Théorie des signaux / Automatique théorique

Analyse non standard du bruit

Michel FLIESS [a],

[a] *Projet ALIEN, INRIA Futurs & Équipe MAX, LIX (CNRS, UMR 7161), École polytechnique, 91128 Palaiseau, France*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par Yves Meyer

Résumé

La formalisation non standard, due à P. Cartier et Y. Perrin, des oscillations rapides fournit un cadre mathématique adéquat pour de nouvelles techniques d'estimation non asymptotiques, ne nécessitant pas l'analyse statistique habituelle des bruits entachant tout capteur. On en tire diverses conséquences sur les bruits multiplicatifs, la largeur des fenêtres d'estimations paramétriques et les erreurs en rafales. *Pour citer cet article : M. Fliess, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

Abstract

Noises: a nonstandard analysis. Thanks to the nonstandard formalization of fast oscillating functions, due to P. Cartier and Y. Perrin, an appropriate mathematical framework is derived for new non-asymptotic estimation techniques, which do not necessitate any statistical analysis of the noises corrupting any sensor. Various applications are deduced for multiplicative noises, for the length of the parametric estimation windows, and for burst errors. *To cite this article: M. Fliess, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).*

Email address: `Michel.Fliess@polytechnique.edu` (Michel FLIESS).

Abridged English version

1 Introduction

Recent works (see, *e.g.*, [5,6,7,8,9,10,11,12]) in signal processing and automatic control yield quite efficient estimation techniques, which are non-asymptotic and do not necessitate any statistical treatment of the noises corrupting any sensor. An appropriate mathematical framework is provided by the nonstandard formalization, which is due to Cartier and Perrin [2], of fast oscillating, or fluctuating, functions. Various applications are derived for multiplicative noises, for the lengths of the estimation windows, and for burst errors.

2 Noises

Let ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{R}$ be the usual nonstandard extensions of $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Replace $[0,1]^{1+D} \subset \mathbb{R}^{1+D}$ by the hyperfinite set $\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \times \mathrm{I}_1 \times \ldots \times \mathrm{I}_D$, $\mathrm{I}_\iota = \{0, \frac{1}{N_\iota}, \ldots, \frac{N_\iota - 1}{N_\iota}, 1\}$, where $N_\iota \in {}^*\mathbb{N}$, $\iota = 0, 1, \ldots, D$, $D \in \mathbb{N}$, is unlimited. The function $\lambda_\iota : \mathrm{I}_\iota \backslash \{1\} \to {}^*\mathbb{R}$, $\frac{k_\iota}{N_\iota} \mapsto \frac{1}{N_\iota}$, $0 \leq k_\iota \leq N_\iota - 1$, is the *Lebesgue measure* of I_ι [2]. The Lebesgue measure $\lambda = \lambda_0 \times \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_D$ of I is clear. See [2] for the notions of *quadrable* sets and of *Lebesgue integrability.* A S-integrable function $f : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ is *fast oscillating* [2], or *fast fluctuating*, if, and only if, any integral $\int_A f d\lambda$, where $A \subseteq \mathrm{I}$ is quadrable, is infinitesimal. Let $m : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ be a Lebesgue integrable function. A *noise*, of *mean* m, is a S-integrable function $\mathfrak{n} : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ such that, $\forall\ \iota = 0, 1, \ldots, D$, $\forall\ \xi_\kappa \in \mathrm{I}_\kappa$, $\kappa \neq \iota$, the projection $\mathfrak{n}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_D) - m(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_D) : \mathrm{I}_\iota \to {}^*\mathbb{R}$ is fast oscillating. If it is possible to take $m \equiv 0$, $\mathfrak{n}$ is said to be *zero-mean.*

3 Applications

3.1 Multiplicative and additive noises

Let $x : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ be a function of class S^1 [3], which we call a *signal.* Let the sensor $y = \mathfrak{n}_1 x + \mathfrak{n}_2$ be corrupted by a multiplicative noise $\mathfrak{n}_1$, of mean 1, and an additive noise $\mathfrak{n}_2$, of arbitrary mean.

