une façon plus précise, on suppose, en plus de (2.3) et (2.30), que la fonction $\mathtt{b}$ est bornée et strictement croissante. Alors la famille de lois $\{\mathbb{P}^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ satisfait un principe de grandes déviations, de vitesse ε^2 et de fonctionnelle d'action :

$$I_T(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_0^T |\phi'(s) - \mathtt{b}(\phi(s))|^2 ds, & \text{si } \phi \in H^1 \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où H^1 est l'espace de Cameron-Martin. Évidemment, cette fonctionnelle s'annule sur l'ensemble des solutions du système dynamique (2.2). Donc le principe de grandes déviations ne donne pas d'information sur le comportement de $\mathbb{P}^\varepsilon(\Gamma)$, où Γ est un borélien de l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,T]$ contenant une solution φ de (2.2).

Dans [6] on utilise les résultats de [4] sur le comportement précis de la densité $p^\varepsilon(t,x)$, pour (t,x) situé entre les deux extrémales, pour décrire le comportement de la diffusion X^ε au voisinage d'une solution non extrémale φ de (2.2), sous les mêmes hypothèses que pour le principe de grandes déviations. Pour le cas particulier $\mathtt{b}(x) = \operatorname{sgn}(x)|x|^\gamma$, en utilisant (2.10) on montre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon) \ln \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |X_t^\varepsilon - \varphi(t)| \leqslant \delta\right) = \lambda_1\left(\frac{|\varphi(T)+\delta|^{1-\gamma}}{1-\gamma} - T\right),$$
$$\text{pour } 0 < \delta < \{(1-\gamma)T\}^{1/(1-\gamma)} - |\varphi(T)|.$$

Troisième question : peut-on étudier la situation où la fonction b dépend à la fois de t et de x (système dynamique non-homogène) ?

Une *quatrième question* intéressante, mais qui semble difficile, est l'étude du même problème en dimension supérieure. Remarquons que dans [1] on a étudié seulement le cas de la dimension 1, sans discuter le cas de la dimension supérieure.

Enfin, une *cinquième question* : que peut-on dire lorsque le système dynamique est perturbé non par le mouvement brownien, mais par le mouvement brownien fractionnaire ? On pourrait penser que les avancées récentes (formules d'Itô et de Girsanov ...) du calcul stochastique par rapport à ce processus seraient des outils de base pour aborder ce problème.

L'article [4] est cité par [11], [10] et [12].

Références

[1] Baffico, R., Baldi, P. Small random perturbations of Peano phenomena. *Stochastics* **6**, 279-292, 1981/1982.

[2] Barles, G. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi.* Springer Verlag 1994.

[3] Deuschel, J.D., Stroock, D.W. *Large Deviations.* Academic Press 1989.

[4] Gradinaru, M., Herrmann, S. Roynette, B. A singular large deviations principle. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **37**, 555-580, 2001.

[5] Herrmann, S. Étude de processus de diffusion. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I*, 2001. http ://www.iecn.u-nancy.fr/~herrmann/essai.pdf

[6] Herrmann, S. Phénomène de Peano et grandes déviations. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332**, 1019-1024, 2001.

[7] Itô, K., McKean, H.P. *Diffusion processes and their sample paths*, 2nd printing. Springer Verlag 1974.

[8] Jona-Lasinio, G. Large deviations for weak solutions of stochastic differential equations. *Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics and applications* (Oslo 1988), 162-167, Cambridge University Press, 1992.

[9] Kac, M. On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium. of Math. Statist. Probab. 1950*, University of California Press, 189-215, 1951.

[10] Qian, Z.M., Russo, F., Zheng, W. Comparison theorem and estimates for transition probability densities of diffusion processes. *Probab. Theory Related Fields* **127**, 388-406, 2003.

[11] Qian, Z.M., Zheng, W. Sharp bounds for transition probability densities of a class of diffusions. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **335**, 953-957, 2002.

[12] Qian, Z.M., Zheng, W. A representation formula for transition probability densities of diffusions and applications. *Stochastic Process. Appl.* **111**, 57-76, 2004.

[13] Rice, S.O. The integral of the absolute value of the pinned Wiener process calculation of its probability. *Ann. Probab.* **10**, 240-243, 1982.

[14] Rosenblatt, M. On a class of Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **71**, 120-135, 1951.

[15] Shepp, L.A. On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process. *Ann. Probab.* **10**, 234-239, 1982.

Chapitre 3

Formule d'Itô et mouvement brownien fractionnaire

3.1 Introduction

Une des idées fondamentales du calcul stochastique est la suivante : si X est une semimartingale et si f est une fonction de classe C^2, alors $f(X)$ est une semimartingale et on peut écrire la formule d'Itô.

Il est bien connu que le mouvement brownien fractionnaire $\{B_t^{\mathtt{H}} : t \geqslant 0\}$ d'indice de Hurst $0 < \mathtt{H} < 1$, est une semimartingale si et seulement si $\mathtt{H} = \frac{1}{2}$ (voir [24], p. 97-98), situation dans laquelle il s'agit du mouvement brownien standard.

Les questions naturelles sont alors : lorsque $\mathtt{H} \neq \frac{1}{2}$, est-il possible de construire des intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien fractionnaire ? Peut-on écrire une formule de type Itô ?

Il n'est pas difficile de voir que, pour $\mathtt{H} > \frac{1}{2}$ le mouvement brownien fractionnaire est à variation quadratique nulle (voir §3.2) donc l'intégrale de Young ([29]) peut être utilisée. Dans la suite on va surtout considérer le cas $\mathtt{H} < \frac{1}{2}$.

Les réponses données constituent quelques premiers pas vers un un calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $\mathtt{H} < \frac{1}{2}$, d'où leur intérêt :

- définition de l'intégrale symétrique (d'ordre m) par rapport au mouvement brownien fractionnaire ;
- étude fine de l'approximation trajectorielle de cette intégrale ;
- démonstration de la formule d'Itô pour le mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst quelconque.

L'étude est essentiellement basée sur une analyse gaussienne fine élémentaire, mais aussi sur des outils du calcul stochastique classique.

Les résultats concernant ces questions ont fait l'objet de trois publications [14], [15] et [16]. Les articles [15] et [16] font aussi partie de la thèse [19].

3.2 Notations et résultats principaux

Le mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $\mathtt{H} \in]0,1[$ est un processus gaussien centré, de covariance

$$C_{\mathtt{H}}(s,t) = \mathbb{E}(B_s^{\mathtt{H}} B_t^{\mathtt{H}}) = \frac{1}{2}(|s|^{2\mathtt{H}} + |t|^{2\mathtt{H}} - |s-t|^{2\mathtt{H}}), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.1}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[|B_t^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}}|^2] = |t-s|^{2\mathtt{H}}$ et donc les trajectoires de $B^{\mathtt{H}}$ sont hölderiennes de paramètre strictement inférieur à $\mathtt{H}$.

Il y a plusieurs approches pour construire des intégrales par rapport au mouvement brownien fractionnaire(voir [14], p. 1773-1774, [16], p. 782 ou [9] pour des tours d'horizon des différentes approches).

Les travaux [14], [15] et [16] reposent sur une méthode de régularisation introduite par Russo et Vallois [25] et généralisée comme suit. Pour X et Y deux processus réels continus on introduit :

$$[\underbrace{X, \dots, X}_{m \text{ fois}}](t) := \lim_{\varepsilon \to 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (X_{s+\varepsilon} - X_s)^m ds \quad \text{la } m\text{-variation,} \tag{3.2}$$

$$\int_0^t Y_s d^{-(m)} X_s := \lim_{\varepsilon \to 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t Y_s (X_{s+\varepsilon} - X_s)^m ds \quad \text{la } m\text{-intégrale forward} \tag{3.3}$$

et

$$\int_0^t Y_s d^{\circ(m)} X_s := \lim_{\varepsilon \to 0} \text{prob} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \frac{Y_{s+\varepsilon} + Y_s}{2} (X_{s+\varepsilon} - X_s)^m ds \quad \text{la } m\text{-intégrale symétrique} \tag{3.4}$$

(les convergences sont en probabilité, les processus admettant des versions continues). Pour $m = 1$, ces objets généralisent respectivement la variation quadratique, l'intégrale d'Itô et l'intégrale de Stratonovich, par exemple, lorsque les processus X et Y sont des semimartingales et lorsque Y est adapté. Dans le cas $m = 1$ on omettra l'indice m dans les notations et dans les dénominations.

Dans [26] est démontré le résultat suivant : l'intégrale forward $\int_0^t f'(X_s) d^- X_s$ existe pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ si et seulement si X admet une 2-variation et dans ce cas la formule d'Itô suivante a lieu :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) d^- X_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d[X, X]_s, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.5}$$

C'est un calcul élémentaire pour voir que le mouvement brownien fractionnaire $B^{\mathtt{H}}$ admet une 2-variation si et seulement si $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{2}$ (nulle si $\mathtt{H} > \frac{1}{2}$), donc (3.5) s'applique, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Sous les mêmes hypothèses, $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{2}$ et $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, l'intégrale symétrique $\int_0^t f'(X_s) d^\circ X_s$ existe et la formule d'Itô-Stratonovich a lieu :

$$f(B_t^{\mathtt{H}}) = f(B_0^{\mathtt{H}}) + \int_0^t f'(B_s^{\mathtt{H}})\, d^\circ B_s^{\mathtt{H}}, \quad t \in \mathbb{R} \tag{3.6}$$

(voir aussi [3] ou [21] pour une approche basée sur l'opérateur divergence lorsque $\mathtt{H} > \frac{1}{2}$; voir aussi [12]).

En fait, si $\mathtt{H} < \frac{1}{2}$ il n'est pas possible de montrer directement l'existence de l'intégrale symétrique. On peut voir que si $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{4}$ le mouvement brownien fractionnaire admet une 4-variation. Cette idée est la base de la démonstration d'un 1*er résultat* :

$$\textit{si } \mathtt{H} \geqslant \tfrac{1}{4} \textit{ et si } f \in C^4(\mathbb{R}; \mathbb{R}) \textit{ alors } \int_0^t f'(B_s^{\mathtt{H}})\, d^\circ B_s^{\mathtt{H}} \textit{ existe et } (3.6) \textit{ a lieu} \tag{3.7}$$

(lorsque $\mathtt{H} > \frac{1}{4}$ ce résultat a été obtenu indépendamment dans [1] par des techniques de calcul de Malliavin ; voir aussi [2] et [21]).

On est tenté de poser la question suivante : pour quelles valeurs de $\mathtt{H}$ la formule (3.6) reste vraie ? On approche la réponse à cette question en deux temps. Dans un premier temps on montre que :

$$(3.6) \textit{ n'a pas lieu pour } \mathtt{H} < \tfrac{1}{6}. \tag{3.8}$$

En effet, par un calcul simple on trouve :

$$(B_t^{\mathtt{H}})^3 = (B_0^{\mathtt{H}})^3 + 3 \int_0^t (B_s^{\mathtt{H}})^2 d^\circ B_s^{\mathtt{H}} - \frac{1}{2} [B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}](t), \quad t \in \mathbb{R},$$

où l'intégrale symétrique existe si et seulement si la 3-variation $[B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}]$ existe. Encore une fois, on peut facilement voir que si $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{3}$, la 3-variation de $B^{\mathtt{H}}$ existe. En fait, on peut prouver que ([14], p. 1780) :

$$\textit{si } \mathtt{H} > \tfrac{1}{6} \textit{ alors la 3-variation } [B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}] \textit{ existe.} \tag{3.9}$$

Montrons que si $\mathtt{H} < \frac{1}{6}$ alors la 3-variation $[B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}]$ n'existe pas. Supposons le contraire, à savoir que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)^3 ds$ converge en probabilité vers une variable aléatoire ξ. On en déduit que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}-3\mathtt{H}}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)^3 ds = (1/\sqrt{\varepsilon})\int_0^t \left((B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)/\varepsilon^{\mathtt{H}}\right)^3 ds$$

converge en loi vers 0. Cela contredit le fait que la même quantité converge en loi vers $\sqrt{c_{3,\mathtt{H}}t}\,\mathfrak{g}$, avec $\mathfrak{g}$ une variable gaussienne standard et $c_{3,\mathtt{H}} \neq 0$ une constante explicite. En effet, il s'agit d'un cas particulier du 2*ème résultat* central :

si $\mathtt{H} \leqslant \frac{1}{2}$ *et si* $m \geqslant 3$ *est un entier impair alors, lorsque* $\varepsilon \to 0$*,*

$$\{(1/\sqrt{\varepsilon})\int_0^t \left((B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)/\varepsilon^{\mathtt{H}}\right)^m ds : t \geqslant 0\} \xrightarrow{loi} \{\sqrt{c_{m,\mathtt{H}}}\,\beta_t : t \geqslant 0\}. \tag{3.10}$$

Ici $\{\beta_t : t \geqslant 0\}$ est un mouvement brownien standard et $c_{m,\mathtt{H}} \neq 0$ est une constante explicite. Dans un second temps on prouve le 3*ème résultat* important ([16], p. 795) :

$$\textit{si } \mathtt{H} > \tfrac{1}{6} \textit{ et si } f \in C^6(\mathbb{R};\mathbb{R}) \textit{ alors } \int_0^t f'(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\circ} B^{\mathtt{H}}_s \textit{ existe et } (3.6) \textit{ a lieu} \tag{3.11}$$

(le même résultat a été obtenu simultanément et indépendamment dans [9] en utilisant d'autres techniques comme la dérivation fractionnaire et le calcul de Malliavin ; voir aussi [7] et [8]).

Pour franchir la barrière $\frac{1}{6}$ on introduit une nouvelle classe d'intégrales. Pour un entier $m \geqslant 1$ et une probabilité ν sur $[0,1]$ on définit la *ν-intégrale d'ordre m* de $g(X)$ par rapport à un processus continu X :

$$\int_0^t g(X_s)\, d^{\nu,m} X_s := \lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{prob}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ds\,(X_{s+\varepsilon} - X_s)^m \int_0^1 \nu(d\alpha)\, g(X_s + \alpha(X_{s+\varepsilon} - X_s)). \tag{3.12}$$

Ces intégrales ont été déjà introduites dans [28] mais pour $m = 1$ et X une semimartingale. On retrouve, pour $Y = g(X)$, les m-intégrales forward et symétrique, (3.3) et (3.4), en prenant, respectivement $\nu = \delta_0$ et $\nu = (1/2)(\delta_0 + \delta_1)$. La m-variation (3.2) de X s'obtient en prenant simplement $g \equiv 1$. Quand ν est une probabilité symétrique (c'est-à-dire, invariante par l'application $t \mapsto 1-t$) cette intégrale est la généralisation naturelle de la m-intégrale symétrique. Précisons que la $\delta_{1/2}$-intégrale symétrique joue un rôle central (voir la relation (3.27) au paragraphe suivant).

Avec ces outils on peut écrire un développement d'Itô général (4*ème résultat*) :

si $\ell, n \geqslant 1$ *sont deux entiers, si* ν *est symétrique telle que ses moments d'ordre* $(2j)$ *valent* $1/(2j+1)$*,* $j = 1, \ldots, \ell - 1$*, si* X *admet une* $(2n)$*-variation et si* $f \in C^{2n}(\mathbb{R};\mathbb{R})$*, alors*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) d^{\nu,1} X_s + \sum_{j=\ell}^{n-1} k^{\nu}_{\ell,j} \int_0^t f^{(2j+1)}(X_s) d^{\delta_{1/2},2j+1} X_s,\ t \in \mathbb{R},$$

où la somme sera nulle si $\ell > n-1$ *(*$k^{\nu}_{\ell,j}$ *sont des constantes explicites).* (3.13)

L'égalité s'entend au sens suivant : si toutes les intégrales sauf une existent, alors la dernière existe aussi. Ce résultat repose sur un développement de Taylor et a un caractère plutôt "déterministe". Son intérêt réside dans son application au mouvement brownien fractionnaire.

