Guy MOREL

EXPERTISES :

PROCÉDURES STATISTIQUES D'AIDE À LA DÉCISION

LAST-UNIVERSITÉ de TOURS

Guy Morel

UFR Arts et Sciences Humaines
UNIVERSITÉ François RABELAIS
3 rue des TANNEURS
37041 TOURS Cedex
e-mail : morel@univ-tours.fr

EXPERTISES :

PROCÉDURES STATISTIQUES D'AIDE À LA DÉCISION

Avril 1997

SOMMAIRE

1–INTRODUCTION.

Choisir entre deux hypothèses est un des problèmes fondateurs de la statistique mathématique. Il n'existe pas de solution miracle, suivant la modélisation choisie pour cette prise de décision on obtient des solutions différentes. Le choix entre ces différents cadres décisionnels est un problème externe à la statistique mathématique, il dépend du champ d'application considéré. La procédure choisie fournit une aide à la décision qu'il est difficile d'interpréter sans tenir compte des critères qui ont structuré sa production. Pourtant, l'utilisateur interprète souvent ses résultats sans tenir compte de la modélisation sous jacente avec laquelle il travaille (cf. [Wan.]). On peut même se demander si une méthode statistique n'est pas d'autant plus populaire qu'il est possible d'oublier les bases de sa construction dans sa mise en œuvre. Les tests statistiques finissent par dire oui ou non à des seuils conventionnels sans référence à la dissymétrie de traitement entre les deux hypothèses. De plus, quand l'hypothèse H_0 traduit la notion d'effet négligeable, elle prend souvent la forme d'un effet parfaitement nul. Il devient alors paradoxalement plus facile de prendre une décision à partir d'un échantillon, qui est parfois simplement une sous population, qu'à partir d'un travail exhaustif s'il était possible. Les utilisateurs semblent peu friands de réponses qui laissent place au jugement comme une probabilité a postériori sur l'espace des paramètres ou des décisions. Et dans ce cas, il est rare de trouver une probabilité a priori liée au champ d'étude, elle est le plus souvent non informative. Le point de vue que nous allons développer n'empêche évidemment pas les pratiques magiques. Nous avons simplement essayé de rendre difficile l'oubli du caractère aléatoire des procédures statistiques, en optant pour une aide sous la forme d'une probabilité sur l'espace des décisions. Ce type d'inférence a été défendu dans de nombreux travaux (cf. [KroM]).

L'étude d'un problème de décision statistique passe par la donnée de critères de sélection entre les différentes règles de décision considérées. Classiquement on commence par se donner une fonction de perte et on compare les procédures de décision à partir des fonctions de risque correspondantes. Il est rare qu'un choix unique de ce critère s'impose, bien que l'étude de certaines fonctions de perte soit privilégiée, par exemple la perte quadratique dans le cadre de l'estimation ou le risque de se tromper pour le choix entre deux hypothèses. Même si ce dernier choix paraît assez "naturel", d'autres pertes sont possibles, en particulier si on regarde ce problème de choix entre deux hypothèses comme un problème d'estimation (cf. [HwaC], [Rob.] p. 186). Les fonctions de risque permettent d'introduire un préordre partiel sur les règles de décision et ainsi de sélectionner les règles admissibles. Cette première sélection s'obtient en comparant les règles entre elles, elle ne dérive pas de propriétés intrinsèques. Nous allons dans cette étude partir de telles propriétés pour définir les "bonnes" règles de décision, celles que nous appellerons "experts". Une règle pourra être déclarée expert sans avoir à la comparer à l'ensemble des autres règles. La propriété de base que nous imposons aux experts est simplement que le diagnostic d, θ appartient à Θ_d, doit être plus probable quand θ appartient à Θ_d que lorsque θ n'y appartient pas. C'est une notion de règle non biaisée, mais pour que cela suppose une connaissance fine du modèle nous imposons que cette propriété soit aussi vérifiée conditionnellement à tout événement non négligeable, et pas simplement globalement comme c'est généralement le cas. Quand ils existent les experts ne sont ainsi pas trop dépendants de l'espace des réalisations et de l'espace des paramètres choisis. Cette définition des experts sera précisée par la suite, nous restons dans cette introduction au niveau des idées directrices. L'exemple simple de la famille des lois normales de moyenne inconnue $\theta \in I\!R$ et de variance 1 nous servira à imager notre propos. Lorsque les hypothèses sont unilatérales les experts sont les règles admissibles pour le risque de se tromper. Mais pour les hypothèses bilatérales les experts se réduisent aux règles triviales qui décident toujours la même hypothèse. On peut dire que c'est à peu près ce qui se passe dans tout modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone. Nous allons être amené à traiter deux problèmes différents : un trop plein d'experts d'un côté et une pénurie d'experts de l'autre.

Commençons par le premier cas : que faire de tous ces experts ? Le statisticien se trouve souvent dans une situation semblable, par exemple avec un ensemble de règles admissibles. Il se donne généralement des critères supplémentaires pour essayer de sélectionner une règle de décision : recherche d'un test U.P.P. (uniformément plus puissant), d'un test sans biais U.P.P., d'un test invariant U.P.P., d'une règle de Bayes, d'une règle minimax, etc. Pour nous cela reviendrait à chercher un expert qui soit plus expert que les autres. Voilà qui sonne étrangement car le vocabulaire choisi traduit le fait que nous ne voulons pas sélectionner un expert. Ceci nous obligerait à fournir à l'utilisateur une réponse en tout ou rien, ce qui finit par cacher son caractère aléatoire. Nous préférons considérer nos experts comme égaux en droit, les faire voter et fournir à l'utilisateur le résultat de ce vote, c'est-à-dire une probabilité sur l'espace des deux décisions possibles. Il se trouvera dans une situation semblable à celle obtenue quand on transforme une probabilité a postériori en une probabilité sur l'ensemble des décisions. Pour faire voter nos experts il faut définir une probabilité sur l'ensemble des experts. Nous en avons associé une à chaque probabilité du modèle en essayant d'accorder d'autant plus de poids à un ensemble d'experts qu'il est formé d'experts donnant des résultats différents sous cette probabilité. Nous avons alors autant de votes que de valeurs du paramètre et il y a bien des manières de les synthétiser. Reprenons le cas d'hypothèses unilatérales dans l'exemple des lois $(N(\theta, 1))_{\theta \in IR}$. Pour le choix entre $H : \theta \leq \theta_0$ et $H' : \theta > \theta_0$, on peut dire que le vote associé à la probabilité frontière $N(\theta_0, 1)$ est une solution de type minimax, sous chaque hypothèse elle choisit le plus favorable des votes défavorables. C'est un vote neutre au point frontière, c'est-à-dire que lorsque θ_0 est la valeur du paramètre les votes en faveur de H (resp. H') ont une fréquence moyenne égale à $\frac{1}{2}$. Pour chaque observation on associe alors à la décision $H : \theta \leq \theta_0$ une fréquence de votes qui se trouve être le seuil minimum de rejet du test de H contre H'. La fréquence des votes en faveur de H' est aussi un seuil minimum de rejet, celui du test de H' contre H. Ceci donne un sens nouveau à la notion de p-value qui correspond mieux à son utilisation courante et peu orthodoxe, comme indice de fiabilité du choix d'une des hypothèses. Cette probabilité sur l'espace des décisions est obtenue sans l'introduction d'une loi a priori non informative, comme dans le cadre bayésien. Il est cependant possible de synthétiser l'ensemble des votes en faisant une moyenne à partir d'une probabilité sur l'ensemble des paramètres et donc de prendre en compte des informations a priori. Cette probabilité sert de pondération, nous ne parlerons pas de probabilité a priori car elle ne se comporte pas de façon semblable. Par exemple, en analyse bayésienne les p-values précédentes se trouvent en prenant pour loi a priori la loi impropre non informative définie par la mesure de Lebesgue, alors que dans notre cas il faut prendre la masse de Dirac en θ_0.

Analysons maintenant le cas où il n'y a que les experts triviaux. C'est ce qui se passe pour les hypothèses bilatérales dans l'exemple des lois $(N(\theta, 1))_{\theta \in IR}$. On peut penser diminuer les contraintes imposées par la définition des experts en travaillant sur une sous tribu, ce qui diminue l'ensemble des événements sur lesquels la propriété de base des experts doit s'appliquer conditionnellement. Si l'on considère les hypothèses bilatérales $H : \theta \in [-\theta_0, +\theta_0]$ et $H' : \theta \in]-\infty, -\theta_0[\cup]+\theta_0, +\infty[$ on peut symétriser le problème en se restreignant à la tribu engendrée par les intervalles de même probabilité sous θ_0 et sous $-\theta_0$, c'est-à-dire les intervalles symétriques par rapport à 0. Il existe alors des experts, c'est comme si on travaillait sur le modèle image du précédent par la statistique valeur absolue, θ et $-\theta$ étant confondus car de même image. Le résultat du vote sous θ_0 ou $-\theta_0$ fournit le seuil minimum de rejet du test sans biais de H contre H' comme fréquence des votes en faveur de H. La fréquence des votes en faveur de H' est quant à elle le seuil minimum de rejet du test de H' contre H. Cette solution repose sur une symétrie du problème de décision par rapport à $\theta = 0$, elle est justifiée s'il est équivalent pour l'interprétation d'avoir $\theta < -\theta_0$ ou $\theta > +\theta_0$. On casse ainsi la structure d'ordre classique sur $\Theta = IR$ pour la remplacer par le préordre induit par la distance à 0. Dans bien des cas la structure de départ garde un sens même pour des hypothèses bilatérales, le choix principal est entre H et H' mais

$\theta < -\theta_0$ et $\theta > +\theta_0$ ne signifient pas la même chose. Il est alors intéressant que le vote par rapport à ces hypothèses proviennent de votes pour les hypothèses unilatérales définies par le point frontière $-\theta_0$ d'une part et celles définies par θ_0 d'autre part. Nous avons pour cela introduit la notion de votes compatibles sur une famille d'hypothèses unilatérales. Dans le cas précédent il suffit que pour toute observation la fréquence des votes en faveur de la décision $\theta < -\theta_0$ soit inférieure à la fréquence des votes en faveur de la décision $\theta < +\theta_0$. On peut alors définir une probabilité sur les trois événements $]-\infty, -\theta_0[$, $[-\theta_0, +\theta_0]$ et $]+\theta_0, +\infty[$ donc sur les hypothèses H et H'. Cette manière de faire a l'avantage d'imposer une cohérence entre les solutions de problèmes de décision qui reposent sur une même structuration de l'espace des paramètres par rapport aux interprétations possibles.

La notion de votes compatibles prend tout son intérêt quand l'analyse du paramètre est structurée par un ordre. L'ensemble des hypothèses unilatérales joue alors un rôle fondamental. Dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone, définir des votes compatibles sur cette famille d'hypothèses revient à définir une probabilité sur l'espace des paramètres muni de la tribu de l'ordre. Quand Θ est un intervalle de $I\!R$ muni de l'ordre usuel on définit généralement des votes compatibles en associant à chaque problème de décision unilatéral le vote défini par la probabilité frontière entre les deux hypothèses. Dans l'exemple des lois $(N(\theta, 1))_{\theta \in I\!R}$ on obtient sur les boréliens de $\Theta = I\!R$ la loi normale centrée sur l'observation obtenue et de variance 1. On peut aussi obtenir des votes compatibles en utilisant des pondérations sur l'espace des paramètres. Ceci est particulièrement intéressant dans le cas où on a une information a priori à introduire. La solution du vote frontière ne suppose, elle, aucune information a priori, elle donne d'ailleurs souvent une loi sur les paramètres qui peut être considérée, dans le cadre bayésien, comme la loi a postériori d'une loi a priori non informative.

La probabilisation de l'espace des paramètres muni de la tribu de l'ordre permet de définir une probabilité sur n'importe quelles hypothèses, un peu comme une probabilité à postériori. Il est cependant préférable que les hypothèses aient une interprétation liée à l'ordre qui structure Θ. Lorsque l'espace des paramètres n'est pas ordonné, mais est un produit d'espaces ordonnés il est souvent possible d'obtenir une probabilisation de cet espace. Lorsque chaque espace ordonné peut être probabilisé de façon indépendante on prendra la loi produit. Dans le cas contraire il faudra hiérarchiser les ordres et construire des probabilités de transition. Pour un paramètre fantôme cela revient à trouver une solution au problème de décision défini en fixant ce paramètre, et à obtenir une probabilisation conditionnelle sur l'espace du paramètre fantôme.

2–CHOIX ENTRE DEUX PROBABILITÉS.

2.1 DÉFINITION DES EXPERTS.

Dans ce cas particulier l'espace des paramètres se réduit à deux éléments $\Theta = \{0, 1\}$. On peut toujours supposer que les deux probabilités P_θ admettent une densité p_θ par rapport à une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (cf. [Leh.] p. 74). Il y a deux décisions possibles $d = 0$ et $d = 1$ qui correspondent respectivement au choix de $\theta = 0$ et de $\theta = 1$. Une règle de décision est alors définie par une statistique réelle ϕ à valeurs dans $D = \{0, 1\}$. Pour la réalisation $\omega \in \Omega$, on décide $d = \phi(\omega)$.

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction nous allons essayer de définir les experts en imposant des propriétés qui ne font pas intervenir des comparaisons entre règles de décision. Ces propriétés doivent pouvoir se vérifier ou s'infirmer en ne considérant que la règle de décision qui postule au label d'expert.

Nous allons commencer par ce que l'on ne veut pas, donc par une propriété qui ne peut pas être l'apanage d'un expert. Face à une réalisation ω un expert doit diagnostiquer entre $\theta = 0$ et $\theta = 1$, on ne peut pas accepter que la probabilité qu'il décide $d = 0$ quand $\theta = 0$ soit plus faible que lorsque $\theta = 1$. Il est bien sûr équivalent de dire que l'on ne veut pas que la probabilité de décider $d = 1$ soit plus faible pour $\theta = 1$ que pour $\theta = 0$. Ceci revient à dire qu'un diagnostic d doit avoir plus de chance d'être produit quand il est bon que quand il est mauvais. Sous cette condition un expert doit vérifier :

$$P_1(\{\phi = 1\}) = E_1(\phi) \geq P_0(\{\phi = 1\}) = E_0(\phi)$$

(E_θ est l'opérateur espérance par rapport à P_θ).

C'est la notion classique de sans biais. Cette propriété est globale, elle repose sur les moyennes de ϕ. Elle n'est pas très contraignante localement. Par exemple si elle est strictement réalisée, $E_1(\phi) - E_0(\phi) = q > 0$, on peut inverser la décision sur tout événement A inclus dans $\{\phi = 0\}$ (resp. $\{\phi = 1\}$) dès que $P_0(A) \leq q$ (resp. $P_1(A) \leq q$). Ceci nous montre que la réalisation de cette propriété

ne suppose pas une connaissance fine de la structure du modèle. Pour cela il faut essayer de l'imposer conditionnellement à tout événement C. Si C est de probabilité non nulle sous P_0 et P_1 on peut définir un modèle statistique conditionnel ;
$(\Omega, \mathcal{A})$ est muni des probabilités P_θ^C définies par :

$$\forall \theta \in \{0,1\} \qquad \forall B \in \mathcal{A} \qquad P_\theta^C(B) = P_\theta(B \cap C)/P_\theta(C).$$

Dans ce nouveau modèle un expert doit alors vérifier :

$$P_1^C(\{\phi = 1\}) = E_1^C(\phi) \geq P_0^C(\{\phi = 1\}) = E_0^C(\phi)$$

(E_θ^C est l'opérateur espérance par rapport à P_θ^C). Lorsque $P_0(C)$ ou $P_1(C)$ est nulle on ne peut plus définir de modèle statistique conditionnel. Mais dans ce cas, si l'une des deux probabilités est non nulle, par exemple $P_\theta(C) \neq 0$, un expert doit décider $d = \theta$ sur P_θ presque sûrement tout C. Ces considérations nous conduisent à la définition suivante :

Définition 2.1.1

Soit le modèle statistique $\big(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \{0,1\}}\big)$. *Un expert du choix entre* P_0 *et* P_1 *est une règle de décision* $\phi : (\Omega, \mathcal{A}) \to \{0,1\}$ *qui vérifie pour tout événement* C *:*
$P_1(C \cap \{\phi = 0\}) = 0$ *si* $P_0(C) = 0$
$P_0(C \cap \{\phi = 1\}) = 0$ *si* $P_1(C) = 0$
$E_1^C(\phi) \geq E_0^C(\phi)$ *si* $P_0(C) \neq 0$ *et* $P_1(C) \neq 0$ *.*

Le problème du choix entre deux probabilités, P_0 et P_1, est traité de deux manières dans la théorie des tests, suivant qu'on privilégie P_0 ou P_1. On parle du test de P_0 contre P_1 ou du test de P_1 contre P_0. Ce sont les tests de Neyman qui sont sélectionnés.
Rappelons qu'on appelle test de Neyman de P_1 contre P_0 (cf. [Mon.2] p. 135) une fonction de test pour laquelle il existe k dans $\overline{I\!R^+}$ tel que :
$\phi(\omega) \overset{p.s.}{=} 1$ sur $\{\omega \in \Omega\,;\, p_0 < kp_1\}$ et

$\phi(\omega) \overset{p.s.}{=} 0$ sur $\{\omega \in \Omega\,;\, p_0 > kp_1\}$

(avec la convention $\infty \times 0 = 0$, la notation $\overset{p.s.}{=}$ signifiant : P_0 et P_1 presque sûrement).

Ce sont les tests de Neyman communs aux deux problèmes de test : P_0 contre P_1 et P_1 contre P_0, qui vont jouer un rôle fondamental dans notre problème. Nous allons commencer par mettre en place cet outil.

2.2 FONCTIONS DE TEST SIMPLES.

Considérons les événements suivants :

$S_0 \ = \{\omega \in \Omega\,;\, p_0(\omega) > 0\}$,

$S_1 \ = \{\omega \in \Omega\,;\, p_1(\omega) > 0\}$,

$\Omega_k \ = \{\omega \in \Omega\,;\, p_0(\omega) = k.p_1(\omega)\} \bigcap \{S_0 \cup S_1\}$ pour $k \in I\!R^+$,

$\Omega_\infty = \{\omega \in \Omega\,;\, p_1(\omega) = 0\} = S_1^c$.

La famille $\{\Omega_k\}_{k\in\overline{I\!R^+}}$ forme une partition de Ω. On vient ainsi de définir une statistique K à valeurs dans $\overline{I\!R^+}$ qui peut être considérée comme le rapport entre les densités p_0 et p_1 (la forme indéterminée $0/0$ prenant ici la valeur $+\infty$). Cette statistique est unique, P_0 et P_1 presque sûrement, c'est-à-dire que presque sûrement, elle ne dépend pas de la mesure et des densités choisies pour exprimer P_0 et P_1 (voir annexe I).

On peut définir les tests de Neyman de P_1 contre P_0 (voir 2.1) en utilisant la statistique K. ϕ est un de ces tests si $\phi \overset{p.s.}{=} 1\!I_{\{K<+\infty\}}$ ou si il existe $k \in I\!R^+$ tel que $1\!I_{\{K<k\}} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} 1\!I_{\{K\leq k\}}$. Pour $k = 0$ seul le test $\phi \overset{p.s.}{=} 1\!I_{\{K\leq 0\}}$ est intéressant puisque ceux qui ne valent pas presque sûrement 1 sur l'événement $\{K \leq 0\}$ sont de même puissance ($P_0(\{\phi = 0\}) = 1$) mais de seuil plus grand. Il reste alors les tests de Neyman communs aux deux problèmes de test. Ils sont définis par l'une des propriétés : $\phi \overset{p.s.}{=} 1\!I_{\{K\leq 0\}}$, $1\!I_{\{K<k\}} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} 1\!I_{\{K\leq k\}}$ et $k \in I\!R^+_*$, $\phi \overset{p.s.}{=} 1\!I_{\{K<+\infty\}}$. Les fonctions indicatrices qui permettent de définir ces tests de Neyman vont jouer un rôle essentiel.

Définition 2.2.1

Soit $(k,\beta) \in \Big\{(0,1); \{(k,\beta)\}_{k\in I\!R^+_*,\,\beta\in\{0,1\}}; (\infty,0)\Big\}$. *La fonction de test simple associée à* (k,β) *est définie par :* $\phi_{(k,\beta)} = 1\!I_{\{K<k\}} + \beta.\ 1\!I_{\{K=k\}}$ *(la statistique* K *est le rapport des deux densités* p_0 *et* p_1*).*

Considérons les tests de Neyman compris presque sûrement entre les deux fonctions de test simples $\phi_{(k,0)}$ et $\phi_{(k,1)}$ pour $k \in I\!R^+_*$. Ils sont presque sûrement égaux si $P_0(\{K = k\}) = 0$ et $P_1(\{K = k\}) = 0$. Dans le cas contraire, ces deux probabilités sont non nulles puisque $k \in IR_*^+$. Elles définissent sur $\{K = k\}$ un modèle conditionnel composé de deux probabilités identiques. Ce qui différencie principalement les tests de Neyman ϕ compris entre $\phi_{(k,0)}$ et $\phi_{(k,1)}$ c'est la probabilité de décider $d = 1$ quand l'événement $\{K = k\}$ est réalisé : $\beta = P_\theta(\{\phi = 1\} \cap \{K = k\})/P_\theta(\{K = k\})$. Pour tout β dans l'intervalle $[0, 1]$ on peut trouver une règle de décision $\phi : \Omega \to \{0, 1\}$ ayant la propriété précédente, si l'événement $\{K = k\}$ contient des événements de probabilité conditionnelle β. Ceci peut être impossible, par exemple si on prend pour modèle le modèle image de la statistique exhaustive K. Afin de remédier à cet inconvénient, qui peut introduire des discontinuités dans le traitement du problème, on utilise souvent des fonctions de test aléatoires : ϕ est à valeur dans $[0, 1]$ et $\phi(\omega)$ représente la probabilité de décider $d = 1$. Pour prendre une décision il faut alors faire intervenir un aléa sur $D = \{0, 1\}$ qui donne à $d = 1$ la probabilité $\phi(\omega)$ d'être obtenu. Si on introduit cet aléa dans le modèle on obtient de nouveau des règles de décision déterministes, c'est-à-dire à valeur dans $\{0, 1\}$. Stevens [Ste.] par exemple utilise cet artifice pour améliorer les intervalles de confiance dans le cas du paramètre d'une loi binomiale. Nous reviendrons sur cette difficulté de la répartition d'une masse en $k \in IR_*^+$ entre les décisions $d = 1$ et $d = 0$. Elle disparaîtra quand nous ferons voter nos experts sans avoir à introduire les fonctions de test aléatoires ou à utiliser un surmodèle contenant un aléa. Nous pourrons ne faire voter que les fonctions de test simples.

Considérons l'ensemble des fonctions de test simples :
$\Phi_s = \Big\{\phi_{(0,1)}\,;\, \{\phi_{(k,\beta)}\}_{k \in IR_*^+,\, \beta \in \{0,1\}}\,;\, \phi_{(\infty,0)}\Big\}$.
Il est totalement ordonné par la relation d'ordre partiel usuelle sur les fonctions. Aussi nous le noterons parfois $[\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}]$. L'ordre obtenu coïncide avec celui induit par l'ordre lexicographique sur les couples (k, β) :

$$(k, \beta) \leq (k', \beta') \Longleftrightarrow \begin{cases} k < k' \\ \quad ou \\ k = k' \quad et \quad \beta \leq \beta'. \end{cases}$$

Il permet de définir les bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de fonctions de test simples.

L'opérateur E_θ, espérance par rapport à P_θ, est croissant sur $\Phi_s = [\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}]$.
$E_\theta(\phi_{(k,\beta)}) = \int_\Omega \phi_{(k,\beta)}\, dP_\theta = P_\theta(\{\phi_{(k,\beta)} = 1\})$.

(k,β)	$(0,1)$	$\nearrow$	$(\infty,0)$
$E_0(\phi_{(k,\beta)})$	0	$\nearrow$	$1 - P_0(\Omega_\infty)$
$E_1(\phi_{(k,\beta)})$	$P_1(\Omega_0)$	$\nearrow$	1

On a toujours $E_1(\phi_{(k,\beta)}) - E_0(\phi_{(k,\beta)}) = \int_\Omega \phi_{(k,\beta)}(p_1 - p_0)\, d\mu \geq 0$; en effet $\phi_{(k,\beta)}(p_1 - p_0) \geq 0$ pour $k \leq 1$ et pour $k > 1$ $\int_\Omega(\phi_{(k,\beta)} - \phi_{(1,1)})(p_1 - p_0)\, d\mu \geq \int_\Omega(1 - \phi_{(1,1)})(p_1 - p_0)\, d\mu = \int_\Omega -\phi_{(1,1)}(p_1 - p_0)\, d\mu$.

2.3 ENSEMBLE DES EXPERTS.

Nous allons démontrer que les experts sont les tests de Neyman déterministes communs aux tests de P_0 contre P_1 et de P_1 contre P_0. Ce que nous allons écrire en utilisant les fonctions de test simples, comme en 2.2.

Proposition 2.3.1

Les experts sont les règles de décision $\phi : (\Omega, \mathcal{A}) \to \{0,1\}$ presque sûrement ordonnables dans l'ensemble des fonctions de test simples : $\Phi_s = [\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}]$. C'est-à-dire qu'il existe des fonctions de test simples, égales ou consécutives, encadrant presque sûrement ϕ : $\phi_{(k,\beta)} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta')}$.

Cette propriété est vérifiée s'il existe $\phi_{(k,\beta)}$ presque sûrement égale à ϕ ou s'il existe $k \in IR_*^+$ tel que $\phi_{(k,0)} \overset{p.s.}{<} \phi \overset{p.s.}{<} \phi_{(k,1)}$ (la relation $\overset{p.s.}{<}$ signifiant $\overset{p.s.}{\leq}$ sans avoir $\overset{p.s.}{=}$).

Démonstration

I —– Condition nécessaire.

Soit ϕ un expert. On cherche $k \in \overline{IR^+}$, β et β' dans $\{0,1\}$ tels que : $\phi_{(k,\beta)} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta')}$.

Par construction de Ω_0 et Ω_∞ (voir 2.2) on a $P_0(\Omega_0) = 0$ et $P_1(\Omega_\infty) = 0$. La définition des experts entraîne alors : $P_1(\Omega_0 \cap \{\phi = 0\}) = 0$ et $P_0(\Omega_\infty \cap \{\phi = 1\}) = 0$. Ce qui peut s'écrire $\phi_{(0,1)} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(\infty,0)}$.

Nous pouvons maintenant définir

$\phi_{(k_0,\beta_0)} = sup\{\phi' \in [\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}] ; \phi' \overset{p.s.}{\leq} \phi\}$ et

$\phi_{(k_1,\beta_1)} = inf\{\phi' \in [\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}] ; \phi \overset{p.s.}{\leq} \phi'\}$.

Si $k_0 > k_1$, pour $k \in]k_1, k_0[$ on a évidemment $\phi_{(k,0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,1)}$. Ces inégalités sont aussi vérifiées pour $k = k_0$, lorsque $0 < k_0 = k_1 < +\infty$. Les cas $k_0 = k_1 = 0$ et $k_0 = k_1 = +\infty$ correspondent à $\phi \overset{p.s.}{=} \phi_{(0,1)}$ et $\phi \overset{p.s.}{=} \phi_{(\infty,0)}$.

Il nous reste à montrer que l'on ne peut pas avoir $k_0 < k_1$.

Pour cela nous allons supposer $k_0 < k_1$ et trouver un événement C vérifiant : $P_0(C) \neq 0$, $P_1(C) \neq 0$ et $E_1^C(\phi) < E_0^C(\phi)$. Par définition, ceci contredira le fait que ϕ est un expert.