Proposition 3.1 *$y = x + \mathfrak{n}$ where $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_2 + (\mathfrak{n}_1 - 1)x$ is a noise of the same mean as $\mathfrak{n}_2$.*

Set $D = 0$. Assume that the the shadow of the signal $x : \mathrm{I}_0 \to \mathbb{R}$ is analytic. Assume also that the constant parameter $\theta \in \mathbb{R}$ is *linearly identifiable* [6,10]. It leads to the estimator (4) where $[\theta]_e(t)$ is the estimate of θ at t; $[0, t]$ is the *estimation window* of *length* t; the shadow $\bar{\delta}(t)$ of $\delta(t)$ is an analytic function $[0, 1] \to \mathbb{R}$, called *divisor*, such that $\bar{\delta}(0) = 0$; $\mathfrak{n}$ is an additive noise.

Proposition 3.2 *Assume that $\mathfrak{n}$ is zero-mean. If the length of the estimation window does not belong to the monads of the divisor's zeros, the estimate $[\theta]_e(t)$ belongs to the monad of θ. The length is then appreciable. If the length is infinitesimal, $[\theta]_e(t)$ does not belong necessarily to the monad of θ.*

The parameter, often called *symbol*, which has to be *demodulated* (see, *e.g.*, [17,21]) is generally associated to a signal satisfying a linear differential equation with time-polynomial coefficients. *Burst errors* may be understood in our setting in the following way: contrarily to Proposition 3.2 the noise is not zero-mean. Since the transmission duration of any signal is short, we may assume that the shadow of the unknown mean $m(t)$ is a polynomial $p(t)$ of a given limited degree. Consider p as a structured perturbation which may be annihilated [6,10] by some given limited power of $\frac{d}{dt}$.

Proposition 3.3 *Assume that the shadow of the signal is not annihilated by a limited power of $\frac{d}{dt}$. There exists then an estimate $[\theta]_e(t)$ of the symbol which belongs to the monad of θ, for any t which does not belong to the monad of a divisor's zero.*

1 Introduction

Des travaux récents (voir, par exemple, [5,6,7,8,9,10,11,12]) conduisent à des techniques d'estimation non asymptotiques, efficaces en signal et en automatique, sans aucun recours aux traitements statistiques habituels des bruits entachant tout capteur. Rappelons brièvement de quoi il retourne pour ces méthodes, illustrées par maints exemples, mal maîtrisés par ailleurs. On distingue [6,10,11,12] deux types de perturbations, celles dites *structurées*, annihilées avec des opérateurs différentiels linéaires, et celles dites *non structurées*, considérées comme des oscillations, ou fluctuations, rapides, atténuées par des filtres passe-bas, comme les intégrales itérées.

La formalisation non standard [23] des oscillations rapides, due à Cartier et Perrin [2], généralisant des travaux antérieurs de Harthong [14] et Reder [22], fournit un cadre mathématique, permettant d'introduire les bruits et leurs moyennes dans un cadre entièrement déterministe. Plusieurs justifications issues de la pratique des ingénieurs sont proposées. On en déduit divers résultats sur les bruits multiplicatifs, la largeur des fenêtres d'estimations, que confortent déjà de nombreuses simulations numériques (voir [5,6,7,8,9,10,11,12] et leurs bibliographies) et quelques expériences de laboratoire, et sur les erreurs en rafales, *burst errors* en américain, pour lesquelles ce travail reste à faire.

2 Bruits

Nous avons rédigé selon le formalisme *ZFC* de Robinson [23], tout en empruntant beaucoup au vocabulaire de [2] et [3], qui se situent dans l'*IST* de Nelson [18].