D'abord, on peut faire le tour de la question d'existence des ν-intégrales par rapport au mouvement brownien fractionnaire ([16], p. 793-794). Par exemple, pour $\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\nu,2n} B^{\mathtt{H}}_s$ ($n \geqslant 1$ entier), il suffit de voir que, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t ds\,(B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)^{2n} \int_0^1 \nu(d\alpha)\, g(B^{\mathtt{H}}_s + \alpha(B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)) \simeq \varepsilon^{2n\mathtt{H}-1}\mu_{2n}\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)ds \quad \textit{presque sûrement,}$$

uniformément en t sur tout compact. Ici et ailleurs μ_{2n} note le moment d'ordre $(2n)$ d'une variable gaussienne standard $\mathfrak{g}$. Cet équivalent s'obtient pour $f(x) = x^{2n}$ à partir du 5*ème résultat* :

pour tout $\mathtt{H}$*, pour* Y *processus continu et pour* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *polynomiale*
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t Y_s\, f\Big(\frac{B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s}{\varepsilon^{\mathtt{H}}}\Big) ds = \mathbb{E}\left[f(\mathfrak{g})\right] \int_0^t Y_s ds, \quad \textit{presque sûrement,}$$
uniformément en t *sur tout compact.*
$$(3.14)$$

Notons aussi le résultat suivant d'existence ([16], p. 794) :

si $(2n+1)\mathtt{H} > \dfrac{1}{2}$ *et si* $g \in \mathrm{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *alors* $\displaystyle\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\delta_{1/2}, 2\ell+1} B^{\mathtt{H}}_s$ *existe et s'annule pour tous les entiers* $\ell \geqslant n$ *(*$n \geqslant 1$ *entier).*
$$(3.15)$$

Par exemple, si $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\delta_{1/2},\ell} B^{\mathtt{H}}_s$ existent et s'annulent pour tout entier impair $\ell \geqslant 3$. Si on combine ce résultat au développement d'Itô (3.13) on trouve la première partie du 6*ème résultat* central :

si $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$ *et si* $f \in \mathrm{C}^6(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *alors* $\int_0^t f'(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\nu,1} B^{\mathtt{H}}_s$ *existe pour toute* ν *symétrique et*
$$f(B^{\mathtt{H}}_t) = f(B^{\mathtt{H}}_0) + \int_0^t f'(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\nu,1} B^{\mathtt{H}}_s, \quad t \in \mathbb{R}.$$
$$(3.16)$$

De plus, pour un entier $r \geqslant 2$,

si $(2r+1)\mathtt{H} > \dfrac{1}{2}$ *et si* $f \in \mathrm{C}^{4r+2}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *alors* $\displaystyle\int_0^t f'(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\nu,1} B^{\mathtt{H}}_s$ *existe pour toute* ν *symétrique et*
$$f(B^{\mathtt{H}}_t) = f(B^{\mathtt{H}}_0) + \int_0^t f'(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{\nu,1} B^{\mathtt{H}}_s,\ t \in \mathbb{R}$$
pourvu que les moments d'ordre $(2j)$*,* $j = 1, \ldots, r-1$*, de* ν *valent* $1/(2j+1)$*.*
$$(3.17)$$

On peut trouver des exemples de probabilités ν pour lesquelles (3.17) s'applique, leur forme étant liée à la formule de Newton-Côtes. Ainsi, pour $r \geqslant 2$ on peut prendre ([16], p.795)

$$\nu = \sum_{j=0}^{2r-2} a_j \delta_{j/(2r-2)}, \quad \text{où} \quad a_j = \int_0^1 \prod_{k \neq j} \frac{(2r-2)\alpha - k}{j-k} d\alpha. \tag{3.18}$$

Par exemple, si $r = 2$ il suffit de choisir $\nu = (1/6)(\delta_0 + 4\delta_{1/2} + \delta_1)$ (liée à la formule de Simpson) et la formule d'Itô (3.17) s'applique pour $\mathtt{H} > \frac{1}{10}$ et $f \in \mathrm{C}^{10}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Enfin, si $\mathtt{H} \in]0,1[$ est quelconque fixé, on choisit l'entier $r > (1-2\mathtt{H})/(4\mathtt{H})$, la mesure ν et on applique (3.17) pour une fonction f suffisamment régulière (voir aussi [5], [9] et [11] pour d'autres approches du problème de la construction d'une intégrale par rapport au mouvement brownien fractionnaire et l'obtention de la formule d'Itô, pour tous les indices de Hurst $\mathtt{H} \in]0,1[$).

3.3 Autres résultats

Ce paragraphe contient quelques résultats connexes au précédents obtenus dans [14], [15] et [16] concernant la généralisation de la covariation, la décomposition d'une ν-intégrale ainsi que des résultats d'approximation au premier et second ordre des m-intégrales.

La m-variation est un cas particulier de la *m-covariation* d'un vecteur $(X^1,\dots,X^m)$ de processus réels continus :

$$[X^1,\dots,X^m](t) := \lim_{\varepsilon\to 0} \text{prob}\, \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (X^1_{s+\varepsilon}-X^1_s)\dots(X^m_{s+\varepsilon}-X^m_s)ds. \tag{3.19}$$

Nous analysons les conditions d'existence et les relations avec les m-intégrales (3.3). Par exemple, pour un entier $n \geqslant 1$:

$$[\underbrace{Y,X,\dots,X}_{2n}](t) = \int_0^t Y_s d^{+(2n-1)}X_s - \int_0^t Y_s d^{-(2n-1)}X_s, \tag{3.20}$$

où la *m-intégrale backward* est défi nie par

$$\int_0^t Y_s d^{+(m)}X_s := \lim_{\varepsilon\to 0} \text{prob}\, \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t Y_{s+\varepsilon}(X_{s+\varepsilon}-X_s)^m ds. \tag{3.21}$$

Notons que :

$$\int_0^t Y_s d^{\circ(m)}X_s = \frac{1}{2}\left[\int_0^t Y_s d^{+(m)}X_s + \int_0^t Y_s d^{-(m)}X_s\right]. \tag{3.22}$$

Pour le mouvement brownien fractionnaire on peut montrer que ([14], p. 1785 et [16], p. 794), pour un entier $n \geqslant 1$ et pour $g \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$[\underbrace{g(B^{\mathtt{H}}),B^{\mathtt{H}},\dots,B^{\mathtt{H}}}_{2n}](t) = \mu_{2n}\begin{cases} \int_0^t g'(B^{\mathtt{H}}_s)ds, & \text{si}\quad 2n\mathtt{H} = 1\\ 0, & \text{si}\quad 2n\mathtt{H} > 1,\end{cases} \tag{3.23}$$

et ([16], p. 794) si $g \in C^{2n-1}(\mathbb{R};\mathbb{R})$:

$$[\underbrace{g(B^{\mathtt{H}}),B^{\mathtt{H}},\dots,B^{\mathtt{H}}}_{2n}](t) = -2\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{-(2n-1)}B^{\mathtt{H}}_s = 2\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)\, d^{+(2n-1)}B^{\mathtt{H}}_s, \ \ \text{si } \mathtt{H} \geqslant \frac{1}{2n}. \tag{3.24}$$

De plus, à partir de (3.24) on peut voir que si $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{2n}$, la $(2n)$-covariation $[g(B^{\mathtt{H}}),B^{\mathtt{H}},\dots,B^{\mathtt{H}}]$ existe, pour toute fonction g localement bornée.

Pour $n = 2$ et $\mathtt{H} = \frac{1}{4}$ nous déduisons de (3.23) que, pour toute fonction g localement bornée,

$$[g(B^{1/4}),B^{1/4},B^{1/4},B^{1/4}](t) = -3\int_{\mathbb{R}} g(a)(\mathrm{L}^{1/4}_t)'(a)da. \tag{3.25}$$

où $\mathrm{L}^{1/4}_t(a)$ est le temps local en a du mouvement brownien fractionnaire $B^{1/4}$ ([14], p. 1786). L'application $a \mapsto \mathrm{L}^{1/4}_t(a)$ est une fonction absolument continue (cette propriété est vraie lorsque $\mathtt{H} < \frac{1}{3}$). (3.25) est une généralisation de l'identité de Bouleau-Yor pour le temps local brownien :

$$[g(B^{1/2}),B^{1/2}](t) = -\int_{\mathbb{R}} g(a)\mathrm{L}^{1/2}_t(da). \tag{3.26}$$

Concernant les ν-intégrales, nous avons déjà signalé l'importance de la $\delta_{1/2}$-intégrale : si ν est une probabilité sur $[0,1]$ symétrique, si $g \in C^k(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et si X admet une $(2n)$-variation ($k+m \geqslant 2n$), alors

$$\int_0^t g(X_s)\, d^{\nu,m}X_s = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{\nu^0_{2i}}{(2i)!}\int_0^t g^{(2i)}(X_s)\, d^{\delta_{1/2},m+2i}X_s + R_t, \quad t\in\mathbb{R}, \tag{3.27}$$

où $\nu_j^0 = \int_0^1 ((1/2)-\alpha)^j \,\nu(d\alpha)$ et $R_t = (-1)^k(\nu_k^0/k!)\int_0^t g^{(k)}(X_u)d[X,\ldots,X]_s$, si $k+m=2n$ et $R_t = 0$ si $k+m>n$ ([16], p. 789). Par exemple, si X admet une 6-variation (c'est le le cas du mouvement brownien fractionnaire avec $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$) et si $g \in \mathrm{C}^4(\mathbb{R};\mathbb{R})$ alors :

$$\int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ(3)}B_s^{\mathtt{H}} = \int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},3}B_s^{\mathtt{H}} + \frac{1}{8}\int_0^t g''(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},5}B_s^{\mathtt{H}}$$
$$\text{et} \quad \int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ(5)}B_s^{\mathtt{H}} = \int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},5}B_s^{\mathtt{H}}. \quad (3.28)$$

Enfin, nous allons répondre à deux autres questions naturelles. Est-il possible d'avoir convergence presque sûre dans (3.3) et (3.4) ? Pour le cas du mouvement brownien fractionnaire on a déjà énoncé (3.14) qui mène à la réponse de cette question pour $f(x) = x^{2n}$ (voir aussi [17]). Si $f(x) = x^{2n+1}$ la limite en (3.14) est nulle. Est-il possible de changer de normalisation pour obtenir une limite non nulle ? On a déjà énoncé (3.10) comme réponse à cette question pour le mouvement brownien fractionnaire avec $\mathtt{H} < \frac{1}{2}$ (voir [27] pour $\mathtt{H} > \frac{1}{2}$). Soulignons qu'un autre intérêt des résultats (3.14) et (3.10) est que les convergences obtenues sont en tant que processus.

Comme applications de (3.14) nous montrons que les intégrales forward et symétrique suivantes peuvent être définies trajectoire par trajectoire ([15], p. 5) :

$$\textit{si } \mathtt{H} \geqslant \tfrac{1}{2} \textit{ et } g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \textit{ alors } \int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^-B_s^{\mathtt{H}} \textit{ existe presque sûrement} \quad (3.29)$$

et

$$\textit{si } \mathtt{H} \geqslant \tfrac{1}{3} \textit{ et } g \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R}) \textit{ alors } \int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ}B_s^{\mathtt{H}} \textit{ existe presque sûrement.} \quad (3.30)$$

Dans [30] on introduit une intégration trajectorielle par rapport au mouvement brownien fractionnaire des processus ayant régularité γ-hölderienne, avec $\gamma > 1-\mathtt{H}$. De plus, quand l'intégrant est $g(B_t^{\mathtt{H}})$, les hypothèses forcent $\mathtt{H} > \frac{1}{2}$ (voir [30], p. 354). Ainsi (3.29)-(3.30) constituent une amélioration des résultats dans [30].

Par ailleurs, un lien entre l'intégrale symétrique et l'intégrale de type Skorokhod peut être établi (voir [1]) :

$$\int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ}B_s^{\mathtt{H}} = \int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})\delta B_s^{\mathtt{H}} + \mathtt{H}\int_0^t g'(B_s^{\mathtt{H}})s^{2\mathtt{H}-1}ds. \quad (3.31)$$

Le deuxième terme dans le membre de droite de cette égalité est la limite presque sûre, quand $\varepsilon \to 0$, de

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t g'(B_s^{\mathtt{H}})[C_{\mathtt{H}}(s,(s+\varepsilon)\wedge t) - C_{\mathtt{H}}(s,(s-\varepsilon)\vee 0)]ds.$$

Ainsi, par (3.30) et (3.31) on voit que l'intégrale de type Skorokhod peut être définie trajectoire par trajectoire pour $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{3}$.

Enfin, remarquons qu'on peut prouver des résultats semblables pour des martingales (autrement dit, pour des processus qui ne sont pas nécessairement gaussiens). On note $\{\mathcal{F}_t : t \geqslant 0\}$ la filtration canonique du mouvement brownien standard $B = B^{1/2}$. Soit la martingale $Z_t = Z_0 + \int_0^t \sigma(B_s)dB_s$, $\sigma \in \mathrm{C}^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On a ([15], p. 4) :

pour un processus continu Y et pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomiale

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t Y_s\, f\Big(\frac{Z_{s+\varepsilon}-Z_s}{\sqrt{\varepsilon}}\Big)ds = \int_0^t Y_s\mathbb{E}\left[f(\mathrm{g}\,\sigma(B_s))|\mathcal{F}_s\right]ds \quad \textit{presque sûrement,}$$

uniformément en t sur tout compact,

(3.32)

et ([15], p. 6)

si $m \geqslant 3$ est un entier impair alors, lorsque $\varepsilon \to 0$,

$$\{(1/\sqrt{\varepsilon})\int_0^t((Z_{s+\varepsilon}-Z_s)/\sqrt{\varepsilon})^m ds : t \geqslant 0\} \xrightarrow{loi} \{\int_0^t \sigma(\beta_s^{(1)})^m d(\kappa_1\beta_s^{(1)}+\kappa_2\beta_s^{(2)}) : t \geqslant 0\}. \tag{3.33}$$

Ici on a noté par $\mathfrak{g}$ une variable aléatoire gaussienne standard, par $\{(\beta_t^{(1)}, \beta_t^{(2)}) : t \geqslant 0\}$ un mouvement brownien bidimensionnel standard et par κ_1, κ_2 deux constantes. Ces résultats (voir aussi [4] et [6]) sont de même type que (3.14), respectivement (3.10) et, une fois de plus, il s'agit de convergences en tant que processus. Comme précédemment en (3.29), on peut déduire que ([15], p. 5) :

$$\textit{si } g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \textit{ alors l'intégrale d'Itô } \int_0^t g(Z_s)dZ_s \textit{ existe presque sûrement.} \tag{3.34}$$

3.4 Quelques idées de démonstration

Donnons les idées des démonstrations des principaux résultats 1-6 décrits au paragraphe §3.2. Pour obtenir (3.7) on écrit, en utilisant le développement de Taylor :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(B_s^{\mathtt{H}})ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(B_s^{\mathtt{H}})ds &= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{f'(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}})+f'(B_s^{\mathtt{H}})}{2}(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}-B_s^{\mathtt{H}})ds \\ &- \frac{1}{12\varepsilon}\int_0^t \frac{f^{(3)}(B_s^{\mathtt{H}})+f^{(3)}(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}})}{2}(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}-B_s^{\mathtt{H}})^3 ds + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t J(B_s^{\mathtt{H}}, B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}})(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}-B_s^{\mathtt{H}})^4 ds,\end{aligned} \tag{3.35}$$

où $J(a,b) = (1/24)\int_0^1(4\lambda^3 - 6\lambda^2 + 1)(f^{(4)}(\lambda a + (1-\lambda)b) - f^{(4)}(a))d\lambda$. Si on peut passer à la limite dans (3.35), alors on trouve

$$f(B_t^{\mathtt{H}}) = f(B_0^{\mathtt{H}}) + \int_0^t f'(B_s^{\mathtt{H}})d^\circ B_s^{\mathtt{H}} - \frac{1}{12}\int_0^t f^{(3)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ(3)}B_s^{\mathtt{H}}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3.36}$$

ce qui donne (3.6) dès qu'on montre que la 3-intégrale symétrique est nulle. Le membre de gauche de (3.35) converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, vers $f(B_t^{\mathtt{H}}) - f(B_0^{\mathtt{H}})$. Le troisième terme du membre de droite de (3.35) converge vers zéro en utilisant l'existence de la 4-variation de $B^{\mathtt{H}}$, ainsi que le fait que $\sup_{s\in[0,t]} J(B_s^{\mathtt{H}}, B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}) \to 0$ en probabilité, quand $\varepsilon \to 0$. Pour terminer la démonstration de (3.7) on doit montrer que la 3-intégrale symétrique existe et s'annule. Nous montrons que si $\frac{1}{4} < \mathtt{H} < \frac{1}{3}$ les 3-intégrales forward (3.3) et backward (3.21) existent et s'annulent. Si $\mathtt{H} = \frac{1}{4}$ les 3-intégrales forward et backward ne s'annulent pas en général, mais

$$\int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{-(3)}B_s^{\mathtt{H}} = -\int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})d^{+(3)}B_s^{\mathtt{H}} = -\frac{3}{2}\int_0^t g'(B_s^{\mathtt{H}})ds.$$

La dernière égalité a lieu pour $g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Dans tous les cas (3.22) donne la conclusion.