Soit $k \in]k_0, k_1[$.

Considérons l'événement $A = \{\phi_{(k,0)} - \phi_{(k_0,\beta_0)} = 1\} \cap \{\phi = 0\}$. La définition de $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ entraîne que $P_0(A)$ ou $P_1(A)$ est non nulle, sinon on aurait $\phi_{(k_0,\beta_0)} < \phi_{(k,0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi$. De plus, sur $A \subseteq \Omega - (\Omega_0 \cup \Omega_\infty)$ les densités p_0 et p_1 sont strictement positives, on a donc : $P_0(A) \neq 0$ et $P_1(A) \neq 0$.

De même, la définition de $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ entraîne que l'événement $B = \{\phi_{(k_1,\beta_1)} - \phi_{(k,1)} = 1\} \cap \{\phi = 1\}$ vérifie : $P_0(B) \neq 0$ et $P_1(B) \neq 0$.

L'événement $C = A \cup B$ est bien sûr de probabilité non nulle sous P_0 et P_1, pour finir nous allons montrer qu'il vérifie : $E_1^C(\phi) < E_0^C(\phi)$. On a $E_0^C(\phi) = P_0(B)/[P_0(A) + P_0(B)]$ et $E_1^C(\phi) = P_1(B)/[P_1(A) + P_1(B)]$, avec $P_0(A) = \int_A p_0 \, d\mu < \int_A kp_1 \, d\mu = kP_1(A)$ et $P_0(B) = \int_B p_0 \, d\mu > \int_B kp_1 \, d\mu = kP_1(B)$, ce qui entraîne $P_0(A)/P_0(B) < P_1(A)/P_1(B)$; on en déduit alors facilement l'inégalité recherchée.

II — Condition suffisante.

Soit ϕ une règle de décision encadrée presque sûrement par deux fonctions de test simples égales ou consécutives : $\phi_{(k,\beta)} \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta')}$. On doit démonter que ϕ est un expert. Pour cela on considère un événement C et on envisage les trois cas de la définition 2.1.1.

1$^{\text{er}}$ cas : $P_0(C) = 0$.

C est donc P_1 presque sûrement inclus dans Ω_0 ; de plus comme $\phi \overset{p.s.}{\geq} \phi_{(k,\beta)} \geq \phi_{(0,1)}$, ϕ est presque sûrement égale à 1 sur Ω_0 ; l'égalité recherchée, $P_1(C \cap \{\phi = 0\}) = 0$ s'en déduit facilement.

2$^{\text{ème}}$ cas : $P_1(C) = 0$.

Dans ce cas C est P_0 presque sûrement inclus dans Ω_∞ et ϕ est presque sûrement égale à 0 sur Ω_∞ puisque : $\phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta')} \leq \phi_{(\infty,0)}$;

on obtient alors facilement l'égalité recherchée : $P_0(C \cap \{\phi = 1\}) = 0$.

$3^{\text{ème}}$ cas : $P_0(C) \neq 0$ et $P_1(C) \neq 0$.

Considérons le modèle statistique conditionnel : $\big(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta^C)_{\theta \in \{0,1\}}\big)$ avec P_θ^C de densité $(1/P_\theta(C))\ \mathit{1I}_C$ par rapport à P_θ. Dans ce nouveau modèle ϕ est encore un test de Neyman, elle définit un test uniformément plus puissant, pour tester P_0^C contre P_1^C au seuil $(1/P_0(C))E_0(\mathit{1I}_C\ .\phi) = E_0^C(\phi)$ et pour tester P_1^C contre P_0^C au seuil $(1/P_1(C))E_1(\mathit{1I}_C\ .(1-\phi)) = E_1^C(1-\phi)$. La puissance étant supérieure au seuil on a bien $E_1^C(\phi) \geq E_0^C(\phi)$ (cf. [Leh.] p. 76).

2.4 VOTES DES EXPERTS.

Les experts font partie des procédures de décision admissibles pour le risque classique : la probabilité de se tromper. Si on voulait sélectionner un expert il faudrait imposer des contraintes supplémentaires. Dans la théorie des tests on privilégie une hypothèse, par exemple $H_0 : \theta = 0$, on fixe un seuil α et on s'intéresse aux procédures de décision qui vérifient $E_0(\phi) \leq \alpha$ et maximisent $E_1(\phi)$. Le lemme fondamental de Neyman et Pearson (cf. [Leh.] p. 74) nous donne la solution. Cette manière de faire est bien sûr critiquable. Certains vont préférer donner un indice d'aide à la prise de décision comme la *p-value*, le seuil minimum de rejet (cf. [Sch.]). D'autres vont refuser la dissymétrie totale de traitement des deux hypothèses en acceptant une troisième décision, celle de ne pas conclure (cf. [Mor.1] [Ney.] [Nik.1]).
La difficulté du choix d'un expert provient du comportement opposé des deux risques $E_0(\phi)$ et $E_1(1-\phi)$, quand l'un diminue l'autre augmente.

(k, β)	$(0,1)$	$\nearrow$	$(\infty, 0)$
$E_0(\phi_{(k,\beta)})$	0	$\nearrow$	$1 - P_0(\Omega_\infty)$
$E_1(1-\phi_{(k,\beta)})$	$1 - P_1(\Omega_0)$	$\searrow$	0

On peut supprimer cet inconvénient en construisant un risque unique, synthèse des deux précédents. La difficulté est alors transférée au choix de cette synthèse. Dans le cadre Bayesien c'est le choix de la probabilité a priori sur $\Theta = \{0, 1\}$, c'est-à-dire les pondérations des deux risques. On sélectionne ainsi une procédure de décision qui minimise la moyenne pondérée des deux risques. Mais bien souvent on fournit à l'utilisateur la probabilité à postériori sur $\Theta = \{0, 1\}$ et on le laisse se forger sa propre opinion à partir de cette probabilité sur Θ, qu'il transformera en probabilité sur $D = \{0, 1\}$.

Dans la plupart des pratiques, le choix d'une procédure de décision est illusoire, l'utilisateur ne peut pas mettre en avant les yeux fermés la réponse fournie, même si elle est déterministe. Il doit défendre les critères qui ont présidé au choix de cette procédure. Pour une application donnée ces critères font rarement l'unanimité des utilisateurs, plusieurs règles sont légitimes. Comme elles donnent leur avis gratuitement, aucune contrainte économique ne nous empêche de les entendre toutes. C'est ce que nous nous proposons de faire pour les experts. La difficulté sera alors de résumer leurs réponses. Pour cela nous accorderons à chacun d'eux un poids spécifique en probabilisant l'ensemble des experts sélectionnés. L'utilisateur obtiendra le résultat de ce "vote" d'experts sous la forme d'une probabilité sur D. Bien entendu nous ne chercherons pas à probabiliser l'ensemble des experts par une masse de Dirac car nous retrouverions le problème de la sélection d'un expert. Nous allons plutôt essayer de faire voter les experts "démocratiquement".

Avant d'étudier comment répartir les voix des experts, il nous faut mieux définir les votants. Par exemple, des experts presque sûrement égaux ne feront qu'un, ils n'auront droit qu'à une seule carte de vote. Nous voulons aussi que les différentes façons de modéliser le problème de décision n'influencent pas les résultats. C'est bien sûr la valeur de la statistique exhaustive K, le rapport des densités, qui joue le rôle fondamental. Elle est unique presque sûrement (voir annexe I). Mais nous avons vu qu'il y a des experts qui ne sont pas uniquement définis, presque sûrement, par la valeur de K. Ce sont ceux correspondant à une fonction de test ϕ strictement encadrée par deux fonctions de test simples consécutives : $\phi_{(k,0)} \overset{p.s.}{<} \phi \overset{p.s.}{<} \phi_{(k,1)}$ (voir la proposition 2.3.1). Ces experts ne peuvent exister que pour $k \in I\!R_*^+$ et à condition qu'il y ait une masse en k : $P_0(\{K = k\}) > 0$ et $P_1(\{K = k\}) > 0$. Cela ne suffit pas, il faut pouvoir partager cette masse entre les décisions $d = 0$ et $d = 1$. Ce qui n'est pas possible quand Ω est constitué des valeurs de K. L'existence de tels experts suppose donc que l'ensemble des réalisations Ω contienne des informations superflues, par exemple un aléa permettant de prendre une décision à partir d'une règle aléatoire (voir 2.2). Quand il existe plusieurs experts de ce type pour un même k, ce qui les différencie c'est principalement la part de $P_0(\{K = k\})$ et $P_1(\{K = k\})$ qu'ils consacrent à la décision $d = 1$. S'ils le font sur des réalisations différentes dans $\{K = k\}$ ceci n'a pas d'importance puisque sous $\{K = k\}$, les probabilités conditionnelles sont uniformes. Les experts compris strictement entre $\phi_{(k,0)}$ et $\phi_{(k,1)}$ peuvent donc sur $\{K = k\}$ faire ce qu'ils veulent, le choix entre P_0 et P_1 n'est plus structurant, seule la limitation des informations inutiles peut les restreindre. Nous allons commencer par refuser toute information superflue et donc nous limiter aux experts dépendant de la statistique exhaustive K. Ce qui revient à faire voter les experts définis par l'ensemble des fonctions de test simples.

La répartition des voix sur $\Phi_s = [\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}]$, consiste à probabiliser Φ_s. Pour cela nous le munissons de la tribu borélienne correspondant à la topologie de l'ordre. Un intervalle de Φ_s aura d'autant plus de poids que ses extrémités ϕ et ϕ' sont des experts différents. Il semble naturel d'exprimer ces différences en comparant les moyennes des experts sous P_θ. Des experts égaux presque sûrement ne compteront alors que pour un, car sur Φ_s, les classes d'équivalences formées d'experts de même moyenne sont celles définies par l'égalité presque sûre. On définit alors une probabilité sur Φ_s en posant pour $\phi \in]\phi_{(0,1)}, \phi_{(\infty,0)}[$: $m_\theta([\phi_{(0,1)}, \phi[) = E_\theta(\phi)$. Il en est de même si l'on pose $m'_\theta([\phi_{(0,1)}, \phi]) = E_\theta(\phi)$. Ces deux probabilités sont identiques si la fonction de répartition de K est continue. Dans le cas contraire il existe $k \in I\!R_*^+$ possédant une masse : $P_\theta(\{K = k\}) > 0$. Cette masse est affectée à $\phi_{(k,0)}$ par m_θ et à $\phi_{(k,1)}$ par m'_θ. En fait, il semble légitime de partager équitablement la masse. Pour une réalisation ω, le résultat du vote est alors une probabilité Q_θ^ω sur D définie par $Q_\theta^\omega(\{1\}) = \int_{\Phi_s} \phi(\omega)\, d(m_\theta + m'_\theta)/2$.

Définition 2.4.1

Lorsqu'on réalise ω appartenant à $\{K = k\}$, le résultat du vote des experts sous P_θ est une probabilité Q_θ^ω définie sur l'espace des décisions par :

$$Q_\theta^\omega(\{1\}) = \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ (1/2)P_\theta(\{K = k\}) + P_\theta(\{K > k\}) = 1 - E_\theta(\phi_{(k,1/2)}) & si \quad k \in I\!R_*^+ \\ 0 & si \quad k = \infty \end{cases}$$

(avec $\phi_{(k,1/2)} = 1\!I_{\{K<k\}} + (1/2)\ 1\!I_{\{K=k\}} = (1/2)[\phi_{(k,0)} + \phi_{(k,1)}]$).

On retrouve la notion de *p-value*, plus exactement celle de *mid-p-value* (cf. [Rou.]). Si on fait voter les experts en utilisant P_0 pour les différencier, la fréquence de la décision $d = 0$ quand on réalise ω, $Q_0^\omega(\{0\})$, est un seuil minimum de rejet du test de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta = 1$. Dans le cas où on répartit les voix en utilisant P_1, la fréquence de la décision $d = 1$, $Q_1^\omega(\{1\})$, est un seuil minimum de rejet du test de $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta = 0$. S'il y a une masse en $k \in I\!R_*^+$, ce seuil minimum de rejet correspond à une moyenne uniforme entre les seuils des tests aléatoires à la limite du rejet quand on observe k. Ces tests aléatoires deviennent des experts si on prend pour modèle le produit du modèle image de K par l'aléa sur $[0, 1]$ muni de la probabilité uniforme. On obtient l'ensemble Φ_e des experts définis par $\phi_{(k,\beta)}(\omega, u) = 1\!I_{\{K<k\}}(\omega) + 1\!I_{\{K=k\}}(\omega).\ 1\!I_{[0,\beta]}(u)$ avec $k \in I\!R_*^+$ et $\beta \in [0, 1]$. On peut définir comme précédemment des probabilités m_θ et m'_θ, cette fois elles sont définies sur Φ_e muni de la topologie de l'ordre lexicographique, et l'opérateur E_θ désigne la moyenne par rapport au produit de P_θ par la probabilité uniforme. Dans ce cas on a créé un continuum, les probabilités m_θ et m'_θ sont identiques. Il est facile de vérifier que pour cette probabilité, le résultat du vote des experts de Φ_e est celui de la définition précédente.

2.5 VOTE PONDÉRÉ.

Nous allons analyser ce qui se passe quand on fait voter les experts en utilisant un mélange de P_0 et P_1. Il est défini par une probabilité Λ sur $\Theta = \{0,1\}$ donc par $\Lambda(\{0\}) = \lambda$. Si l'on veut comparer les résultats obtenus avec ceux de l'analyse Bayesienne à partir de la loi a priori Λ, il est préférable que λ puisse s'interpréter comme une prise de position en faveur de l'hypothèse $\theta = 0$, donc que la croissance de λ entraîne celle de la fréquence des experts qui décident P_0. Comme $E_1(\phi_{(k,\beta)}) - E_0(\phi_{(k,\beta)}) \geq 0$ (voir fin de 2-2) on a $Q_0^\omega(\{0\}) \leq Q_1^\omega(\{0\})$, le mélange associé à $\lambda \in [0,1]$ sera : $(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1$.

Définition 2.5.1

Soit $\lambda \in [0,1]$. Pour une réalisation $\omega \in \Omega$, on appelle vote des experts pondéré par λ, la probabilité définie sur l'ensemble des décisions par :
$Q_\lambda^\omega(\{1\}) = (1-\lambda)Q_0^\omega(\{1\}) + \lambda Q_1^\omega(\{1\})$.

Q_λ^ω est le résultat du vote des experts quand dans la définition 2.4.1 on remplace la probabilité P_θ par le mélange $(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1$. On retrouve bien les votes Q_0^ω et Q_1^ω pour $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

On maximise la prise de décision en faveur de $\theta = 0$, en prenant $\lambda = 1$. Le vote des experts est alors établi à partir de P_1 et la fréquence de la décision $d = 1$, $Q_1^\omega(\{1\})$, est le seuil minimum de rejet du test de $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta = 0$. C'est le type de test qui permet de confirmer avec force la faveur accordée à $\theta = 0$ puisqu'on est alors dans le cas du rejet. On peut faire une remarque semblable dans le cas où on favorise $\theta = 1$, en prenant $\lambda = 0$. C'est le seuil minimum de rejet du test de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta = 1$ qui intervient.

Même si ici $D = \Theta = \{0,1\}$, la probabilité Q_λ^ω ne peut pas être confondue avec la probabilité a posteriori $\Lambda(\{\theta\} \mid \omega)$ obtenue à partir de la probabilité a priori Λ définie par $\Lambda(\{0\}) = \lambda$. Lorsque ω appartient à Ω_k on a (cf. [Bor.] p. 283) :

$$\Lambda(\{1\} \mid \omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ (1-\lambda)/[\lambda k + (1-\lambda)] & si \quad k \in I\!R_*^+ \\ 0 & si \quad k = \infty. \end{cases}$$

Alors que la fréquence des experts ayant décidé P_1, dans un vote pondéré par λ, est égale à :

$$Q^{\omega}_{\lambda}(\{1\}) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad k = 0 \\ 1 - (1-\lambda)E_0(\phi_{(k,1/2)}) - \lambda E_1(\phi_{(k,1/2)}) & si \quad k \in I\!R^+_* \\ 0 & si \quad k = \infty. \end{cases}$$

Exemple :

Considérons, par rapport à la mesure de Lebesgue, les deux densités :
$p_0 = (1/6)\ 1\!I_{[0,1]} + (1/3)\ 1\!I_{]1,2[} + (1/2)\ 1\!I_{[2,3]}$ et
$p_1 = (1/2)\ 1\!I_{[0,1]} + (1/3)\ 1\!I_{]1,2[} + (1/6)\ 1\!I_{[2,3]}$
Il y a trois valeurs de k utiles : 1/3, 1 et 3. Le tableau suivant donne le vote des experts et la probabilité a posteriori en fonction de la pondération λ.

	$Q^{\omega}_{\lambda}(\{1\})$		$\Lambda(\{1\} \mid \omega)$	
	$1-\lambda$	$0 \nearrow 1/2 \nearrow 1$	$1-\lambda$	$0 \nearrow 1/2 \nearrow 1$
$\omega \in [0,1]$	$\frac{11-2\lambda}{12}$	$3/4 \nearrow 5/6 \nearrow 11/12$	$\frac{3-3\lambda}{3-2\lambda}$	$0 \nearrow 3/4 \nearrow 1$
$\omega \in]1,2[$	$\frac{2-\lambda}{3}$	$1/3 \nearrow 1/2 \nearrow 2/3$	$1-\lambda$	$0 \nearrow 1/2 \nearrow 1$
$\omega \in [2,3]$	$\frac{3-2\lambda}{12}$	$1/12 \nearrow 1/6 \nearrow 1/4$	$\frac{1-\lambda}{1+2\lambda}$	$0 \nearrow 1/4 \nearrow 1$

Le choix de λ a des conséquences moins lourdes sur $Q^{\omega}_{\lambda}(\{1\})$ que sur $\Lambda(\{1\} \mid \omega)$. Pour une réalisation ω, les réponses ont une amplitude de 1 dans le cas de la probabilité a posteriori et de 2/12 ou 1/3 dans le cas du vote des experts.

Cette remarque ne dépend pas de l'exemple. Il en est toujours ainsi quand ω appartient à Ω_k et k à $I\!R^+_*$; lorsque $(1-\lambda)$ varie de 0 à 1, $\Lambda(\{1\} \mid \omega)$ croît de 0 à 1 alors que $Q^{\omega}_{\lambda}(\{1\})$ croît de $1 - E_1(\phi_{(k,1/2)})$ à $1 - E_0(\phi_{(k,1/2)})$. L'amplitude de ces variations, $Q^{\omega}_{0}(\{1\}) - Q^{\omega}_{1}(\{1\})$, est maximum lorsque la réalisation n'apporte aucune information, c'est-à-dire que ω appartient à $\Omega_1 = \{K = 1\}$; elle vaut alors $E_1(\phi_{(1,1/2)}) - E_0(\phi_{(1,1/2)}) = P_1(B) - P_0(B)$ avec $B = \{\omega \in \Omega\ ;\ p_0(\omega) < p_1(\omega)\}$. Le centre de l'intervalle de variation correspond à $\lambda = 1/2$, $Q^{\omega}_{1/2}(\{1\}) = 1 - (1/2)[E_0(\phi_{(k,1/2)}) + E_1(\phi_{(k,1/2)}]$, dans ce cas on ne privilégie aucune des deux hypothèses, on les traite symétriquement. Ce qualificatif peut s'appliquer à d'autres manières de faire. Dans le paragraphe suivant nous en verrons une qui repose directement sur les deux votes de base sans les mélanger.

3–RÈGLES DE DÉCISION DE BOL'SHEV.

3.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS.

Les règles de Bol'shev donnent une solution au problème du choix entre deux probabilités quand on accepte la possibilité de ne pas conclure (cf. [Nik.1] et [Nik.2]). Bol'shev considère l'ensemble des décisions $D' = \{0, 1, 2\}$, la décision 2 voulant dire que les deux probabilités sont plausibles, on refuse de prendre position en faveur de l'une d'elles. Une règle de décision δ' est alors une probabilité de transition de $(\Omega, \mathcal{A})$ vers $(D', \mathcal{D}')$; $\mathcal{D}'$ étant l'ensemble des parties de D'. Pour toute partie C de D', $\delta'(\omega, C)$ représente la probabilité de décider que d appartient à C, lorsqu'on observe ω.

La perte utilisée par Bol'shev est celle qui donne pour risque la probabilité de se tromper, on peut l'écrire $L(\theta, d) = 1 - \mathit{1I}_{\{\theta,2\}}(d)$. Pour une règle δ' il considère donc les deux erreurs :

$R(\theta, \delta') = \int_\Omega \left[\int_{D'} L(\theta, .)\, d\delta'(\omega, .)\right] dP_\theta(\omega) = E_\theta[1 - \delta'(., \{\theta, 2\})]$.

Bol'shev se fixe deux seuils $\alpha_0 \in [0, 1]$ et $\alpha_1 \in [0, 1]$; il s'intéresse aux règles δ' vérifiant $R(\theta, \delta') \leq \alpha_\theta$ pour $\theta \in \{0, 1\}$. Cet ensemble de règles, Δ'_α, est non vide puisqu'il contient la règle qui décide toujours $d = 2$. Bien sûr, cette règle est inintéressante, Bol'shev cherche des règles qui ne décident pas trop souvent $d = 2$. Pour les règles δ' de Δ'_α, il va faire intervenir les deux probabilités de décider $d = 2$: $E_\theta(\delta'(., \{2\}))$ et essayer de les minimiser. Il considère donc le préordre partiel suivant.

Définition 3.1.1

Dans Δ'_α, une règle δ' est aussi bonne qu'une règle δ'' si :
$E_0(\delta'(., \{2\})) \leq E_0(\delta''(., \{2\}))$ *et* $E_1(\delta'(., \{2\})) \leq E_1(\delta''(., \{2\}))$.

Nous allons retrouver les résultats principaux sur les règles de Bol'shev en utilisant les fonctions de test simples, ce qui nous permettra de faire plus facilement le lien avec les experts. Comme les règles de décision considérées sont aléatoires,

les fonctions de test $\phi_{(k,\beta)}$ utilisées le seront avec β dans $[0,1]$ et pas dans $\{0,1\}$ (voir la définition 2.2.1). L'ensemble de ces fonctions de test est noté Φ_a.
$\Phi_a = \Big\{\phi_{(0,1)}\,;\,\{\phi_{(k,\beta)}\}_{k\in IR_*^+,\,\beta\in[0,1]}\,;\,\phi_{(\infty,0)}\Big\}$.
Il est muni de l'ordre lexicographique et il a alors les mêmes propriétés que Φ_s (voir la fin de 2.2). L'opérateur E_θ est continu pour la topologie de l'ordre.

Définition 3.1.2

On appelle règle de Bol'shev, les probabilités de transition de $(\Omega, \mathcal{A})$ vers $(D', \mathcal{D}')$ définies par deux fonctions de test de Φ_a, $\phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k'',\beta'')}$, de la manière suivante :

$$\delta'(\omega,\{d\}) \quad = \quad \begin{cases} 1-\phi_{(k'',\beta'')}(\omega) & si \quad d=0 \\ \phi_{(k',\beta')}(\omega) & si \quad d=1 \\ \phi_{(k'',\beta'')}(\omega)-\phi_{(k',\beta')}(\omega) & si \quad d=2. \end{cases}$$

Comme le montre la proposition suivante, on peut dans Δ'_α se restreindre aux règles de Bol'shev.

Proposition 3.1.1

Soit δ' un élément de Δ'_α. Il existe dans Δ'_α une règle de Bol'shev δ'_B aussi bonne que δ'.

Démonstration

$\phi'(\omega) = \delta'(\omega,\{1\})$ définit un test de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta = 1$ au seuil $\alpha' = E_0(\delta'(.,\{1\})) \leq \alpha_0$. Les propriétés de l'opérateur E_θ sur Φ_a permettent d'affirmer qu'il existe dans Φ_a un plus grand élément, $\phi_{(k',\beta')}$, vérifiant :
$E_0(\phi_{(k',\beta')}) = inf\{\alpha'\ ,\ (1-P_0(\Omega_\infty))\}$.
D'après le lemme de Neyman et Pearson (cf. [Leh.] p. 74) $\phi_{(k',\beta')}$ définit un test de H_0 contre H_1 aussi puissant que ϕ', ce qui se traduit par :
$E_1(\phi_{(k',\beta')}) \geq E_1(\phi')$.

De même $\phi''(\omega) = \delta'(\omega,\{0\})$ définit un test de $H'_0 : \theta = 1$ contre $H'_1 : \theta = 0$ au seuil $\alpha'' = E_1(\delta'(.,\{0\})) \leq \alpha_1$. Il existe dans Φ_a un plus petit élément $\phi_{(k'',\beta'')}$ qui vérifie :

$E_1[1-\phi_{(k'',\beta'')}] = inf\{\alpha'' \ , \ (1-P_1(\Omega_0))\}$.

$1-\phi_{(k'',\beta'')}$ définit un test de Neyman de H'_0 contre H'_1 aussi puissant que ϕ''. Il vérifie donc aussi :

$E_0(1-\phi_{(k'',\beta'')}) \geq E_0(\phi'')$.

1^{er} cas : $\phi_{(k',\beta')} < \phi_{(k'',\beta'')}$.

Ces deux fonctions de test définissent une règle de Bol'shev δ'_B qui appartient à Δ'_α car pour $\theta \in \{0,1\}$ on a :

$R(\theta,\delta'_B) = E_\theta[1-\delta'_B(.,\{\theta,2\})] \leq \alpha_\theta$.

Il reste à démontrer que δ'_B est aussi bonne que δ', soit :

$E_\theta[\delta'_B(.,\{2\})] \leq E_\theta[\delta'(.,\{2\})]$ pour $\theta \in \{0,1\}$.

L'inégalité $\phi_{(k',\beta')} < \phi_{(k'',\beta'')}$ est incompatible avec l'égalité $E_0(\phi_{(k',\beta')}) = 1-P_0(\Omega_\infty)$ car on a alors $\phi_{(k',\beta')} = \phi_{(\infty,0)}$;

$E_0(\phi_{(k',\beta')})$ est donc égale à $\alpha' = E_0(\phi')$.

On a aussi $E_1[1-\phi_{(k'',\beta'')}] = \alpha''$, sinon on aurait $\phi_{(k'',\beta'')} = \phi_{(0,1)}$.

Pour $\theta \in \{0,1\}$ on obtient alors facilement :

$E_\theta[\delta'_B(.,\{2\})] = E_\theta[\phi_{(k'',\beta'')} - \phi_{(k',\beta')}] \leq E_\theta(1-\phi''-\phi') = E_\theta(\delta'(.,\{2\}))$.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\phi_{(k',\beta')} \geq \phi_{(k'',\beta'')}$.

Soit $\phi_{(k,\beta)} \in [\phi_{(k'',\beta'')} \ , \ \phi_{(k',\beta')}]$, nous définissons une règle de Bol'shev δ'_B en posant :

$\delta'_B(\omega,\{0\}) = 1-\phi_{(k,\beta)}(\omega)$ et $\delta'_B(\omega,\{1\}) = \phi_{(k,\beta)}(\omega)$.

Cette règle δ'_B appartient à Δ'_α car :

$R(0,\delta'_B) = E_0(\phi_{(k,\beta)}) \leq E_0(\phi_{(k',\beta')}) \leq \alpha' \leq \alpha_0$ et

$R(1,\delta'_B) = E_1(1-\phi_{(k,\beta)}) \leq E_1(1-\phi_{(k'',\beta'')}) \leq \alpha'' \leq \alpha_1$.

Elle est bien sûr aussi bonne que δ' puisqu'elle ne décide jamais $d=2$:

$E_\theta[\delta'_B(.,\{2\})] = 0 \leq E_\theta(\delta'(.,\{2\}))$ pour $\theta \in \{0,1\}$.