2.1 Définition non standard

Désignons par ${}^*\mathbb{N}$, ${}^*\mathbb{R}$ les extensions non standard de $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Remplaçons $[0,1]^{1+D} \subset \mathbb{R}^{1+D}$ par l'ensemble hyperfini $\mathrm{I} = \mathrm{I}_0 \times \mathrm{I}_1 \times \ldots \times \mathrm{I}_D$, $\mathrm{I}_\iota = \{0, \frac{1}{N_\iota}, \ldots, \frac{N_\iota - 1}{N_\iota}, 1\}$, où $N_\iota \in {}^*\mathbb{N}$, $\iota = 0, 1, \ldots, D$, $D \in \mathbb{N}$, est illimité. La fonction $\lambda_\iota : \mathrm{I}_\iota \backslash \{1\} \to {}^*\mathbb{R}$, $\frac{k_\iota}{N_\iota} \mapsto \frac{1}{N_\iota}$, $0 \leq k_\iota \leq N_\iota - 1$, est appelée [2] *mesure de Lebesgue* de I_ι. On définit alors, de façon évidente, la mesure de Lebesgue $\lambda = \lambda_0 \times \lambda_1 \times \ldots \times \lambda_D$ de I. Renvoyons à [2] pour les notions d'ensembles *quadrables* et de *Lebesgue-intégrabilité*. Une fonction S-intégrable $f : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ est dite à *oscillations*, ou *fluctuations*, *rapides* [2] si, et seulement si, toute intégrale $\int_A f d\lambda$ est infinitésimale, où $A \subseteq \mathrm{I}$ est quadrable.

La définition suivante paraphrase le théorème 9.3.6 de [2] sur la décomposition d'une fonction S-intégrable en somme d'une fonction Lebesgue-intégrable et d'une fonction S-intégrable à oscillations rapides. Soit $m : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ une fonction Lebesgue-intégrable. Un *bruit*, de *moyenne* m, ou, en adaptant la terminologie expressive de [3], *crépitant* autour de m, est une fonction S-intégrable $\mathfrak{n} : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ telle que, $\forall\ \iota = 0, 1, \ldots, D$, $\forall\ \xi_\kappa \in \mathrm{I}_\kappa$, $\kappa \neq \iota$, la projection $\mathfrak{n}(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_D) - m(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_D) : \mathrm{I}_\iota \to {}^*\mathbb{R}$ est à oscillations rapides. La moyenne n'est, évidemment, pas unique : m' est aussi une moyenne, si, $\forall\ \iota = 0, 1, \ldots, D$, $\forall\, \xi_\kappa \in \mathrm{I}_\kappa$, $\kappa \neq \iota$, la projection $m'(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_D) - m(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_D) : \mathrm{I}_\iota \to {}^*\mathbb{R}$ est infinitésimale *presque partout* (voir la proposition 9.3.12 de [2]). Si l'on peut prendre $m \equiv 0$, on dit que $\mathfrak{n}$ est de *moyenne nulle*, ou *centré*. Ce qui suit est aisé :

Proposition 2.1 *Soit $\phi : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ une fonction de classe S^1 [3]. Alors, le produit $\phi\mathfrak{n}$ est encore un bruit, de moyenne ϕm. Si $\mathfrak{n}$ est centré, $\phi\mathfrak{n}$ l'est aussi.*

2.2 Justifications

2.2.1 Hautes fréquences

Soit $\underline{n} = \sum_{\text{finie}} A \sin(\Omega t + \varphi)$, $A, \Omega, \varphi, t \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_{t_i}^{t_f} \underline{n}(\tau) d\tau$, $t_i, t_f \in \mathbb{R}$, est « petite » avec de « hautes » fréquences Ω.