La démonstration de l'existence et des propriétés des 3-intégrales forward et backward (moments, régularité des trajectoires, valeurs) est technique, mais élémentaire ([14], §5). Elle repose sur le caractère gaussien du mouvement brownien fractionnaire, ainsi que sur sa propriété d'autosimilarité d'indice $\mathtt{H}$: pour tout $c > 0$, le processus $\{B_{ct}^{\mathtt{H}} : t \geqslant 0\}$ a la même loi que le processus $\{c^{\mathtt{H}}B_t^{\mathtt{H}} : t \geqslant 0\}$. L'idée centrale est de montrer que la famille de variables aléatoires $\{(1/\varepsilon)\int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}})^3 ds : \varepsilon > 0\}$ est de Cauchy dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Quelques calculs formels compliqués ont été effectués avec des procédures `Maple` ([14]).

Le même type d'argument s'applique pour obtenir (3.11). Ainsi, pour $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$, on déduit le développement suivant :

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon} f(B_s^{\mathtt{H}})ds - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} f(B_s^{\mathtt{H}})ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{f'(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}) + f'(B_s^{\mathtt{H}})}{2}(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}})ds$$
$$- \frac{1}{12\varepsilon}\int_0^t f^{(3)}\left(\frac{B_s^{\mathtt{H}} + B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}}{2}\right)(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}})^3 ds - \frac{1}{480\varepsilon}\int_0^t f^{(5)}\left(\frac{B_s^{\mathtt{H}} + B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}}}{2}\right)(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}})^5 ds$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \tilde{J}(B_s^{\mathtt{H}}, B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}})(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}})^4 ds, \quad (3.37)$$

où $\tilde{J} \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ satisfait $\tilde{J}(a,a) = 0$ (en écrivant un développement de Taylor à l'ordre 6). Si on admet (3.15), pour $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$, les intégrales $\int_0^t f^{(3)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},3}B_s^{\mathtt{H}}$ et $\int_0^t f^{(5)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},5}B_s^{\mathtt{H}}$ existent et s'annulent. Quand $\varepsilon \to 0$, on trouve, par (3.37) :

$$f(B_t^{\mathtt{H}}) = f(B_0^{\mathtt{H}}) + \int_0^t f'(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ}B_s^{\mathtt{H}} - \frac{1}{12}\int_0^t f^{(3)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},3}B_s^{\mathtt{H}} - \frac{1}{480}\int_0^t f^{(5)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\delta_{1/2},5}B_s^{\mathtt{H}}$$
$$= f(B_0^{\mathtt{H}}) + \int_0^t f'(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ}B_s^{\mathtt{H}}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.38)$$

Notons que, pour $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$, un développement de Taylor à l'ordre 6 du même type que (3.35) conduit, à

$$f(B_t^{\mathtt{H}}) = f(B_0^{\mathtt{H}}) + \int_0^t f'(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ}B_s^{\mathtt{H}} - \frac{1}{12}\int_0^t f^{(3)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ(3)}B_s^{\mathtt{H}} + \frac{1}{120}\int_0^t f^{(5)}(B_s^{\mathtt{H}})d^{\circ(5)}B_s^{\mathtt{H}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.39)$$

et, par (3.38), on déduit que la somme des deux derniers termes est nulle. En fait les deux derniers termes au membre de droite de (3.39) sont nuls par (3.28) et (3.15).

Pour obtenir (3.13) on pousse le développement de Taylor à l'ordre $2n$, sous l'hypothèse de régularité de f. Cette démonstration ([16], §5) constitue une amélioration de la démonstration donnée auparavant dans [14], §5.

Comme précédemment, la démonstration de (3.15), c'est-à-dire de l'existence et de l'annulation des $\delta_{1/2}$-intégrales symétriques $\int_0^t g(B_s^{\mathtt{H}})\, d^{\delta_{1/2},m}B_s^{\mathtt{H}}$, pour $\frac{1}{2m} < \mathtt{H} \leqslant \frac{1}{m}$ et $m \geqslant 3$ un entier impair, repose sur une analyse de la structure de la fonction covariance $C_{\mathtt{H}}$ du mouvement brownien fractionnaire ([16], §5). Cette analyse gaussienne est différente et plus fine que celle utilisée dans la démonstration ([14], §5) de (3.7). Le pas fondamental est la démonstration de la convergence vers zéro dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$ de la famille de variables aléatoires $\{(1/\varepsilon)\int_0^t g((B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} + B_s^{\mathtt{H}})/2)(B_{s+\varepsilon}^{\mathtt{H}} - B_s^{\mathtt{H}})^m ds : \varepsilon > 0\}$.

Nous allons donner les idées de démonstration de (3.10) et (3.14) (mais aussi de (3.33) et (3.32)). Pour l'approximation au premier ordre, (3.14) et (3.32), on commence par démontrer la convergence dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. Ensuite on utilise un argument de type Borel-Cantelli, ainsi que la régularité Hölder des trajectoires étudiées. En fait, avec cette démarche on démontre le critère général suivant ([15], p. 7) :

pour f polynomiale et pour $\{W_t : t \geqslant 0\}$ un processus à trajectoires γ-hölderiennes soit
$W_\varepsilon^{(f)}(t) = \int_0^t f(\frac{W_{s+\varepsilon} - W_s}{\varepsilon^\gamma})ds$; s'il existe $\{V_t : t \geqslant 0\}$ processus continu à variation bornée
tel que, $\|W_\varepsilon^{(f)}(t) - V_t\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} = O(\varepsilon^\alpha)$, $\varepsilon \to 0$, $\alpha > 0$ alors, pour tout processus $\{Y_t : t \geqslant 0\}$
continu, $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^t Y_s dW_\varepsilon^{(f)}(s) = \int_0^t Y_s dV_s$, presque sûrement, uniformément en t sur tout compact.
(3.40)

L'application de ce critère est technique : pour le cas du mouvement brownien fractionnaire on se sert de son caractère gaussien, tandis que pour le cas des martingales on utilise le calcul stochastique.

Passons à la démonstration de l'approximation au second ordre (3.10). Par l'autosimilarité du mouvement brownien fractionnaire il suffit d'étudier la convergence en loi du processus $M_T(t) = T^{-1/2}\int_0^{tT}(B^{\mathtt{H}}_{s+1} - B^{\mathtt{H}}_s)^m ds$, lorsque $T \to \infty$.

Illustrons la démarche pour le mouvement brownien $B = B^{1/2}$. Par des applications successives de la formule d'Itô (classique) et de la version stochastique du théorème de Fubini (voir [23], p. 175) on écrit $M_T(t)$ comme $\int_0^{tT} R_T(s)dB_s$ plus un reste qui tend vers zéro dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$. On commence par vérifier que $\lim_{T\to\infty}\int_0^{tT} R_T(s)^2 ds = \mathrm{cst}\, t$, d'où, par le théorème de Dubins-Schwarz, on déduit que $M_T(\cdot) \to \sqrt{\mathrm{cst}}\beta_\cdot$, quand $T \to \infty$, au sens de la convergence en loi des marginales de rang fini. On termine en validant un critère de tension.

Lorsqu'on passe au cas du mouvement brownien fractionnaire d'indice $0 < \mathtt{H} < \frac{1}{2}$ des nouvelles difficultés techniques apparaissent. On utilise la représentation du mouvement brownien fractionnaire de type moyenne mobile $B^{\mathtt{H}}_t = \int_0^t K_{\mathtt{H}}(s,t)dB_s$ et le calcul stochastique d'Itô classique, pour mettre en place le programme décrit ci-dessus. On souligne que le noyau $K_{\mathtt{H}}(s,t)$ est essentiellement de la forme $(s-t)^{\mathtt{H}-(1/2)}$ (voir [2], p. 122), donc singulier pour $s = 0$ ainsi que pour $s = t$, d'où les difficultés techniques.

Enfin, pour démontrer (3.33) on suit une démarche semblable. On utilise, en plus des résultats classiques de calcul stochastique (entre autres, la version asymptotique du théorème de Knight, [23], p. 524), un théorème de convergence en loi pour des intégrales stochastiques obtenu dans [18], p. 125.

3.5 Perspectives

Une fois de plus les perspectives sont basées sur des questions.

Une première question naturelle générale est : peut-on appliquer le calcul stochastique développé jusque-là pour étudier des équations différentielles stochastiques dirigées par le mouvement brownien fractionnaire ? Une réponse à cette question est donnée dans [19] (voir aussi [20]) : après avoir étendu la notion d'intégrale de Newton-Côtes et la formule d'Itô à des processus de la forme $(B^{\mathtt{H}}_t, V_t)$, où $\{V_t : t \geqslant 0\}$ est une processus à variation bornée, on étudie la notion de solution de l'équation différentielle stochastique $dX_t = \sigma(X_t)dB^{\mathtt{H}}_t + \mathtt{b}(X_t)dt$. L'existence et unicité d'une telle solution est démontrée et des schémas d'approximation numérique de la solution sont donnés.

Voici encore quelques questions issues de ces travaux :

- Est-il possible d'appliquer les mêmes méthodes pour un processus gaussien général ? La réponse est sans doute positive. Il s'agit en fait de décrire des conditions qui doivent être satisfaites par la fonction de covariance d'un tel processus. Soulignons, néanmoins que, dans le cadre du mouvement brownien fractionnaire plusieurs des résultats précédents expriment des conditions nécessaires et suffisantes en termes de l'indice de Hurst (qui caractérise la régularité des trajectoires). Ce fait remarquable semble hors d'atteinte pour un processus gaussien général.
- On a vu dans (3.9) que la 3-variation $[B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}, B^{\mathtt{H}}]$ existe si $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$ et elle n'existe pas si $\mathtt{H} < \frac{1}{6}$. Que se passe-t-il pour $\mathtt{H} = \frac{1}{6}$? Par (3.10) on sait seulement que $(1/\varepsilon)\int_0^t (B^{1/6}_{s+\varepsilon} - B^{1/6}_s)^3 ds$ converge en loi vers une variable aléatoire gaussienne.
- Par (3.11) on sait que l'intégrale symétrique $\int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)d^\circ B^{\mathtt{H}}_s$ existe pour $\mathtt{H} > \frac{1}{6}$ et par (3.29) on sait qu'elle existe presque sûrement pour $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{3}$. A-t-on existence presque sûre pour $\mathtt{H} \in]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}[$?
- Que peut-on dire de l'existence de la limite en loi de

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{g(B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon}) + g(B^{\mathtt{H}}_s)}{2}(B^{\mathtt{H}}_{s+\varepsilon} - B^{\mathtt{H}}_s)ds - \int_0^t g(B^{\mathtt{H}}_s)d^\circ B^{\mathtt{H}}_s\right] \quad \text{quand } \varepsilon \to 0 \text{ ?}$$

- Peut-on démontrer un résultat de type Bouleau-Yor pour le mouvement brownien fractionnaire d'indice $\mathtt{H} = \frac{1}{2n}$? La réponse à cette question est sûrement positive et la démonstration devrait reposer sur les relations (3.23)-(3.24) pour la $(2n)$-covariation $[g(B^{\mathtt{H}}), B^{\mathtt{H}}, \ldots, B^{\mathtt{H}}]$.
- Est-il possible de prouver un résultat de type formule d'Itô-Tanaka avec les mêmes outils ?
- Peut-on traiter le cas du mouvement brownien fractionnaire de dimension supérieure à 1 par la même approche ?

L'article [16] (qui est le prolongement naturel de [14] mais qui repose aussi sur [15]) est cité par plusieurs auteurs (on a déjà souligné [7] et [9], mais aussi [22]). [14] est cité par [9],[10] et [13].

Références

[1] Alòs, E., Léon, J.A., Nualart, D. Stratonovich calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter less than $\frac{1}{2}$. *Taiwanese J. Math.* **5**, 609-632, 2001.

[2] Alòs, E., Mazet, O., Nualart, D. Stochastic calculus with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter lesser than $\frac{1}{2}$. *Stochastic Process. Appl.* **86**, 121-139, 2000.

[3] Alòs, E., Nualart, D. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. *Stoch. Stoch. Rep.* **73**, 129-152, 2003.

[4] Azais, J.-M., Wschebor, M. Oscillation presque sûre de martingales continues. *Séminaire de Probabilités XXXI,* Lect. Notes in Math. **1655**, 69-76, Springer Verlag 1997.

[5] Bender, C. An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index. *Stochastic Process. Appl.* **104**, 81-106, 2003.

[6] Berzin-Joseph, C., Léon, J.R., Ortega, J. Increments and crossings for the Brownian bridge : weak convergence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math.* **327**, 587-592, 1998.

[7] Biagini, F., Øksendal, B. Forward integrals and an Itô formula for fractional Brownian motion. *Preprint no. 22, University of Oslo*, 2004 http ://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2004/22-04.html

[8] Carmona, Ph., Coutin, L., Montseny, G. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **39**, 27-68, 2003.

[9] Cheridito, P., Nualart, D. Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $\mathtt{H} \in (0, 1/2)$. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 1049-1081, 2005.

[10] Decreusefond, L. Stochastic integration with respect to Volterra processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 123-149, 2005.

[11] Decreusefond, L., Ustunel, A. S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion. *Potential Analysis* **10**, 177-214, 1999.

[12] Duncan, T.E., Hu, Y., Pasik-Duncan, B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory. *SIAM J. Control Optim.* **38**, 582-612, 2000.

[13] Framstad, N.C. Arbitrage, fractional Brownian motion and transactions costs. *Preprint no. 16, University of Oslo*, 2002 http ://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2002/16-02.html

[14] Gradinaru, M., Russo, F., Vallois, P. Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $\mathtt{H} \geqslant \frac{1}{4}$. *Ann. Probab.* **31**, 1772-1820, 2003.

[15] Gradinaru, M., Nourdin. I. Approximation at fi rst and second order of the m-variation of the fractional Brownian motion. *Electron. J. Probab.* **8**, no. 18, 1-26, 2003.

[16] Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F., Vallois, P. m-order integrals and generalized Itô's formula ; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 781-806, 2005.

[17] Istas, J., Lang, G. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **33**, 407-436, 1997.

[18] Jakubowski, A., Mémin, J., Pagès, G. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields* **81**, 111-13, 1989.

[19] Nourdin, I. Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire ; Estimation non-paramétrique de la volatilité et test d'adéquation. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I*, 2004. http ://www.iecn.u-nancy.fr/~nourdin/PagePerso/these.pdf

[20] Nourdin, I. Schémas d'approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction hölderienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340**, 611-614, 2005.

[21] Nualart, D. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. *Contemporary Mathematics* **336**, 3-39, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[22] Øksendal, B. Fractional Brownian motion in finance. *Preprint no. 28, University of Oslo*, 2003 http ://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2003/28-03.html

[23] Revuz, D., Yor, M. *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd edition. Springer Verlag 2005.

[24] Rogers, L.C.G. Arbitrage with fractional Brownian motion. *Math. Finance* **7**, 95-105, 1997.

[25] Russo, F., Vallois, P. Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Relat. Fields* **97**, 403-421, 1993.

[26] Russo, F., Vallois, P. The generalized covariation process and Itô formula. *Stochastic Processes and their applications* **59**, 81-104, 1995.

[27] Taqqu, M.S. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **50**, 53-83, 1979.

[28] Yor, M. Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités XI*, Lect. Notes in Math. **581**, 518-528, Springer Verlag 1977.