Nous avons même démontré que δ'_B est "aussi bonne" que δ' au sens suivant :

$E_0[\delta'_B(.,\{1\})] \leq E_0[\delta'(.,\{1\})]$, $E_1[\delta'_B(.,\{0\})] \leq E_1[\delta'(.,\{0\})]$ et
$E_0[\delta'_B(.,\{2\})] \leq E_0[\delta'(.,\{2\})]$, $E_1[\delta'_B(.,\{2\})] \leq E_1[\delta'(.,\{2\})]$

Proposition 3.1.2

Soient $\alpha_0 \in [0,1]$ et $\alpha_1 \in [0,1]$.
Il existe dans Δ'_α une règle de Bol'shev δ'_m telle que pour $\theta \in \{0,1\}$:
$E_\theta[\delta'_m(.,\{2\})] = inf\{E_\theta[\delta'(.,\{2\})]\,;\,\delta' \in \Delta'_\alpha\}$.
Cette règle est unique presque sûrement si et seulement si $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$; les deux fonctions de test $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ étant respectivement le plus grand et le plus petit élément de Φ_a tels que :
$E_0(\phi_{(k_0,\beta_0)}) = inf\{\alpha_0\ ,\ (1 - P_0(\Omega_\infty))\}$;
$E_1[1 - \phi_{(k_1,\beta_1)}] = inf\{\alpha_1\ ,\ (1 - P_1(\Omega_0))\}$.

Démonstration

La proposition 3.1.1 nous permet d'affirmer qu'il suffit de considérer le sous ensemble Δ^B_α des règles de Bol'shev de Δ'_α.

I —— Construction de δ'_m.

Les opérateurs E_θ étant continus sur Φ_a, il existe un plus grand élément $\phi_{(k_0,\beta_0)}$, et un plus petit élément $\phi_{(k_1,\beta_1)}$, vérifiant respectivement :
$E_0(\phi_{(k_0,\beta_0)}) = inf\{\alpha_0\ ,\ (1 - P_0(\Omega_\infty))\}$
$E_1[1 - \phi_{(k_1,\beta_1)}] = inf\{\alpha_1\ ,\ (1 - P_1(\Omega_0))\}$.

Δ^B_α est constitué des règles de Bol'shev définies par deux fonctions de test $\phi_{(k',\beta')}$ et $\phi_{(k'',\beta'')}$ telles que :
$\phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k'',\beta'')}$; $\phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k'',\beta'')} \geq \phi_{(k_1,\beta_1)}$.

1^{er} cas : $\phi_{(k_0,\beta_0)} \leq \phi_{(k_1,\beta_1)}$.

La règle δ'_m définie par $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ convient. En effet, pour toute règle δ' de Δ^B_α on a pour $\theta \in \{0,1\}$:
$E_\theta[\delta'(.,\{2\})] = E_\theta(\phi_{(k'',\beta'')} - \phi_{(k',\beta')}) \geq E_\theta(\phi_{(k_1,\beta_1)} - \phi_{(k_0,\beta_0)}) = E_\theta[\delta'_m(.,\{2\})]$.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\phi_{(k_0,\beta_0)} > \phi_{(k_1,\beta_1)}$.

Soit $\phi_{(k,\beta)} \in [\phi_{(k_1,\beta_1)} \ , \ \phi_{(k_0,\beta_0)}]$, la règle de Bol'shev δ'_m définie par $\phi_{(k,\beta)}$ et $\phi_{(k,\beta)}$ convient. Elle appartient à Δ^B_α et $E_\theta[\delta'_m(., \{2\})] = 0$ pour $\theta \in \{0, 1\}$.

II — Unicité de δ'_m.

Dans le premier cas précédent la règle δ'_m définie par $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ est unique presque sûrement ; en effet si une autre règle δ' de Δ^B_α convient, on a pour $\theta \in \{0, 1\}$:
$E_\theta[\delta'(., \{2\})] = E_\theta[\delta'_m(., \{2\})]$ donc
$E_\theta(\phi_{(k_0,\beta_0)} - \phi_{(k',\beta')}) = E_\theta(\phi_{(k'',\beta'')} - \phi_{(k_1,\beta_1)}) = 0$.

Dans le deuxième cas, $\phi_{(k_0,\beta_0)} > \phi_{(k_1,\beta_1)}$, il faut montrer qu'il y a unicité presque sûre si et seulement si : $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$, c'est-à-dire $E_\theta(\phi_{(k_0,\beta_0)} - \phi_{(k_1,\beta_1)}) = 0$ pour $\theta \in \{0, 1\}$.
C'est une condition nécessaire car l'existence de $\theta \in \{0, 1\}$ tel que $E_\theta[\phi_{(k_0,\beta_0)} - \phi_{(k_1,\beta_1)}] > 0$ implique que les règles de Bol'shev définies par $\phi_{(k,\beta)} \in [\phi_{(k_1,\beta_1)} \ , \ \phi_{(k_0,\beta_0)}]$ ne sont pas presque sûrement égales.
La condition suffisante est évidente si l'on montre que toute régle δ' de Δ^B_α vérifiant $E_\theta[\delta'(., \{2\})] = 0$ pour $\theta \in \{0, 1\}$ possède la propriété suivante : $\phi_{(k_1,\beta_1)} \leq \phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k'',\beta'')} \leq \phi_{(k_0,\beta_0)}$. δ' doit bien être de cette forme sinon on aurait $\phi_{(k',\beta')} < \phi_{(k_1,\beta_1)} \leq \phi_{(k'',\beta'')}$ et/ou $\phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k_0,\beta_0)} < \phi_{(k'',\beta'')}$, ce qui est impossible puisque la définition de $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ (resp. $\phi_{(k_0,\beta_0)}$) entraînerait $0 < E_1[\phi_{(k_1,\beta_1)} - \phi_{(k',\beta')}] \leq E_1[\delta'(., \{2\})]$ (resp. $E_0[\delta'(., \{2\})] > 0$).

La non unicité a lieu lorsqu'il est possible de trouver une règle δ' qui décide toujours P_0 ou P_1 avec au moins un seuil strictement inférieur à α_0 ou α_1 ; δ' vérifie pour $\theta \in \{0, 1\}$: $E_\theta[\delta'(., \{2\})] = 0$ et $R(\theta, \delta') \leq \alpha_\theta$ l'une au moins de ces inégalités étant stricte.
On est dans ce cas lorsque les probabilités P_0 et P_1 sont suffisamment disjointes

pour être séparées aux seuils choisis, c'est-à-dire qu'il existe une fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}$ telle que $E_0(\phi_{(k,\beta)}) \leq \alpha_0$ et $E_1(1-\phi_{(k,\beta)}) \leq \alpha_1$ l'une de ces inégalités étant stricte. On pourrait donc être plus exigeant en diminuant les seuils α_0 et α_1.

Bol'shev se pose le problème du choix d'une règle de décision quand il n'y a pas unicité, ce qui revient à choisir un élément $\phi_{(k,\beta)}$ de $[\phi_{(k_1,\beta_1)}, \phi_{(k_0,\beta_0)}]$. Pour cela il considère une pondération des deux risques :
$R(\lambda, \phi_{(k,\beta)}) = (1-\lambda)E_0(\phi_{(k,\beta)}) + \lambda E_1(1-\phi_{(k,\beta)})$.
λ peut s'interpréter comme la probabilité a priori accordée à P_1. Il se donne un ensemble de pondérations possibles, $\Lambda \subset [0,1]$ et il cherche $\phi_{(k,\beta)}$ minimisant :

$$sup\{R(\lambda, \phi_{(k,\beta)}); \lambda \in \Lambda\} = \begin{cases} R(inf\Lambda, \phi_{(k,\beta)}) & si \quad E_0(\phi_{(k,\beta)}) \geq E_1(1-\phi_{(k,\beta)}) \\ R(sup\Lambda, \phi_{(k,\beta)}) & si \quad E_0(\phi_{(k,\beta)}) \leq E_1(1-\phi_{(k,\beta)}) \end{cases}$$

3.2 VOTES DES EXPERTS ET RÈGLES DE BOL'SHEV.

Nous avons vu que le résultat du vote des experts dépend de la probabilité utilisée pour les faire voter. Les probabilités basées sur P_0 et P_1, donnent les votes les plus différents. Il est donc tentant d'essayer de prendre une décision à partir des résultats de ces deux votes, c'est-à-dire en se servant de $Q_0^\omega(\{0\})$, $Q_0^\omega(\{1\})$ et $Q_1^\omega(\{0\})$, $Q_1^\omega(\{1\})$. Comme $Q_\theta^\omega(\{0\}) + Q_\theta^\omega(\{1\}) = 1$ et $E_1(\phi_{(k,\beta)}) \geq E_0(\phi_{(k,\beta)})$ (voir fin de 2.2) on a : $Q_0^\omega(\{1\}) \geq Q_1^\omega(\{1\})$ et $Q_1^\omega(\{0\}) \geq Q_0^\omega(\{0\})$. On décidera $d = 1$ (resp. d=0) sans état d'âme lorsque les votes pour P_1 (resp. P_0) sont jugés prépondérants. Pour cela on peut regarder si le vote pour P_1 (resp. P_0) peut être considéré comme un plébiscite dans le cas le plus favorable, ce qui revient à juger $Q_0^\omega(\{1\})$ (resp. $Q_1^\omega(\{0\})$). Supposons que P_1 (resp. P_0) soit plébiscité lorsque $Q_0^\omega(\{1\}) \geq 1-\alpha_0$ (resp. $Q_1^\omega(\{0\}) \geq 1-\alpha_1$), il y a quatre types de décision suivant que P_0 et P_1 sont ou ne sont pas plébiscités : $d = 0$ si P_0 est plébiscité alors que P_1 ne l'est pas, $d = 1$ si P_1 est plébiscité alors que P_0 ne l'est pas, $d = 2$ si ni P_0 ni P_1 ne sont plébiscités, $d = 3$ si P_0 et P_1 sont plébiscités.

Définition 3.2.1

Soient $\alpha_0 < 1$ et $\alpha_1 < 1$. On appelle règle des plébiscites, δ_p, la règle de décision déterministe à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$ définie par :

$$\delta_p(\omega) = \begin{cases} 0 & si \quad Q_0^\omega(\{0\}) > \alpha_0 \quad et \quad Q_1^\omega(\{1\}) \leq \alpha_1 \\ 1 & si \quad Q_0^\omega(\{0\}) \leq \alpha_0 \quad et \quad Q_1^\omega(\{1\}) > \alpha_1 \\ 2 & si \quad Q_0^\omega(\{0\}) > \alpha_0 \quad et \quad Q_1^\omega(\{1\}) > \alpha_1 \\ 3 & si \quad Q_0^\omega(\{0\}) \leq \alpha_0 \quad et \quad Q_1^\omega(\{1\}) \leq \alpha_1 \end{cases}$$

La restriction $\alpha_0 \neq 1$ et $\alpha_1 \neq 1$ est sans conséquence pratique. Elle évite la prise en compte de règles δ_p qui plébisciteraient P_1 (resp. P_0) pour des réalisations ω dans Ω_∞ (resp. Ω_0), lorsque $\alpha_0 = 1$ (resp. $\alpha_1 = 1$).

δ_p étant déterministe nous allons commencer par la comparer aux règles δ'_m de la proposition 3.1.2 quand elles sont presque sûrement déterministes. Nous utiliserons les fonctions de test $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ définies dans cette proposition.

Proposition 3.2.1

Soient $\alpha_0 < 1$ et $\alpha_1 < 1$. $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite fonction de test de Φ_a telles que :
$E_0(\phi_{(k_0,\beta_0)}) = inf\{\alpha_0\ ,\ (1 - P_0(\Omega_\infty))\}$;
$E_1[1 - \phi_{(k_1,\beta_1)}] = inf\{\alpha_1\ ,\ (1 - P_1(\Omega_0))\}$.
On suppose que β_0 et β_1 valent 0 ou 1.
a) Si $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$ la règle unique δ'_m est alors presque sûrement égale à la règle des plébiscites δ_p.
b) Dans le cas contraire, $\phi_{(k_0,\beta_0)} > \phi_{(k_1,\beta_1)}$ et $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\neq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$, la règle des plébiscites δ_p décide $d = 0$ (resp. $d = 1$) lorsque toutes les règles δ'_m décident $d = 0$ (resp. $d = 1$) et $d = 3$ dans le cas contraire.

Démonstration

Les définitions de $Q_0^\omega(\{0\})$ et $Q_1^\omega(\{1\})$ (voir la définition 2.4.1) permettent d'obtenir facilement les équivalences suivantes :
$Q_0^\omega(\{0\}) \leq \alpha_0 < 1 \Longleftrightarrow \omega \in \Omega_k$ avec $k < k_0$ ou $k = k_0$ et $\beta_0 \geq 1/2$
$Q_1^\omega(\{1\}) \leq \alpha_1 < 1 \Longleftrightarrow \omega \in \Omega_k$ avec $k > k_1$ ou $k = k_1$ et $\beta_1 \leq 1/2$.

Démonstration de a) : $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$.

D'après la proposition 3.1.2, nous savons que δ'_m est unique presque sûrement.

Si $\phi_{(k_0,\beta_0)} \leq \phi_{(k_1,\beta_1)}$ on peut prendre pour δ'_m la règle de Bol'shev définie par $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$. Elle est presque sûrement déterministe si et seulement si β_0 et β_1 prennent les valeurs 0 ou 1. En effet, pour que β_θ appartienne à $]0, 1[$ il est nécessaire d'avoir : $P_\theta(\Omega_{k_\theta}) > 0$. δ'_m et δ_p décident toutes les deux $d = 1$ (resp. $d = 0$) sur Ω_k lorsque $k < k_0$ (resp. $k > k_1$) ou $k = k_0$ et $\beta_0 = 1$ (resp. $k = k_1$ et $\beta_1 = 0$). Sur les autres Ω_k elles décident $d = 2$.

Il nous reste le cas $\phi_{(k_0,\beta_0)} > \phi_{(k_1,\beta_1)}$ sous la condition $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{=} \phi_{(k_1,\beta_1)}$. δ'_m ne décide presque jamais $d = 2$ (voir le $2^{\text{ème}}$ cas du I de la démonstration de 3.1.2). Comme δ_p elle décide $d = 1$

(resp. $d = 0$) sur Ω_k lorsque $(k, 0) < (k_1, \beta_1)$ (resp. $(k, 1) > (k_0, \beta_0)$). δ'_m et δ_p sont donc presque sûrement égales. Remarquons que la règle δ_p ne décide jamais $d = 2$ et presque jamais $d = 3$.

Démonstration de b) : $\phi_{(k_1,\beta_1)} < \phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\neq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$.

D'après la fin de la partie II de la démonstration 3.1.2, les règles δ'_m sont les règles de Bol'shev définies par $\phi_{(k',\beta')}$ et $\phi_{(k'',\beta'')}$ tels que : $\phi_{(k_1,\beta_1)}) \leq \phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k'',\beta'')} \leq \phi_{(k_0,\beta_0)}]$ et $E_\theta(\phi_{(k'',\beta'')} - \phi_{(k',\beta')}) = 0$ pour $\theta \in \{0, 1\}$.

On a supposé que β_0 et β_1 valent 0 ou 1. Il est facile de voir que les règles δ'_m décident toutes $d = 1$ (resp. $d = 0$) sur Ω_k lorsque $k < k_1$ ou $k = k_1$ et $\beta_1 = 1$ (resp. $k > k_0$ ou $k = k_0$ et $\beta_0 = 0$). δ_p fait de même et lorsque les règles δ'_m ne sont pas unanimes elle décide $d = 3$.

Cette proposition montre que la règle des plébiscites différencie les mêmes catégories de réalisations que les règles δ'_m de la proposition 3.1.2 lorsque β_0 et β_1 valent 0 ou 1.

On a $\beta_0 \in]0, 1[$ (resp. $\beta_1 \in]0, 1[$) quand le seuil α_0 (resp. α_1) ne permet pas de trouver un test de Neyman déterministe U.P.P. à ce seuil lorsque P_0 (resp. P_1) joue le rôle de H_0. La règle des plébiscites δ_p étant déterministe, on va essayer de la comparer aux règles de Bol'shev déterministes les plus proches des règles δ'_m.
$\delta_m : (\Omega, \mathcal{A}) \to \{0, 1, 2\}$ fait partie de ces règles si il existe δ'_m qui vérifie :
$\forall \omega \in \{\delta_m(\omega) = 0\} \cup \{\delta_m(\omega) = 1\} \qquad \delta'_m(\omega, \{\delta_m(\omega)\}) \geq 1/2$
$\forall \omega \in \{\delta_m(\omega) = 2\} \qquad \delta'_m(\omega, \{0\}) < 1/2$ et $\delta'_m(\omega, \{1\}) < 1/2$.
On peut dire que δ_m décide $d \in \{0, 1\}$ lorsque la décision d est majoritaire pour la règle δ'_m. Plusieurs règles δ_m peuvent correspondre à une même règle δ'_m, il suffit qu'il existe ω tel que $\delta'_m(\omega, \{0\}) = \delta'_m(\omega, \{1\}) = 1/2$. Bien entendu, si δ'_m est déterministe la règle δ_m la plus proche est $\delta_m = \delta'_m$. Il est facile de vérifier que la proposition 3.2.1 reste valable lorsque les règles δ'_m sont remplacées par les règles déterministes δ_m. On peut alors la prolonger en considérant les cas où l'un

au moins des paramètres β_0 et β_1 ne vaut pas 0 ou 1.

Proposition 3.2.2

Soient $\alpha_0 < 1$ et $\alpha_1 < 1$. $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$ sont respectivement la plus grande et la plus petite fonction de test de Φ_a telles que :
$E_0(\phi_{(k_0,\beta_0)}) = inf\{\alpha_0\ ,\ (1 - P_0(\Omega_\infty))\}$;
$E_1[1 - \phi_{(k_1,\beta_1)}] = inf\{\alpha_1\ ,\ (1 - P_1(\Omega_0))\}$.
On suppose avoir $\beta_0 \in]0,1[$ ou $\beta_1 \in]0,1[$
a) $\phi_{(k_0,\beta_0)} \leq \phi_{(k_1,\beta_1)}$ sans le cas $(k_0,\beta_0) = (k_1,\beta_1) = (k_0,1/2)$; δ_m est unique presque sûrement et égale à la règle des plébiscites δ_p.
b) $\phi_{(k_0,\beta_0)} > \phi_{(k_1,\beta_1)}$ ou $\phi_{(k_0,\beta_0)} = \phi_{(k_1,\beta_1)} = \phi_{(k_0,1/2)}$; la règle des plébiscites δ_p décide $d = 0$ (resp. $d = 1$) lorsque toutes les règles δ_m décident $d = 0$ (resp. $d = 1$) et $d = 3$ dans le cas contraire.

La condition $\phi_{(k_0,\beta_0)} \leq \phi_{(k_1,\beta_1)}$ remplace la condition $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k_1,\beta_1)}$ de la proposition 3.2.1 car $\beta_0 \in]0,1[$ (resp. $\beta_1 \in]0,1[$) implique $P_0(\Omega_{k_0}) > 0$ (resp. $P_1(\Omega_{k_1}) > 0$) ; on ne peut donc pas avoir $\phi_{(k_0,\beta_0)} > \phi_{(k_1,\beta_1)}$ et $\phi_{(k_0,\beta_0)} \overset{p.s.}{=} \phi_{(k_1,\beta_1)}$.

Démonstration

Démonstration de a).

D'après la proposition 3.1.2, δ'_m est unique presque sûrement. Elle est définie par deux fonctions de test $\phi_{(k',\beta')}$ et $\phi_{(k'',\beta'')}$ vérifiant :
$\phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k_0,\beta_0)} \leq \phi_{(k_1,\beta_1)} \leq \phi_{(k'',\beta'')}$,
$\phi_{(k',\beta')} \overset{p.s.}{=} \phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k'',\beta'')} \overset{p.s.}{=} \phi_{(k_1,\beta_1)}$.
Lorsque $\beta_0 \in]0,1[$ (resp. $\beta_1 \in]0,1[$) on a $\phi_{(k',\beta')} = \phi_{(k_0,\beta_0)}$ (resp. $\phi_{(k'',\beta'')} = \phi_{(k_1,\beta_1)}$). On en déduit facilement que δ_m est aussi presque sûrement unique si on n'a pas : $(k_0,\beta_0) = (k_1,\beta_1) = (k_0,1/2)$; dans ce cas $P_\theta(\Omega_{k_0}) > 0$ et il y a deux δ_m différentes l'une définie par $\phi_{(k_0,0)}$ l'autre par $\phi_{(k_0,1)}$.

Considérons pour δ'_m la règle de Bol'shev définie par $\phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k_1,\beta_1)}$. Comme on n'a pas $(k_0,\beta_0) = (k_1,\beta_1) = (k_0,1/2)$, les règles

δ_p et δ'_m décident $d = 1$ (resp. $d = 0$) sur Ω_k si et seulement si $k < k_0$ (resp. $k > k_1$) ou $k = k_0$ et $\beta_0 \geq 1/2$ (resp. $k = k_1$ et $\beta_1 \leq 1/2$). La règle δ_m associée à δ'_m est alors égale à δ_p.

Démonstration de b).

Considérons d'abord le cas $\phi_{(k_0,\beta_0)} = \phi_{(k_1,\beta_1)} = \phi_{(k_0,1/2)}$. D'après la partie a), il existe deux règles δ_m différentes l'une définie par $\phi_{(k_0,0)}$ l'autre par $\phi_{(k_0,1)}$. Elles sont égales à δ_p en dehors de Ω_{k_0} ; sur Ω_{k_0} elles sont différentes et δ_p décide $d = 3$. La proposition est donc bien vérifiée.

On suppose maintenant $\phi_{(k_1,\beta_1)} < \phi_{(k_0,\beta_0)}$.

Les règles δ'_m sont les règles de Bol'shev définies par $\phi_{(k',\beta')}$ et $\phi_{(k'',\beta'')}$ vérifiant : $\phi_{(k_1,\beta_1)}) \leq \phi_{(k',\beta')} \leq \phi_{(k'',\beta'')} \leq \phi_{(k_0,\beta_0)}$ et $\phi_{(k',\beta')} \overset{p.s.}{=} \phi_{(k'',\beta'')}$ (voir la fin de la partie II de la démonstration 3.1.2).

δ_p décide $d = 1$ (resp. $d = 0$) sur Ω_k lorsque $k < k_1$ ou $k = k_1$ et $\beta_1 > 1/2$ (resp. $k > k_0$ ou $k = k_0$ et $\beta_0 < 1/2$) ; dans les autres cas δ_p décide $d = 3$. Les δ_m fournissent bien la même décision que δ_p lorsque δ_p décide $d = 0$ ou $d = 1$. Dans le cas où δ_p décide $d = 3$ on trouve des δ_m qui décident $d = 0$ et d'autres qui décident $d = 1$.

La règle des plébiscites δ_p montre sous une lumière différente les règles δ'_m sélectionnées par Bol'shev. Lorsque δ'_m est unique presque sûrement ce changement d'éclairage est équivalent au passage de la théorie des tests à la notion de *p-value* vue sous l'angle d'un vote d'experts.

Dans le cas de non unicité des règles δ'_m Bol'shev ajoute un critère de sélection pour en garder une seule. Quel que soit le critère choisi cette règle ne décide que $d = 0$ ou $d = 1$. Nous avons vu que la règle δ_p remplace le choix d'un critère par un nouveau type de décision, $d = 3$, lorsque les δ'_m ne sont pas unanimes. δ_p décide $d = 3$ sur le même type de Ω_k que ceux sur lesquels δ'_m décide $d = 2$ quand elle est unique. Pour expliquer ceci supposons que les Ω_k soient de probabilités nulles, ainsi seules les règles déterministes sont intéressantes, et considérons deux seuils α_0 et α_1 tels qu'il existe une fonction de test simple ϕ_k vérifiant : $E_0(\phi_k) = \alpha_0$ et $E_1(\phi_k) = 1 - \alpha_1$; δ'_m et δ_p sont égales presque sûrement et ne décident pas $d = 2$; si l'on diminue les deux seuils elles continueront à être égales presque sûrement mais décideront $d = 2$ autour de Ω_k ; si l'on augmente les deux seuils il n'y aura plus unicité presque sûre des δ'_m et autour de Ω_k, δ_p décidera $d = 3$. La décision $d = 3$ intervient d'autant plus facilement que les probabilités P_0 et P_1 sont différentes.

La décision $d = 2$ ou $d = 3$ est prise lorsque les fréquences des votes sous P_1 et P_0, $Q_0^\omega(\{1\})$ et $Q_1^\omega(\{0\})$, sont jugées de façon semblable : faibles ou fortes. Il semble intéressant de considérer la règle de décision basée sur la différence $G(\omega) = Q_1^\omega(\{0\}) - Q_0^\omega(\{1\})$ qui varie entre -1 et $+1$; on ne prendrait aucune décision autour de 0 et on déciderait $d = 0$ ou $d = 1$ ailleurs suivant que $G(\omega)$ est positif ou négatif.

4–CHOIX ENTRE DEUX HYPOTHÈSES STABLES.

4.1 DÉFINITIONS.

L'ensemble des paramètres Θ est partagé en deux, $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ avec $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$ et $\Theta_i \neq \emptyset$. On considère le modèle statistique $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta})$ et l'ensemble des décisions $D = \{0, 1\}$. Pour $i \in \{0, 1\}$, $d = i$ signifie : θ appartient à Θ_i. Dans la suite pour définir ce problème de décision on écrira simplement le modèle sous la forme : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1})$. La notation $\stackrel{\Theta' p.s.}{=}$ signifiera l'égalité presque sûre pour la famille de probabilités $\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta'}$. Lorsque $\Theta' = \Theta$ on notera simplement $\stackrel{p.s.}{=}$. Une règle de décision sera définie par une fonction de test $\phi : (\Omega, \mathcal{A}) \to \{0, 1\}$.

Nous avons déjà étudié le cas où Θ se réduit à deux éléments : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \{\theta_0\} \cup \{\theta_1\}})$. Dans ce cas, notre définition des experts repose sur l'idée qu'un diagnostic $d \in D$ doit avoir plus chance d'être produit quand il est bon que quand il est mauvais. Cette condition peut s'appliquer à chaque couple (θ_0, θ_1) de $\Theta_0 \times \Theta_1$. Un expert du problème de décision $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1})$ serait alors un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1} pour tout $\theta_0 \in \Theta_0$ et $\theta_1 \in \Theta_1$. Cette propriété est cependant trop forte lorsqu'il existe des événements de probabilité nulle sous θ_0 (resp.θ_1) alors qu'ils ne le sont pas pour tous les θ de Θ_0 (resp. Θ_1). La restriction au problème de décision $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \{\theta_0\} \cup \{\theta_1\}})$ rend la décision certaine sur ces événements.

Considérons par exemple le choix entre $\Theta_1 = \{1\}$ et $\Theta_0 = \{2, 3\}$, P_θ étant la loi uniforme sur $[\theta - 1, \theta + 1]$; $\phi(x) = 1\!\!I_{[0,1+\beta]}\ (x)$, $\beta \in [0, 1]$, définit un expert du choix entre $\{1\}$ et $\{2\}$ mais pas de celui entre $\{1\}$ et $\{3\}$ si $\beta < 1$; en effet les experts de ce choix sont presque sûrement égaux à $1\!\!I_{[0,2]}$; ϕ fait pourtant partie des règles de décision intéressantes pour le problème de départ. Ces considérations nous amènent à garder des règles de décision qui ne sont plus des experts pour certains couples (θ_0, θ_1), mais qui dans ce cas décident $d = 1$ (resp. $d = 0$) avec la probabilité 1 sous θ_1 (resp. θ_0).