*Remarque 1 Par contre, l'intégrale $\int_{t_i}^{t_f} (\underline{n}(\tau))^2 d\tau$ n'est pas « petite ». L'*écart-type *d'un bruit, au sens du § 2.1, qui est, avec sa moyenne, de carré intégrable, est donc, en général, appréciable.*

2.2.2 Bruits blancs

Considérons, avec bien des ouvrages pour ingénieurs en traitement du signal (*cf.* [21]), le capteur y d'un signal x bruité additivement

$$y(t) = x(t) + \bar{n}(t) \tag{1}$$

$t \in [0, 1]$, où $\bar{n}(t)$ est un bruit blanc, souvent supposé stationnaire, centré et gaussien. Le lien avec le § 2.1 découle de l'analogue échantillonné, usuel chez les praticiens (*cf.* [21]),

$$y(\alpha \Delta t) = x(\alpha \Delta t) + \bar{n}(\alpha \Delta t) \tag{2}$$

$\alpha = 0, 1, \ldots, \bar{N}$, $\bar{N} \in \mathbb{N}$, où
- $\Delta t = \frac{1}{\bar{N}}$ est le pas d'échantillonnage, limité et appréciable,
- les $\bar{n}(\alpha \Delta t)$ sont des variables aléatoires indépendantes, centrées, d'écarts-types normalisés à 1.

En effet, toute somme

$$\frac{t_F - t_I}{\bar{N}} \sum_{0 \leq t_I \leq \alpha \Delta t \leq t_F \leq 1} \bar{n}(\alpha \Delta t) \tag{3}$$

tend presque sûrement vers 0 avec le pas d'échantillonnage.

Remarque 2 Les travaux plus mathématiques, comme [15], substituent à (1) l'équation différentielle stochastique $dy = x dt + dw$, où w est un processus de Wiener. La réécriture $y(t) = y(0) + \int_0^t x(\tau) d\tau + w(t) - w(0)$ confirme, si besoin est, que l'on ne peut se ramener à (1). Cette dichotomie sera examinée prochainement, de même que ses liens avec certaines questions de mécanique stochastique *(cf. [19,20]), en nous inspirant des* moyennes glissantes *de [14,22] et de la* dérivation quantique *de [1].*

3 Applications

3.1 Bruits additifs et multiplicatifs

Soit $x : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ une fonction, appelée signal, supposée de classe S^1, ayant, par conséquent, une ombre C^1 [3]. Le capteur $y : \mathrm{I} \to {}^*\mathbb{R}$ de x est dit bruité additivement et multiplicativement si, et seulement si, $y = \mathfrak{n}_1 x + \mathfrak{n}_2$, où les bruits multiplicatif $\mathfrak{n}_1$ et additif $\mathfrak{n}_2$ sont de moyennes respectives 1 et quelconque, supposée, souvent, nulle. Le résultat suivant, qui repose sur le fait que $(\mathfrak{n}_1 - 1)x$ est, d'après la proposition 2.1, un bruit centré, démontre que l'on peut se ramener au cas purement additif. On répond ainsi à des questions courantes de la littérature appliquée (*cf.* [13,16]) sur la manière de traiter les bruits multiplicatifs.

Proposition 3.1 *On peut écrire* $y = x + \mathfrak{n}$*, où* $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_2 + (\mathfrak{n}_1 - 1)x$ *est un bruit de même moyenne que* $\mathfrak{n}_2$*.*

3.2 Estimations paramétriques

Nos estimations pour les images et les vidéos étant faites par balayage unidimensionnel [5], il est loisible de poser $D = 0$. Au vu des nombreux exemples de la littérature (*cf.* [21] et [5,6,7,10]), on suppose que le signal x possède une ombre dans $C^\omega([0,1], \mathbb{R})$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un paramètre constant, supposé *linéairement identifiable* [6,10]. L'adaptation des calculs de [6,10] permet d'écrire un estimateur sous la forme

$$\delta(t)\left([\theta]_e(t) - \theta\right) = \sum_{\text{finie}} c \int_0^t \dots \int_0^{\tau_2} \int_0^{\tau_1} \tau_1^\nu \mathfrak{n}(\tau_1) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_k \tag{4}$$

où
- $t \in \mathrm{I}_0$, $c \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$, $k \geq 1$ sont limités,
- $[0, t]$ est la *fenêtre d'estimation*, de *largeur* t,
- $\delta(t)$ a pour ombre une fonction de $C^\omega([0,1], \mathbb{R})$, appelée *diviseur*, nulle en 0,
- $\mathfrak{n}$ est un bruit additif,
- $[\theta]_e(t)$ est l'estimée de θ en t.