[29] Young, L.C. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.* **67**, 251-282, 1936.

[30] Zähle, M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I. *Probab. Theory Relat. Fields* **111**, 333-374, 1998.

Chapitre 4

Convolution stochastique en dimension infinie

4.1 Introduction

On considère l'équation de la chaleur stochastique linéaire avec un bruit blanc espace-temps additif

$$\begin{cases} (\partial X/\partial t)(t,x) = (\partial^2 X/\partial x^2)(t,x) + (\partial^2 W/\partial x \partial t)(t,x), & \text{sur }]0,T[\times]0,1[\\ X_0 = 0, & \text{sur } [0,1] \\ X_t(0) = X_t(1) = 0, & \text{sur } [0,T], \end{cases} \tag{4.1}$$

ou dans sa forme d'évolution sur l'espace de Hilbert $H = \mathrm{L}^2([0,1];\mathbb{R})$, avec des conditions Dirichlet au bord

$$dX_t = \Delta X_t\, dt + dW_t, \quad t \in]0,T], \quad X_0 = 0. \tag{4.2}$$

Ici $\Delta = \partial^2/\partial x^2$ est l'opérateur de Laplace sur $[0,1]$ avec des conditions Dirichlet au bord. Le processus $\{X_t : t \geqslant 0\}$, à valeurs dans H, est la solution mild de (4.2) ou la convolution stochastique du mouvement brownien cylindrique $\{W_t : t \geqslant 0\}$ avec le semigroupe associé à l'opérateur Δ :

$$X_t = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} dW_s, \quad t \in [0,T]. \tag{4.3}$$

Le but de cette étude est d'obtenir des formules de type Itô et Tanaka lorsqu'on veut décrire l'évolution de $t \mapsto F(X_t)$ pour des classes assez larges de fonctionnelles F. Il s'agit d'un premier pas dans une direction assez peu explorée de la théorie des équations aux dérivées partielles stochastiques. Cette étude est inspirée des développements récents du calcul stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire de dimension 1. L'intérêt de ce travail est que ces idées sont adaptés au cadre de la dimension infinie.

Les résultats sont contenus dans la publication [7].

4.2 Cadre et résultats

Soit $\{\mathbf{e}_n : n \geqslant 1\}$ la base orthonormée trigonométrique de l'espace H, $\mathbf{e}_n(x) = \sqrt{2}\sin(n\pi x)$, $x \in [0,1]$, $n \geqslant 1$ et notons que la décomposition spectrale de l'opérateur est $\Delta \mathbf{e}_n = -\lambda_n \mathbf{e}_n$, où les valeurs propres sont $\lambda_n := (\pi n)^2$, $n \geqslant 1$.

Le mouvement brownien cylindrique est, par définition, la série $W_t = \sum_{n\geqslant 1} W_t^n \mathbf{e}_n$, où $\{W^n : n \geqslant 1\}$ est une suite de mouvements browniens linéaires standards. Bien que $W_t \notin H$, la famille de variables aléatoires gaussiennes $\{W_t^{(\mathbf{y})} = \sum_{n\geqslant 1}\langle \mathbf{e}_n, \mathbf{y}\rangle_H : \mathbf{y} \in H\}$, est bien définie et satisfait $\mathbb{E}[W_t^{(\mathbf{y})} W_t^{(\mathbf{z})}] = (t \wedge s)\langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle_H$.

On rappelle que l'intégrale dans (4.3) est bien définie car il suffit ([6], p. 119) de remarquer que la norme Hilbert-Schmidt $\|e^{s\Delta}\|_{\mathrm{HS}} \simeq \mathrm{cst}.s^{-1/2}$, lorsque $s \to 0$. Le processus solution X vit dans H et admet la décomposition suivante dans la base $\{\mathbf{e}_n : n \geqslant 1\}$:

$$X_t = \sum_{n\geqslant 1} X_t^n \mathbf{e}_n, \ \text{ où } \ X_t^n := \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} dW_s^n, \quad n \geqslant 1, \quad t \in [0,T], \tag{4.4}$$

où $\{X^n : n \geqslant 1\}$ est une suite de processus d'Ornstein-Uhlenbeck indépendants. En effet le processus X existe à valeurs dans H car

$$\mathbb{E}\left[|X_t|_H^2\right] = \sum_{n\geqslant 1} \int_0^t e^{-2\lambda_n(t-s)} ds \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2\lambda_n} < \infty.$$

Décrivons quelques propriétés simples mais importantes de la solution X. D'une part X est un processus de Markov, mais aussi un processus gaussien centré, avec l'opérateur de covariance donné par $\mathbb{E}\left[\langle X_s, \mathbf{y}\rangle_H \langle X_t, \mathbf{z}\rangle_H\right] = \langle C_X(s,t)\mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle_H$ et explicite. Précisément, dans la même base orthonormée :

$$C_X(s,t)_{n,n} = (1/2\lambda_n) e^{-\lambda_n(s\vee t)} \sinh(\lambda_n(s\wedge t)), \quad s,t \in [0,T]. \tag{4.5}$$

D'autre part, X est une limite d'une suite de semimartingales $X_t^{(N)} = \sum_{1\leqslant n\leqslant N} X_t^n \mathbf{e}_n$, mais X n'est pas une semimartingale. Par exemple, en utilisant (4.4) on peut montrer qu'il existe deux constantes positives $c_1 < c_2$ telles que

$$c_1|t-s|^{1/2} \leqslant \mathbb{E}\left[|X_t - X_s|_H^2\right] \leqslant c_2|t-s|^{1/2}, \quad \forall t,s \in [0,T]. \tag{4.6}$$

Ainsi la trajectoire $t \mapsto X_t$ est hölderienne de tout indice plus petit que $\frac{1}{4}$.

Pour obtenir une formule de type Itô on a plusieurs possibles stratégies, basées sur les propriétés du processus X.

Une approche de type markovien serait basée sur la décomposition de type Fukushima $F(X_t) = M_t + N_t$, où M est une martingale locale et N est un processus à variation quadratique nulle (ou d'énergie zéro). Mis à part l'existence de cette décomposition, on ne connaît pas bien les propriétés des processus M et N.

Une approche de type semimartingale serait la suivante : on peut écrire, pour une fonction $F_N : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de classe C^2 :

$$F_N(X_t^{(N)}) = F_N(0) + \sum_{1\leqslant n\leqslant N} \int_0^t \partial_{x_n} F_N(X_s^{(N)}) dX_s^{(N)} + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}(F_N''(X_s^{(N)})ds, \quad t \in [0,T].$$

Ici l'intégrale stochastique est au sens d'Itô. En faisant $N \to \infty$, on peut déduire une formule de type Itô pour des fonctionnelles $F = \lim_{N\to\infty} F_N$ telles que $\mathrm{Tr}(F'')$ soit bornée. Toutefois, lorsqu'on veut obtenir une formule de type Tanaka, les fonctionnelles typiques auxquelles on aurait besoin d'appliquer la formule d'Itô sont $F : H \to \mathbb{R}$ de la forme :

$$F(\ell) = \int_0^1 f(\ell(x))\varphi(x)dx, \quad f \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad \varphi \in \mathrm{L}^\infty(]0,1[;\mathbb{R}), \quad \ell \in H. \tag{4.7}$$

Cette fonctionnelle, bien que de classe C^2 ayant les deux premières dérivées bornées, a une dérivée seconde qui n'est pas à trace.

Nous avons utilisé le caractère gaussien du processus X. Grâce à l'effet régularisant du semigroupe associé à Δ, $\mathrm{Tr}(e^{2s\Delta}) \simeq \mathrm{cst}.s^{-1/2}$, quand $s \to 0$, la formule de type Itô qu'il est possible de démontrer est valide pour une classe plus large de fonctionnelles :

pour toute $F : H \to \mathbb{R}$ de classe C^2 ayant les deux premières dérivées bornées,

$$F(X_t) = F(0) + \int_0^t \langle F'(X_s), \delta X_s\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}(e^{2s\Delta}F''(X_s))ds, \ t \in [0,T]. \tag{4.8}$$

Ici $\int_0^t \langle F'(X_s), \delta X_s\rangle$ est une intégrale de type Skorokhod par rapport au processus gaussien X qui sera définie au paragraphe suivant (voir (4.14)).

Le deuxième résultat central est une formule de type Tanaka pour le processus X. La fonctionnelle typique que nous considérons est $F_\varphi : H \to \mathbb{R}$ définie par $F_\varphi(\ell) = \int_0^1 |\ell(x)|\varphi(x)dx$, où $\varphi \in C_c(]0,1[;\mathbb{R})$, $\ell \in H$. On peut voir que, pour $\ell, \ell' \in H$, $[F'_\varphi(\ell)](\tilde{\ell}) = \int_0^1 \mathrm{sgn}(\ell(x))\varphi(x)\tilde{\ell}(x)dx$ et on démontre que

$$F_\varphi(X_t) = \int_0^t \langle F'_\varphi(X_s), \delta X_s\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t \int_0^1 \delta_0(X_s(x))\, \mathsf{G}_{2s}(x,x)\,\varphi(x)dx\,ds. \tag{4.9}$$

Ici $\{\mathsf{G}_t(x,y) : t \geqslant 0, x, y \in [0,1]\}$ est le noyau de la chaleur de type Dirichlet sur $[0,1]$

$$\mathsf{G}_t(x,y) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \left\{\exp\left(-(y-x-2r)^2/(4t)\right) - \exp\left(-(y+x-2r)^2/(4t)\right)\right\},$$

et $\delta_0(X_s(x))$ est une distribution au sens de Watanabe sur l'espace de Wiener associé à W. Ainsi le deuxième terme joue le rôle d'un temps local associé à X et il sera noté $\mathrm{L}_t^\varphi(X)$.

Enfin, signalons que simultanément et indépendamment de notre travail, L. Zambotti [14] a étudié le même problème et a obtenu d'autres formules de type Itô et Tanaka, en utilisant une régularisation du noyau $e^{t\Delta}$ par le facteur $e^{\varepsilon\Delta}$ et un passage à la limite. Son approche est basée sur le formalisme de Walsh [12].

4.3 Idées de démonstration

D'abord il faut donner un sens à l'intégrale stochastique dans (4.8). Commençons par une explication heuristique dans laquelle les calculs sont formels : l'équation (4.2) s'écrit : $dX_t = dW_t + \left(\int_0^t \Delta e^{(t-s)\Delta} dW_s\right) dt$, d'où, "par Fubini", pour une fonction convenable h,

$$\int_0^T \langle h(t), dX_t\rangle = \int_0^T \langle h(t), dW_t\rangle + \int_0^T \left\langle dW_s, \int_s^T \Delta e^{(t-s)\Delta} h(t)dt\right\rangle.$$

Notons que dans le deuxième terme l'intégrale stochastique est anticipante. De plus, la norme de l'opérateur $\|\Delta e^{(t-s)\Delta}\|_{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{cst.}(t-s)^{-1}$, quand $t \to s$, donc pour compenser cette divergence on devrait remplacer dans cette intégrale $h(t)$ par $h(t) - h(s)$.

Décrivons maintenant les arguments rigoureux de la définition de l'intégrale par rapport à X.

On note $\mathcal{H}_W := \mathrm{L}^2([0,T];H)$ l'espace auto-reproduisant associé à la famille gaussienne $\{W(h) : h \in \mathcal{H}_W\}$, où $W(h) := \sum_{n\geqslant 1}\int_0^T \langle h(t), \mathbf{e}_n\rangle_H dW_t^n$, $h \in \mathcal{H}_W$. C'est une méthode classique, basée sur le calcul de Malliavin pour définir l'intégration de Skorokhod des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{H}_W$ par rapport à W (voir par exemple [9] ou [8]). On notera par D^W et δ^W les opérateurs de dérivation de Malliavin et de divergence, respectivement :

$$\mathbb{E}[F\delta^W(u)] = \mathbb{E}[\langle D^W F, u\rangle_{\mathcal{H}_W}], \quad F \in \mathbb{D}_W^{1,2}(\mathcal{H}_W),\ u \in \mathrm{L}^0(\Omega;\mathcal{H}_W). \tag{4.10}$$

On introduit les opérateurs linéaires $G : \mathcal{H}_W \to \mathcal{H}_W$ et $G^\star : C^\varepsilon([0,T];H) \to \mathcal{H}_W$ définis par :

$$Gh(t) := \int_0^t e^{(t-s)\Delta} h(s)ds, \quad h \in \mathcal{H}_W,\ t \in [0,T] \tag{4.11}$$

et

$$G^\star h(t) := e^{(T-t)\Delta} h(t) + \int_t^T \Delta e^{(s-t)\Delta}(h(s) - h(t))ds, \quad h \in C^\varepsilon([0,T];H),\ t \in [0,T], \tag{4.12}$$

où $C^{\varepsilon}([0,T];H)$ est l'ensemble des fonctions ε-hölderiennes. On peut vérifier la propriété de dualité :

$$\int_0^t \langle G^\star h(s), k(s)\rangle_H ds = \int_0^t \langle h(s), Gk(ds)\rangle_H, \quad h,k \in C^{\varepsilon}([0,T];H),\ t\in[0,T]. \tag{4.13}$$

L'idée de la définition de l'intégrale par rapport à X est la suivante : formellement $X = G\dot{W}$ donc il suffit de poser, au moins pour des fonctions $h \in C^{\varepsilon}([0,T];H)$, $\delta^X(h) = \delta^W(G^\star h)$.

On peut rendre rigoureuse cette idée (voir [1] pour le cas du mouvement brownien fractionnaire linéaire). On pose $\mathcal{H}_X := (G^\star)^{-1}(\mathcal{H}_W)$ l'espace auto-reproduisant associé à la famille gaussienne $\{X(h) : h\in\mathcal{H}_X\}$. Son produit scalaire est donné par $\langle \mathbb{1}_{[0,s]}\mathbf{y}, \mathbb{1}_{[0,t]}\mathbf{z}\rangle_{\mathcal{H}_X} = \langle C_X(s,t)\mathbf{y},\mathbf{z}\rangle_H$. Si $\{u_t : t\in[0,T]\}$ est un processus stochastique à valeurs dans H, alors l'intégrale stochastique de Skorokhod par rapport à X est

$$\int_0^T \langle u_s, \delta X_s\rangle = \delta^X(u) := \delta^W(G^\star u) = \int_0^T \langle G^\star u_s, \delta W_s\rangle_H, \quad \forall u\in \hat{\mathbb{D}}_X^{1,2}(\mathcal{H}_X). \tag{4.14}$$

Ici $\hat{\mathbb{D}}_X^{1,2}(\mathcal{H}_X) := \{u \text{ processus } : \mathbb{E}\int_0^T |G^\star u_t|_H^2 dt < \infty \text{ et } \mathbb{E}\int_0^T d\tau \int_0^T dt\, \|G^\star D_\tau^W u_t\|_{\mathrm{op}}^2 < \infty\}$.

Décrivons maintenant les idées de la démonstration de la formule d'Itô (4.8). Sans perte de généralité on peut supposer que $F(0) = 0$. La vérification du fait que $F'(X)\in\hat{\mathbb{D}}_X^{1,2}(\mathcal{H}_X)$ est un calcul technique basé sur (4.10). Donc l'intégrale stochastique de $F'(X)$ par rapport à X est bien définie.