Définition 4.1.1

Soient le problème de décision $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1})$ *et une fonction de test* $\phi : (\Omega, \mathcal{A}) \to \{0, 1\}$.
ϕ *définit un expert du choix entre les deux hypothèses* $\theta \in \Theta_0$ *et* $\theta \in \Theta_1$ *s'il possède les deux propriétés suivantes :*
i) pour tout $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$, ϕ *est un expert du choix entre* P_{θ_0} *et* P_{θ_1}*, sinon il vérifie l'une des égalités :* $E_{\theta_0}(\phi) = 0$, $E_{\theta_1}(\phi) = 1$ *;*
ii) pour tout événement A *tel que* $1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$ *(resp.* $1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 0$*) on a* $\phi\ 1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1I_A$ *(resp.* $\phi\ 1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$*).*

La propriété i) exprime que pour tout couple (θ_0, θ_1), ϕ est presque sûrement ordonnable dans l'ensemble des fonctions de test définies en 2.2 : $[\phi_{(0,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}, \phi_{(\infty,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}]$. En effet, si ϕ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1} il est ordonnable dans l'ensemble des fonctions de test simples : $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} = [\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}, \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}]$ (voir la proposition 2.3.1) et lorsque $E_{\theta_0}(\phi) = 0$ (resp. $E_{\theta_1}(\phi) = 1$) on a $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\} p.s.}{\leq} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{\{\theta_0,\theta_1\} p.s.}{\leq} \phi$).

Quant à la propriété ii) elle traduit l'idée qu'il faut, presque tout le temps, décider $d = 1$ (resp. $d = 0$) sur les événements de P_θ probabilité nulle pour tout θ de Θ_0 (resp. Θ_1). Cette condition peut être techniquement utile dans le cas où il n'existe pas de support commun à toutes les probabilités.

Dans le cas courant où les probabilités P_θ, $\theta \in \Theta$, admettent des densités strictement positives par rapport à une même mesure, on a pour tous les couples (θ_0, θ_1) : $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)} = 1I_\emptyset$ et $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} = 1I_\Omega$. La définition précédente revient à dire que ϕ est un expert du choix entre Θ_0 et Θ_1 si c'est un expert pour tous les problèmes simples : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \{\theta_0\} \cup \{\theta_1\}})$. Un expert ϕ du modèle $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1})$ est alors un expert de tout modèle emboîté : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta \in \Theta_0' \cup \Theta_1'})$, $\Theta_0' \subseteq \Theta_0$ et $\Theta_1' \subseteq \Theta_1$. Le passage d'un modèle emboîté au modèle de départ ne peut alors que réduire l'ensemble des experts. Il pourra finir par se restreindre à $1I_\emptyset$ et $1I_\Omega$. C'est souvent le cas des problèmes bilatères dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone. Le travail sur les experts sera donc différent de celui fait

sur les règles admissibles dans la théorie de la décision à partir d'une fonction de perte. En effet, les règles admissibles pour un modèle emboîté sont généralement encore admissibles dans le modèle de départ. Les règles admissibles sont souvent trop nombreuses, les experts eux sont plutôt trop rares.
Le travail sur les règles admissibles est simplifié dans le cas où les problèmes de décision emboîtés sont sensiblement les mêmes. Par exemple dans la théorie des tests, les propriétés obtenues avec des hypothèses simples (lemme de Neyman-Pearson principalement) se prolongent facilement au cas des tests unilatéraux dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone. Ce qui est important dans ce type de problème de décision, c'est que le problème du choix entre un élément θ_0 de Θ_0 et un élément θ_1 de Θ_1 ne change pas fondamentalement lorsque θ_0 et θ_1 varient. En fait, pour ces différents problèmes de décision on peut se restreindre à une même classe de règles de décision. Nous allons commencer par faire quelque chose de semblable. C'est-à-dire analyser le cas où l'ensemble des experts du modèle global contient les fonctions de test simples des problèmes de décision définis par les couples (θ_0, θ_1). Pour cela, il faut que les fonctions appartenant aux ensembles $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ soient ordonnables. Nous allons le faire en introduisant une notion qui généralise le cas des hypothèses unilatérales dans les modèles à rapport de vraisemblance monotone.

Définition 4.1.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ un problème de décision dominé par la mesure μ. Les hypothèses sont stables si il existe une statistique réelle T, telle que pour tout couple $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ il existe une fonction croissante $h_{(\theta_0,\theta_1)} : I\!R \rightarrow \overline{I\!R^+}$ vérifiant $p_{\theta_0}/p_{\theta_1} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ sur le domaine de définition de ce rapport, c'est-à-dire en dehors de $\{\omega \in \Omega\,;\, p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0\}$.

Avant d'étudier les experts du choix entre deux hypothèses stables nous allons donner un exemple de telles hypothèses dans un modèle qui n'est pas à rapport de vraisemblance monotone. Il est facile d'en construire puisque notre définition ne suppose rien sur les rapports $p_{\theta'}/p_{\theta''}$ lorsque θ' et θ'' appartiennent à la même hypothèse. Ainsi le problème de décision, défini par les deux hypothèses composées des probabilités uniformes sur les intervalles de longueur $l \in]0, 2]$ centrés sur 1 pour Θ_1 et sur 2 pour Θ_0, n'est pas à rapport de vraisemblance monotone, mais les hypothèses sont stables.

4.2 ENSEMBLE DES EXPERTS.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1})$ un problème de décision à hypothèses stables par rapport à la statistique réelle T.
Les fonctions de test qui vont jouer un rôle fondamental dans ce problème sont celles définies à partir de l'ordre introduit par la statistique T. C'est-à-dire les fonctions de la forme $f_{(t,u)} = 1\!I_{\{T<t\}} + u\ 1\!I_{\{T=t\}}$. On pose :

$$F = \Big\{ f_{(t,u)}\ ;\ (t,u) \in \big\{ (-\infty, 1); \{(t,u)\}_{t \in I\!R, u \in \{0,1\}}; (+\infty, 0) \big\} \Big\}$$

Les éléments $(-\infty, 1)$ et $(+\infty, 0)$ permettent d'avoir dans tous les cas les fonctions de test $1\!I_\emptyset$ et $1\!I_\Omega$.
F est totalement ordonné par la relation d'ordre partiel usuelle sur les fonctions. Nous le noterons parfois $[f_{(-\infty,1)}, f_{(+\infty,0)}]$. Cet ordre coïncide avec l'ordre lexicographique sur les couples (t, u). Il permet de définir les bornes supérieure et inférieure d'un sous ensemble de F et de munir F de la topologie de l'ordre qui coïncide avec la topologie de la convergence simple. Sur cet espace l'opérateur E_θ, espérance par rapport à P_θ, est croissant et continu. Il peut cependant prendre des valeurs différentes sur deux éléments successifs : $f_{(t,0)}$ et $f_{(t,1)}$.

Pour tout couple (θ_0, θ_1) de $\Theta_0 \times \Theta_1$, on va utiliser l'ensemble des fonctions de test simples basé sur la statistique $K = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$, on le note $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ (voir la définition 2.2.1). Bien que $K = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ soit unique, P_{θ_0} et P_{θ_1} presque sûrement, le choix des $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ n'est pas globalement sans conséquences. Certaines familles $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1}$ facilitent le travail. La définition suivante donne des propriétés techniques qui nous seront utiles pour écrire simplement nos propositions.

Définition 4.2.1

Soit $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ *une famille de fonctions rendant stables les hypothèses* Θ_0 *et* Θ_1 *à partir de la statistique* T. *Notons* $D_i =]-\infty, t_i)$ *la plus grande demi-droite inférieure ouverte ou fermée définissant un événement* $T^{-1}(D_i) = \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \in D_i\}$ *sur lequel les densités* $\{p_{\theta_0}\}_{\theta_0\in\Theta_0}$ *sont nulles. De même* $D_s = (t_s, +\infty[$ *est la plus grande demi-droite supérieure ouverte ou fermée définissant un événement* $T^{-1}(D_s)$ *sur lequel les densités* $\{p_{\theta_1}\}_{\theta_1\in\Theta_1}$ *sont nulles.*

Cette famille est normalisée si chacune des fonctions $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ *vérifie les trois propriétés suivantes.*

i) Si I *est un intervalle de* $I\!R - (D_i \cup D_s)$ *définissant un événement* $T^{-1}(I)$ *sur lequel* $p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ *est constante sur* I.

ii) $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ *est égale à* $+\infty$ *sur* D_s.

iii) $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ *est nulle sur* $D_i - D_s$.

Il est facile de montrer qu'à partir d'une famille $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ on peut toujours construire une famille normalisée (voir annexe II).

Dans la suite nous supposerons toujours travailler avec une famille normalisée. L'union de tous les $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$, lorsque (θ_0, θ_1) parcourt $\Theta_0 \times \Theta_1$, est appelée ensemble des fonctions de test simples et noté Δ_s. Cet ensemble va jouer le rôle de Φ_s dans le choix entre deux probabilités.

Proposition 4.2.1

Il existe un plus petit intervalle fermé, Δ, *de* F *qui contient l'ensemble* Δ_s *des fonctions de test simples.*

Les éléments de $\Delta = [f_{(t_0,u_0)}, f_{(t_1,u_1)}]$ *définissent des experts du choix entre* Θ_0 *et* Θ_1. *Tout autre expert de ce choix, défini par un élément de* F, *est presque sûrement égal à* $f_{(t_0,u_0)}$ *ou* $f_{(t_1,u_1)}$.

Les demi-droites D_i *et* D_s *de la définition 4.2.1 vérifient :* $f_{(t_0,u_0)} = 1I_{D_i - D_s}(T)$ *et* $f_{(t_1,u_1)} = 1 - 1I_{D_s}(T)$.

Démonstration

a) — Démonstration de : $\Delta_s \subseteq F$.

Soient $(k,\beta) \in \Big\{(0,1); \{(k,\beta)\}_{k\in I\!R^+_*,\, \beta\in\{0,1\}}; (\infty,0)\Big\}$ et $(\theta_0,\theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$. La fonction de test simple associée à (k,β) dans $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ est notée : $\phi_{(k,\beta)}$. En utilisant $K = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$, elle s'écrit $1\!I_{\{K<k\}}$ ou $1\!I_{\{K\leq k\}}$ suivant que $\beta = 0$ ou $\beta = 1$.

Une réalisation ω appartient à $\{K < k\}$ (resp. $\{K \leq k\}$) si et seulement si $T(\omega)$ appartient à :

$D_k = \{t \in I\!R,\ h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) < k\}$ (resp. $D_k = \{t \in I\!R,\ h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) \leq k\}$).

Lorsque $D_k = \emptyset$ on a $\phi_{(k,\beta)} = 1\!I_\emptyset = f_{(-\infty,1)}$.

Lorsque $D_k = I\!R$ on a $\phi_{(k,\beta)} = 1\!I_\Omega = f_{(+\infty,0)}$.

Enfin, lorsque $D_k \neq \emptyset$ et $D_k \neq I\!R$ il existe $t_k \in I\!R$ tel que $D_k =]-\infty, t_k[$ ou $D_k =]-\infty, t_k]$, puisque $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ est croissante. On a donc $\phi_{(k,\beta)} = f_{(t_k,0)}$ si $D_k =]-\infty, t_k[$ et $\phi_{(k,\beta)} = f_{(t_k,1)}$ si $D_k =]-\infty, t_k]$.

b) — $\Delta = [1\!I_{D_i - D_s}(T), 1 - 1\!I_{D_s}(T)]$.

Posons $f_{(t_0,u_0)} = inf \Delta_s$ et $f_{(t_1,u_1)} = sup \Delta_s$.

$\Delta = [f_{(t_0,u_0)}, f_{(t_1,u_1)}]$ est évidemment le plus petit intervalle fermé contenant Δ_s.

i) – $f_{(t_0,u_0)} = 1\!I_{D_i - D_s}(T)$

Lorsque $D_i \cup D_s = I\!R$, c'est évident puisque Δ_s est réduit à un seul élément qui s'écrit $1\!I_{D_i - D_s}(T)$ ou $1 - 1\!I_{D_s}(T)$. Dans le cas contraire $1\!I_{D_i - D_s}(T) = 1\!I_{D_i}(T)$; d'après la définition 4.2.1 on a toujours $1\!I_{D_i}(T) \leq \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ donc $1\!I_{D_i}(T) \leq f_{(t_0,u_0)} = inf\{\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$; pour démontrer l'inégalité $1\!I_{D_i}(T) \geq f_{(t_0,u_0)}$, définissons la demi-droite D_0 par $1\!I_{D_0}(T) = f_{(t_0,u_0)}$ et montrons qu'elle est incluse dans D_i ; pour tout (θ_0,θ_1) la fonction $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ est nulle sur D_0 puisque $f_{(t_0,u_0)} \leq \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, les densités p_{θ_0} sont donc nulles sur $T^{-1}(D_0)$, ce qui implique bien $D_0 \subseteq D_i$.

ii) – $f_{(t_1,u_1)} = 1 - 1\!I_{D_s}(T)$

La démonstration est semblable à celle de i). D'après la propriété ii) de la définition 4.2.1 on a toujours $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq 1-\ \mathit{1I}_{D_s}(T)$ donc $1-\ \mathit{1I}_{D_s}(T) \geq f_{(t_1,u_1)} = sup\{\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$; pour démontrer l'inégalité $1-\ \mathit{1I}_{D_s}(T) \leq f_{(t_1,u_1)}$, définissons D_1 par $\mathit{1I}_{D_1}(T) = f_{(t_1,u_1)}$ et montrons que la demi-droite $I\!R - D_1$ est incluse dans D_s ; pour tout (θ_0, θ_1) la fonction $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ est infinie sur $I\!R - D_1$ puisque $f_{(t_1,u_1)} \geq \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, les densités p_{θ_1} sont donc nulles sur $T^{-1}(I\!R - D_1)$, ce qui implique bien $I\!R - D_1 \subseteq D_s$.

c) — Les experts de F sont presque sûrement égaux à un élément de Δ.

En fait on va démontrer quelque chose de plus fort, en prenant un élément $f_{(t,u)}$ de $F - \Delta$ et en montrant que s'il définit un expert il vérifie : $f_{(t,u)} \overset{p.s.}{=} f_{(t_0,u_0)}$ ou $f_{(t,u)} \overset{p.s.}{=} f_{(t_1,u_1)}$.
Pour tout couple (θ_0, θ_1) de $\Theta_0 \times \Theta_1$, on note $F^{(\theta_0,\theta_1)}$ l'intervalle défini par $[\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}, \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}]$ dans F. On a bien sûr : $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} \subseteq F^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $f_{(t,u)}$ est en dehors de l'intervalle $F^{(\theta_0,\theta_1)}$ pour tout couple (θ_0, θ_1).
Lorsque $f_{(t,u)} \leq f_{(t_0,u_0)}$ on a $f_{(t,u)} \overset{\Theta_0 p.s.}{=} f_{(t_0,u_0)}$ puisque $E_{\theta_0}(f_{(t_0,u_0)}) = 0$ pour tout θ_0 de Θ_0. Si $f_{(t,u)}$ est un expert, le fait que l'événement $A = \{f_{(t_0,u_0)} = 1\}$ soit de P_{θ_0} probabilité nulle pour tout θ_0 de Θ_0 entraîne : $f_{(t,u)}.\ \mathit{1I}_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} \mathit{1I}_A$ (voir la propriété ii) de la définition 4.1.1). On en déduit la propriété recherchée : $f_{(t,u)} \overset{p.s.}{=} f_{(t_0,u_0)}$.
Le cas $f_{(t,u)} \geq f_{(t_1,u_1)}$ se traite de façon semblable. On a $E_{\theta_1}(f_{(t_1,u_1)}) = 1$ pour tout θ_1 de Θ_1 et donc $f_{(t,u)} \overset{\Theta_1 p.s.}{=} f_{(t_1,u_1)}$. L'événement $A = \{f_{(t_1,u_1)} = 0\}$ étant de P_{θ_1} probabilité nulle pour tout θ_1 de Θ_1, si $f_{(t,u)}$ est un expert, la propriété ii) de la définition 4.1.1 entraîne : $f_{(t,u)}.\ \mathit{1I}_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$. On a encore la propriété recherchée : $f_{(t,u)} \overset{p.s.}{=} f_{(t_1,u_1)}$.

d) — Tout élément $f_{(t,u)}$ de Δ est un expert.

i) – Démonstration de la propriété i) de la définition 4.1.1.

Soit $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$. On doit démontrer que $f_{(t,u)}$ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1} ou qu'il vérifie : $E_{\theta_0}(f_{(t,u)}) = 0$ ou $E_{\theta_1}(f_{(t,u)}) = 1$.

1$^{\text{er}}$ cas : $f_{(t,u)} \in F^{(\theta_0,\theta_1)} = [\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}, \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}] \subseteq F$.

Posons $k = h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)$. Si $k \in I\!R^+_*$ on a $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,0)} \leq f_{(t,u)} \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,1)}$ et d'après la proposition 2.3.1 $f_{(t,u)}$ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}. Lorsque $k = 0$ (resp. $k = +\infty$) la construction de $\Phi^{(\theta_0,\theta_1)}_s$ à partir de $K = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ entraîne : $f_{(t,u)} \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$ (resp. $f_{(t,u)} \geq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$) ; comme $f_{(t,u)}$ appartient à $F^{(\theta_0,\theta_1)}$ on a $f_{(t,u)} = \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$ (resp. $f_{(t,u)} = \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$) ; $f_{(t,u)}$ est donc encore un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

2$^{\text{ème}}$ cas : $f_{(t,u)} \notin F^{(\theta_0,\theta_1)}$.

On a alors, soit $f_{(t,u)} < \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$, soit $f_{(t,u)} > \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ et donc, soit $E_{\theta_0}(f_{(t,u)}) = 0$, soit $E_{\theta_1}(f_{(t,u)}) = 1$. La propriété i) est vérifiée.

ii) – Démonstration de la propriété ii) de la définition 4.1.1.

1$^{\text{er}}$ cas : soit un événement A tel que $1\!I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$.

On doit obtenir l'égalité : $f_{(t,u)}.\ 1\!I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1\!I_A$. Décomposons A en $A' = A \cap \{f_{(t,u)} = 0\}$ et $A'' = A \cap \{f_{(t,u)} = 1\}$. Pour avoir l'égalité recherchée on doit démontrer $P_{\theta_1}(A') = 0$ pour tout θ_1 dans Θ_1.

Soient $\theta_1 \in \Theta_1$ et $B = A' \cap \{p_{\theta_1} > 0\}$. $P_{\theta_1}(A')$ est nulle si $P_{\theta_1}(B)$ l'est.

Considérons le cas : $f_{(t,u)} > f_{(t_0,u_0)}$.

D'après le lemme 2 de l'annexe II, il existe $\theta_0 \in \Theta_0$ tel que $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} \leq f_{(t,u)}$. Posons $B' = B \cap \{p_{\theta_0} = 0\}$ et $B'' = B \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$. Comme $B'' \subseteq A$, on a $P_{\theta_0}(B'') = 0$, donc $\mu(B'') = 0$ et $P_{\theta_1}(B'') = 0$. Pour finir on va démontrer que B' est vide.

S'il existait $\omega \in B'$ on aurait $h_{(\theta_0,\theta_1)}(T(\omega)) = 0$ car B' est inclus dans B. Ce qui impliquerait $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}(\omega) = 1$ donc $f_{(t,u)}(\omega) = 1$; ceci est impossible puisque $\omega \in B' \subseteq A'$.

Il nous reste le cas : $f_{(t,u)} = f_{(t_0,u_0)}$.

Si $f_{(t_0,u_0)} = f_{(t_1,u_1)}$ on a $P_{\theta_1}(\{f_{(t,u)} = 0\}) = 0$ donc $P_{\theta_1}(A') = 0$.

Sinon il existe dans $\Delta - \{f_{(t_0,u_0)}\}$, une suite $\{g_n\}_{n\in IN}$ décroissant vers $f_{(t_0,u_0)}$; comme $g_n > f_{(t_0,u_0)}$ on a la propriété recherchée sur les g_n : $g_n.\ 1I_A \overset{\theta_1 p.s.}{=} 1I_A$; ce qui entraîne bien $f_{(t,u)}.\ 1I_A \overset{\theta_1 p.s.}{=} 1I_A$.

$2^{\text{ème}}$ cas : soit un événement A tel que $1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 0$.

On doit obtenir l'égalité : $f_{(t,u)}.\ 1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$. La démonstration est semblable à la précédente. On décompose A en $A' = A \cap \{f_{(t,u)} = 1\}$ et $A'' = A \cap \{f_{(t,u)} = 0\}$. Pour avoir l'égalité recherchée on doit démontrer $P_{\theta_0}(A') = 0$ pour tout θ_0 dans Θ_0.

Soient $\theta_0 \in \Theta_0$ et $B = A' \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$. $P_{\theta_0}(A')$ est nulle si $P_{\theta_0}(B)$ l'est.

Considérons le cas : $f_{(t,u)} < f_{(t_1,u_1)}$.

D'après le lemme 1 de l'annexe II, il existe $\theta_1 \in \Theta_1$ tel que $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} \geq f_{(t,u)}$. Posons $B' = B \cap \{p_{\theta_1} = 0\}$ et $B'' = B \cap \{p_{\theta_1} > 0\}$. Comme $B'' \subseteq A$, on a $P_{\theta_1}(B'') = 0$, donc $\mu(B'') = 0$ et $P_{\theta_0}(B'') = 0$. Pour finir on va démontrer que B' est vide. S'il existait $\omega \in B'$ on aurait $h_{(\theta_0,\theta_1)}(T(\omega)) = +\infty$ car B' est inclus dans B. Ce qui impliquerait $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}(\omega) = 0$ donc $f_{(t,u)}(\omega) = 0$; ceci est impossible puisque $\omega \in B' \subseteq A'$.

Il nous reste le cas : $f_{(t,u)} = f_{(t_1,u_1)}$.

Si $f_{(t_0,u_0)} = f_{(t_1,u_1)}$ on a $P_{\theta_0}(\{f_{(t,u)} = 1\}) = 0$ donc $P_{\theta_0}(B) = 0$. Sinon il existe dans $\Delta - \{f_{(t_1,u_1)}\}$, une suite $\{g_n\}_{n\in IN}$ croissant vers $f_{(t_1,u_1)}$; comme $g_n < f_{(t_1,u_1)}$ on a la propriété recherchée sur les g_n : $g_n.\ 1I_A \overset{\theta_0 p.s.}{=} 0$; ce qui entraîne bien $f_{(t,u)}.\ 1I_A \overset{\theta_0 p.s.}{=} 0$.

Nous venons de trouver les experts du choix entre Θ_0 et Θ_1 qui sont définis par un élément de F. Nous allons maintenant considérer l'ensemble des experts. Dans le choix entre deux probabilités, l'ensemble des fonctions de test simples, Φ_s, a joué un rôle fondamental. Les experts n'étant rien d'autre que des règles presque sûrement ordonnables dans Φ_s (voir proposition 2.3.1). Nous allons généraliser la proposition 2.3.1 au choix entre deux hypothèses stables. C'est l'adhérence de Δ_s dans F qui jouera le rôle de Φ_s.

Proposition 4.2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ *un problème de décision à hypothèses stables. On note* Δ_s *l'ensemble des fonctions de test simples définies à partir d'une famille* $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ *normalisée.*
Les experts du choix entre Θ_0 *et* Θ_1 *sont les règles de décision* $\phi : (\Omega, \mathcal{A}) \to \{0,1\}$ *presque sûrement ordonnables dans l'adhérence* $\overline{\Delta_s}$ *de* Δ_s*. C'est-à-dire qu'il existe deux éléments de* $\overline{\Delta_s}$*,* f *et* f'*, tels que :* $f \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} f'$ *et* $]f, f'[\cap\overline{\Delta_s} = \emptyset$.

Démonstration

I —— Condition suffisante.

Soit une règle de décision ϕ pour laquelle il existe f et f' dans $\overline{\Delta_s}$ tels que : $f \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} f'$ et $]f, f'[\cap\overline{\Delta_s} = \emptyset$. Démontrons que ϕ est un expert.

a) – Démonstration de la propriété i) de 4.1.1.

Soit $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$. Si $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)} \leq f$ on a $E_{\theta_1}(\phi) = 1$. Si $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} \geq f'$ on a $E_{\theta_0}(\phi) = 0$. Dans le cas contraire nous allons montrer que ϕ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.
Comme $]f, f'[\cap\Delta_s = \emptyset$, $f < \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ entraîne $f' \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ et $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} < f'$ implique $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} \leq f$; nous avons donc :
$\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} \leq f \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} f' \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$.
Considérons $G = \{g \in \Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} ; g \leq f\}$ et $G' = \{g \in \Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} ; g \geq f'\}$; G et G' forment une partition de $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ en deux intervalles non vides.

1$^{\text{er}}$ cas : $supG = \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,0)}$.

G' n'étant pas vide on ne peut pas avoir $k = \infty$. On obtient alors l'encadrement suivant : $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,0)} \leq f \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} f' \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,1)}$; d'après la proposition 2.3.1, ϕ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

2$^{\text{ème}}$ cas : $supG = \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,1)}$.

Pour tout $k' > k$ on a : $\phi_{(k,1)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq f \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} f' \leq \phi_{(k',0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$; ceci entraîne $f = f' = \phi_{(k,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\phi \overset{p.s.}{=} \phi_{(k,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

b) – Démonstration de la propriété ii) de 4.1.1.

1er cas : soit un événement A tel que $1\!I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$.

On doit obtenir l'égalité : $\phi.\ 1\!I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1\!I_A$.

Par hypothèse on a $f \overset{p.s.}{\leq} \phi$ donc $f.\ 1\!I_A \overset{p.s.}{\leq} \phi.\ 1\!I_A$. De plus f est un élément de $\overline{\Delta_s} \subseteq \Delta$, d'après la proposition 4.2.1 c'est un expert ; il vérifie donc : $f.\ 1\!I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1\!I_A$ (partie ii) de la définition 4.1.1). L'égalité recherchée est bien vérifiée.

2ème cas : soit un événement A tel que $1\!I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 0$.

On doit obtenir l'égalité : $\phi.\ 1\!I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$.

Par hypothèse $\phi \overset{p.s.}{\leq} f'$, donc $\phi.\ 1\!I_A \overset{p.s.}{\leq} f'.\ 1\!I_A$. f' appartenant à Δ, c'est un expert ; d'après la partie ii) de la définition 4.1.1 il vérifie : $f'.\ 1\!I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$. L'égalité recherchée est encore vérifiée.

II — Condition nécessaire.

Soit ϕ un expert du choix entre Θ_0 et Θ_1. On doit trouver deux éléments f et f' de $\overline{\Delta_s}$, tels que : $f \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} f'$ et $]f, f'[\cap \overline{\Delta_s} = \emptyset$.

Pour cela nous utiliserons $G = \{g \in \overline{\Delta_s}\, ;\, g \overset{p.s.}{\leq} \phi\}$ et $G' = \{g \in \overline{\Delta_s}\, ;\, g \overset{p.s.}{\geq} \phi\}$. Ce sont des intervalles ordonnés de $\overline{\Delta_s}$. Nous allons commencer par établir quelques propriétés de G et G'.

a) – G est non vide.

Nous allons montrer qu'il contient $f_{(t_0,u_0)} = inf \Delta$. Pour cela il faut obtenir $f_{(t_0,u_0)} \overset{\theta p.s.}{\leq} \phi$ quel que soit θ de Θ.

1er cas : Soit $\theta \in \Theta_0$.

Par définition de $f_{(t_0,u_0)}$ on a $E_\theta(f_{(t_0,u_0)}) = 0$, c'est-à-dire $f_{(t_0,u_0)} \overset{\theta p.s.}{=} 0$ et donc : $\phi \overset{\theta p.s.}{\geq} f_{(t_0,u_0)}$.