3.2.1 Largeur des fenêtres

Supposons $\mathfrak{n}$ centré. On déduit de (4) et de la proposition 2.1 le résultat suivant qui corrobore le caractère non satistique et non asymptotique, mais non instantanée, de notre estimateur :

Proposition 3.2 *Si la largeur de la fenêtre d'estimation n'appartient pas au halo d'un zéro du diviseur, l'estimée $[\theta]_e(t)$ appartient au halo de θ. Cette largeur est, alors, appréciable. Si, par contre, cette largeur est infinitésimale, $[\theta]_e(t)$ n'appartient pas nécessairement au halo de θ.*

Remarque 3 L'expérience pratique « prouve » qu'une « courte » largeur suffit, en général, pour obtenir une bonne estimation.

Remarque 4 Supposons que le bruit soit stationnaire et blanc. Sa variance étant proportionnelle à la distribution de Dirac à l'origine, on dit (cf. [21]) qu'il contient toutes les fréquences et que des filtres passe-bas, comme les intégrales itérées de (4), laissent passer les basses fréquences. Renvoyons à [4] pour lever ces contradictions apparentes.

Remarque 5 Reprenons (2) et supprimons en (3) la condition $t_F \leq 1$. Pour $\Delta t \to 0$ et $t_F = \bar{N}^2 = \frac{1}{(\Delta t)^2}$, la somme (3) ne tend plus presque sûrement vers 0. *Nos méthodes sont donc, par essence, non asymptotiques.*

Remarque 6 On ne peut quantifier, d'après la proposition 3.2 et la remarque 5, les performances *d'un estimateur de type (4) dans le cadre habituel (cf. [15,21]), qui est probabiliste, asymptotique et hilbertien (fonctions de carrés sommables). Des critères plus appropriés seront proposés.*

3.2.2 Démodulation et erreurs en rafales

En *démodulation* (*cf.* [17,21]), le paramètre θ à estimer, appelé *symbole*, est associé, en général, à un signal, comme un sinus, cardinal ou non, solution d'une équation différentielle linéaire, à coefficients polynômiaux. Les erreurs en rafales, très courantes, que les codes correcteurs d'erreurs doivent contrecarrer (*cf.* [17,21]), s'interprètent ainsi : l'estimation repose sur une hypothèse fausse, à savoir le caractère centré du bruit. Comme la durée de transmission d'un symbole est « courte », on suppose que la moyenne $m(t)$, *a priori* inconnue, est approchée par un polynôme $p(t)$ de degré limité, donné : $p(t)$ est l'ombre de $m(t)$. Il semblerait que l'on puisse souvent supposer cette moyenne « à peu près » constante pendant chaque durée de transmission, ce qui simplifie les calculs.

Écrivons $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_0 + p$ et considérons p comme une perturbation structurée que l'on annihile [6,10] avec une puissance limitée, suffisante, de $\frac{d}{dt}$. On obtient une formule analogue à (4) en y remplaçant $\mathfrak{n}$ par $\mathfrak{n}_0$. La possible valeur du résultat suivant, de démonstration semblable à celle de la proposition 3.2, tient au fait que l'estimateur doit détecter un symbole parmi plusieurs, « éloignés » les uns des autres.