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des intégrales stochastiques multiples par rapport à W. C'est un ensemble dense dans $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R})$ engendré par les variables aléatoires $\{Y_m : m\geqslant 0\}$: $Y_0 = 1$, $Y_m = \delta^W(h^{\otimes m})$, $m\geqslant 1$, $h\in\mathcal{H}_W$. Pour obtenir (4.8) il suffit de vérifier que, pour tout $m\in\mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[Y_m F(X_t)] = \mathbb{E}[Y_m \int_0^t \langle F'(X_s), \delta X_s\rangle] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Y_m \int_0^t \mathrm{Tr}(e^{2s\Delta}F''(X_s))ds]. \tag{4.15}$$

Bien que trop réducteur, le cas $m = 0$ illustre bien l'idée de démonstration de (4.15), le cas $m\geqslant 1$ impliquant plutôt des calculs techniques basés essentiellement sur (4.10) ([7], p. 12-16). On pose $\varphi(t,\mathbf{y}) = \mathbb{E}[F(e^{t\Delta}\mathbf{y} + X_t)]$, avec $\mathbf{y}\in H$. Alors $\partial^2_{\mathbf{yy}}\varphi(t,\mathbf{y}) = e^{2t\Delta}\mathbb{E}[F''(e^{t\Delta}\mathbf{y} + X_t)]$. L'équation de Kolmogorov (voir par exemple [6], p. 257) est :

$$\partial_t\varphi = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\partial^2_{\mathbf{yy}}\varphi) + \langle\Delta\mathbf{y}, \partial_{\mathbf{y}}\varphi\rangle_H. \tag{4.16}$$

Pour $\mathbf{y} = 0$ dans (4.16) on trouve :

$$\mathbb{E}[F(X_t)] = \varphi(t,0) = \int_0^t \partial_s\varphi(s,0)ds = \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}(\partial^2_{\mathbf{yy}}\varphi(s,0))ds = \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[\mathrm{Tr}(e^{2s\Delta}F''(X_s))]ds \tag{4.17}$$

(l'intégrale stochastique (4.14) étant d'espérance nulle) qui est (4.15) pour $m = 0$.

Soulignons que l'idée de base est l'intégration par partie gaussienne. En effet, la variable aléatoire X_s^n, gaussienne centrée de variance $(1-e^{-2\lambda_n s})/(2\lambda_n)$ satisfait $\mathbb{E}[X_s^n g'(X_s^n)] = (1-e^{-2\lambda_n s})/(2\lambda_n)\mathbb{E}[g''(X_s^n)]$. Alors, pour toute fonction $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ régulière, telle que $g(0) = 0$,

$$\mathbb{E}[g(X_t^n)] = -\lambda_n\int_0^t \mathbb{E}[X_s^n g'(X_s^n)]ds + \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[g''(X_s^n)]ds = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2\lambda_n s}\mathbb{E}[g''(X_s^n)]ds,$$

égalité qui peut donner l'intuition du dernier membre de (4.17).

Enfin, on va donner les idées de démonstration de (4.9) : on doit régulariser la fonction valeur absolue pour pouvoir appliquer la formule d'Itô (4.8) et ensuite on doit passer à la limite. Soit $\varphi\in\mathrm{C}_c(]0,1[;\mathbb{R})$ fixée et on va noter $\sigma_\varepsilon := |\cdot| * p_\varepsilon$, avec $p_\varepsilon(x) = (2\pi\varepsilon)^{-1/2}e^{-x^2/(2\varepsilon)}$ la densité gaussienne de variance $\varepsilon > 0$. On pose $F_\varepsilon(\ell) := \int_0^1 \sigma_\varepsilon(\ell(x))\varphi(x)dx$, $\ell\in H$. Alors, par (4.8),

$$F_\varepsilon(X_t) = \int_0^t \langle F_\varepsilon'(X_s), \delta X_s\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t Z_s^\varepsilon ds, \tag{4.18}$$

où

$$Z_s^\varepsilon = \mathrm{Tr}(e^{2s\Delta}F_\varepsilon''(X_s)) = \int_0^1 \sigma_\varepsilon''(X_s(x))\mathsf{G}_{2s}(x,x)\varphi(x)dx \tag{4.19}$$

(comparable à (4.9)).

En utilisant la décomposition en chaos de Wiener et la formule de Stroock (voir [7], p. 21-25), on démontre que la variable aléatoire $\int_0^t Z_s^\varepsilon ds$ converge, lorsque $\varepsilon \to 0$, à la fois dans $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R})$ et dans l'espace de Sobolev $\mathbb{D}_W^{-1,2}$, le dual de $\mathbb{D}_W^{1,2}$ (voir [11], p. 259). Lors de cette démonstration nous utilisons d'une manière essentielle les inégalités classiques suivantes : pour tout $\eta > 0$, il existe deux constantes positives $c_1 < c_2$ telles que

$$c_1 t^{-1/2} \leqslant \mathsf{G}_t(x,y) \leqslant c_2 t^{-1/2} \quad \text{et} \quad c_1 t^{1/2} \leqslant \int_0^t \int_\eta^{1-\eta} \mathsf{G}_s(x,y)^2 ds\, dy \leqslant c_2 t^{1/2},$$

la première pour tous $x, y \in [\eta, 1-\eta]$ et la deuxième, uniformément pour $(t,x) \in [0,T] \times [\eta, 1-\eta]$ (voir [2], p. 268). On identifi e ensuite sa limite $\mathrm{L}_t^\varphi(X)$, qui est le deuxième terme au membre de droite de (4.9).

Comme $\lim_{\varepsilon\to 0} F_\varepsilon(X_t) = F_\varphi(X_t)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbb{R})$, on déduit que $\int_0^t \langle F_\varepsilon'(X_s), \delta X_s\rangle$ converge et il reste à calculer la limite. On pose $V^\varepsilon(t) = F_\varepsilon'(X_t) = \sigma_\varepsilon'(X_t)\varphi \in H$ et $V(t) = \mathrm{sgn}(X_t)\varphi \in H$. On voit que pour trouver la limite, il suffit de montrer que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G^\star V^\varepsilon = G^\star V \ \text{ dans } \ \mathrm{L}^2([0,T]\times\Omega; H).$$

Cette convergence est obtenue en adaptant les arguments utilisés dans [3] pour le mouvement brownien fractionnaire de dimension 1.

4.4 Perspectives

L'objet des travaux en cours est de formuler et de prouver des résultats similaires (formules de type Itô ou Tanaka) pour la solution issue de 0 de l'équation de la chaleur stochastique générale, par exemple :

$$dY_t = \Delta Y_t\, dt + \sigma(Y_t)dW_t, \ \text{ ou même } \ dZ_t = (\Delta Z_t + b(Z_t))dt + \sigma(Z_t)dW_t, \quad t \in]0,T]. \tag{4.20}$$

On pourrait se demander que donne la même étude si on remplace Δ par un opérateur plus général A ?

Une autre direction serait l'étude de l'existence et de l'identifi cation des mesures stationnaires pour des équations aux dérivées partielles stochastiques.

Ainsi, une première question est la suivante : il est connu que la mesure invariante de la solution X de (4.2) est la loi du pont brownien standard. Nualart et Pardoux [10] ont considéré une version de (4.2) avec une condition de réflection au point 0 et dans [13] on a prouvé que la mesure invariante de la solution de cette l'équation a pour mesure invariante la loi du pont de Bessel de dimension 3. Une question naturelle serait de voir si $U_t(x) = (X_t^1(x)^2 + X_t^2(x)^2 + X_t^3(x)^2)^{1/2}$ satisfait l'équation de Nualart-Pardoux, lorsque X^i, $i = 1,2,3$ sont trois copies indépendantes du processus X solution de (4.2).

Dans la même direction, une autre question serait de voir si, pour des équations aux dérivées partielles stochastiques non-linéaires, comme l'équation de Burgers stochastique ([4]) ou l'équation des milieux poreux stochastique ([5]), une formule de type Itô pourrait simplifi er l'étude de l'existence et de l'identifi cation des mesures stationnaires (cet étude étant généralement basé sur l'équation de Kolmogorov).

Références

[1] Alòs, E., Mazet, O., Nualart, D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *Ann. Probab.* **29**, 766-801, 2001.

[2] van den Berg, M. Gaussian bounds for the Dirichlet heat kernel. *J. Funct. Anal.* **88**, 267-278, 1990.

[3] Coutin, L., Nualart, D., Tudor, C. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. *Stoch. Proc. Appl.* **94**, 301-315, 2001.

[4] Da Prato, G., Debussche, A. Absolute continuity of the invariant measures for some stochastic PDEs. *J. Stat. Phys.* **115**, 451-468, 2004.

[5] Da Prato, G., Röckener, M. Weak solutions to stochastic porous media equations. *J. Evol. Equ.* **4**, 249-271, 2004.

[6] Da Prato, G., Zabczyk, J. Stochastic equations in infinite dimensions. Cambridge University Press 1992.

[7] Gradinaru, M., Nourdin, I., Tindel, S. Itô's and Tanaka's type formulae for the stochastic heat equation : the linear case. *J. Funct. Anal.* **228**, 114-143, 2005.

[8] León, J., Nualart, D. Stochastic evolution equations with random generators. *Ann. Probab.* **26**, 149-186, 1998.

[9] Nualart, D. The Malliavin calculus and related topics. Springer Verlag 1995.

[10] Nualart, D., Pardoux, E. White noise driven quasilinear SPDEs with reflection. *Probab. Theory Related Fields* **93**, 77-89, 1992.

[11] Nualart, D., Vives, J. Smoothness of Brownian local times and related functionals. *Potential Anal.* **1**, 257-263, 1992.

[12] Walsh, J.B. An introduction to stochastic partial differential equations. *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV,1984*, 265–439, Lecture Notes in Math., 1180, Springer Verlag, 1986.

[13] Zambotti, L. A reflected stochastic heat equation as symmetric dynamics with respect to the 3-*d* Bessel bridge. *J. Funct. Anal.* **180**, 195-209, 2001.

[14] Zambotti, L. Itô-Tanaka formula for SPDEs driven by additive space-time white noise. *Preprint* 2004.

Chapitre 5

Mouvement brownien réfléchi dans le disque unité

Il s'agit d'étudier la diffusion de la chaleur dans un domaine $\mathtt{D}$ où l'on a placé un obstacle $\mathtt{d}$. Supposons que la frontière du domaine est absorbante tandis que celle de l'obstacle est réfléchissante. Un problème classique d'optimisation (qui nous a été aussi inspiré par le travail [7]) est le suivant : où faut-il placer une source de chaleur dans $\mathtt{D}$ pour que la quantité de chaleur soit maximale ?

On considère la cas où $\mathtt{D}$ et $\mathtt{d}$ sont deux disques (voir Fig. 5.1) de frontières $\partial\mathtt{D} = \gamma_1$ et $\partial\mathtt{d} = \gamma_0$.

Supposons que $\mathtt{D}$ est le disque unité centré à l'origine et que $\mathtt{d}$ est un petit disque centré sur l'axe des abscisses en un point $c_0 \in]-1,1[$, de rayon $R_0 \in]0, 1-|c_0|[$. Le domaine situé entre les deux cercles sera noté :

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |z - c_0| > R_0\}.$$

Si une source est placée au point $z \in \Omega$ alors la quantité de chaleur est :

$$Q(z) = \int_\Omega dw \int_0^\infty u(t,z,w)dt = \text{cst.}\mathbb{E}_z(\tau). \tag{5.1}$$

Ici $u(\cdot, z, \cdot)$ est l'unique solution du problème suivant :

$$\begin{cases} (\partial u/\partial t)(t,z,w) = (1/2)\Delta u(t,z,w), & \text{pour } (t,w) \in \mathbb{R}_+^* \times \Omega \\ u(0,z,w) = \delta_z(w), & \text{pour } w \in \Omega \\ (\partial u/\partial \mathrm{n})(t,z,w) = 0, & \text{pour } (t,w) \in \mathbb{R}_+^* \times \gamma_0 \\ u(t,z,w) = 0, & \text{pour } (t,w) \in \mathbb{R}_+^* \times \gamma_1, \end{cases} \tag{5.2}$$

Nous avons noté dans (5.1) par τ le temps de séjour dans Ω du processus $\{X_t : t \geqslant 0\}$:

$$X_t := B_t - K_t, \quad \text{avec} \quad K_0 = 0,\ K_t := \int_0^t \mathtt{n}(X_s)d|K|_s,\ |K|_t := \int_0^t \mathbb{1}_{\{X_s \in \gamma_0\}} d|K|_s.$$

Ici $\mathtt{n}$ est la normale à γ_0 extérieure par rapport à Ω et $\{K_t : t \geqslant 0\}$ est un processus continu, localement à variation bornée (voir aussi [5], p. 512). En fait le processus $\{X_t : t \geqslant 0\}$ n'est rien d'autre que le mouvement brownien plan $\{B_t : t \geqslant 0\}$ issu de z, réfléchi sur γ_1 et absorbé sur γ_0. La deuxième égalité de (5.1), est une simple conséquence du calcul stochastique appliqué au processus réfléchi X ([2], p. 23). Le problème est donc de maximiser $\mathbb{E}_z(\tau)$ pour $z \in \Omega$.

De point de vue de la théorie du potentiel, Q est, à une constante multiplicative près, l'intégrale sur Ω de la fonction de Green $G^{(\Omega)}$ associée au problème (5.2) :

$$\begin{cases} \Delta G^{(\Omega)}(z,w) = \delta_z(w), & \text{pour } w \in \Omega \\ (\partial G^{(\Omega)}/\partial \mathrm{n})(z,w) = 0, & \text{pour } w \in \gamma_0 \\ G^{(\Omega)}(z,w) = 0, & \text{pour } w \in \gamma_1. \end{cases} \tag{5.3}$$

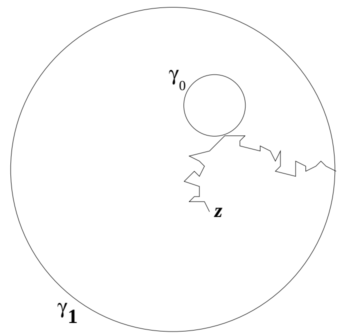

Fig. 5.1 – Mouvement brownien réfléchi sur γ_1 et absorbé sur γ_0.

Précisement, on obtient par (5.1),

$$\mathbb{E}_z(\tau) = -2 \int_\Omega G^{(\Omega)}(z, w) dw. \tag{5.4}$$

Lorsque Ω est la couronne centrée en zéro et pour le cas d'un problème aux limites de type Dirichlet (les deux frontières absorbantes), le calcul de la fonction de Green remonte à [8] (voir aussi [6], p. 6.41). Le calcul de la fonction de Green pour le problème aux limites de type Neumann (les deux frontières réfléchissantes) est traité dans [4]. Dans la publication [2], travail qui fait aussi partie de la thèse [1], on a étudié le cas du problème aux limites de type mixte, pour lequel il semblait ne pas y avoir de référence.

Il est bien connu que s'il n'y a pas d'obstacle ($R_0 = 0$), $\mathbb{E}_z(\tau) = (1/2)(1 - |z|^2)$ et son maximum est atteint en $z = 0$.

Lorsque l'obstacle est bien placé, à savoir si les deux cercles, γ_0 et γ_1, sont concentriques le calcul est simple (voir par exemple [6], Chap. 6). On trouve $\mathbb{E}_z(\tau) = (1/2)(1 - |z|^2 + R_0^2 \ln |z|^2)$ et le maximum est atteint quand z se trouve sur γ_0.