2ème cas : Soit $\theta \in \Theta_1$.

Considérons $A = \{f_{(t_0,u_0)} = 1\}$, on a $1\!I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$; la propriété ii) de la définition 4.1.1 entraîne : $\phi.\ 1\!I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1\!I_A$. Comme $1\!I_A= f_{(t_0,u_0)}$, on obtient bien $\phi \overset{\theta p.s.}{\geq} f_{(t_0,u_0)}$.

b) – G' est non vide.

Nous allons montrer qu'il contient $f_{(t_1,u_1)} = sup\Delta$. Pour cela il faut obtenir $\phi \overset{\theta p.s.}{\leq} f_{(t_1,u_1)}$ quel que soit θ de Θ.

1[er] cas : Soit $\theta \in \Theta_1$.

Par définition de $f_{(t_1,u_1)}$ on a $E_\theta(f_{(t_1,u_1)}) = 1$, c'est-à-dire $f_{(t_1,u_1)} \overset{\theta p.s.}{=} 1$ et donc : $\phi \overset{\theta p.s.}{\leq} f_{(t_1,u_1)}$.

2[ème] cas : Soit $\theta \in \Theta_0$.

Considérons $A = \{f_{(t_1,u_1)} = 0\}$, on a $1\!I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 0$; la propriété ii) de la définition 4.1.1 entraîne : $\phi.\ 1\!I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$. Comme $(1- 1\!I_A) = f_{(t_1,u_1)}$, on obtient bien $\phi \overset{\theta p.s.}{\leq} f_{(t_1,u_1)}$.

c) – G et G' sont fermés.

Pour montrer que G est fermé il suffit de montrer que $g_s = supG$ appartient à G. Posons $A = \{g_s > \phi\}$, on doit démontrer que $P_\theta(A) = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$.

On considère une suite $(g_n)_{n\in I\!N}$ de G croissant vers g_s. Les événements $A_n = \{g_n > \phi\}$ croissent vers A ; comme $g_n \overset{p.s.}{\leq} \phi$, on a $P_\theta(A_n) = 0$ et donc $P_\theta(A) = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$.

De même pour montrer que G' est fermé, on démontre que $g_i = infG'$ appartient à G'. On pose $A = \{g_i < \phi\}$ et on considère une suite $(g_n)_{n\in I\!N}$ de G' décroissant vers g_i. Les événements $A_n = \{g_n < \phi\}$ croissent vers A ; comme $g_n \overset{p.s.}{\geq} \phi$, on a $P_\theta(A_n) = 0$ et donc $P_\theta(A) = 0$ pour tout $\theta \in \Theta$.

d) – Existence de f et f' ayant les deux propriétés requises.

On utilise les deux bornes $g_s = supG$ et $g_i = infG'$. Si $g_i \leq g_s$ on a $\phi \overset{p.s.}{\leq} g_i \leq g_s \overset{p.s.}{\leq} \phi$; le choix $f = f' = g$ avec $g \in [g_i, g_s]$ convient ;

ϕ est presque sûrement égal à un élément de $\overline{\Delta_s}$.

Il nous reste à trouver f et f' lorsque $g_s < g_i$. On a, par construction, $g_s \overset{p.s.}{\leq} \phi \overset{p.s.}{\leq} g_i$. $f = g_s$ et $f' = g_i$ conviennent si $]g_s, g_i[\cap\overline{\Delta_s} = \emptyset$. Il suffit de vérifier : $]g_s, g_i[\cap\Delta_s = \emptyset$. Pour cela on considère un couple (θ_0, θ_1) et on cherche à montrer : $]g_s, g_i[\cap\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} = \emptyset$. La propriété i) de la définition 4.1.1 nous conduit à distinguer trois cas.

1[er] cas : ϕ est un expert du choix entre θ_0 et θ_1.

Nous allons raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ dans $]g_s, g_i[$. ϕ étant un expert du choix entre θ_0 et θ_1, il est ordonnable par rapport à $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ (voir proposition 2.3.1).

1[ère] possibilité : $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{<} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} < g_i$.

Rappelons que $\overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{<}$ signifie $\overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{\leq}$ sans que l'on ait $\overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=}$.

Nous allons commencer par analyser ce qui peut empêcher $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ d'appartenir à G' c'est-à-dire de vérifier : $\phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$.

Posons $A = \{g_i - \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} = 1\} \cap \{\phi = 1\} = \{\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} \neq g_i\} \cap \{\phi = 1\}$. Comme $\phi \overset{p.s.}{\leq} g_i$, on a $\phi.\ \mathit{1I}_{A^c} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}.\ \mathit{1I}_{A^c}$. Par définition de A on a $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}.\ \mathit{1I}_A = 0$, ceci implique $\phi.\ \mathit{1I}_A \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} 0$, ce qui peut s'écrire $P_{\theta_0}(A) = P_{\theta_1}(A) = 0$; les événements $A \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$ et $A \cap \{p_{\theta_1} > 0\}$ sont alors μ négligeables et donc P_θ négligeables pour tout θ ; la seule partie de A qui peut ne pas être P_θ négligeable, pour tout θ, est $B = A \cap \{p_{\theta_0} = 0\} \cap \{p_{\theta_1} = 0\}$; on a donc déjà : $\phi.\ \mathit{1I}_{B^c} \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}.\ \mathit{1I}_{B^c}$. On distingue maintenant deux cas, qui conduiront à des contradictions différentes.

i) Pour tout $\theta \in \Theta_1$: $P_\theta(B) = 0$. La partie ii) de la définition 4.1.1 implique : $\phi.\ \mathit{1I}_B \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$. ϕ étant égal à 1 sur B, cet événement est P_θ négligeable pour tout θ et on a alors $\phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$; ceci prouve que $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ appartient à G' et contredit l'hypothèse : $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} < g_i = infG'$.

ii) Il existe $\theta \in \Theta_1$ tel que $P_\theta(B) > 0$. L'événement $C = B \cap \{p_\theta > 0\}$ est non vide et $P_\theta(C) > 0$. Soit $\omega \in C$, comme $p_{\theta_0}(\omega) = 0$ on a $h_{(\theta_0,\theta)}(T(\omega)) = 0$; $h_{(\theta_0,\theta)}$ étant croissante on a, pour $t = T(\omega)$, $E_{\theta_0}(f_{(t,1)}) = 0$; de plus $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} < f_{(t,1)} \leq g_i$ car $\omega \in A$; $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ sont donc de moyenne nulle sous P_{θ_0} ce qui, par définition de $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, implique l'égalité P_{θ_0} et P_{θ_1} presque sûrement de ces deux éléments de $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$. ϕ vérifie alors : $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{<} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{=} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$; on en déduit $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{<} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, ce qui contredit le fait que ϕ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

$2^{\text{ème}}$ possibilité : $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{>} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} > g_s$.

La démonstration est semblable à celle du cas précédent.

On pose $A = \{\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} - g_s = 1\} \cap \{\phi = 0\} = \{\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} \neq g_s\} \cap \{\phi = 0\}$. Comme $g_s \overset{p.s.}{\leq} \phi$, on a $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}.\ 1I_{A^c} \overset{p.s.}{\leq} \phi.\ 1I_{A^c}$. De plus, $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}.\ 1I_A = 1I_A$ entraîne $\phi.\ 1I_A \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} 1I_A$, ce qui implique $P_{\theta_0}(A) = P_{\theta_1}(A) = 0$ puisque $A \subseteq \{\phi = 0\}$; les événements $A \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$ et $A \cap \{p_{\theta_1} > 0\}$ sont alors μ négligeables et donc P_θ négligeables pour tout θ ; la seule partie de A qui peut ne pas être P_θ négligeable, pour tout θ, est $B = A \cap \{p_{\theta_0} = 0\} \cap \{p_{\theta_1} = 0\}$; on a donc déjà : $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}.\ 1I_{B^c} \overset{p.s.}{\leq} \phi.\ 1I_{B^c}$. On distingue maintenant deux cas, qui conduiront à des contradictions différentes.

i) Pour tout $\theta \in \Theta_0$: $P_\theta(B) = 0$. La partie ii) de la définition 4.1.1 implique : $\phi.\ 1I_B \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1I_B$. Comme ϕ est égal à 0 sur B, cet événement est P_θ négligeable pour tout θ et on a alors $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} \phi$; ceci prouve que $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ appartient à G et contredit l'hypothèse : $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} > g_s = supG.$

ii) Il existe $\theta \in \Theta_0$ tel que $P_\theta(B) > 0$. L'événement $C = B \cap \{p_\theta > 0\}$ est non vide et $P_\theta(C) > 0$. Soit $\omega \in C$, comme $p_{\theta_1}(\omega) = 0$ on a $h_{(\theta,\theta_1)}(T(\omega)) = +\infty$; $h_{(\theta,\theta_1)}$ étant croissante on a, pour $t = T(\omega)$, $E_{\theta_1}(f_{(t,0)}) = 1$; de plus $g_s \leq f_{(t,0)} < \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ car $\omega \in A$; on a donc $E_{\theta_1}(\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}) = 1 = E_{\theta_1}(\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)})$, ce qui implique, par définition de $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$: $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$. ϕ vérifie alors : $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{>} \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{=} \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$; on en déduit $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{>} \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, ce qui contredit le fait

que ϕ est un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.
$3^{\text{ème}}$ possibilité : $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)}$.
On a $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)} < g_i$ et $g_s < \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)} \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} \phi$. On peut refaire les démonstrations des deux possibilités précédentes jusqu'au cas i). C'est dans ii) que l'on se sert de l'inégalité stricte, P_{θ_0} et P_{θ_1} presque sûrement, entre ϕ et $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)}$.
Il nous reste à trouver une contradiction lorsque les deux cas ii) sont réalisés. Les constructions faites au début de ces deux cas sont encore valables. Elles nous conduisent à l'existence de $\theta \in \Theta_0$, de $\theta' \in \Theta_1$ et de deux réels, t et t', tels que :
$g_s \leq f_{(t,0)} < \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)}$ et $h_{(\theta,\theta_1)}(t) = +\infty$;
$\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)} < f_{(t',1)} \leq g_i$ et $h_{(\theta_0,\theta')}(t') = 0$.
Considérons l'intervalle $I = [t, t']$; la fonction $h_{(\theta,\theta_1)}$ (resp. $h_{(\theta_0,\theta')}$) est égale à $+\infty$ (resp. 0) sur I, donc pour tout ω de $\{T \in I\}$ on a $p_{\theta_1}(\omega) = 0$ et $p_{\theta_0}(\omega) = 0$. La famille $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}$ étant normalisée, d'après la définition 4.2.1, $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ est constante sur I, puisque $I \subseteq I\!R - (D_i \cup D_s)$ (voir la proposition 4.2.1) ; ce qui contredit l'existence d'un élément $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)}$ strictement entre $f_{(t,0)}$ et $f_{(t',1)}$.

$2^{\text{ème}}$ cas : $E_{\theta_0}(\phi) = 0$.

La condition $E_{\theta_0}(\phi) = 0$ est équivalente à $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$.
Montrons que l'on a aussi $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{\leq} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$.
Par définition, $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$ vaut 1 sur $\{p_{\theta_0} = 0\} \cap \{p_{\theta_1} > 0\}$. L'événement $A = \{\phi > \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}\} = \{\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} = 0\} \cap \{\phi = 1\}$ est bien θ_1 négligeable puisqu'il se décompose en $A' = A \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$ qui est μ négligeable ($E_{\theta_0}(\phi) = 0$) et $B = A \cap \{p_{\theta_0} = 0\} \cap \{p_{\theta_1} = 0\}$.
Le cas $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\}p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$ a été étudié précédemment puisque ϕ est alors un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

Il reste à considérer le cas : $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$ et $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{<} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$.
Par construction de B on a $\phi.\ 1\!I_{B^c} \overset{p.s.}{\leq} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}.\ 1\!I_{B^c}$.

Nous allons encore raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ dans $]g_s, g_i[$; on a alors $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_0,\theta_1)} < g_i$. Si on montre que B est P_θ négligeable pour tout θ on aura $\phi \overset{p.s.}{\leq} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, ce qui se traduit par l'appartenance de $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ à G' et est incompatible avec $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)} < g_i = infG'$.

Montrons d'abord que B est P_θ négligeable pour tout θ de Θ_0. S'il existait $\theta \in \Theta_0$ tel que $P_\theta(B) > 0$, ϕ serait un expert du choix entre P_θ et P_{θ_1}, d'après la partie i) de la définition 4.1.1, puisqu'on aurait $E_\theta(\phi) > 0$ et par hypothèse $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{<} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ donc $E_{\theta_1}(\phi) < 1$; de plus, l'événement $C = B - \{g_i = 0\}$ serait non négligeable pour P_θ puisque $\phi \overset{p.s.}{\leq} g_i$, il existerait alors $\omega \in C$ tel que $p_\theta(\omega) > 0$ donc $h_{(\theta,\theta_1)}(T(\omega)) = +\infty$ et $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta,\theta_1)} \leq f_{(T(\omega),0)} < g_i$; on aurait même $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta,\theta_1)} \leq g_s$ puisque le premier cas appliqué à ϕ expert du choix entre P_θ et P_{θ_1} entraîne $]g_s, g_i[\cap \Phi_s^{(\theta,\theta_1)} = \emptyset$; ce qui impliquerait $E_{\theta_1}(\phi) = 1$ qui est incompatible avec la condition $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{<} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$. On a donc bien $P_\theta(B) = 0$ pour $\theta \in \Theta_0$.

Il reste à montrer que l'on a aussi $P_\theta(B) = 0$ pour tout θ dans Θ_1. Soit $\theta \in \Theta_1$, supposons $P_\theta(B) > 0$; l'événement $C = B \cap \{p_\theta(\omega) > 0\}$ ne serait pas μ négligeable bien que $P_{\theta'}$ négligeable pour tout θ' de Θ_0 ; il existerait alors $\omega_{\theta'} \in C$ tel que $p_{\theta'}(\omega_{\theta'}) = 0$, donc $h_{(\theta',\theta)}(T(\omega_{\theta'})) = 0$ et par définition de $B \subseteq A$: $\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq f_{(T(\omega_{\theta'}),1)} \leq \phi_{(0,1)}^{(\theta',\theta)}$; le lemme 2 de l'annexe II impliquerait $f_{(t_0,u_0)} = \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, ce qui contredit la condition $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{<} \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ car ϕ est un expert donc $\phi \overset{p.s.}{\geq} f_{(t_0,u_0)}$ (voir II-a)).

3ème cas : $E_{\theta_1}(\phi) = 1$.

La démonstration est semblable à la précédente.

On pose $A = \{\phi < \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}\} = \{\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} = 1\} \cap \{\phi = 0\}$ qui se décompose en $A' = A \cap \{p_{\theta_1} > 0\}$, $A'' = A \cap \{p_{\theta_1} = 0\} \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$ et

$B = A \cap \{p_{\theta_1} = 0\} \cap \{p_{\theta_0} = 0\}$.

A'' est vide puisque $\{p_{\theta_1} = 0\} \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$ est inclus dans $\{\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} = 0\}$

par définition de $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$; A' est μ négligeable puisque la condition $E_{\theta_1}(\phi) = 1$ est équivalente à $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$; on a évidemment $P_{\theta_0}(B) = 0$ et donc aussi : $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{\geq} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0}$.

Le cas $\phi \overset{\{\theta_0,\theta_1\} p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ a été étudié précédemment puisque ϕ est alors un expert du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}.

Il reste à considérer le cas : $\phi \overset{\theta_1 p.s.}{=} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ et $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{>} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$.

Par construction de B on a $\phi.\ 1I_{B^c} \overset{p.s.}{\geq} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}.\ 1I_{B^c}$.

Nous allons encore raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)}$ dans $]g_s, g_i[$; on a alors $g_s < \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)} \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$. Si on montre que B est P_θ négligeable pour tout θ on aura $\phi \overset{p.s.}{\geq} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$, ce qui se traduit par l'appartenance de $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ à G et est incompatible avec $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)} > g_s = supG$.

Montrons d'abord que B est P_θ négligeable pour tout θ de Θ_1. S'il existait $\theta \in \Theta_1$ tel que $P_\theta(B) > 0$, ϕ serait un expert du choix entre P_{θ_0} et P_θ, d'après la partie i) de la définition 4.1.1, puisqu'on aurait $E_\theta(\phi) < 1$ et par hypothèse $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{>} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ donc $E_{\theta_0}(\phi) > 0$; de plus, l'événement $C = B - \{g_s = 1\}$ serait non négligeable pour P_θ puisque $\phi \overset{p.s.}{\geq} g_s$ et $B \subseteq \{\phi = 0\}$; il existerait alors $\omega \in C$ tel que $p_\theta(\omega) > 0$ donc $h_{(\theta_0,\theta)}(T(\omega)) = 0$ et $g_s < f_{(T(\omega),1)} \leq \phi^{(\theta_0,\theta)}_{(0,1)}$; on aurait même $\phi^{(\theta_0,\theta)}_{(0,1)} \geq g_i$ puisque le premier cas appliqué à ϕ expert du choix entre P_{θ_0} et P_θ entraîne $]g_s, g_i[\cap \Phi_s^{(\theta_0,\theta)} = \emptyset$; ce qui impliquerait $E_{\theta_0}(\phi) = 0$ qui est incompatible avec la condition $\phi \overset{\theta_0 p.s.}{>} \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$. On a donc bien $P_\theta(B) = 0$ pour $\theta \in \Theta_1$.

Il reste à montrer que l'on a aussi $P_\theta(B) = 0$ pour tout θ dans Θ_0. Soit $\theta \in \Theta_0$, supposons $P_\theta(B) > 0$; l'événement $C = B \cap \{p_\theta(\omega) > 0\}$ ne serait pas μ négligeable bien que $P_{\theta'}$ négligeable pour tout θ' de Θ_1 ; il existerait alors $\omega_{\theta'} \in C$ tel que $p_{\theta'}(\omega_{\theta'}) = 0$, donc $h_{(\theta,\theta')}(T(\omega_{\theta'})) = +\infty$ et par définition de $B \subseteq A$: $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)} \geq f_{(T(\omega_{\theta'}),1)} \geq \phi^{(\theta,\theta')}_{(\infty,0)}$; le lemme 1 de l'annexe II impliquerait $f_{(t_1,u_1)} = \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$, ce qui contredit la condition

$\phi \overset{\theta_0 p.s.}{>} \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ puisque tout expert vérifie : $\phi \overset{p.s.}{\leq} f_{(t_1,u_1)}$ (voir II-b)).

4.3 VOTES DES EXPERTS.

Considérons un problème de décision à hypothèses stables : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ (voir la définition 4.1.2). D'après l'annexe II on peut lui associer une statistique réelle T et une famille normalisée : $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ (voir la définition 4.2.1). $K_{(\theta_0,\theta_1)} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ nous permet de définir l'ensemble $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} = [\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}, \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}]$ des fonctions de tests simples basées sur $K_{(\theta_0,\theta_1)}$ (voir la définition 2.2.1). D'après la proposition 4.2.2, c'est l'adhérence $\overline{\Delta_s}$ de $\Delta_s = \cup_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ dans F qui contient les experts fondamentaux. Comme nous l'avons fait pour le choix entre deux probabilités (paragraphe 2.4), nous allons commencer par probabiliser cet ensemble d'experts.

$\overline{\Delta_s} \subseteq F$ est muni de la σ-algèbre trace de la tribu borélienne correspondant à la topologie de l'ordre défini sur F (voir le paragraphe 4.2). Pour définir une probabilité sur $\overline{\Delta_s}$ on peut utiliser les constructions classiques à partir d'une semi-algèbre (cf. [Nev.] p. 25). Par exemple, la semi-algèbre engendrée par les intervalles de la forme $]\leftarrow, f[= \{g \in \overline{\Delta_s}\,;\, g < f\}$ avec $f \in \overline{\Delta_s}$ ou celle engendrée par ceux de la forme $]\leftarrow, f] = \{g \in \overline{\Delta_s}\,;\, g \leq f\}$. On montre facilement, qu'il suffit alors de définir sur les intervalles de la forme $]\leftarrow, f[$ (resp. $]\leftarrow, f]$) une fonction à valeurs dans $[0, 1]$, non décroissante, continue à gauche (resp. droite) et valant 0 (resp. 1) en $f = inf\overline{\Delta_s}$ (resp.$f = sup\overline{\Delta_s}$).

Comme nous l'avons fait en 2.4, nous choisissons de probabiliser $\overline{\Delta_s}$ en utilisant l'opérateur E_θ. Pour chaque $\theta \in \Theta$, il nous permet de définir deux probabilités m_θ et m'_θ en posant $m_\theta(]\leftarrow, f[) = E_\theta(f)$ pour $f \neq inf\overline{\Delta_s}$ et $m'_\theta(]\leftarrow, f]) = E_\theta(f)$ pour $f \neq sup\overline{\Delta_s}$. Ces deux probabilités sont identiques si pour tout couples (f, g) d'éléments successifs de $\overline{\Delta_s}$, c'est-à-dire $f < g$ et $]f, g[\cap\overline{\Delta_s} = \emptyset$, on a : $E_\theta(f) = E_\theta(g)$. Dans le cas contraire, la masse $E_\theta(g - f)$ est attribuée à f par m_θ et à g par m'_θ. Comme nous l'avons fait au paragraphe 2.4, il semble naturel de partager équitablement cette masse entre f et g, ce qui revient à probabiliser $\overline{\Delta_s}$ par $(m_\theta + m'_\theta)/2$. Le résultat du vote des experts à partir de cette probabilité définit pour chaque réalisation $\omega \in \Omega$ une probabilité Q_θ^ω sur

$D = \{0,1\}$. On a $Q^\omega_\theta(\{1\}) = \int_{\overline{\Delta_s}} f(\omega)\, d(m_\theta + m'_\theta)/2$. Afin de pouvoir exprimer simplement ce résultat, on va définir une statistique qui jouera un rôle semblable à celui du rapport des densités K dans le choix entre deux probabilités.

Définition 4.3.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ *un problème de décision à hypothèses stables à partir de la statistique réelle* T. *Associons à* $t \in IR$, *deux éléments de* $[f_{(-\infty,0)}, f_{(+\infty,1)}]$ *définis par :*
$f_{(a_t,u_t)} = sup\{f \in \overline{\Delta_s}\,;\, f \leq f_{(t,0)}\} \cup \{f_{(-\infty,0)}\}$
$f_{(b_t,v_t)} = inf\{f \in \overline{\Delta_s}\,;\, f \geq f_{(t,1)}\} \cup \{f_{(+\infty,1)}\}$
On appelle statistique essentielle, la statistique $K(T)$ *obtenue à partir de la fonction croissante* $K : IR \to \overline{IR}$ *définie par :*

$$K(t) = \begin{cases} -\infty & si \quad (a_t,u_t) = (-\infty,0) \\ b_t - 1 & si \quad (a_t,u_t) = (-\infty,1) \\ [a_t+b_t]/2 & si \quad -\infty < a_t \leq b_t < +\infty \\ a_t + 1 & si \quad (b_t,v_t) = (+\infty,0)\ et\ a_t > -\infty \\ +\infty & si \quad (b_t,v_t) = (+\infty,1) \end{cases}$$

Sous P_θ, *la fonction de répartition moyenne* $G_\theta(k)$ *de cette statistique est égale à* $[P_\theta(\{K(T) < k\}) + P_\theta(\{K(T) \leq k\})]/2$.

Cette définition est cohérente car on ne peut pas avoir en même temps $(a_t,u_t) = (-\infty,0)$ et $(b_t,v_t) = (+\infty,1)$. En effet, on a $\overline{\Delta_s} \subseteq [inf\Delta_s, sup\Delta_s] = [1I_{D_i-D_s}(T), 1-\ 1I_{D_s}(T)] \subseteq [f_{(-\infty,1)}, f_{(+\infty,0)}]$ (voir la proposition 4.2.1), le cas $(a_t,u_t) = (-\infty,0)$ (resp. $(b_t,v_t) = (+\infty,1)$) se produit donc uniquement lorsque $t \in (D_i - D_s)$ (resp. $t \in D_s$).

La quatrième possibilité de la définition de K élimine le cas : $(b_t,v_t) = (+\infty,0)$ et $a_t = -\infty$, il correspond à $\Delta_s = \{f_{(-\infty,1)}, f_{(+\infty,0)}\}$, donc à un choix entre deux hypothèses définies par des densités p_θ identiques et telles que $D_i = D_s = \emptyset$. Nous aurions pu enlever ce cas sans intérêt, mais comme il ne pose pas de problème lorsque $D_i \neq \emptyset$ ou $D_s \neq \emptyset$ nous avons préféré choisir entre $K(t) = -\infty$ et $K(t) = +\infty$.

La croissance de K provient du fait que pour $t < t'$ on a soit $f_{(a_t,u_t)} = f_{(a'_t,u'_t)}$ et $f_{(b_t,v_t)} = f_{(b'_t,v'_t)}$, soit $f_{(b_t,v_t)} \leq f_{(a'_t,u'_t)}$.

Pour t n'appartenant pas à $D_i \cup D_s$, on a $inf\overline{\Delta_s} \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq sup\overline{\Delta_s}$; les deux fonctions de test $f_{(a_t,u_t)}$ et $f_{(b_t,v_t)}$ définissent alors les deux experts successifs de $\overline{\Delta_s}$ qui ne prennent pas la même décision lorsque $T(\omega) = t$. La statistique essentielle $K(T)$ nous permet de traiter de façon homogène les éléments successifs de $\overline{\Delta_s}$ chargés par la probabilité $(m_\theta + m'_\theta)/2$ et ceux qui ne le sont pas.

Proposition 4.3.1

Lorsqu'on réalise ω, le résultat du vote des experts $\overline{\Delta_s}$ sous P_θ est une probabilité Q^ω_θ définie sur l'espace des décisions $D = \{0,1\}$ par :

$$Q^\omega_\theta(\{1\}) = \begin{cases} 1 & si \quad T(\omega) \in D_i - D_s \\ 1 - G_\theta(K(T(\omega))) & si \quad T(\omega) \in I\!R - (D_i \cup D_s) \\ 0 & si \quad T(\omega) \in D_s \end{cases}$$

(G_θ est la fonction de répartition moyenne de la statistique essentielle $K(T)$, les demi-droites D_i et D_s sont définies en 4.2.1).

Démonstration

Soient $\theta \in \Theta$ et $\omega \in \Omega$.

$Q^\omega_\theta(\{1\}) = \int_{\overline{\Delta_s}} f(\omega)\, d(m_\theta + m'_\theta)/2$ est la fréquence des experts qui décident $d = 1$ face à la réalisation ω.

Posons $t = T(\omega)$, d'après la proposition 4.2.1 on a : $inf\overline{\Delta_s} = 1\!I_{D_i - D_s}(T)$ et $sup\overline{\Delta_s} = 1 - 1\!I_{D_s}(T)$; les différentes conditions de l'expression de $Q^\omega_\theta(\{1\})$ peuvent s'écrire respectivement : $f_{(t,0)} < inf\overline{\Delta_s}$, $inf\overline{\Delta_s} \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq sup\overline{\Delta_s}$ et $f_{(t,1)} > sup\overline{\Delta_s}$.

1$^{\text{er}}$ cas : $f_{(t,0)} < inf\overline{\Delta_s}$.

Tous les experts de $\overline{\Delta_s}$ décident $d = 1$ en ω puisque $T(\omega) = t$; on a bien $Q^\omega_\theta(\{1\}) = 1$.

2$^{\text{ème}}$ cas : $inf\overline{\Delta_s} \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq sup\overline{\Delta_s}$.

Considérons les fonctions de test $\delta_t = f_{(a_t,u_t)}$ et $\delta'_t = f_{(b_t,v_t)}$ de la définition précédente. Elles vérifient : $inf\overline{\Delta_s} \leq \delta_t \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq \delta'_t \leq sup\overline{\Delta_s}$.