Proposition 3.3 *Supposons que l'ombre du signal ne soit pas annihilée par une puissance limitée de $\frac{d}{dt}$. Il existe, alors, une estimée $[\theta]_e(t)$ du symbole appartenant au halo de θ, pour toute largeur t n'appartenant pas au halo d'un zéro du diviseur.*

Remerciements. L'auteur exprime sa reconnaissace à C. Lobry (Nice) et T. Sari (Mulhouse) pour d'utiles conversations.

References

[1] F. Ben Adda, J. Cresson, Quantum derivatives and the Schrödinger equation, Chaos Solitons Fractals, 19, 2004, 1323-1334.

[2] P. Cartier, Y. Perrin, Integration over finite sets, *in* Nonstandard Analysis in Practice, F. & M. Diener (Eds), Springer, Berlin, 1995, pp. 195-204.

[3] F. Diener, G. Reeb, Analyse non standard, Hermann, Paris, 1989.

[4] M. Fliess, Réflexions sur la question fréquentielle en traitement du signal, Manuscrit, 2005 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00000461`).

[5] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, A. Sedoglavic, Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec applications aux images et aux vidéos, Actes 20^e coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00001116`).

[6] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Compression différentielle de transitoires bruités, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 339, 2004, 821-826.

[7] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures, Actes 20^e coll. GRETSI, Louvain-la-Neuve, 2005 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00001115`).

[8] M. Fliess, C. Join, M. Mboup, H. Sira-Ramírez, Vers une commande multivariable sans modèle, Actes Conf. Internat. Francoph. Automat. (CIFA), Bordeaux, 2006.

[9] M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramírez, Closed-loop fault-tolerant control for uncertain nonlinear systems, *in* Control and Observer Design for Nonlinear Finite and Infinite Dimensional Systems, T. Meurer, K. Graichen, E.D. Gilles (Eds), Lect. Notes Control Informat. Sci., vol. 322, Springer, Berlin, 2005, pp. 217-233.

[10] M. Fliess, M. Mboup, H. Mounier, H. Sira-Ramírez, Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples, *in* Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation, H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.), Editiorial Lagares, México, 2003, pp. 1-21 (accessible sur `http://hal.inria.fr/inria-00001059`).

[11] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, An algebraic framework for linear identification, ESAIM Control Optim. Calc. Variat., 9, 2003, 151-168.

[12] M. Fliess, H. Sira-Ramírez, Reconstructeurs d'états, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 338, 2004, 91-96.

[13] E. Gershon, U. Shaked, I. Yaesh, H-infinity Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems, Lect. Notes Control Informat. Sci., vol. 318, Springer, Berlin, 2005.

[14] J. Harthong, La méthode de la moyennisation, *in* Analyse non standard et représentation du réel, M. Diener, C. Lobry (Eds), OPU, Alger & CNRS, Paris, 1985, pp. 301-308.

[15] I.A. Ibragimov, R.Z. Has'minskii, Statistical Estimation – Asymptotic Theory (translated from the Russian), Springer, New York, 1981.

[16] J.S. Lim, Two-Dimensional Signal and Image Processing, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1990.

[17] S. Lin, D.J. Costello, Jr., Error Control Coding, 2^{nd}*ed.*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2004.

[18] E. Nelson, Internal set theory, Bull. Amer. Math. Soc., 83, 1977, 1165-1198.

[19] E. Nelson, Quantum Fluctuations, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.

[20] L. Nottale, Fractal Space-Time and Microphysics, World Scientific, Singapour, 1993.

[21] J.G. Proakis, Digital Communications, 4^{th} ed., McGraw-Hill, New York, 2001.

[22] C. Reder, Observation macroscopique de phénomènes microscopiques, *in* Analyse non standard et représentation du réel, M. Diener, C. Lobry (Eds), OPU, Alger & CNRS, Paris, 1985, pp. 195-244.

[23] A. Robinson, Non-Standard Analysis, 2^{nd} ed., North-Holland, Amsterdam, 1974.