On calcule aussi l'expression ([2], p. 25) de la fonction de Green $G^{(A_{R_0})}$ pour la couronne $A_{R_0} = \{w \in \mathbb{C} : R_0 < |w| < 1\}$ en utilisant la construction de la densité de probabilité du mouvement brownien plan réfléchi sur γ_1 et absorbé sur γ_0. Cette densité est connue pour le mouvement brownien linéaire réfléchi en 0 et absorbé en 1 (voir par exemple [3], p. 77-79). Pour le mouvement brownien plan on doit remplacer la symétrie et la translation par l'homothétie de rapport R_0 et l'inversion de centre 0 et rapport R_0. On trouve :

$$G^{(A_{R_0})}(z, w) = \frac{1}{4\pi} \ln |w|^2 + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \ln \frac{|z - w/R_0^{4n}|^2 |z - 1/(\overline{w} R_0^{4n+2})|^2}{|z - 1/(\overline{w} R_0^{4n})|^2 |z - w/R_0^{4n+2}|^2}, \quad \text{pour } z \neq w. \tag{5.5}$$

Pour analyser la situation générale, on va passer du problème sur A_{R_0} au problème sur le domaine Ω. On utilise la famille de transformations fractionnaires linéaires complexes :

$$a_\theta(\zeta) := \frac{\zeta \cosh\theta + \sinh\theta}{\zeta \sinh\theta + \cosh\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \zeta \in \mathbb{C}. \tag{5.6}$$

Précisément, on peut montrer par calcul direct que $G^{(A_R)}(a_{-p}(z), a_{-p}(w))$, $z \neq w$, satisfait au problème (5.3) et donc, par unicité de la solution, elle coïncide avec $G^{(\Omega)}$. Ici $G^{(A_R)}$ est la fonction de Green pour la couronne $A_R = \{w \in \mathbb{C} : R < |w| < 1\}$ avec

$$R = \tanh\left(\frac{1}{4} \ln \frac{(1 + R_0)^2 - c_0^2}{(1 - R_0)^2 - c_0^2}\right) \in]0, 1[, \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{4} \ln \frac{(1 + c_0)^2 - R_0^2}{(1 - c_0)^2 - R_0^2}. \tag{5.7}$$

Pour trouver $\mathbb{E}_z(\tau)$ on utilise (5.4) :

$$\mathbb{E}_z(\tau) = -2 \int_\Omega G^{(A_R)}(a_{-p}(z), a_{-p}(w)) dw. \tag{5.8}$$

Le calcul est technique et se fait à l'aide (5.5) et de la formule de Green. L'expression que nous avons obtenu pour $\mathbb{E}_z(\tau)$ n'est pas simple ([2], p. 21) :

$$\mathbb{E}_z(\tau) = (1/2)(|z \sinh p - \cosh p|^2 - |z \cosh p - \sinh p|^2) - \ln \frac{|z \cosh p - \sinh p|\,|z\,q \sinh 2p - r|}{|z \sinh p - \cosh p|\,|z\,r - q \sinh 2p|} + (R^2/r^2) \ln \frac{|z \cosh p - \sinh p|\,|z\,r - q \sinh 2p|\,|z\,2q(1-q) \sinh 2p - s|}{|z \sinh p - \cosh p|\,|z\,q \sinh 2p - r|\,|z\,s - 2q(1-q) \sinh 2p|} + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(z, p, R), \quad (5.9)$$

où

$$q = (1 - R^2)/2,\ r = (\cosh p)^2 - R^2(\sinh p)^2,\ s = (\cosh p)^2 - R^4(\sinh p)^2. \quad (5.10)$$

La suite $s_n(z, p, R)$ est explicite et converge vers zéro, quand $n \to \infty$, uniformément pour $z \in \Omega$, avec vitesse R^{4n}. Pour $c_0 = 0$ ainsi que pour $c_0 = R_0 = 0$ on retrouve les expression précédemment évoquées (par exemple, si $c_0 = 0$ on a $p = 0$, $R = R_0$ et $r = 1$).

On utilise des approximations numériques (procédures `Fortran`) pour illustrer ces fonctions et pour localiser le maximum (voir Fig. 5.2). On constate que lorsque R_0 est petit, la position du point de maximum est proche de zéro (comme dans le cas sans obstacle). Faire croître R_0 implique un déplacement du point de maximum vers γ_1 (il s'éloigne de γ_0). Enfin, si R_0 est fixe, la distance entre le point de maximum et γ_0 semble dépendre linéairement de c_0 ; en revanche si c_0 est fixe, il semblerait que la distance soit la même pour différents valeurs de R_0.

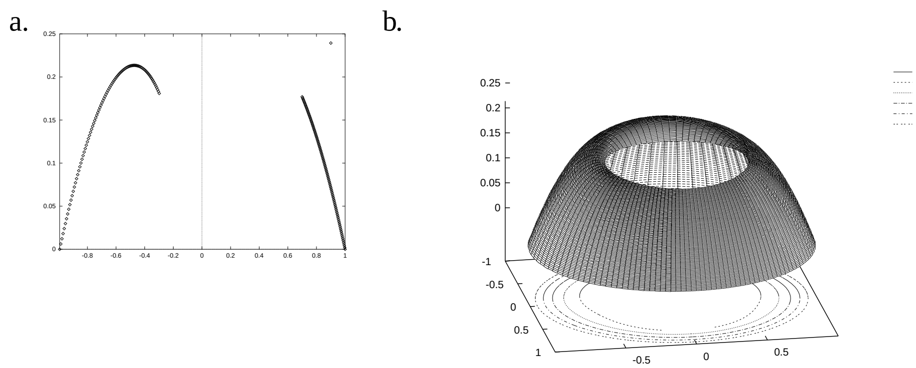

FIG. 5.2 – Le cas $c_0 = 0, 2$ et $R_0 = 0, 4$.

Comme **perspectives**, on pourrait étudier les propriétés précédentes, concernant la distance entre le point de maximum et γ_0, mais aussi un problème plus proche de la réalité mais, bien sûr, plus compliqué, celui où l'on considère des domaines moins réguliers que les disques (avec des coins, par exemple).

Références

[1] Deaconu, M. Processus stochastiques et équations aux dérivées partielles ; Applications des espaces de Besov aux processus stochastiques. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I*, 1997. http ://www.iecn.u-nancy.fr/~deaconu/these.ps

[2] Deaconu, M., Gradinaru, M., Roche, J.-R. Sojourn time of some reflected Brownian motion in the unit disk. *Probab. Math. Statis.* **20**, 19-38, 2000.

[3] Dynkin, E.B., Yushkevich, A.A. *Markov Processes, Theorems and Problems.* Plenum Press 1969.

[4] Henrici, P. *Applied and Computational Complex Analysis, III.* Wiley Interscience 1986.

[5] Lions, P.L., Sznitman, A.S. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions *Comm. Pure Appl. Math.* **37**, 511-537, 1984.

[6] Rao, M. *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Matematik Institut of Aarhus Universitet, Lecture Notes Series, No. 47, 1977.

[7] Roche, J.-R., Sokolowski, J. Numerical methods for shape identification problems. *Control and Cybernetics* **25**, 867-894, 1996.

[8] Villat, H. Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire. *Rendic. Circ. Mat. Palermo* **33**, 134-175, 1912.

Chapitre 6

Étude statistique de la volatilité stochastique

6.1 Introduction

Soit X la diffusion définie par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = x_0 + \int_0^t \theta(s, X_s)dB_s + \int_0^t \mathrm{b}(s, X_s)ds, \ t \in [0,1], \tag{6.1}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\{B_t : t \geqslant 0\}$ est un mouvement brownien réel standard.

On suppose que les fonctions θ et b sont inconnues et qu'on dispose d'une observation discrétisée de la trajectoire de X sur un intervalle de temps donné, par exemple $[0,1]$. La dérive étant considérée comme un paramètre de nuisance, peut-on construire un estimateur du coefficient de diffusion de X ? Étant donnée une fonction connue ϑ, est-il possible de décider si $\vartheta = \theta$ ou non ?

Dans la prépublication [10], qui fait aussi partie de la thèse [13], nous étudions ces deux questions : on observe X aux instants $\{i/2^n : i = 0, \ldots, [2^n t] - 1\}$ et on considère le processus primitive I ainsi que l'approximation $\widehat{I_n}$:

$$I(t) := \int_0^t \theta(s, X_s)^2 ds \ \text{ et } \ \widehat{I_n}(t) := \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \left(X_{\frac{i+1}{2^n}} - X_{\frac{i}{2^n}} \right)^2, \quad t \in [0,1], \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{6.2}$$

Nous recherchons, à l'aide du calcul stochastique, la vitesse de convergence vers I de l'approximation $\widehat{I_n}$, en tant que processus. Cette approximation est ensuite utilisée pour définir une statistique de décision qui permet de bâtir un test d'adéquation.

Signalons que la première question est classique dans le cadre paramétrique (θ une constante inconnue) et qu'il y a quelques références concernant l'estimation non-paramétrique et en utilisant des méthodes diverses.

Nous nous concentrons seulement sur le cadre non-paramétrique, c'est-à-dire celui où θ est une fonction. Lorsque le coefficient de diffusion ne dépend pas de t (*i.e.* $\theta(s, x) = \theta(x)$) on peut construire une estimation de $\theta(x)^2$ à partir d'une approximation discrète du temps local en x (voir [7]). Inversement, si on suppose que le coefficient de diffusion ne dépend pas de X_t (*i.e.* $\theta(s, x) = \theta(s)$), on peut estimer $\int_0^1 h(s)\theta(s)^2 ds$ (h étant une fonction régulière quelconque). La fonction θ^2 est ensuite reconstruite en utilisant une base d'ondelettes (voir [8]). Pour le cas de l'équation (6.1) on reprend l'idée de [8] et pour conserver l'aspect processus on va prendre $h = \mathbb{1}_{[0,t]}$: on trouve le processus primitive I.

Il est bien connu (voir [4]) que, pour chaque $t \geqslant 0$, $\widehat{I_n}(t)$ converge presque sûrement vers $I(t)$. On peut montrer, en fait, que $\lim_{n\to\infty} \widehat{I_n} = I$ presque sûrement, uniformément sur tout compact de $[0,1]$. L'intérêt central est de trouver la vitesse de convergence en loi du processus $\widehat{I_n}$. L'idée principale est de se ramener à un modèle de type semimartingale qui semble avoir un intérêt en soi.

6.2 Le modèle semimartingale

Soit

$$Y_t = x_0 + \int_0^t \sigma(s, B_s)dB_s + \int_0^t M_s ds,\ t \in [0,1], \tag{6.3}$$

où la fonction inconnue σ sera recherchée dans l'espace $C^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ et ayant des dérivées bornées par rapport à la seconde variable et où M est un processus continu adapté. Nous introduisons

$$J(t) := \int_0^t \sigma(s, B_s)^2 ds \ \text{ et } \ \widehat{J_n}(t) := \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \left(Y_{\frac{i+1}{2^n}} - Y_{\frac{i}{2^n}} \right)^2, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{6.4}$$

Si t est fixé, $\widehat{J_n}(t)$ tend presque sûrement vers $J(t)$, lorsque $n \to \infty$. On peut voir que $\widehat{J_n}$ converge vers J presque sûrement, uniformément sur tout compact de $[0,1]$ (par exemple, en utilisant des arguments similaires aux ceux utilisés dans [9] comme la régularité Hölder des trajectoires et le lemme de Borel-Cantelli). Dans [15] on trouve le même type de résultat pour le mouvement brownien standard. De plus, on donne une démonstration de la convergence en loi des processus (dans la topologie de Skorokhod, car $\widehat{J_n}$ est càdlàg) : lorsque $n \to \infty$,

$$\{2^{n/2}(\widehat{J_n}(t) - J(t)) : t \in [0,1]\} \xrightarrow{loi} \{ \sqrt{2} \int_0^t \sigma(s, \beta^{(1)}(s))^2 d\beta^{(2)}(s) : t \in [0,1]\}, \tag{6.5}$$

où $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ sont deux mouvements browniens linéaires indépendants (un mélange de lois gaussiennes). Jean Jacod nous a signalé qu'on pourrait obtenir cette convergence à partir des résultats du travail [11] non publié (voir aussi [3] et [2] pour des questions similaires). Pour un résultat qui ne fait pas intervenir la fonction inconnue $\sigma \neq 0$, on introduit $\widehat{V_n}(t) := 2^n \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} (Y_{(i+1)/2^n} - Y_{i/2^n})^4$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour chaque $t \in]0,1]$ fixé, lorsque $n \to \infty$,

$$2^{n/2} \left(\widehat{V_n}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\widehat{J_n}(t) - J(t)\right) \xrightarrow{loi} \sqrt{\frac{2}{3}}\, \mathcal{N}(0,1). \tag{6.6}$$

Ainsi la vitesse de convergence est $2^{n/2}$.

Donnons quelques idées de démonstration de (6.5). On commence par écrire $2^{n/2}(\widehat{J_n} - J)$ comme un processus $2^{n/2} j_n$ plus un reste qui converge en probabilité vers zéro, où pour $t \in [0,1]$

$$2^{n/2} j_n(t) = \int_0^t \sigma(s, B_s)dZ_n(s) \quad \text{ et } \quad Z_n(t) = 2^{n/2} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \left[(B_{\frac{i+1}{2^n}} - B_{\frac{i}{2^n}})^2 - 2^{-n} \right] \overset{loi}{=} 2^{-n/2} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} (\mathfrak{g}_i^2 - 1). \tag{6.7}$$

Ici $\{\mathfrak{g}_i : i \geqslant 0\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. On voit que, lorsque $\sigma \equiv 1$, le résultat est une conséquence du théorème central limite fonctionnel. Pour le cas où la fonction σ est quelconque, on utilise des outils classiques de calcul stochastique pour montrer que, lorsque $n \to \infty$, $(\sigma(\iota, B)^2, Z_n) \to (\sigma(\iota, \beta^{(1)})^2, \beta^{(2)})$ en loi, où $\iota(s) = s$. La conclusion s'obtient en appliquant un résultat de convergence en loi des intégrales stochastiques dans l'espace de Skorokhod (voir [12], p. 125).

Expliquons le problème de test. Soit $C_{b,0}$ l'ensemble des fonctions $\varsigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non-constantes, analytiques, ayant les deux premières dérivées bornées et telles que $\varsigma(0) = 0$. On observe les valeurs $\{Y_{i/2^n} : i = 0, \ldots, [2^n t] - 1\}$ d'une semimartingale de la forme $Y_t = \sigma(B_t)$, où $\sigma \in C_{b,0}$ est une fonction inconnue. Supposons que $\varsigma \in C_{b,0}$ connue et on voudrait bâtir un test d'adéquation pour

$$(H_s) : \sigma(|\cdot|) = \varsigma(|\cdot|) \quad \text{contre} \quad (A_s) : \sigma(|\cdot|) \neq \varsigma(|\cdot|). \tag{6.8}$$

Pour $t \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ nous introduisons :

$$\widehat{\mathit{Jint}_n}(t) := \begin{cases} 2^{-n} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} (\varsigma' \circ \varsigma^{-1})(Y_{i/2^n})^2, \text{ si } \varsigma \text{ est une bijection strictement monotone} \\ 2^{-n} \sum_{i=0}^{[2^n t]-1} F(Y_{i/2^n}), \text{ si } \varsigma \text{ vérifie } (\varsigma')^2 = F(\varsigma),\ F \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), \end{cases} \tag{6.9}$$

ainsi que la statistique de décision

$$T_n(t) := \sqrt{\frac{3}{2}}\, 2^{n/2} \left(\widehat{V_n}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{J_n}(t) - \widehat{\mathit{Jint}_n}(t)\right|, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{6.10}$$

Le test sera basé sur les deux convergences suivantes ($n \to \infty$) :

$$\textit{sous } (H_s),\ \forall t \in]0,1],\ T_n(t) \xrightarrow{loi} |\mathfrak{g}|, \ \textit{ tandis que sous } (A_s),\ \forall t \in]0,1],\ T_n(t) \xrightarrow{p.s.} \infty. \tag{6.11}$$

Ici $\mathfrak{g}$ est une variable aléatoire $\mathcal{N}(0,1)$. La première partie est une conséquence de (6.6). Pour illustrer la démonstration de la deuxième partie, considérons un des deux cas, par exemple que $(\varsigma')^2 = F(\varsigma)$ (pour l'autre cas on fait un raisonnement identique). On a, pour $t \in]0,1]$ fixé,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\widehat{J_n}(t) - \widehat{\mathit{Jint}_n}(t)\right| = \left|\int_0^t (\sigma'(B_s)^2 - F(\sigma)(B_s)^2) ds\right| \quad \text{p.s.}$$

Si on suppose que la variable aléatoire limite $\int_0^t (\sigma'(B_s)^2 - F(\sigma)(B_s)^2) ds$ est nulle avec une probabilité positive, alors sa loi n'est pas absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par un résultat classique (basé par exemple sur le calcul de Malliavin, voir par exemple [14], p. 87) on déduit que $(\sigma')^2 = F(\sigma)$ et par l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy on contredit ensuite l'hypothèse (A_s). Il s'ensuit que la variable aléatoire limite précédente est presque sûrement positive, d'où $T_n(t) \to \infty$ presque sûrement ([10], p. 14).