δ_t (resp. δ'_t) est le plus grand (resp. petit) expert de $\overline{\Delta_s}$ décidant $d = 0$ (resp. $d = 1$) pour la réalisation ω. On a donc :

$$
\begin{aligned}
Q^\omega_\theta(\{1\}) &= 1 - [(m_\theta + m'_\theta)/2](] \leftarrow, \delta_t]) \\
&= 1 - (1/2)[m_\theta(] \leftarrow, \delta'_t[) + m'_\theta(] \leftarrow, \delta_t])] \\
&= 1 - (1/2)[E_\theta(\delta'_t) + E_\theta(\delta_t)] \\
&= 1 - (1/2)[P_\theta(\{\delta'_t = 1\}) + P_\theta(\{\delta_t = 1\})].
\end{aligned}
$$

Ceci démontre le résultat recherché, $Q^\omega_\theta(\{1\}) = 1 - G_\theta(K(t))$, si les deux événements $\{\delta_t = 1\}$ et $\{\delta'_t = 1\}$ s'écrivent respectivement : $\{K(T) < K(t)\}$ et $\{K(T) \leq K(t)\}$; c'est-à-dire si $\{\delta'_t - \delta_t = 1\} = \{K(T) = K(t)\}$. Par construction de K on a $\{\delta'_t - \delta_t = 1\} \subseteq \{K(T) = K(t)\}$. Considérons $\omega_0 \notin \{\delta'_t - \delta_t = 1\}$, il nous reste à montrer que $K(x) \neq K(t)$ pour $x = T(\omega_0)$. Nous allons analyser successivement les différents cas de la définition de $K(t)$; dans notre situation il n'y a que trois cas possibles puisque $\delta_t = f_{(a_t,u_t)}$ et $\delta'_t = f_{(b_t,v_t)}$ appartiennent à $[inf\Delta_s, sup\Delta_s] \subseteq [f_{(-\infty,1)}, f_{(+\infty,0)}]$.

i) $K(t) = b_t - 1$ pour $(a_t, u_t) = (-\infty, 1)$.

Dans ce cas $\{\delta'_t - \delta_t = 1\} = \{f_{(b_t,v_t)} = 1\}$ et $\omega_0 \in \{f_{(b_t,v_t)} = 0\}$; pour que ω_0 puisse exister il faut $b_t < +\infty$ puisque $x = T(\omega_0) \in IR$; on a alors $f_{(b_t,v_t)} \leq f_{(x,0)}$ donc $f_{(b_t,v_t)} \leq f_{(a_x,u_x)}$; comme $f_{(a_t,u_t)} < f_{(b_t,v_t)}$, on a $-\infty < b_t \leq a_x$; par définition de $K(x)$ ceci implique $K(x) \geq a_x \geq b_t > b_t - 1 = K(t)$ (on a $b_t > b_t - 1$ car b_t n'est pas infini).

ii) $K(t) = [a_t + b_t]/2$ pour $-\infty < a_t \leq b_t < +\infty$.

ω_0 appartient à $\{f_{(a_t,u_t)} = 1\}$ ou $\{f_{(b_t,v_t)} = 0\}$, dans le premier cas on a $f_{(x,1)} \leq f_{(b_x,v_x)} \leq f_{(a_t,u_t)}$ et dans le second $f_{(b_t,v_t)} \leq f_{(a_x,u_x)} \leq f_{(x,0)}$, ce qui implique respectivement $b_x \leq a_t$ et $b_t \leq a_x$.

Lorsque $b_x \leq a_t$ la définition de $K(x)$ entraîne $K(x) < K(t)$; c'est évident si $a_t < b_t$ ou $a_x = -\infty$; dans le cas contraire cela reste vrai car

$a_t = b_t$ est équivalent à $(a_t, u_t) = (t, 0)$ et $(b_t, v_t) = (t, 1)$, d'autre part on a $-\infty < a_x < t$ puisque $x < t$.

De même, lorsque $b_t \leq a_x$ on a $K(t) < K(x)$; c'est évident si $a_t < b_t$ ou $b_x = +\infty$; dans le cas contraire cela reste vrai car on a $(a_t, u_t) = (t, 0)$, $(b_t, v_t) = (t, 1)$et $t < x \leq b_x < +\infty$.

iii) $K(t) = a_t + 1$ pour $(b_t, v_t) = (+\infty, 0)$ et $a_t > -\infty$.

ω_0 appartient à $\{f_{(a_t,u_t)} = 1\}$ et comme précédemment on a $f_{(x,1)} \leq f_{(b_x,v_x)} \leq f_{(a_t,u_t)}$, $b_x \leq a_t$, donc $K(x) < K(t)$.

$3^{\text{ème}}$ cas : $f_{(t,1)} > sup\overline{\Delta_s}$.

Tous les experts de $\overline{\Delta_s}$ décident $d = 0$ en ω puisque $T(\omega) = t$; on a donc bien : $Q_\theta^\omega(\{1\}) = 0$.

Les votes Q_θ que l'on vient de définir ont été construits à partir d'une famille normalisée $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ particulière. On peut démontrer (voir la proposition 1 de l'annexe III)qu'en changeant de famille normalisée on obtient les mêmes votes sauf sur un ensemble de réalisations négligeable pour tout P_θ.

Comparons ce vote avec celui obtenu pour le choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1} lorsque $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ (voir la définition 2.4.1). Le résultat du vote des experts $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} \subseteq \overline{\Delta_s}$ dépend de la valeur de la statistique $K_{(\theta_0,\theta_1)} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$. Posons $K_{(\theta_0,\theta_1)}(\omega) = k'$, la fréquence du vote en faveur de P_{θ_1} est égale à 1 si $k' = 0$, à 0 si $k' = +\infty$ et à $[P_\theta(\{K_{(\theta_0,\theta_1)} > k'\}) + P_\theta(\{K_{(\theta_0,\theta_1)} \geq k'\})]/2$ sinon. Il est facile de voir que $K_{(\theta_0,\theta_1)}$ se factorise par $K(T)$: $K_{(\theta_0,\theta_1)} = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(K(T))$, on a alors $k' = h'(k)$ avec $k = K(T(\omega))$. Dans le cas où la réalisation ω pose vraiment un problème de choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}, c'est-à-dire $0 < k' < +\infty$, le vote $Q_\theta^\omega(\{1\})$ des experts $\overline{\Delta_s}$ est compris entre $P_\theta(\{K_{(\theta_0,\theta_1)} > k'\})$ et $P_\theta(\{K_{(\theta_0,\theta_1)} \geq k'\})$. C'est un vote qui affine celui du choix entre P_{θ_0} et P_{θ_1}, en prenant en compte les autres cas possibles.

Examinons maintenant le vote de l'ensemble des experts. D'après la proposition 4.2.2 tout expert ϕ, non presque sûrement égal à un élément de $\overline{\Delta_s}$, est presque sûrement strictement encadré par deux éléments successifs de $\overline{\Delta_s}$: $f \overset{p.s.}{<} \phi \overset{p.s.}{<} f'$. En dehors de l'événement $A = \{f \neq f'\} = \{f = 0\} \cap \{f' = 1\}$, ϕ est presque sûrement égal à f et f'. Sur A la statistique essentielle $K(T)$ est constante, tous les rapports de densités $K_{(\theta_0,\theta_1)}$ le sont donc aussi. Les réalisations ω appartenant à A n'ont aucune raison de se différencier par rapport à la décision prise. C'est ce que font les experts f et f', qui sont d'ailleurs les règles $f_{(a_t,u_t)}$ et $f_{(b_t,v_t)}$ de la définition 4.3.1, t étant une valeur quelconque prise par la statistique T sur A. Les experts compris entre f et f' diffèrent principalement par la proportion de A pour laquelle ils décident $d = 1$. L'ensemble de ces experts dépend des événements inclus dans A. Si on veut éviter l'intervention de ces problèmes de mesurabilité on peut considérer sur A les experts aléatoires constants. Les réalisations ω de A sont ainsi traitées de façon semblable et toutes les proportions sur A de la décision $d = 1$ sont permises. Ceci revient à considérer le sur-modèle $\Omega \times [0, 1]$ muni de la probabilité P'_θ produit de P_θ par la loi uniforme sur $[0, 1]$ et les experts déterministes de la forme : $1\!\!I_{\{K(T)<k\}}\ (\omega) +\ 1\!\!I_{\{K(T)=k\}}\ (\omega).\ 1\!\!I_{[0,\beta]}\ (u)$, β variant entre 0 et 1 (la restriction de β à $\{0, 1\}$ définit les experts de $\overline{\Delta_s}$). Dans ce sur-modèle l'ensemble des experts considérés peut être probabilisé, comme précédemment, par l'opérateur E'_θ moyenne par rapport à P'_θ. Les deux probabilités possibles sont ici identiques et on vérifie facilement que l'on obtient le même vote que celui des experts de $\overline{\Delta_s}$. Dans la suite nous ne considèrerons que ce type de votes. Les autres votes que l'on peut construire sur l'ensemble des experts à partir de E_θ sont toujours compris entre les votes définis sur $\overline{\Delta_s}$ à partir de m_θ et m'_θ. Ils ne peuvent être différents sur A que si $P_\theta(A) > 0$.

Nous nous retrouvons avec un vote pour chaque valeur possible du paramètre θ. Avant d'en choisir un ou d'en construire une synthèse nous allons montrer qu'on avantage la décision $d = 1$ (resp. $d = 0$) en utilisant θ appartenant à Θ_0 (resp. Θ_1). Ceci se comprend aisément puisque P_{θ_0} (resp. P_{θ_1}) a plutôt tendance à charger les grandes (resp. petites) valeurs de T.

Proposition 4.3.2

i) $\forall\, \theta_0 \in \Theta_0$ *et* $\forall\, \theta_1 \in \Theta_1$ *on a :*
$Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\}) \geq Q^{\omega}_{\theta_1}(\{1\})$ *et bien sûr* $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\}) \leq Q^{\omega}_{\theta_1}(\{0\})$.

ii) S'il existe θ *tel que* $Q^{\omega}_{\theta}(\{1\}) \overset{\{\theta\}p.s.}{=} 1 - G_{\theta}(K(T))$, *sous* P_{θ} *le vote* Q_{θ} *est neutre :* $E_{\theta}(Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})) = E_{\theta}(Q^{\omega}_{\theta}(\{0\})) = \frac{1}{2}$.

Démonstration

i) Soient $\theta_0 \in \Theta_0$, $\theta_1 \in \Theta_1$ et $\omega \in \Omega$, posons $T(\omega) = t$.

D'après la proposition 4.3.1, les votes $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\})$ et $Q^{\omega}_{\theta_1}(\{1\})$ sont égaux à 1 (resp. 0) lorsque $t \in (D_i - D_s)$ (resp. $t \in D_s$). Il nous reste à considérer le cas : $t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$

On a alors $Q^{\omega}_{\theta}(\{1\}) = 1 - G_{\theta}(K(t))$, G_{θ} étant la fonction de répartition moyenne de la statistique essentielle $K(T)$: $G_{\theta}(K(t)) = E_{\theta}(f_t)$ avec $f_t = 1\!I_{\{K(T)<K(t)\}} + \frac{1}{2}\, 1\!I_{\{K(T)=K(t)\}}$.

Soient $\theta_0 \in \Theta_0$ et $\theta_1 \in \Theta_1$, il nous faut démontrer l'inégalité :
$E_{\theta_0}(f_t) \leq E_{\theta_1}(f_t)$, c'est-à-dire $\int_{\Omega} f_t(p_{\theta_1} - p_{\theta_0})\, d\mu \geq 0$.

Pour cela nous utilisons la stabilité des hypothèses qui suppose l'existence d'une fonction mesurable croissante $h_{(\theta_0,\theta_1)} : I\!R \rightarrow \overline{I\!R^{+}}$ vérifiant $p_{\theta_0}/p_{\theta_1} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ sur le domaine de définition de ce rapport, c'est-à-dire en dehors de $\{\omega \in \Omega\,;\, p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0\}$.

La valeur de $K(t)$ dépend de deux éléments de $\overline{\Delta_s}$, $\delta_t = f_{(a_t,u_t)}$ et $\delta'_t = f_{(b_t,v_t)}$, car $t \notin (D_i \cup D_s)$. Ils vérifient $\delta_t \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq \delta'_t$ et $]\delta_t, \delta'_t[\cap \overline{\Delta_s} = \emptyset$. Dans le $2^{\text{ème}}$ cas de la démonstration de la proposition 4.3.1 nous avons montré l'égalité : $\{K(T) = K(t)\} = \{\delta'_t - \delta_t = 1\}$. Quel que soit le cas de figure : $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)} \leq \delta_t$, $\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)} \leq \delta_t < \delta'_t \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}$ ou $\delta'_t \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$, on a toujours $\{K(T) = K(t)\} \subseteq \{h_{(\theta_0,\theta_1)}(T) = h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\}$ ($\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,\beta)}$ est une fonction de test simple basée sur $K_{(\theta_0,\theta_1)} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$).
K et $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ étant croissantes on en déduit : $1\!I_A \leq f_t \leq 1\!I_B$ avec
$A = \{h_{(\theta_0,\theta_1)}(T) < h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\}$ et $B = \{h_{(\theta_0,\theta_1)}(T) \leq h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\}$.
Si $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) \leq 1$ on a $1\!I_B\ (p_{\theta_1} - p_{\theta_0}) \geq 0$ donc $\int_{\Omega} f_t(p_{\theta_1} - p_{\theta_0})\, d\mu \geq 0$.

Il nous reste le cas $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) > 1$; posons $\Omega_1 = \{h_{(\theta_0,\theta_1)}(T) \leq 1\}$, on a alors $1I_{\Omega_1} \leq f_t$; il est facile de vérifier l'inégalité suivante :
$(f_t - 1I_{\Omega_1})(p_{\theta_1} - p_{\theta_0}) \geq (1 - 1I_{\Omega_1})(p_{\theta_1} - p_{\theta_0})$ puisque $(p_{\theta_1} - p_{\theta_0})$ est négatif sur le complémentaire de Ω_1 ; en intégrant chacun des membres de cette inégalité on obtient le résultat recherché : $\int_\Omega f_t(p_{\theta_1} - p_{\theta_0})\, d\mu \geq 0$.

ii) Soit θ tel que $Q^\omega_\theta(\{1\}) \stackrel{\{\theta\}p.s.}{=} 1 - G_\theta(K(T))$.

Il suffit de montrer l'égalité $E_\theta(Q^\omega_\theta(\{0\})) = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire
$E_\theta(G_\theta(K(T))) = \frac{1}{2}$.
Si $K(T)$ est diffuse G_θ est la fonction de répartition classique de $K(T)$, elle est de plus continue. Nous savons que $G_\theta(K(T))$ suit une loi uniforme sur $[0,1]$ (cf. [Bre.] p. 284) qui est bien de moyenne $\frac{1}{2}$.
Si $K(T)$ n'est pas diffuse, on considère l'ensemble dénombrable des points chargés par $K(T)$. Le complémentaire de ces points est une union dénombrable d'intervalles disjoints sur lesquels G_θ est continue et égale à la fonction de répartition classique. La mesure trace de la probabilité image de P_θ par $G_\theta(K(T))$ sur les intervalles (a_i, b_i), images par G_θ des intervalles précédents, est donc la mesure de Lebesgue. Ceci implique $E_\theta[G_\theta(K(T)).\ 1I_{(a_i,b_i)}\ (G_\theta(K(T)))] = \frac{b_i^2 - a_i^2}{2}$. Dans l'intervalle $)b_i, a_{i+1}($ la statistique $G_\theta(K(T))$ ne prend qu'une valeur $\frac{b_i + a_{i+1}}{2}$ avec la probabilité $a_{i+1} - b_i$. La moyenne sur ces intervalles est alors $\frac{a_{i+1}^2 - b_i^2}{2}$.
En sommant ces résultats on obtient $E_\theta(G_\theta(K(T))) = -\frac{0^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}$.

Cette proposition nous montre que les votes Q^ω_θ qui avantagent la décision $d = 1$ sont ceux qui se font à partir de θ appartenant à Θ_0. Si Θ_0 n'est pas trop limité, en particulier s'il existe des θ_0 qui donnent à T des fonctions de répartition presque nulles pour des valeurs réelles aussi grandes que l'on veut, on aura des θ_0 pour lesquels $Q^\omega_{\theta_0}(\{1\})$ sera proche de 1. Généralement ces θ_0 ne sont pas très probables pour l'utilisateur qui veut choisir entre Θ_0 et Θ_1. En effet, s'il définit le principe du partage de Θ en deux, il est rare qu'il essaie de limiter Θ à partir de ses connaissances empiriques. Θ contient généralement les valeurs du paramètre mathématiquement possibles. Le choix d'un vote final prendra alors peu en compte les votes associés à ces θ_0. Cela peut se faire en prenant la moyenne des votes associés à θ appartenant à Θ_0, à partir d'une probabilité Λ_0 bien choisie. On peut aussi éviter les votes $Q^{\omega}_{\theta_0}$ trop favorables à la décision $d = 1$ en prenant, dans Θ_0, le vote le moins favorable à $d = 1$. S'il existe c'est un cas particulier du choix précédent, Λ_0 étant une masse de Dirac, dans le cas contraire on peut tout de même définir un vote répondant à ce critère. Nous allons définir ces deux types de votes ainsi que les deux qui correspondent à Θ_1.

Définition 4.3.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ *un problème de décision à hypothèses stables.* $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ *est muni d'une tribu* $\mathcal{T}$ *et on suppose que* $Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})$ *est mesurable pour presque tout* ω*.*
Λ_0 *(resp.* Λ_1*) étant une probabilité sur l'espace mesurable* $(\Theta_0, \mathcal{T}_0)$ *(resp.* $(\Theta_1, \mathcal{T}_1)$*), on appelle vote pondéré par* Λ_0 *(resp.* Λ_1*) la probabilité définie sur* $D = \{0, 1\}$*, pour presque toute réalisation* ω*, par :*
$Q^{\omega}_{\Lambda_0}(\{1\}) = \int_{\Theta_0} Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})\, d\Lambda_0(\theta)$ *(resp.* $Q^{\omega}_{\Lambda_1}(\{1\}) = \int_{\Theta_1} Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})\, d\Lambda_1(\theta)$*).*
On appelle vote le plus favorable sous Θ_0 *(resp.* Θ_1*), la probabilité définie sur* $D = \{0, 1\}$*, pour toute réalisation* ω*, par :*
$Q^{\omega}_{\Theta_0}(\{0\}) = sup_{\theta\in\Theta_0} Q^{\omega}_{\theta}(\{0\})$ *(resp.* $Q^{\omega}_{\Theta_1}(\{1\}) = sup_{\theta\in\Theta_1} Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})$*.*
Ces quatre types de votes vérifient : $Q^{\omega}_{\Lambda_1}(\{1\}) \leq Q^{\omega}_{\Theta_1}(\{1\}) \leq Q^{\omega}_{\Theta_0}(\{1\}) \leq Q^{\omega}_{\Lambda_0}(\{1\})$*.*

Cette propriété entre les quatre types de votes découle directement des définitions et de la proposition 4.3.2.
$Q^{\omega}_{\Theta_0}$ et $Q^{\omega}_{\Theta_1}$ représentent les votes les plus proches parmi ceux basés sur Θ_0 d'une part et Θ_1 d'autre part. Ils peuvent être identiques sur presque tout Ω, nous dirons dans ce cas que les hypothèses sont adjacentes. On peut alors donner le vote $Q^{\omega}_{\Theta_0} \overset{p.s.}{=} Q^{\omega}_{\Theta_1}$ comme aide à la décision, quand on observe ω.

Quand les hypothèses ne sont pas adjacentes ou quand les votes pondérés par Λ_0 et Λ_1 ne sont pas identiques, ce qui est généralement le cas, on a deux votes pour nous aider à prendre une décision. L'un Q_0^ω est basé sur Θ_0, l'autre Q_1^ω est basé sur Θ_1. Les solutions imaginées dans le cas du choix entre deux probabilités sont encore possibles. Nous allons les passer en revue rapidement. Nous en reparlerons plus en détail au chapître suivant, dans le cadre classique des modèles à rapport de vraisemblance monotone.

Comme dans la théorie des tests on peut privilégier une hypothèse. Ici, ceci revient à utiliser un seul des deux votes, Q_0^ω ou Q_1^ω, comme aide à la décision.

De façon semblable à ce qui a été fait au paragraphe 2.5, on peut aussi utiliser un vote pondéré par $\lambda \in [0,1]$: $Q_\lambda^\omega(\{1\}) = (1-\lambda)Q_0^\omega(\{1\}) + \lambda Q_1^\omega(\{1\})$. Si Q_0^ω et Q_1^ω correspondent à deux probabilités Λ_0 et Λ_1, Q_λ^ω est le vote pondéré par la probabilité $\Lambda_\lambda = (1-\lambda)\Lambda_0 + \lambda\Lambda_1$. Cette décomposition de la pondération est intéressante car λ permet d'exprimer un choix a priori entre les deux hypothèses. Ce choix peut bien sûr provenir d'un vote antérieur. Comme nous l'avons vu au paragraphe 2.5, le vote basé sur Λ_λ n'est pas défini par les probabilités a postériori de Θ_0 et Θ_1 obtenues à partir de la loi a priori Λ_λ.

Enfin, on peut prendre une décision à partir de la règle des plébiscites définie au paragraphe 3.2. Ceci fournit une généralisation des règles de Bol'shev. On peut aussi considérer les règles de décision basées sur la différence $G(\omega) = Q_1^\omega(\{0\}) - Q_0^\omega(\{1\}) \in [-1,+1]$, qui ne prennent aucune décision autour de 0 et décident $d=0$ ou $d=1$ ailleurs suivant que $G(\omega)$ est positif ou négatif.

5–MODÈLES À RAPPORT DE VRAISEMBLANCE MONOTONE.

5.1 HYPOTHÈSES UNILATÉRALES.

Les modèles à rapport de vraisemblance monotone recouvrent un grand nombre de cas classiques (cf. [Kar.], [KarR], [Leh.]). En particulier les modèles exponentiels à paramètre réel, mais aussi les modèles statistiques portant sur le paramètre de non centralité d'une famille de densités de Student, Fisher ou khi-deux.

Suivant les auteurs, la définition des modèles à rapport de vraisemblance monotone peut prendre différentes formes, nous utiliserons la suivante :

Définition 5.1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$ *un modèle statistique dominé par la mesure* μ, Θ *étant totalement ordonné par la relation* $\preceq$. *Il est à rapport de vraisemblance monotone s'il existe une statistique* T *à valeur dans* $I\!R$ *telle que pour tout* θ' *et* θ'' *de* Θ, $\theta' \prec \theta''$, *il existe une fonction croissante* $h_{(\theta'',\theta')} : I\!R \rightarrow \overline{I\!R^+}$ *vérifiant* $p_{\theta''}/p_{\theta'} = h_{(\theta'',\theta')}(T)$ *sur le domaine de définition de ce rapport c'est-à-dire en dehors de* $\{\omega \in \Omega\,;\, p_{\theta'}(\omega) = p_{\theta''}(\omega) = 0\}$.

Dans certaines définitions l'égalité $p_{\theta''}/p_{\theta'} = h_{(\theta'',\theta')}(T)$ est remplacée par une égalité presque sûre : $p_{\theta''}/p_{\theta'} \overset{\mu p.s.}{=} h_{(\theta'',\theta')}(T)$. Nous ne l'avons pas fait car l'événement μ-négligeable sur lequel on n'a pas l'égalité dépend de θ' et θ''. Ceci peut poser problème quand on utilise cette égalité sur une infinité non dénombrable de couples (θ', θ''). De plus ce type de définitions est équivalent à la définition choisie ici, lorsque la mesure μ est σ-finie (cf. [Pfa.]).

Comme dans la théorie des tests nous allons commencer par étudier les hypothèses unilatérales. Ce sont les hypothèses naturellement stables dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone, c'est-à-dire celles qui le sont à partir de la statistique T. Nous verrons qu'elles ne sont cependant pas les seules hypothèses stables.

Définition 5.1.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$ *un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone.*
On appelle hypothèses unilatérales, les hypothèses définies par une partition ordonnée $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ *de* Θ.
$\Theta = \Theta_1 + \Theta_0$, $\Theta_1 \neq \emptyset$, $\Theta_0 \neq \emptyset$ *et* $\forall\theta_1 \in \Theta_1$, $\forall\theta_0 \in \Theta_0 : \theta_1 \prec \theta_0$.
Ces hypothèses sont bien sûr stables.

Les hypothèses unilatérales ne sont pas toujours les seules hypothèses stables d'un modèle à rapport de vraisemblance monotone. Par exemple si P_θ désigne la probabilité uniforme sur $[\theta - 1, \theta + 1]$ le modèle $(I\!R, \mathcal{B}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta\subseteq I\!R})$ est à rapport de vraisemblance monotone pour l'ordre ordinaire sur $\Theta \subseteq I\!R$ et la statistique identité T ; les deux hypothèses $\Theta_0 = \{0\}$ et $\Theta_1 = \{-2, +2\}$ sont stables, les experts étant presque sûrement égaux à $1- 1\!I_{[-1,+1]}$; les deux hypothèses $\Theta_0 = \{-1, +1\}$ et $\Theta_1 =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$ le sont aussi. Remarquons, que dans ces deux cas on peut retrouver des hypothèses unilatérales en utilisant la statistique $-|T|$ et en changeant l'ordre sur Θ. Quand cet ordre est fondamental pour l'interprétation, les hypothèses unilatérales deviennent généralement les seules hypothèses stables intéressantes.

Nous allons maintenant comparer nos résultats à ceux obtenus pour les hypothèses unilatérales classiquement étudiées en théorie des tests : $\Theta \subseteq I\!R$ est muni de l'ordre ordinaire et H_0 est l'hypothèse $\theta \leq \theta_0$ ou $\theta \geq \theta_0$. Pour cette dernière hypothèse nous savons qu'il existe au seuil $\alpha \in [0, 1]$ un test uniformément plus puissant défini par :

$$\phi(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad T(\omega) < c \\ \gamma & si \quad T(\omega) = c \\ 0 & si \quad T(\omega) > c \end{cases}$$

$c \in \overline{I\!R}$ et $\gamma \in [0, 1]$ vérifiant $E_{\theta_0}(\phi) = \alpha$ (cf. par exemple [Leh.] p. 78).
Considérons la notion de p-value, de seuil minimum de rejet, pour ce type de tests. A une réalisation ω' on peut associer le seuil minimum $P_{\theta_0}(\{T \leq T(\omega')\})$

ou $P_{\theta_0}(\{T < T(\omega')\})$ suivant que l'on veut une probabilité de rejeter en ω' égale à 1 ou non nulle. Nous prendrons comme p-value la valeur intermédiaire : $P_{\theta_0}(\{T < T(\omega')\}) + (1/2)P_{\theta_0}(\{T = T(\omega')\})$. Ces trois valeurs sont bien sûr identiques lorsque T est diffuse.

Le seuil minimum de rejet ainsi défini est basé sur une famille de tests uniformément plus puissants, construite à partir de la statistique T. Nous pouvons aussi construire une famille semblable à partir de la statistique essentielle $K(T)$ liée aux hypothèses stables $H_0 : \theta \geq \theta_0$ et $H_1 : \theta < \theta_0$ (voir la définition 4.3.1). On obtient alors un seuil minimum de rejet qui peut être interprété comme le résultat d'un vote d'experts.

S'il existe des tests de puissance 1 sur tout Θ_1 et de niveaux différents, on peut modifier la définition précédente en prenant une p-value de 1 lorsque la réalisation ω' appartient à la région de non rejet d'un de ces tests. Ceci est tout à fait justifié car dans ce cas aucune probabilité P_{θ_1} ne charge cette région, il est donc difficile de décider H_1.

Proposition 5.1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta\subseteq IR})$ un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone fondé sur la statistique T. Considérons un élément θ_0 de Θ différent de $inf\Theta$, les hypothèses $\Theta_0 = \Theta \cap \{\theta \geq \theta_0\}$ et $\Theta_1 = \Theta \cap \{\theta < \theta_0\}$ sont unilatérales.

$Q^\omega_{\Theta_0}(\{0\}) = Q^\omega_{\theta_0}(\{0\})$ définit un seuil minimum de rejet de $H_0 : \theta \geq \theta_0$ contre $H_1 : \theta < \theta_0$, pour les tests uniformément plus puissants construits avec la statistique essentielle $K(T)$.

Si les hypothèses sont adjacentes, c'est-à-dire $Q^\omega_{\Theta_0} \overset{p.s.}{=} Q^\omega_{\Theta_1}$, $Q^\omega_{\Theta_1}(\{1\}) \overset{p.s.}{=} Q^\omega_{\theta_0}(\{1\})$ définit un seuil minimum de rejet de $H_0 : \theta < \theta_0$ contre $H_1 : \theta \geq \theta_0$.

Dans cette proposition nous faisons référence aux résultats du paragraphe sur les hypothèses stables. On suppose donc travailler avec une famille $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ normalisée (voir la définition 4.2.1). Il est toujours possible

d'en construire une à partir des fonctions $h_{(\theta'',\theta')}$, $\theta' \prec \theta''$, définies avec le modèle à rapport de vraisemblance monotone étudié (voir l'annexe II).
Il serait intéressant de choisir les fonctions $h_{(\theta'',\theta')}$ d'un modèle à rapport de vraisemblance monotone de telle sorte qu'elles définissent une famille normalisée pour toutes les hypothèses unilatérales. Ceci est uniquement possible lorsque les différentes hypothèses unilatérales définissent les mêmes demi-droites D_i et D_s (voir l'annexe IV). Par contre on peut toujours construire des $h_{(\theta'',\theta')}$ vérifiant la propriété i) de la définition 4.2.1, il suffit de suivre la première étape de l'annexe II. On peut alors en déduire facilement une famille normalisée (voir l'annexe IV).

Démonstration

a) Montrons d'abord que $Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})$ est une fonction croissante en θ.

Soient $\omega \in \Omega$, $\theta' \in \Theta$ et $\theta'' \in \Theta$ tels que $\theta' < \theta''$, on cherche à montrer l'inégalité : $Q^{\omega}_{\theta'}(\{1\}) \leq Q^{\omega}_{\theta''}(\{1\})$.

Nous avons déjà obtenu ce résultat pour $\theta' \in \Theta_1$ et $\theta'' \in \Theta_0$ dans le cadre plus général de la proposition 4.3.2. Nous devons l'étendre ici au cas où θ' et θ'' appartiennent à la même hypothèse. La démonstration est semblable à la précédente.

D'après la proposition 4.3.1, $Q^{\omega}_{\theta}(\{1\})$ dépend de la statistique essentielle $K(T)$ liée aux hypothèses stables $\Theta_0 = \Theta \cap \{\theta \geq \theta_0\}$ et
$\Theta_1 = \Theta \cap \{\theta < \theta_0\}$(voir la définition 4.3.1).

Si $T(\omega) \in (D_i \cup D_s)$, on a la propriété recherchée puisque : $Q^{\omega}_{\theta'}(\{1\}) = Q^{\omega}_{\theta''}(\{1\})$. Dans le cas contraire, on a $Q^{\omega}_{\theta}(\{1\}) = 1 - G_{\theta}(k)$ avec $k = K(T(\omega))$ et $G_{\theta}(k) = \frac{1}{2}E_{\theta}(1\!I_{\{K(T)<k\}}) + \frac{1}{2}E_{\theta}(1\!I_{\{K(T)\leq k\}})$. L'inégalité recherchée est donc équivalente à $G_{\theta'}(k) \geq G_{\theta''}(k)$.

K étant croissante, l'ensemble $\{t \in I\!R\,;\, K(t) = k\}$ est un intervalle non vide ; il existe donc, dans l'ensemble F des fonctions de test $f_{(t,u)}$ définies au début du paragraphe 4.2, deux éléments $f_{(t',u')}$ et $f_{(t'',u'')}$ tels que : $f_{(t',u')} = 1\!I_{\{K(T)<k\}}$ et $f_{(t'',u'')} = 1\!I_{\{K(T)\leq k\}}$.

L'inégalité $G_{\theta'}(k) \geq G_{\theta''}(k)$ sera démontrée si pour toute fonction de test $f_{(t,u)}$ de F on montre l'inégalité $E_{\theta'}(f_{(t,u)}) \geq E_{\theta''}(f_{(t,u)})$, c'est-à-dire $\int_\Omega f_{(t,u)}(p_{\theta'} - p_{\theta''})\, d\mu \geq 0$. Ceci est une propriété classique des modèles à rapport de vraisemblance monotone. Il suffit de distinguer deux cas :

i) $h_{(\theta'',\theta')}(t) \leq 1$.

Posons $A = \{T \leq t\}$, $h_{(\theta'',\theta')}$ étant croissante, le rapport $p_{\theta''}/p_{\theta'}$ est inférieur ou égal à 1 sur l'événement A, ce qui se traduit par : $1I_A .(p_{\theta'} - p_{\theta''}) \geq 0$; comme $f_{(t,u)}$ est nulle sur le complémentaire de A on a bien : $\int_\Omega f_{(t,u)}(p_{\theta'} - p_{\theta''})\, d\mu \geq 0$.

ii) $h_{(\theta'',\theta')}(t) > 1$.

Posons $\Omega_1 = \{h_{(\theta'',\theta')}(T) \leq 1\}$, on a alors $1I_{\Omega_1} \leq f_{(t,u)}$; il est facile de vérifier l'inégalité suivante :

$(f_{(t,u)} - 1I_{\Omega_1})(p_{\theta'} - p_{\theta''}) \geq (1 - 1I_{\Omega_1})(p_{\theta'} - p_{\theta''})$ puisque $(p_{\theta'} - p_{\theta''})$ est négatif sur le complémentaire de Ω_1 ; en intégrant chacun des membres de cette inégalité on obtient le résultat recherché : $\int_\Omega f_{(t,u)}(p_{\theta'} - p_{\theta''})\, d\mu \geq 0$.

b) $Q^\omega_{\Theta_0}(\{0\}) = Q^\omega_{\theta_0}(\{0\})$ est un seuil minimum de rejet.

L'égalité $Q^\omega_{\Theta_0}(\{0\}) = Q^\omega_{\theta_0}(\{0\})$ est une conséquence directe de la propriété démontrée en a), qui est équivalente à la décroissance de $Q^\omega_\theta(\{0\})$ par rapport θ ; en effet, d'après la définition 4.3.2 on a $Q^\omega_{\Theta_0}(\{0\}) = sup_{\theta \in \Theta_0} Q^\omega_\theta(\{0\})$ et par définition de Θ_0 : $\forall\, \theta \in \Theta_0 \quad \theta \geq \theta_0$.

Soit $K(T)$ la statistique essentielle liée aux hypothèses stables Θ_0 et Θ_1 (voir la définition 4.3.1). Pour tout θ_0 de Θ_0 et tout θ_1 de Θ_1, le rapport des densités $h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ peut par construction de $K(T)$ s'écrire $h'_{(\theta_0,\theta_1)}(K(T))$ avec $h'_{(\theta_0,\theta_1)} : \overline{IR} \to \overline{IR^+}$ croissante. Il suffit de montrer l'existence d'une fonction $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ de $K(IR)$ dans $\overline{IR^+}$, vérifiant $h'_{(\theta_0,\theta_1)}(K(t)) = h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)$ pour tout t de IR ; ordonnons les statistiques $f_{(a_t,u_t)}$ et $f_{(b_t,v_t)}$ de la définition 4.3.1, par rapport aux fonctions de test simples de $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$, il y a trois cas possibles : $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = 0$ on a alors $f_{(b_t,v_t)} \leq \phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = k \in]0, +\infty[$

on a alors $\phi_{(k,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq f_{(a_t,u_t)} < f_{(b_t,v_t)} \leq \phi_{(k,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = +\infty$ on a alors $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)} \leq f_{(a_t,u_t)}$; l'égalité $h'_{(\theta_0,\theta_1)}(K(t)) = h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)$ définit bien $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ sur $K(I\!R)$ car $\{K(T) = K(t)\} = \{f_{(b_t,v_t)} - f_{(a_t,u_t)} = 1\}$; nous avons obtenu cette égalité pour $t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$ dans le $2^{\text{ème}}$ cas de la démonstration de la proposition 4.3.1, il est facile de la vérifier pour t appartenant à $D_i - D_s$ ou à D_s (D_i et D_s étant les demi-droites associées aux hypothèses unilatérales $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ dans la définition 4.2.1).

Nous avons vu qu'il existe, pour tout seuil $\alpha \in [0,1]$, un test uniformément plus puissant (U.P.P.) défini par :

$$\phi(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad T(\omega) < c \\ \gamma & si \quad T(\omega) = c \\ 0 & si \quad T(\omega) > c \end{cases}$$

$c \in \overline{I\!R}$ et $\gamma \in [0,1]$ vérifiant $E_{\theta_0}(\phi) = \alpha$.

Tous les tests de la forme de ϕ sont U.P.P. au seuil $\alpha = E_{\theta_0}(\phi)$ si $\alpha > 0$; dans le cas $\alpha = 0$ il existe au moins un test U.P.P. ϕ_0, c'est le plus grand test ϕ vérifiant $E_{\theta_0}(\phi) = 0$ (cf. [Mor.1] p. 36). On a $\phi_0 = 1\!I_{D_0}\ (T)$, $D_0 =]-\infty, t_0)$ étant la plus grande demi-droite inférieure ouverte ou fermée telle que $P_{\theta_0}(T^{-1}(D_0)) = 0$. Par définition, $D_i \subset D_0$, nous allons montrer que tous les tests $\phi \in [1\!I_{D_i - D_s}\ (T), 1\!I_{D_0}\ (T)]$ sont U.P.P. au seuil $\alpha = 0$. Il suffit de montrer que $1\!I_{D_i - D_s}\ (T)$ et $1\!I_{D_0}\ (T)$ sont de même puissance : $\forall \theta_1 \in \Theta_1\ E_{\theta_1}(1\!I_{D_i - D_s}\ (T)) = E_{\theta_1}(1\!I_{D_0}\ (T))$; c'est évident lorsque $D_i \cup D_s = I\!R$, par définition de D_s. Dans le cas contraire $D_i - D_s = D_i$ et d'après le lemme 1 de l'annexe IV, $D_i = D_i^{\theta_0}$ (la densité p_{θ_0} étant nulle sur $T^{-1}(D_i^{\theta_0})$) ; posons $A = T^{-1}(D_0 - D_i^{\theta_0})$, $A' = A \cap \{p_{\theta_0} = 0\}$ et $A'' = A \cap \{p_{\theta_0} > 0\}$, l'événement A'' est μ négligeable puisque $P_{\theta_0}(A) = 0$; il nous reste à montrer que A' est P_{θ_1} négligeable pour tout $\theta_1 \in \Theta_1$; en fait on a même p_{θ_1} nulle sur A' car s'il existait $\omega \in A'$ tel que $p_{\theta_1}(\omega) > 0$ on aurait $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ nulle en $t = T(\omega)$ donc nul sur $]-\infty, t]$, t appartiendrait à $D_i^{\theta_0}$ ce qui est impossible puisque $A' \subseteq A$.

Nous venons de montrer que les tests de la forme ϕ vérifiant $\phi \geq 1\!\!I_{D_i - D_s}\ (T)$ sont uniformément plus puissants à leur niveau, le test $1\!\!I_{D_i - D_s}\ (T)$ étant de niveau 0.

Pour tout test de la forme ϕ on peut construire un test de même puissance de la forme :

$$\phi'(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad K(T(\omega)) < c' \\ \gamma' & si \quad K(T(\omega)) = c' \\ 0 & si \quad K(T(\omega)) > c' \end{cases}$$

$c' \in \overline{I\!R}$ et $\gamma' \in [0,1]$ vérifiant $E_{\theta_0}(\phi') = E_{\theta_0}(\phi) = \alpha$.

En effet, nous avons vu que sur l'événement $A_c = \{K(T) = K(c)\}$ le rapport des densités $h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ est constant, il suffit donc de poser $c' = K(c)$, $\gamma' = [P_{\theta_0}(\{T < c\} \cap A_c) + \gamma P_{\theta_0}(\{T = c\})]/P_{\theta_0}(A_c)$ si $P_{\theta_0}(A_c) > 0$ et $\gamma' = 1$ sinon.

Par construction de K on a $1\!\!I_{D_i - D_s}\ (T) = 1\!\!I_{\{K(T) = -\infty\}}$, les tests de la forme ϕ' vérifiant $\phi' \geq 1\!\!I_{D_i - D_s}\ (T)$ constituent une famille de tests U.P.P. à leur niveau. Cette famille contient au moins un test de niveau α pour tout α de $[0,1]$. Elle nous permet de définir, pour toute réalisation ω, un seuil minimum de rejet $\alpha_m(\omega)$: égal à 0 lorsque $T(\omega) \in D_i - D_s$ et égal à $P_{\theta_0}(\{K(T) < K(T(\omega))\}) + (1/2)P_{\theta_0}(\{K(T) = K(T(\omega))\})$ sinon.

$\alpha_m(\omega)$ est la valeur de la fonction de répartition moyenne $G_{\theta_0}(k)$ de la statistique essentielle $K(T)$ en $k = K(T(\omega))$.

Lorsque $T(\omega) \notin D_i \cup D_s$ on obtient donc bien $\alpha_m(\omega) = Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\})$. Il en est de même pour $T(\omega) \in D_i - D_s$ puisque dans ce cas $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\})$ et $\alpha_m(\omega)$ valent 0.

Il nous reste le cas $T(\omega) \in D_s$, on a alors $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\}) = 1$; les tests construits à partir de $K(T)$ avec $c' = +\infty$ ont tous une puissance égale à 1 sur Θ_1 ; le seul vraiment intéressant est celui défini par $\gamma' = 0$; les autres sont de même puissance mais ils peuvent avoir un niveau supérieur, quand ce n'est pas le cas on a $P_{\theta_0}(\{K(T) = +\infty\}) = 0$ donc $\alpha_m(\omega) = 1 = Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\})$. Dans tous les cas il est en fait inintéressant de considérer les tests ϕ' strictement supérieur à $1- \mathit{1I}_{D_s}$; il n'existe alors plus de test qui puisse rejeter H_0 en ω ; il semble naturel de poser $\alpha_m(\omega) = 1$ qui signifie bien qu'il n'est pas question de rejeter dans un tel cas de figure.

c) Cas des hypothèses adjacentes.

On a $Q^{\omega}_{\Theta_1} \overset{p.s.}{=} Q^{\omega}_{\Theta_0} = Q^{\omega}_{\theta_0}$. Ce qui implique :
$Q^{\omega}_{\Theta_1}(\{1\}) = sup_{\theta\in\Theta_1} Q^{\omega}_{\theta}(\{1\}) \overset{p.s.}{=} Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\})$.

Pour définir un seuil minimum de rejet de $H_0 \ : \ \theta < \theta_0$ contre $H_1 \ : \ \theta \geq \theta_0$ on considère comme en b) les tests uniformément plus puissants de la forme :

$$\phi''(\omega) \quad = \quad \begin{cases} 1 & si \quad K(T(\omega)) > c'' \\ \gamma'' & si \quad K(T(\omega)) = c'' \\ 0 & si \quad K(T(\omega)) < c'' \end{cases}$$

$c'' \in \overline{IR}$ et $\gamma'' \in [0,1]$ vérifiant $sup_{\theta\in\Theta_1} E_{\theta}(\phi'') = \alpha$.

Lorsque $T(\omega) \notin D_i \cup D_s$ le seuil minimum de rejet $\alpha'_m(\omega)$ est égal à $sup_{\theta\in\Theta_1}[1 - G_{\theta}(k)] = [1 - G_{\theta_0}(k)]$, donc $\alpha'_m(\omega) = Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\})$.

Lorsque $T(\omega) \in D_s$, on a $P_{\theta}(T^{-1}(D_s)) = 0$ pour tout θ de Θ_1 $(\theta < \theta_0)$; le seuil minimum de rejet est donc nul, il en est de même de $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\})$.

Il nous reste le cas $T(\omega) \in D_i - D_s$, cette fois c'est l'événement $B = T^{-1}(D_i - D_s)$ qui est de probabilité nulle pour tout θ de Θ_0 ; les tests ϕ'' avec $c'' = -\infty$ sont tous de puissance égale à 1, le seul vraiment intéressant est celui défini par $\gamma'' = 0$; si pour définir le seuil minimum de rejet on enlève les tests correspondant à $c'' = -\infty$ et $\gamma'' > 0$, il n'existe plus de test qui puisse rejeter H_0 en ω ; il est alors naturel (voir le cas $T(\omega) \in D_s$ de la partie b) de cette démonstration) de poser $\alpha'_m(\omega) = 1$, ce qui est bien la valeur de $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\})$.

L'autre test unilatéral classique, correspondant à $H_0 \ : \ \theta \leq \theta_0$, conduit à une proposition semblable. Il faut prendre un élément θ_0 de Θ différent de $sup\Theta$, ceci permet de définir les hypothèses unilatérales $\Theta'_0 = \Theta \cap \{\theta \leq \theta_0\}$ et

$\Theta'_1 = \Theta \cap \{\theta > \theta_0\}$. $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\})$ définit alors un seuil minimum de rejet de $H_0 : \theta \leq \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$, pour les tests uniformément plus puissants construits avec la statistique essentielle $K(T)$.

Revenons aux hypothèses unilatérales étudiées par la proposition 5.1.1 : $\Theta_0 = \Theta \cap \{\theta \geq \theta_0\}$ et $\Theta_1 = \Theta \cap \{\theta < \theta_0\}$ avec $\theta_0 \neq inf\Theta$.

Nous allons regarder ce que donne la règle des plébiscites (voir la définition 3.2.1) appliquée aux deux votes : $Q^{\omega}_0 = Q^{\omega}_{\Theta_0}$ et $Q^{\omega}_1 = Q^{\omega}_{\Theta_1}$. Nous le ferons dans le cas où les hypothèses Θ_0 et Θ_1 sont adjacentes. Cette propriété signifiant $Q^{\omega}_{\Theta_0} = Q^{\omega}_{\Theta_1}$ presque partout, elle repose sur la famille des fonctions de répartition moyenne, $(G_\theta)_{\theta\in\Theta}$ de la statistique essentielle $K(T)$ (voir la définition 4.3.1). Il faut que pour presque tout ω, la fonction de θ, $G_\theta(K(T(\omega)))$ soit continue à gauche en θ_0. Ceci n'est pas une contrainte très forte, elle est en particulier réalisée lorsque les densités $p_{\theta'_n}$ convergent, dans L_1 ou μ presque sûrement, vers p_{θ_0} quand θ'_n croît vers θ_0 (cf. par exemple [Mon.1] p. 138). La plupart des modèles statistiques à rapport de vraisemblance monotone, classiquement étudiés, vérifient cette continuité en tout point θ de Θ, aussi bien à gauche qu'à droite.

Soient $\alpha_0 < 1$ et $\alpha_1 < 1$, les hypothèses étant adjacentes, la règle des plébiscites ne dépend plus que du vote $Q^{\omega}_{\theta_0}$. Elle décide :

$d = 0$ lorsque $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\}) > \alpha_0$ et $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\}) \leq \alpha_1$,

$d = 1$ quand $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{0\}) \leq \alpha_0$ et $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\}) > \alpha_1$.

Si cette règle ne décide ni $d = 0$ ni $d = 1$, on peut dire qu'elle nous conseille de nous abstenir de prendre une décision.

Lorsque $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha < 1/2$, la règle des plébiscites décide $d = 0$, c'est-à-dire $\theta \in \Theta_0$, quand ω appartient à la région de rejet du test de $H_0 : \theta \in \Theta_1$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_0$ au seuil α ; elle décide $d = 1$, c'est-à-dire $\theta \in \Theta_1$, quand ω appartient à la région de rejet du test de $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$ au seuil α ; enfin, cette règle conseille de s'abstenir quand les deux tests précédents donnent des décisions contradictoires. Nous avions déjà trouvé cette règle comme cas particulier des procédures de décision minimax construites dans une recherche de prise de décision par rapport à une partition ordonnée de Θ (cf. [Mor.2]).

Nous allons maintenant montrer que les probabilités a postériori de Θ_0 et Θ_1 obtenues à partir d'une probabilité a priori Λ sur $(\Theta, \mathcal{T})$ ne sont pas directement comparables avec les résultats du vote pondéré Q^ω_Λ, qui est la moyenne des votes Q^ω_θ par rapport à Λ ($Q^\omega_\theta(\{1\})$ est supposée être $\mathcal{T}$ mesurable presque partout).

$$Q^\omega_\Lambda(\{1\}) = \int_\Theta Q^\omega_\theta(\{1\})\, d\Lambda(\theta)$$

Pour définir la probabilité a postériori de Θ_1, il nous faut supposer que Θ_1 est un événement de $\mathcal{T}$ et que la famille $(P_\theta)_{\theta\in\Theta}$ définit une probabilité de transition sur $\Theta \times \mathcal{A}$ ($Q^\omega_\theta(\{1\})$ est bien $\mathcal{T}$ mesurable). La donnée de la probabilité a priori Λ permet alors de probabiliser l'espace produit $(\Omega, \mathcal{A}) \otimes (\Theta, \mathcal{T})$. Sous des conditions très générales, on peut reconstruire cette probabilité à partir d'une probabilité de transition sur $\Omega \times \mathcal{T}$ (cf. [DacD] p. 194, [HenT] p. 239). Pour toute réalisation ω, on obtient alors une probabilité conditionnelle, dite a postériori, sur $(\Theta, \mathcal{T})$. L'événement Θ_1 étant de probabilité :

$$\Lambda(\Theta_1 \mid \omega) = \int_{\Theta_1} p_\theta(\omega)\, d\Lambda(\theta) \Big/ \int_\Theta p_\theta(\omega)\, d\Lambda(\theta)$$

Lorsque $T(\omega)$ appartient à $D_i - D_s$ (resp. D_s), on a $Q^\omega_\Lambda(\{1\}) = 1$ (resp. $Q^\omega_\Lambda(\{1\}) = 0$)(voir la proposition 4.3.1) et $\Lambda(\Theta_1 \mid \omega)$ prend la même valeur puisque $p_\theta(\omega)$ est alors nul pour θ appartenant à Θ_0 (resp. Θ_1).

Le cas important est évidemment celui où $T(\omega)$ n'appartient pas à $D_i \cup D_s$. Pour voir que $\Lambda(\Theta_1 \mid \omega)$ et $Q^\omega_\Lambda(\{1\})$ ne se comportent généralement pas de manière semblable, on peut écrire Λ sous forme du mélange de deux probabilités Λ_0 et Λ_1 : $\Lambda = \lambda\Lambda_0 + (1-\lambda)\Lambda_1$ avec $\Lambda_0(\Theta_0) = 1$, $\Lambda_1(\Theta_1) = 1$ et $\lambda = \Lambda(\Theta_0)$. Faisons maintenant varier la probabilité Λ en changeant uniquement la pondération $\lambda \in [0, 1]$. Lorsque λ croît il est facile de montrer que $\Lambda(\Theta_1 \mid \omega)$ décroît alors que $Q^\omega_\Lambda(\{1\})$ croît (voir la proposition 4.3.2). Dans le cadre bayésien, plus une probabilité a priori charge Θ_1 plus elle avantage la décision $\theta \in \Theta_1$, c'est le contraire dans le cadre des votes pondérés d'experts. Si $\lambda = 0$, on a toujours

$\Lambda(\Theta_1 \mid \omega) = 1$, ce qui n'est pas le cas de $Q^\omega_\Lambda(\{1\})$, $Q^\omega_\Lambda(\{1\}) \leq Q^\omega_{\Theta_1}(\{1\})$. Pour le choix entre deux hypothèses simples (voir le paragraphe 2.5) nous avons établi une comparaison mais en utilisant en fait sur Θ, deux probabilités différentes, $\Lambda = \lambda\Lambda_0 + (1-\lambda)\Lambda_1$ et $\Lambda' = (1-\lambda)\Lambda_0 + \lambda\Lambda_1$. λ représentait dans les deux cas un indice de la "faveur" que l'on accorde à l'hypothèse Θ_0. Les conclusions du paragraphe 2.5 restent intéressantes mais la mise en oeuvre de la comparaison devient ici plus difficile car il faut encore choisir Λ_0 et Λ_1, dans le cas de deux hypothèses simples le seul choix possible était les masses de Dirac en θ_0 et θ_1. Pour montrer plus en détail cette difficulté de comparaison, nous allons étudier un exemple en ne privilégiant aucune des deux hypothèses, c'est-à-dire avec $\lambda = 1/2$. La probabilité a priori Λ et la pondération Λ' sont alors identiques.

Considérons le cas classique d'un n échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ d'une loi normale, $N(\theta, \sigma^2)$, de moyenne inconnue $\theta \in I\!R$ et de variance connue σ^2 $(\sigma > 0)$. Le modèle statistique est à rapport de vraisemblance monotone, pour l'ordre usuel sur $I\!R$, par rapport à la statistique $\overline{X} = (1/n)\sum_{i=1}^{i=n} X_i$, qui est de loi $N(\theta, \sigma^2/n)$. $\overline{X}$ est aussi une statistique essentielle pour le choix entre deux hypothèses unilatérales. En effet, pour $\theta' < \theta''$, $h_{(\theta'',\theta')}(\overline{x})$ est une fonction strictement croissante de $\overline{x}$.

Etudions le problème du choix entre $\Theta_0 = \{\theta \geq 0\}$ et $\Theta_1 = \{\theta < 0\}$. La partition ordonnée $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ définit des hypothèses stables adjacentes. En effet, la statistique essentielle $\overline{X}$ est diffuse et finie, on a donc $Q^\omega_\theta(\{1\}) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta))$, F étant la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$, ce qui entraîne bien :

$Q^\omega_{\Theta_1}(\{1\}) = Q^\omega_{\Theta_0}(\{1\})$.

Le seuil minimum de rejet des tests uniformément plus puissants de Θ_0 contre Θ_1 (resp. Θ_1 contre Θ_0) peut s'interpréter comme la valeur du vote $Q^\omega_{\theta_0}(\{0\})$ (resp. $Q^\omega_{\theta_0}(\{1\})$) avec $\theta_0 = 0$. C'est le résultat de la proposition 5.1.1, mais aussi une conséquence directe de l'expression de $Q^\omega_\theta(\{1\})$. Les seuils minimums de rejet des deux tests s'obtiennent donc en prenant comme pondération la masse de Dirac au point $\theta_0 = 0$. Dans la théorie bayésienne ces deux seuils seront les probabilités a postériori de Θ_0 et Θ_1 en prenant comme loi a priori sur $\Theta = I\!R$ une loi impropre, la mesure de Lebesgue (cf. [Ber.] p. 147). Ceci nous montre bien que probabilité a priori et probabilité de pondération sur Θ ne peuvent pas s'interpréter de la même façon.