Considérons un exemple (procédure `Matlab`). On observe $n = \log_2(10000)$ valeurs d'une trajectoire Y donnée par Fig. 6.1. Comme $Y_t \in [-1,1]$ pour $t \in [0,1]$, on va tester si $Y_t = \sigma(B_t)$, avec une fonction σ à

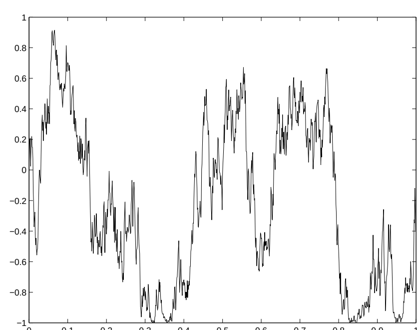

FIG. 6.1 – Semimartingale observée

valeurs dans $[-1,1]$. Par exemple, on va tester (H_s) avec $\varsigma(x) = (2/\pi) \arctan x$. On trouve $T_n(1)(\omega) = 36,99$ et comme $\mathbb{P}(|\mathfrak{g}| > 36,99) < 0,01$ on rejette (H_s).

6.3 Modèle de diffusion

On passe à l'étude du modèle (6.1) et on va supposer désormais que la fonction inconnue θ sera recherchée dans l'espace $C^{1,2}([0,1] \times \mathbb{R};\mathbb{R})$ et admettant des dérivées bornées par rapport à la seconde variable et que $\mathtt{b} \in C^{1,1}([0,1] \times \mathbb{R};\mathbb{R})$. De plus, pour des raisons techniques on a besoin de supposer que

$\inf_{x\in\mathbb{R}} |\theta(x)| > 0$ (θ est uniformément elliptique). On introduit les fonctions g et f par

$$g(t,x) := \int_{x_0}^{x} \frac{dy}{\theta(t,y)}, \quad G(t,x) := (t, g(t,x)), \quad F(t,x) := G^{-1}(t,x) =: (t, f(t,x)) \tag{6.12}$$

(F existe par le théorème de Hadamard-Lévy [1], p.130) et on pose $\widetilde{B}_t := g(t, X_t) \Leftrightarrow X_t = f(t, \widetilde{B}_t)$. Par la formule d'Itô on peut voir que $\widetilde{B}_t = B_t - \int_0^t \mathsf{c}_s ds$, où $\mathsf{c}_s := -(\mathsf{b}/\theta - (\partial\theta/\partial x)/2 + (\partial g/\partial t))(s, X_s)$. Ensuite, par le théorème de Girsanov on peut déduire que $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien sous une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ donnée par $d\widetilde{\mathbb{P}} = \exp(Z)d\mathbb{P}$. Ici on note $Z := \int_0^1 \mathsf{c}_s dB_s - (1/2)\int_0^t \mathsf{c}_s^2 ds$ et $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(e^Z) = 1$, après vérifi cation du critère de Novikov (basée sur les hypothèses sur θ et b). La diffusion X est ainsi reliée, par un changement de probabilité, à Y donné par une expression de type (6.3) :

$$dX_t = \theta(t, X_t)dB_t + \mathsf{b}(t, X_t)dt = \theta(t, f(t, \widetilde{B}_t))d\widetilde{B}_t + M_t dt, \quad M_t = \{[(\partial\theta/\partial x)/2 - (\partial g/\partial t)]\theta\}(t, f(t, \widetilde{B}_t)).$$

On applique (6.5) et on obtient la convergence en loi des processus (dans la topologie de Skorokhod), lorsque $n \to \infty$:

$$\{2^{n/2}(\widehat{I_n}(t) - I(t)) : t \in [0,1]\} \xrightarrow{loi} \{\sqrt{2}\int_0^t \theta(s, f(s, \beta^{(1)}(s)))^2 d\beta^{(2)}(s) : t \in [0,1]\}, \text{ sous } \widetilde{\mathbb{P}}, \tag{6.13}$$

où $\beta^{(1)}$ et $\beta^{(2)}$ sont deux mouvements browniens linéaires indépendants sous $\widetilde{\mathbb{P}}$ et où f est donnée par (6.12). Lorsqu'on note $\widehat{U_n}(t) := 2^n \sum_{i=0}^{[2^n t]-1}(X_{(i+1)/2^n} - X_{i/2^n})^4$, $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors, par (6.6), pour chaque $t \in]0,1]$ fi xé, quand $n \to \infty$,

$$2^{n/2}\left(\widehat{U_n}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\widehat{I_n}(t) - I(t)\right) \xrightarrow{loi} \sqrt{\frac{2}{3}}\mathcal{N}(0,1), \text{ sous } \widetilde{\mathbb{P}}. \tag{6.14}$$

(6.14) donne la vitesse $2^{n/2}$ de convergence en loi sous $\widetilde{\mathbb{P}}$. La relation (6.15) ci-dessous donne une idée sur la vitesse de convergence en loi sous $\mathbb{P}$ (essentiellement la même), tandis que (6.16) permet de construire des intervalles de confi ance asymptotiques pour $I(t)$: soit $t \in]0,1]$ fi xé et soit $\gamma > \frac{1}{2}$; alors, pour tout $R > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2^{\gamma n}\left(\widehat{U_n}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\widehat{I_n}(t) - I(t)\right| \geqslant R\right) = 1 \tag{6.15}$$

et pour tout $\eta > 0$,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(2^{n/2}\left(\widehat{U_n}(t)\right)^{-\frac{1}{2}}\left|\widehat{I_n}(t) - I(t)\right| \geqslant \eta\right) \leqslant \phi_\kappa^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|x|\geqslant\sqrt{\frac{3}{2}}\eta} e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right). \tag{6.16}$$

Ici $\kappa > 0$ est tel que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z^2) \leqslant \kappa^2$ et $\phi_\kappa(x) = x\exp(-\kappa/\sqrt{x})$. Des résultats concernant la convergence en loi sont démontrés dans [6] et nous ont été signalés à la fi n de notre travail par un rapporteur anonyme.

Enfi n, on va construire un test d'adéquation pour le modèle de diffusion. On note $\mathcal{C}_{b,\pm}$ l'ensemble des fonctions $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non-constantes, analytiques, ayant les deux premières dérivées bornées et qui ne s'annulent pas. On observe $\{X_{i/2^n} : i = 0, \ldots, [2^n t] - 1\}$, où X est la diffusion donnée par (6.1) avec le coefficient de diffusion qui ne dépend pas de t, $\theta \in \mathcal{C}_{b,\pm}$ inconnue et $\mathsf{b} \in \mathrm{C}^{1,1}([0,1]\times\mathbb{R};\mathbb{R})$ connue ou inconnue. On se donne $\vartheta \in \mathcal{C}_{b,\pm}$ connue et on voudrait tester

$$(H_d) : \theta^2 = \vartheta^2 \quad \text{contre} \quad (A_d) : \theta^2 \neq \vartheta^2. \tag{6.17}$$

Soit, pour $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\widehat{I\mathrm{int}_n}(t) := 2^{-n}\sum_{i=0}^{[2^n t]-1} \vartheta(X_{\frac{i}{2^n}})^2, \quad t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{6.18}$$

ainsi que la statistique de décision

$$S_n(t) := \sqrt{\frac{3}{2}} 2^{n/2} \left(\widehat{U_n}(t)\right)^{-\frac{1}{2}} \left|\widehat{I_n}(t) - \widehat{I\text{int}_n}(t)\right|, \quad t \in]0,1],\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{6.19}$$

Alors, par la même méthode de démonstration que pour (6.11), on montre que ([10], p. 14)

$$\begin{gathered} \textit{sous } (H_d),\ \forall t \in]0,1], \forall \eta > 0,\ \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(S_n(t) \geqslant \eta\right) \leqslant \phi_\kappa^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x|\geqslant\eta} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right), \\ \textit{tandis que sous } (A_d),\ \forall t \in]0,1],\ S_n(t) \xrightarrow{p.s.} \infty,\ \textit{lorsque } n \to \infty \end{gathered} \tag{6.20}$$

où ϕ_κ est comme dans (6.16).

Si on observe $n = \log_2(10000)$ valeurs d'une trajectoire X (voir Fig. 6.2) sur l'intervalle $[0, 10]$. On va

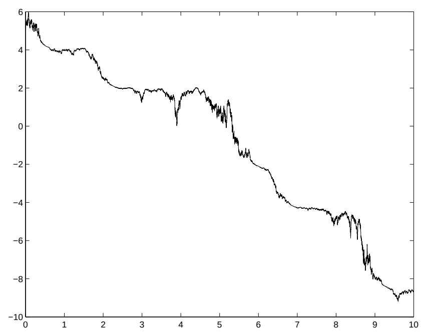

Fig. 6.2 – Diffusion observée

tester (H_d) avec $\vartheta(x) = 1 + 2\cos x$ et on veut savoir si X vérifie $X_0 = 5$ et $dX_t = (1 + 2\cos X_t)dB_t - dt$, $t \in [0, 10]$. On trouve $S_n(10)(\omega) = 115,26$ et comme $\phi_{51}^{-1}\left((1/\sqrt{2\pi})\int_{|x|\geqslant 115,26} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right) < 0,01$ on rejette (H_d) (procédure `Matlab`).

6.4 Perspectives

Plusieurs perspectives de ce travail (en révision) sont possibles. Première question est : peut-on avoir des conclusions raisonnables des tests basés sur l'observation d'un seul instant t ? Il faudrait préciser encore mieux le problème de test pour une utilisation pratique : comment doit-on modifier ces tests pour pouvoir valider des modèles ? En effet, les deux tests décrits peuvent servir surtout pour rejeter des modèles. On présente des simulations avec `Matlab`, basés sur 10000 observations. En réalité on dispose plutôt de 365 jours d'observations (par exemple, en finance). Plus précisément, pour 10, 100 ou 300 observations peut-on toujours obtenir des conclusions ?

Une autre direction serait de préciser mieux la convergence en loi, sous la probabilité $\mathbb{P}$, dans le cas de la diffusion : quel type de convergence et quelle vitesse ? Les résultats (6.15)-(6.16) donnent seulement un aperçu. Plus technique, la question suivante est légitime : peut-on remplacer la condition assez restrictive $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z^2) \leqslant \kappa^2$ par une condition d'intégrabilité $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(|Z|) < \infty$? Au même niveau, une autre question serait : peut-on donner une preuve directe de la convergence en loi, dans l'espace de Skorokhod, de $2^{n/2} j_n$ de (6.7) (basée, peut-être, sur la convergence en loi des marginales de rang fini et un critère de tension) ? Aussi : peut-on trouver une autre approche qui permettrait d'enlever l'hypothèse d'uniforme ellipticité ?

Enfin, on pourrait reprendre les idées du modèle semimartingale pour étudier une intégrale stochastique de la forme $\int_0^t \sigma(s, B_s^{\mathtt{H}})dB_s^{\mathtt{H}}$ où $B^{\mathtt{H}}$ est le mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst $\mathtt{H}$, à l'aide des outils déjà utilisés dans le travail [9] (voir aussi le travail récent [5]). L'étude des solutions des équations différentielles stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire serait une suite naturelle.

Références

[1] Abraham, R.H., Marsden, J.E., Ratiu, T.S. *Manifolds, tensor analysis, and applications.* 2nd edition. Springer Verlag 1988.

[2] Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. Realized power variation and stochastic volatility models. *Bernoulli* **9**, 243-265, 2003.

[3] Becker, E. Théorèmes limites pour des processus discrétisés. *Thèse Université de Paris VI*, 1998.

[4] Berman, S. Sign-invariant random variables and stochastic processes with sign-invariant increments. *Trans. Amer. Math. Soc.* **119**, 216–243, 1965.

[5] Corcuera, J.M., Nualart, D., Woerner, J.H.C. Power variation of some integral long-memory processes. *Preprint no. 373, Universitat de Barcelona*, 2005 http ://www.imub.ub.es/publications/preprints/index2005.html

[6] Delattre, S., Jacod, J. A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process, in the presence of round-off errors. *Bernoulli* **3**, 1-28, 1997.

[7] Florens-Zmirou, D. On estimating the diffusion coefficient from discrete observations. *J. Appl. Prob.* **30**, 790-804, 1993.

[8] Genon-Catalot, V., Laredo, C., Picard, D. Non-parametric estimation of the diffusion coefficient by wavelets methods. *Scand. J. Statist.* **19**, 317-335, 1992.

[9] Gradinaru, M., Nourdin. I. Approximation at first and second order of the *m*-variation of the fractional Brownian motion. *Electron. J. Probab.* **8**, no. 18, 1-26, 2003.

[10] Gradinaru, M., Nourdin. I. Stochastic volatility : approximation and goodness-of-fit test. *Prépublication no. 53 bis, Institut Élie Cartan*, 2003. http ://www.iecn.u-nancy.fr/Preprint/publis/preprints-2003.html

[11] Jacod, J. Limit of random measures associated with the increments of a Brownian semimartingale. *Prépublication no. 120, Université de Paris VI*, 1992.

[12] Jakubowski, A., Mémin, J., Pagès, G. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields* **81**, 111-13, 1989.

[13] Nourdin, I. Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire ; Estimation non-paramétrique de la volatilité et test d'adéquation. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I*, 2004. http ://www.iecn.u-nancy.fr/ nourdin/PagePerso/these.pdf

[14] Nualart, D. *The Malliavin calculus and related topics.* Springer Verlag 1995.

[15] de la Vega, F.W. On almost sure convergence of quadratic Brownian variation. *Ann. Probab.* **2**, 551-552, 1974.

Bibliographie générale

1. Abraham, R.H., Marsden, J.E., Ratiu, T.S. *Manifolds, tensor analysis, and applications.* 2nd edition. Springer Verlag 1988.
2. Alòs, E., Léon, J.A., Nualart, D. Stratonovich calculus for fractional Brownian motion with Hurst parameter less than $\frac{1}{2}$. *Taiwanese J. Math.* **5**, 609-632, 2001.
3. Alòs, E., Mazet, O., Nualart, D. Stochastic calculus with respect to Gaussian processes. *Ann. Probab.* **29**, 766-801, 2001.
4. Alòs, E., Nualart, D. Stochastic integration with respect to the fractional Brownian motion. *Stoch. Stoch. Rep.* **73**, 129-152, 2003.
5. Azais, J.-M., Wschebor, M. Oscillation presque sûre de martingales continues. *Séminaire de Probabilités XXXI*, Lect. Notes in Math. **1655**, 69-76, Springer 1997.
6. Bafico, R., Baldi, P. Small random perturbations of Peano phenomena. *Stochastics* **6**, 279-292, 1981/1982.
7. Barles, G. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi.* Springer Verlag 1994.
8. Barndorff-Nielsen, O.E., Shephard, N. Realized power variation and stochastic volatility models. *Bernoulli* **9**, 243-265, 2003.
9. Barndorff-Nielsen, O.E., Thorbjornsen, S. Regularising mappings of Lévy measures. *Preprint no. 20, University of Southern Denmark*, 2004. http ://bib.mathematics.dk/preprint.php ?id=DMF-2004-07-001
10. Bass, R.F., Perkins, E.A. Degenerate stochastic differential equations with Hölder continuous coefficients and super-Markov chains. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355**, 373-405, 2002.
11. Baxter, M., Williams, D. Symmetry characterizations of certain distributions 1 and 2. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **111**, 387-399 and **112**, 599-611, 1992.
12. Becker, E. Théorèmes limites pour des processus discrétisés. *Thèse Université de Paris VI*, 1998.
13. Ben Arous, G., Gradinaru, M. Normes hölderiennes et support de diffusions. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **316**, 283-286, 1993.
14. Ben Arous, G., Gradinaru, M., Ledoux M. Hölder norms and the support theorem for diffusions. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **30**, 415-436, 1994.
15. Ben Arous, G., Gradinaru, M. Singularités des fonctions de Green hypoelliptiques. *Ann. Math. Blaise Pascal* **3**, 23-32, 1996.
16. Ben Arous, G., Gradinaru, M. Singularities of hypoelliptic Green functions. *Potential Analysis* **8**, 217-258, 1998.
17. Bender, C. An Itô formula for generalized functionals of a fractional Brownian motion with arbitrary Hurst index. *Stochastic Process. Appl.* **104**, 81-106, 2003.

18. van den Berg, M. Gaussian bounds for the Dirichlet heat kernel. *J. Funct. Anal.* **88**, 267-278, 1990.

19. Berman, S. Sign-invariant random variables and stochastic processes with sign-invariant increments. *Trans. Amer. Math. Soc.* **119**, 216–243, 1965.

20. Bertoin, J., Yor, M. On subordinators, self-similar Markov processes and some factorizations of the exponential variable. *Elect. Comm. in Probab.* **6**, 95-106, 2001.

21. Berzin-Joseph, C., Léon, J.R., Ortega, J. Increments and crossings for the Brownian bridge : weak convergence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math.* **327**, 587-592, 1998.

22. Biagini, F., Øksendal, B. Forward integrals and an Itô formula for fractional Brownian motion. *Preprint no. 22, University of Oslo*, 2004 http ://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2004/22-04.html

23. Carmona, Ph., Coutin, L., Montseny, G. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **39**, 27-68, 2003.

24. Cheridito, P., Nualart, D. Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter $H \in (0, 1/2)$. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 1049-1081, 2005.

25. Corcuera, J.M., Nualart, D., Woerner, J.H.C. Power variation of some integral long-memory processes. *Preprint no. 373, Universitat de Barcelona*, 2005 http ://www.imub.ub.es/publications/preprints/index2005.html

26. Coutin, L., Nualart, D., Tudor, C. Tanaka formula for the fractional Brownian motion. *Stoch. Proc. Appl.* **94**, 301-315, 2001.

27. Da Prato, G., Debussche, A. Absolute continuity of the invariant measures for some stochastic PDEs. *J. Stat. Phys.* **115**, 451-468, 2004.

28. Da Prato, G., Röckener, M. Weak solutions to stochastic porous media equations. *J. Evol. Equ.* **4**, 249-271, 2004.

29. Da Prato, G., Zabczyk, J. *Stochastic equations in infinite dimensions.* Cambridge University Press, 1992.

30. Darling, D.A., Kac, M. On occupation times for Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.* **84**, 444-458, 1957.

31. Deaconu, M. Processus stochastiques et équations aux dérivées partielles ; Applications des espaces de Besov aux processus stochastiques. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I*, 1997. http ://www.iecn.u-nancy.fr/~deaconu/these.ps

32. Deaconu, M., Gradinaru, M., Roche, J.-R. Sojourn time of some reflected Brownian motion in the unit disk. *Probab. Math. Statis.*, **20**, 19-38, 2000.

33. Decreusefond, L. Stochastic integration with respect to Volterra processes. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 123-149, 2005.

34. Decreusefond, L., Ustunel, A. S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion *Potential Analysis* **10**, 177-214, 1999.

35. Delattre, S., Jacod, J. A central limit theorem for normalized functions of the increments of a diffusion process, in the presence of round-off errors. *Bernoulli* **3**, 1-28, 1997.

36. Deuschel, J.D., Stroock, D.W. *Large Deviations.* Academic Press 1989.

37. Donati-Martin, C., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M. On constants related to the choice of the local time at 0, and the corresponding Itô measure for Bessel processes with dimension $d = 2(1 - \alpha)$, $0 < \alpha < 1$. *Prépublication no. 26, Institut Élie Cartan*, 2005 http ://www.iecn.u-nancy.fr/Preprint/publis/preprints-2005.html

38. Duncan, T.E., Hu, Y., Pasik-Duncan, B. Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory. *SIAM J. Control Optim.* **38**, 582-612, 2000.

39. Dynkin, E.B., Yushkevich, A.A. *Markov Processes, Theorems and Problems.* Plenum Press 1969.

40. Florens-Zmirou, D. On estimating the diffusion coefficient from discrete observations. *J. Appl. Prob.* **30**, 790-804, 1993.

41. Framstad, N.C. Arbitrage, fractional Brownian motion and transactions costs. *Preprint no. 16, University of Oslo*, 2002 http ://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2002/16-02.html

42. Genon-Catalot, V., Laredo, C., Picard, D. Non-parametric estimation of the diffusion coefficient by wavelets methods. *Scand. J. Statist.* **19**, 317-335, 1992.

43. Gnedin, A., Pitman, J. Regenerative composition structures. *Ann. Probab.* **33**, 445-479, 2005.

44. Gradinaru, M. On the derivative with respect to a function with applications to Riemann-Stieltjes integral. *Seminar on Mathematical Analysis, 1989-1990, Babes-Bolyai University, Cluj-Napoca*, **90-7**, 21-28, 1990.

45. Gradinaru, M. Fonctions de Green et support des diffusions hypoelliptiques, *Thèse Université de Paris-Sud*, 1995 http ://www.iecn.u-nancy.fr/~gradinar/these.pdf

46. Gradinaru, M., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M. The laws of Brownian local time integrals. *Comput. Appl. Math.* **18**, 259-331, 1999.

47. Gradinaru, M., Roynette, B., Vallois, P., Yor, M. Abel transform and integrals of Bessel local times. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **35**, 531-572, 1999.

48. Gradinaru, M., Herrmann, S. Roynette, B. A singular large deviations principle. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **37**, 555-580, 2001.

49. Gradinaru, M., Russo, F., Vallois, P. Generalized covariations, local time and Stratonovich Itô's formula for fractional Brownian motion with Hurst index $H \geqslant \frac{1}{4}$. *Ann. Probab.* **31**, 1772-1820, 2003.

50. Gradinaru, M., Nourdin. I. Approximation at first and second order of the m-variation of the fractional Brownian motion. *Electron. J. Probab.* **8**, no. 18, 1-26, 2003.

51. Gradinaru, M., Nourdin. I. Stochastic volatility : approximation and goodness-of-fit test. *Prépublication no. 53 bis, Institut Élie Cartan*, 2003. http ://www.iecn.u-nancy.fr/Preprint/publis/preprints-2005.html

52. Gradinaru, M., Nourdin, I., Russo, F., Vallois, P. m-order integrals and generalized Itô's formula ; the case of a fractional Brownian motion with any Hurst index. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **41**, 781-806, 2005.

53. Gradinaru, M., Nourdin, I., Tindel, S. Itô's and Tanaka's type formulae for the stochastic heat equation : the linear case. *J. Funct. Anal.* **228**, 114-143, 2005.

54. Henrici, P. Applied and Computational Complex Analysis, III. Wiley Interscience 1986.

55. Herrmann, S. Étude de processus de diffusion. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I*, 2001. http ://www.iecn.u-nancy.fr/~herrmann/essai.pdf

56. Herrmann, S. Phénomène de Peano et grandes déviations. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **332**, 1019-1024, 2001.

57. Istas, J., Lang, G. Quadratic variations and estimation of the local Hölder index of a Gaussian process. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **33**, 407-436, 1997.

58. Itô, K., McKean, H.P. *Diffusion processes and their sample paths.* 2nd printing. Springer Verlag 1974.

59. Jacod, J. Limit of random measures associated with the increments of a Brownian semimartingale. *Prépublication no. 120, Université de Paris VI*, 1992.

60. Jakubowski, A., Mémin, J., Pagès, G. Convergence en loi des suites d'intégrales stochastiques sur l'espace $\mathbb{D}^1$ de Skorokhod. *Probab. Theory Related Fields* **81**, 111-13, 1989.

61. Jona-Lasinio, G. Large deviations for weak solutions of stochastic differential equations. *Ideas and methods in mathematical analysis, stochastics and applications* (Oslo 1988), 162-167, Cambridge University Press 1992.

62. Kac, M. On some connections between probability theory and differential and integral equations. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium. of Math. Statist. Probab. 1950*, University of California Press, 189-215, 1951.

63. León, J.A., Nualart, D. Stochastic evolution equations with random generators. *Ann. Probab.* **26**, 149-186, 1998.

64. Lions, P.L., Sznitman, A.S. Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions *Comm. Pure Appl. Math.* **37**, 511-537, 1984.

65. Nourdin, I. Calcul stochastique généralisé et applications au mouvement brownien fractionnaire ; Estimation non-paramétrique de la volatilité et test d'adéquation. *Thèse Université Henri Poincaré Nancy I* 2004. http ://www.iecn.u-nancy.fr/~nourdin/PagePerso/these.pdf

66. Nourdin, I. Schémas d'approximation associés à une équation différentielle dirigée par une fonction hölderienne ; cas du mouvement brownien fractionnaire. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340**, 611-614, 2005.

67. Nualart, D. *The Malliavin calculus and related topics.* Springer Verlag 1995.

68. Nualart, D. Stochastic integration with respect to fractional Brownian motion and applications. *Contemporary Mathematics* **336**, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

69. Nualart, D., Pardoux, E. White noise driven quasilinear SPDEs with reflection. *Probab. Theory Related Fields* **93**, 77-89, 1992.

70. Nualart, D., Vives, J. Smoothness of Brownian local times and related functionals. *Potential Anal.* **1**, 257-263, 1992.

71. Øksendal, B. Fractional Brownian motion in finance. *Preprint no. 28, University of Oslo*, 2003 http ://www.math.uio.no/eprint/pure_math/2003/28-03.html

72. Qian, Z.M., Russo, F., Zheng, W. Comparison theorem and estimates for transition probability densities of diffusion processes. *Probab. Theory Related Fields* **127**, 388-406, 2003.

73. Qian, Z.M., Zheng, W. Sharp bounds for transition probability densities of a class of diffusions. *C.R. Math. Acad. Sci. Paris* **335**, 953-957, 2002.

74. Qian, Z.M., Zheng, W. A representation formula for transition probability densities of diffusions and applications. *Stochastic Process. Appl.* **111**, 57-76, 2004.

75. Rajeev, B., Yor, M. Local times and almost sure convergence of semimartingales. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **31**, 653-657, 1995.

76. Rao, M. *Brownian Motion and Classical Potential Theory*. Matematik Institut of Aarhus Universitet, Lecture Notes Series, No. 47, 1977.

77. Revuz, D., Yor, M. *Continuous martingales and Brownian motion.* 3rd edition. Springer Verlag 2005.

78. Rice, S.O. The integral of the absolute value of the pinned Wiener process calculation of its probability. *Ann. Probab.*, **10**, 240-243, 1982.

79. Roche, J.-R., Sokolowski, J. Numerical methods for shape identification problems. *Control and Cybernetics*, **25**, 867-894, 1996.

80. Rogers, L.C.G. Arbitrage with fractional Brownian motion. *Math. Finance* **7**, 95-105, 1997.

81. Rosenblatt, M. On a class of Markov processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71**, 120-135, 1951.

82. Russo, F., Vallois, P. Forward, backward and symmetric stochastic integration. *Probab. Theory Relat. Fields* **97**, 403-421, 1993.

83. Russo, F., Vallois, P. The generalized covariation process and Itô formula. *Stochastic Processes and their applications* **59**, 81-104, 1995.

84. Sato, S., Yor, M. Computations of moments for discounted Brownian additive functionals. *J. Math. Kyoto* **38**, 475-486, 1998.

85. Shepp, L.A. On the integral of the absolute value of the pinned Wiener process. *Ann. Probab.*, **10**, 234-239, 1982.

86. Taqqu, M.S. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **50**, 53-83, 1979.

87. de la Vega, F.W. On almost sure convergence of quadratic Brownian variation. *Ann. Probab.* **2**, 551-552, 1974.

88. Villat, H. Le problème de Dirichlet dans une aire annulaire. *Rendic. Circ. Mat. Palermo*, **33**, 134-175, 1912.

89. Yor, M. Sur quelques approximations d'intégrales stochastiques. *Séminaire de Probabilités XI*, Lect. Notes in Math. **581**, 518-528, Springer Verlag 1977.

90. Young, L.C. An inequality of the Hölder type, connected with Stieltjes integration. *Acta Math.* **67**, 251-282, 1936.

91. Walsh, J.B. An introduction to stochastic partial differential equations. *École d'été de probabilités de Saint-Flour, XIV,1984*, 265–439, Lecture Notes in Math., 1180, Springer Verlag, 1986.

92. Zähle, M. Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus I. *Probab. Theory Relat. Fields* **111**, 333-374, 1998.

93. Zambotti, L. A reflected stochastic heat equation as symmetric dynamics with respect to the 3-*d* Bessel bridge. *J. Funct. Anal.* **180**, 195-209, 2001.

94. Zambotti, L. Itô-Tanaka formula for SPDEs driven by additive space-time white noise. *Preprint*, 2004.

Mihai GRADINARU : Thèse d'Habilitation à diriger des recherches
Spécialité : Mathématiques Appliquées

Titre : Applications du calcul stochastique à l'étude de certains processus

Résumé : Ce document contient la synthèse des travaux de recherche effectués entre 1996 et 2005, après la thèse de doctorat de l'auteur, et concerne l'étude fine de certains processus stochastiques : mouvement brownien linéaire ou plan, processus de diffusion, mouvement brownien fractionnaire, solutions d'équations différentielles stochastiques ou d'équations aux dérivées partielles stochastiques.
La thèse d'habilitation s'articule en six chapitres correspondant aux thèmes suivants : étude des intégrales par rapport aux temps locaux de certaines diffusions, grandes déviations pour un processus obtenu par perturbation brownienne d'un système dynamique dépourvu de la propriété d'unicité des solutions, calcul stochastique pour le processus gaussien non-markovien non-semimartingale mouvement brownien fractionnaire, étude des formules de type Itô et Tanaka pour l'équation de la chaleur stochastique, étude de la durée de vie du mouvement brownien plan réfléchi dans un domaine à frontière absorbante et enfin, estimation non-paramétrique et construction d'un test d'adéquation à partir d'observations discrètes pour le coefficient de diffusion d'une équation différentielle stochastique.
Les approches de tous ces thèmes sont probabilistes et basées sur l'analyse stochastique. On utilise aussi des outils d'équations différentielles, d'équations aux dérivées partielles et de l'analyse.

Mots clés : mouvement brownien, processus de Bessel et leurs temps locaux, transformée de Laplace, opérateur d'intégration fractionnaire d'Abel, théorèmes limites, perturbations aléatoires des systèmes dynamiques, pont brownien, grandes déviations, solutions de viscosité pour des équations de Hamilton-Jacobi, mouvement brownien fractionnaire et son temps local, m-variations et m-intégrales, formules d'Itô et de Tanaka, équation de la chaleur stochastique, calcul de Malliavin, mouvement brownien plan réfléchi, problèmes aux limites mixtes, transformations fractionnaires linéaires complexes, simulations numériques, volatilité stochastique, estimation non-paramétrique, test d'adéquation.

Classification (MSC 2000) : 60J65, 60J55, 60G15, 60H05, 60H10, 60H15, 60F10, 60H07, 60E05, 60F05, 60F15, 60G18, 60G48, 60H20, 60H30, 62M05, 62M02, 62L20 ; 34F05, 34L10, 35G20, 35G30, 35J25, 35K05, 35K20, 70H20, 30C35, 30E25, 45E10.

Title : Applications of the stochastic calculus to the study of certain processes

Abstract : This document contains an overview about the research performed between 1996 and 2005, after the Ph.D. Thesis of the author, and concerns the sharp study of some stochastic processes : linear or planar Brownian motion, diffusion processes, fractional Brownian motion, solutions of stochastic differential equations or stochastic partial differential equations.
The thesis contains six chapters each corresponding to one of the following subjects : study of integrals with respect to local time of some diffusions, large deviations for a process obtained as a Brownian perturbation of a dynamical system without uniqueness of solutions, stochastic calculus for the Gaussian non-Markov non-semimartingale fractional Brownian motion process, study of Itô's and Tanaka's type formulae for the stochastic heat equation, study of the lifetime of the planar Brownian motion reflected inside of a domain having an absorbing boundary and finally, non-parametric estimation and construction of a goodness-of-fit test based on discrete time observations for the diffusion coefficient of a stochastic differential equation.
The approaches of all these subjects are probabilistic and they are based upon the stochastic analysis. Some tools of differential equations, partial differential equations and analysis are also employed.

Keywords : Brownian motion, Bessel process and their local times, Laplace transform, Abel fractional integral operator, limit theorems, random perturbation of dynamical systems, Brownian bridge, large deviations, viscosity solutions for Hamilton-Jacobi equations, fractional Brownian motion and its local time, m-variations and m-integrals, Itô's and Tanaka's formulae, stochastic heat equation, Malliavin calculus, reflected planar Brownian motion, mixed limit problems, complex linear fractional transformations, numerical computations, stochastic volatility, non-parametric estimation, goodness-of-fit test.