Regardons tout de même ce que donnent ces deux méthodes dans le cas classique où la probabilité Λ est la loi normale $N(0, c^2)$ avec $c > 0$. On traite ainsi de façon très symétrique les deux hypothèses Θ_0 et Θ_1. Dans le cadre bayésien on sait que la loi a postériori sur Θ est la loi normale $N(m(\omega), v(\omega))$ avec $m(\omega) = \frac{nc^2}{nc^2+\sigma^2}\overline{X}(\omega)$ et $v(\omega) = \frac{c^2\sigma^2}{nc^2+\sigma^2}$ (cf. [Ber.] p. 128 ou [Rob.] p. 139). $\Lambda(\Theta_1 \mid \omega)$ est donc la valeur de la fonction de répartition de la loi $N(m(\omega), v(\omega))$ en $\theta_0 = 0$:

$\Lambda(\Theta_1 \mid \omega) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}(\omega)\sqrt{\frac{nc^2}{nc^2+\sigma^2}})$.

Le vote pondéré correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned}
Q^{\omega}_{\Lambda}(\{1\}) &= 1 - \int_{\Theta} F(\tfrac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta))\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,c} exp(-\tfrac{\theta^2}{2c^2})\, d\theta \\
&= 1 - \int_{\Theta}\int_{I\!R} 1\!I_{]-\infty,\overline{X}(\omega)[}\,(y)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\tfrac{\sqrt{n}}{\sigma} exp(-\tfrac{n}{2\sigma^2}(y-\theta)^2)\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,c} exp(-\tfrac{\theta^2}{2c^2})\, dy\, d\theta \\
&= 1 - \int_{I\!R} 1\!I_{]-\infty,\overline{X}(\omega)[}\,(y)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\tfrac{\sqrt{n}}{\sigma} exp(-\tfrac{ny^2}{2\sigma^2}) \int_{\Theta} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,c} exp(\tfrac{n^2c^2y^2}{2\sigma^2(nc^2+\sigma^2)})\times \\
&\qquad\qquad exp(-\tfrac{nc^2+\sigma^2}{2c^2\sigma^2}(\theta - \tfrac{nc^2y}{nc^2+\sigma^2})^2)\, d\theta\, dy \\
&= 1 - \int_{I\!R} 1\!I_{]-\infty,\overline{X}(\omega)[}\,(y)\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\tfrac{n}{nc^2+\sigma^2}} exp(-\tfrac{ny^2}{2(nc^2+\sigma^2)})\, dy \\
&= 1 - F(\tfrac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}(\omega)\sqrt{\tfrac{\sigma^2}{nc^2+\sigma^2}}).
\end{aligned}$$

$\Lambda(\Theta_1 \mid \omega)$ et $Q^{\omega}_{\Lambda}(\{1\})$ sont des corrections différentes apportées au seuil minimum de rejet de Θ_1 contre Θ_0 : $Q^{\omega}_{\theta_0}(\{1\}) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\overline{X}(\omega))$. Ces corrections sont négatives (resp. positives) quand $\overline{X}(\omega)$ est négatif (resp. positif) donc quand le seuil minimum est inférieur (resp. supérieur) à $\frac{1}{2}$. Elles accentuent la tendance.

On obtient $\Lambda(\Theta_1 \mid \omega) = Q^{\omega}_{\Lambda'}(\{1\})$ en prenant comme pondération Λ' la loi $N(0, c'^2)$ avec $c' = \sigma^2/nc$.

5.2 VOTES COMPATIBLES SUR UNE FAMILLE D'HYPOTHÈSES UNILATÉRALES.

Dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone l'interprétation de la valeur du paramètre θ est souvent structurée par l'ordre défini sur Θ. La prise de décision peut se voir comme une synthèse des résultats d'expertise de plusieurs hypothèses unilatérales différentes : $(\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\})_{f\in\mathcal{F}}$. Associons à chacun de ces problèmes de décision indexés par $f \in \mathcal{F}$, un vote d'experts. Pour toute réalisation $\omega \in \Omega$ on obtient pour chaque f une probabilité sur $D = \{0, 1\}$, nous notons $Q^\omega(\Theta_1^f)$ (resp. $Q^\omega(\Theta_0^f)$) la probabilité de la décision $d = 1$ (resp. $d = 0$). Q^ω est une application de $\{\Theta_i^f\}_{f\in\mathcal{F}, i\in\{0,1\}} \subset \mathcal{P}(\Theta)$ dans $[0, 1]$. Les informations données par Q^ω seront exploitables si les votes choisis sont cohérents. Par exemple si $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$, on ne voudrait pas avoir $Q^\omega(\Theta_1^f) > Q^\omega(\Theta_1^{f'})$. De même si la suite monotone $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$ a pour limite Θ_1^f, on aimerait bien que $Q^\omega(\Theta_1^{f_n})$ converge vers $Q^\omega(\Theta_1^f)$ pour tout ω.

Définition 5.2.1

Soient $(\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\})_{f\in\mathcal{F}}$ une famille d'hypothèses unilatérales dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone de paramètre Θ et Q une application de $\Omega \times \{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$ dans $[0, 1]$ telle que $Q^\omega(\Theta_1^f)$ représente la valeur en $d = 1$ d'un vote d'experts du choix entre Θ_1^f et Θ_0^f lorsqu'on réalise ω.
Nous dirons que Q définit des votes compatibles lorsqu'elle vérifie, pour presque tout ω de Ω, les trois propriétés suivantes :
a) si $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$ alors $Q^\omega(\Theta_1^f) \leq Q^\omega(\Theta_1^{f'})$
b) si la suite $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$ croît vers Θ (resp. décroît vers $\emptyset$), la suite $(Q^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN}$ converge vers 1 (resp. 0)
c) si $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$ et $(\Theta_1^{f'_n})_{n\in IN}$ sont deux suites ayant la même limite, l'une étant croissante l'autre décroissante, les suites $(Q^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN}$ et $(Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}))_{n\in IN}$ ont aussi même limite.

La propriété c) implique bien que si la suite monotone $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$

converge vers Θ_1^f alors $(Q^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN}$ converge vers $Q^\omega(\Theta_1^f)$, il suffit de prendre $\Theta_1^{f'_n} = \Theta_1^f$ pour tout $n \in IN$. Cette propriété est un peu plus forte, afin que Q^ω puisse se prolonger à la tribu engendrée par $\{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$.

Proposition 5.2.1

Si Q définit des votes compatibles sur la famille d'hypothèses unilatérales $(\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\})_{f\in\mathcal{F}}$, pour presque toute réalisation ω de Ω, Q^ω se prolonge en une probabilité unique sur la σ-algèbre engendrée par $\{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$.

Démonstration

Notons N le négligeable formé des réalisations ω pour lesquelles une au moins des trois propriétés de la définition 5.2.1 n'est pas vérifiée. Nous allons prolonger Q^ω pour tout ω de $\Omega - N$.

Considérons la semi-algèbre de Boole, $\mathcal{S}$, engendrée par : $\{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$. Elle est constituée du $\emptyset$, de Ω, des demi-droites inférieures $\{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$, des demi-droites supérieures $\{\Theta_0^f\}_{f\in\mathcal{F}}$ et des intervalles de la forme $\Theta_1^f \cap \Theta_0^{f'}$.

Soit $\omega \in \Omega - N$, la propriété a) de la définition 5.2.1 nous permet de prolonger Q^ω de façon unique en une fonction additive d'ensembles, de $\mathcal{S}$ dans $[0,1]$, telle que $Q^\omega(\Omega) = 1$. On a $Q^\omega(\Theta_1^f \cap \Theta_0^{f'}) = Q^\omega(\Theta_1^f) - Q^\omega(\Theta_1^{f'})$ si $\Theta_1^f \cap \Theta_0^{f'} \neq \emptyset$. $Q^\omega(\Theta_0^f) = 1 - Q^\omega(\Theta_1^f)$ représente bien la valeur en $d = 0$ du vote d'experts défini par Q pour le choix entre Θ_1^f et Θ_0^f quand on réalise ω.

Nous aurons démontré la proposition, si nous montrons que Q^ω est σ-additive sur $\mathcal{S}$ (cf. [Nev.] p. 25). Pour cela nous allons montrer que Q^ω jouit de la propriété de continuité monotone séquentielle en $\emptyset$.

Soit $(S_n)_{n\in IN}$ une suite de $\mathcal{S}$ qui décroît vers le vide, nous devons démontrer que $(Q^\omega(S_n))_{n\in IN}$ décroît vers 0. C'est évident lorsque la suite contient le vide. Dans le cas contraire ($\forall n\, S_n \neq \emptyset$), les suites de $\mathcal{S}$ qui décroissent vers le vide sont de trois types :

i) $\forall n \quad S_n = \Theta_1^{f_n}$

ii) $\forall n \quad S_n = \Theta_0^{f_n}$

iii) $\forall n > n_0 \quad S_n = \Theta_1^{f_n} \cap \Theta_0^{f'_n} \neq \emptyset$

D'après la propriété b) de la définition 5.2.1 on a évidemment $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(S_n) = 0$ dans le cas i), mais aussi dans le cas ii) car alors $Q^\omega(S_n) = 1 - Q^\omega(\Theta_1^{f_n})$ avec $\Theta_1^{f_n}$ qui croît vers Ω.

Dans le cas iii), on a $S_n = \Theta_1^{f_n} - \Theta_1^{f'_n}$. $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$ et $(\Theta_1^{f'_n})_{n\in IN}$ sont des suites respectivement décroissante et croissante. Elles ont même limite car $\emptyset = \cap_{n\in IN} S_n = \cap_{n\in IN}\Theta_1^{f_n} - \cup_{n\in IN}\Theta_1^{f'_n}$. La propriété c) de la définition 5.2.1 nous dit que les images de ces deux suites par Q^ω ont aussi même limite. On a donc bien :

$lim_{n\to+\infty} Q^\omega(S_n) = lim_{n\to+\infty}[Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) - Q^\omega(\Theta_1^{f'_n})] = 0.$

Considérons un problème de décision défini par $\{\Theta_0, \Theta_1\}$, $\Theta = \Theta_0 + \Theta_1$. Si Θ_1 est un élément de la tribu engendrée par $(\Theta_1^f)_{f\in\mathcal{F}}$ et si ce problème de décision ne possède pas d'expert, il est tentant de prendre comme vote, lorsqu'on réalise ω, les valeurs du prolongement de Q^ω en Θ_0 et Θ_1. On est souvent dans cette situation lorsque Θ_0 et Θ_1 définissent des hypothèses bilatérales. Nous analyserons en détail ce cas classique au paragraphe suivant. Bien entendu ce procédé de construction d'un vote à partir des votes d'une famille d'hypothèses peut se concevoir dans d'autres modèles que les modèles à rapport de vraisemblance monotone. Ces modèles s'y prêtent particulièrement car lorsque $\Theta \subseteq IR$, les hypothèses unilatérales permettent de définir des votes qui se prolongent à l'ensemble des boréliens de Θ. Pour obtenir ce résultat nous avons besoin de relier entre elles les statistiques essentielles définies à partir d'hypothèses unilatérales différentes. Nous allons construire une statistique $K(T)$ dont la fonction de répartition moyenne sera égale à celle de toute statistique essentielle associée à des hypothèses unilatérales $\{\Theta_1, \Theta_0\}$, en dehors de l'image des demi-droites D_i et D_s définies par Θ_0 et Θ_1.

Proposition 5.2.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$ *un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique réelle* T, Θ *étant muni de l'ordre total :* $\preceq$.
A tout problème de décision unilatéral, $\{\Theta_1, \Theta_0\}$, *associons une statistique essentielle* $K^{\Theta_1}(T)$ *dont la fonction de répartition moyenne sous* P_θ *est notée* $G_\theta^{\Theta_1}$.
Posons $N = \{t \in IR\,;\, \forall\omega \in T^{-1}(t) \quad \forall\theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0\}$.

Il existe une fonction croissante $K : IR \to \overline{IR}$, *qui définit une statistique* $K(T)$ *dont les fonctions de répartition moyenne* G_θ *vérifient, pour toutes hypothèses unilatérales* $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ *:*
1) $\forall t \in IR - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N), \quad \forall\theta \in \Theta, \quad G_\theta(K(t)) = G_\theta^{\Theta_1}(K^{\Theta_1}(t))$
2) $\forall t \in (D_i^{\Theta_0} - N), \quad \forall\theta_0 \in \Theta_0, \quad G_{\theta_0}(K(t)) = 0$
3) $\forall t \in (D_s^{\Theta_1} - N), \quad \forall\theta_1 \in \Theta_1, \quad G_{\theta_1}(K(t)) = 1$.

$K(T)$ *est appelée statistique essentielle globale, pour une réalisation* ω *n'appartenant pas à* $T^{-1}(D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N)$, $1 - G_\theta(K(T(\omega)))$ *est le résultat* $Q_\theta^\omega(\{1\})$ *du vote en faveur de* Θ_1 *sous* P_θ.

Démonstration

Le modèle statistique étant à rapport de vraisemblance monotone il existe, pour $\theta' \prec \theta''$, une fonction croissante $h_{(\theta'',\theta')} : IR \to \overline{IR^+}$ vérifiant $p_{\theta''}/p_{\theta'} = h_{(\theta'',\theta')}(T)$ sur le domaine de définition de ce rapport : $\{\omega \in \Omega\,;\, p_{\theta'}(\omega) > 0 \text{ ou } p_{\theta''}(\omega) > 0\}$. Nous allons travailler avec une famille $\{h_{(\theta'',\theta')}\}_{\theta' \prec \theta''}$ de fonctions normalisées ; $h_{(\theta'',\theta')}$ est alors constante sur tout intervalle I indéterminé pour $\{\theta', \theta''\}$: $\forall\omega \in T^{-1}(I) \quad p_{\theta'}(\omega) = p_{\theta''}(\omega) = 0$ (ceci est toujours possible d'après l'annexe IV).

I — Définition de $K : IR \to \overline{IR}$.

Pour tout $t \in IR$ et tout couple (θ'', θ') d'éléments de Θ tels que $\theta' \prec \theta''$, considérons les deux fonctions de test de $F = [f_{(-\infty,1)}, f_{(+\infty,0)}]$ (voir le paragraphe 4.2) définies par :
$e_t^{(\theta'',\theta')} = sup\{f \in \Phi_s^{(\theta'',\theta')}\,;\, f \leq f_{(t,0)}\} \cup \{f_{(-\infty,1)}\}$

$g_t^{(\theta'',\theta')} = inf\{f \in \Phi_s^{(\theta'',\theta')} ; f \geq f_{(t,1)}\} \cup \{f_{(+\infty,0)}\}$

$\Phi_s^{(\theta'',\theta')} \subseteq F$ désigne l'ensemble des fonctions de test simples construites à partir du rapport des densités $h_{(\theta'',\theta')}(T)$ (voir la définition 2.2.1).

Par définition : $e_t^{(\theta'',\theta')} \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq g_t^{(\theta'',\theta')}$, il est facile de vérifier l'égalité : $\{g_t^{(\theta'',\theta')} - e_t^{(\theta'',\theta')} = 1\} = \{h_{(\theta'',\theta')}(T) = h_{(\theta'',\theta')}(t)\}$. Posons $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k$, on a alors $e_t^{(\theta'',\theta')} = \phi_{(k,0)}^{(\theta'',\theta')}$ lorsque $k > 0$ et $g_t^{(\theta'',\theta')} = \phi_{(k,1)}^{(\theta'',\theta')}$ lorsque $k < +\infty$.

La définition de K repose sur les deux éléments de F : $f_{(a_t,u_t)} = sup\{e_t^{(\theta'',\theta')}\}_{\theta' \prec \theta''}$ et $f_{(b_t,v_t)} = inf\{g_t^{(\theta'',\theta')}\}_{\theta' \prec \theta''}$.

$$K(t) = \begin{cases} b_t - 1 & si \quad a_t = -\infty \\ [a_t + b_t]/2 & si \quad -\infty < a_t \leq b_t < +\infty \\ a_t + 1 & si \quad b_t = +\infty \ et \ a_t > -\infty \end{cases}$$

Ceci définit bien une application de IR dans $\overline{IR}$. Vérifions qu'elle est croissante. Pour $t' > t$ et $\theta' \prec \theta''$ on a $h_{(\theta'',\theta')}(t) \leq h_{(\theta'',\theta')}(t')$; nous avons vu que l'égalité entraîne : $e_t^{(\theta'',\theta')} = e_{t'}^{(\theta'',\theta')}$ et $g_t^{(\theta'',\theta')} = g_{t'}^{(\theta'',\theta')}$; dans le cas contraire on a évidemment $g_t^{(\theta'',\theta')} \leq e_{t'}^{(\theta'',\theta')}$. Soit $t' > t$, si pour tout couple (θ'', θ'), $\theta' \prec \theta''$, on a $h_{(\theta'',\theta')}(t) = h_{(\theta'',\theta')}(t')$ alors $f_{(a_t,u_t)} = f_{(a_{t'},u_{t'})}$ et $f_{(b_t,v_t)} = f_{(b_{t'},v_{t'})}$, donc $K(t) = K(t')$; dans le cas contraire il existe au moins un couple (θ'', θ') tel que $h_{(\theta'',\theta')}(t) < h_{(\theta'',\theta')}(t')$, ce qui implique $g_t^{(\theta'',\theta')} \leq e_{t'}^{(\theta'',\theta')}$ donc $f_{(b_t,v_t)} \leq f_{(a_{t'},u_{t'})}$, on a alors par définition de K : $K(t) < K(t')$.

En montrant la croissance de K, nous avons aussi démontré que $K(t) = K(t')$ si et seulement si : $f_{(a_t,u_t)} = f_{(a_{t'},u_{t'})}$ et $f_{(b_t,v_t)} = f_{(b_{t'},v_{t'})}$. On a donc $\{K(T) < K(t)\} = \{f_{(a_t,u_t)} = 1\}$ et $\{K(T) \leq K(t)\} = \{f_{(b_t,v_t)} = 1\}$. La fonction de répartition moyenne de $K(T)$ sous P_θ vérifie $G_\theta(K(t)) = [E_\theta(f_{(a_t,u_t)}) + E_\theta(f_{(b_t,v_t)})]/2$.

II — $G_\theta(K(t)) = G_\theta^{\Theta_1}(K^{\Theta_1}(t))$ lorsque $t \notin D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N$.

$\{\Theta_1, \Theta_0\}$ sont des hypothèses unilatérales, d'après l'annexe IV on définit une famille normalisée $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}^{\Theta_1}\}_{(\theta_0,\theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1}$ pour ces hypothèses, en posant :

$$h^{\Theta_1}_{(\theta_0,\theta_1)}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & si \quad t \in D_i^{\Theta_0} - D_s^{\Theta_1} \\ h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) & si \quad t \in I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1}) \\ +\infty & si \quad t \in D_s^{\Theta_1} \end{cases}$$

Nous savons que le résultat recherché ne dépend pas de la famille normalisée choisie (voir la proposition 1 de l'annexe III).

La statistique essentielle $K^{\Theta_1}(T)$ associée à cette famille est définie à partir des experts $\Delta_s^{\Theta_1} = \cup_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \Phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{s^{\Theta_1}}$, $\Phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{s^{\Theta_1}}$ étant l'ensemble des fonctions de test simples construites à partir du rapport des densités $h^{\Theta_1}_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ (voir la définition 2.2.1). $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ défini pour la partie I de cette démonstration, l'était à partir de $h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$. Par définition de $h^{\Theta_1}_{(\theta_0,\theta_1)}$ on a $\Phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{s^{\Theta_1}} \supseteq \Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} \cap]\ 1\!I_{D_i^{\Theta_0} - D_s^{\Theta_1}}(T), 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)[$. $\Phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{s^{\Theta_1}}$ contient en plus $1\!I_{D_i^{\Theta_0} - D_s^{\Theta_1}}(T)$ (resp. $1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)$) si pour tout $t \notin D_i^{\Theta_0} - D_s^{\Theta_1}$ (resp. $t \notin D_s^{\Theta_1}$) on a $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) > 0$ (resp. $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) < +\infty$).

Soit $t \in I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1}) \neq \emptyset$.

Nous avons vu, au début de la démonstration de la proposition 1 de l'annexe III, que les fonctions de test, de la définition 4.3.1, permettant de construire K^{Θ_1} sont alors données par :

$f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)} = sup\{f \in \Delta_s^{\Theta_1} \,;\, f \leq f_{(t,0)}\}$ et

$f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)} = inf\{f \in \Delta_s^{\Theta_1} \,;\, f \geq f_{(t,1)}\}$.

Elles vérifient : $inf\Delta_s^{\Theta_1} = 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T) \leq f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)} \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)} \leq 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T) = sup\Delta_s^{\Theta_1}$.

On peut aussi les définir par :

$f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)} = sup\{e_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \cup \{1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)\}$,

$f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)} = inf\{g_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \cup \{1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)\}$.

La première (resp. deuxième) égalité est évidente dans le cas où $f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)} > 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$ (resp. $f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)} < 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)$), en effet nous venons de montrer que $\Phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{s^{\Theta_1}}$ et $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ ont la même intersection avec

$]\ 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T), 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)[$.

Lorsque $f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)} = 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$ (resp. $f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)} = 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)$), on a $]\ 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T), f_{(t,0)}]$ (resp. $[f_{(t,1)}, 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)[$) d'intersection vide avec $\Delta_s^{\Theta_1}$, il en est de même avec tous les $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ (toujours d'après la propriété précédente) ; on a alors, pour tout $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$, $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \leq 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$ (resp. $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \geq 1 - 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)$), ce qui implique bien l'égalité recherchée.

Comme t n'appartient pas à $D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1}$, $K^{\Theta_1}(t)$ est défini par :

$$K^{\Theta_1}(t) = \begin{cases} b'_t - 1 & si \quad a'_t = -\infty \\ [a'_t + b'_t]/2 & si \quad -\infty < a'_t \leq b'_t < +\infty \\ a'_t + 1 & si \quad b'_t = +\infty \ et \ a'_t > -\infty \end{cases}$$

On a bien sûr $G_\theta^{\Theta_1}(K^{\Theta_1}(t)) = [E_\theta(f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)}) + E_\theta(f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)})]/2$.

Nous devons démontrer que cette quantité est égale à $G_\theta(K(t)) = [E_\theta(f_{(a_t,u_t)}) + E_\theta(f_{(b_t,v_t)})]/2$ lorsque t appartient à $I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N)$.

Nous le ferons en démontrant :

$f_{(a_t,u_t)} \overset{p.s.}{=} f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)}$ et $f_{(b_t,v_t)} \overset{p.s.}{=} f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)}$ pour $t \notin D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N$.

a) Pour $t \notin D_i^{\Theta_0}$ on a $f_{(a_t,u_t)} \overset{p.s.}{\geq} f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)}$.

D'après la définition de $f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)}$ à partir des $e_t^{(\theta_0,\theta_1)}$, nous avons : $f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)} \leq sup\{f_{(a_t,u_t)}, 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)\}$. La propriété recherchée revient à démontrer : $f_{(a_t,u_t)} \overset{p.s.}{\geq} 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$. Nous allons le faire en montrant qu'il existe $\theta_0 \in \Theta_0$ tel que $sup\{e_t^{(\theta_0,\theta)}\}_{\theta\in\Theta_1} \overset{p.s.}{\geq} 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$.

Comme $t \notin D_i^{\Theta_0}$, il existe $\theta_0 \in \Theta_0$, $x_0 \leq t$ et $\omega_0 \in T^{-1}(x_0)$ tels que $p_{\theta_0}(\omega_0) > 0$. Pour tout θ de Θ_1 on a $h_{(\theta_0,\theta)}(x_0) > 0$, donc $h_{(\theta_0,\theta)}(t) = k_\theta > 0$ et $e_t^{(\theta_0,\theta)} = \{h_{(\theta_0,\theta)}(T) < k_\theta\}$.

Pour que θ_0 convienne il nous faut montrer que le cas de figure $sup\{e_t^{(\theta_0,\theta)}\}_{\theta\in\Theta_1} < 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$ implique $sup\{e_t^{(\theta_0,\theta)}\}_{\theta\in\Theta_1} \overset{p.s.}{=} 1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$.

Il est équivalent de supposer $I = \cap_{\theta\in\Theta_1}(D_i^{\Theta_0} - \{h_{(\theta_0,\theta)}(t) < k_\theta\})$ non vide et de montrer que l'on a $P_\theta(T^{-1}(I)) = 0$ pour tout θ de Θ. C'est évident pour $\theta \in \Theta_0$ puisque la densité p_θ est alors nulle sur $T^{-1}(D_i^{\Theta_0}) \supseteq T^{-1}(I)$ (voir la définition 4.2.1). Lorsque $\theta \in \Theta_1$ la densité p_θ est encore nulle sur $T^{-1}(I)$; en effet pour tout $\omega \in T^{-1}(I)$ on a $p_{\theta_0}(\omega) = 0$ et $h_{(\theta_0,\theta)}(T(\omega)) \geq k_\theta > 0$, ceci n'est possible qu'avec $p_\theta(\omega) = 0$.

b) Pour $t \notin D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N$ on a $f_{(a_t,u_t)} \overset{p.s.}{\leq} f^{\Theta_1}_{(a'_t,u'_t)}$.

Cette inégalité s'écrit :
$sup\{e_t^{(\theta'',\theta')}\}_{\theta' \prec \theta''} \overset{p.s.}{\leq} sup\{e_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \cup \{1I_{D_i^{\Theta_0}}(T)\}$. Nous allons démontrer ceci en considérant les couples (θ'',θ') composés de deux éléments de Θ_0 (resp. Θ_1), $\theta' \prec \theta''$, et en montrant qu'il existe $\theta_a \in \Theta_1$ (resp. $\theta_c \in \Theta_0$) tel que : $e_t^{(\theta'',\theta')} \overset{p.s.}{\leq} sup\{e_t^{(\theta',\theta_a)}, e_t^{(\theta'',\theta_a)}, 1I_{D_i^{\Theta_0}}(T)\}$ (resp. $e_t^{(\theta'',\theta')} \overset{p.s.}{\leq} sup\{e_t^{(\theta_c,\theta')}, e_t^{(\theta_c,\theta'')}, 1I_{D_i^{\Theta_0}}(T)\}$).

1^er^ cas : $\theta' \in \Theta_0$, $\theta'' \in \Theta_0$ et $\theta' \prec \theta''$.

Posons $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k_3$. On a $k_3 < +\infty$; en effet si on avait $h_{(\theta'',\theta')}(t) = +\infty$, la densité $p_{\theta'}$ serait nulle sur $T^{-1}([t,+\infty[)$ et t appartiendrait à $D_s^{\theta'}$ donc à $D_s^{\Theta_1}$ puisque $\theta' \succ \Theta_1$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV) ; ceci est impossible car $t \in IR - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N)$.
On peut avoir $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k_3 < +\infty$ dans deux situations :

– $\exists \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta'}(\omega_t) > 0$

– $\forall \omega \in T^{-1}(t)$, $p_{\theta'}(\omega) = 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$.

Nous allons les analyser successivement.

i) $\exists \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta'}(\omega_t) > 0$.

Montrons d'abord qu'il existe $\theta_a \in \Theta_1$ tel que $p_{\theta_a}(\omega_t) > 0$, ceci nous permettra d'utiliser la propriété 2 du lemme 2 de l'annexe IV ; si ce n'était pas le cas on aurait $h_{(\theta',\theta_1)}(t) = +\infty$ pour tout $\theta_1 \in \Theta_1$; les densités p_{θ_1} seraient toutes nulles sur $T^{-1}([t,+\infty[)$, ce qui est impossible puisque $t \notin D_s^{\Theta_1}$.
Nous allons appliquer la propriété 2 du lemme 2 de l'annexe IV, avec $\theta_a \prec \theta_b = \theta' \prec \theta_c = \theta''$. On obtient :
$\phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,0)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,0)}, \phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,0)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}}(T)\}$, (avec $h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1$, $h_{(\theta_c,\theta_a)}(t) = k_2$, $h_{(\theta_c,\theta_b)}(t) = k_3$ et la convention $\phi^{(\theta'',\theta')}_{(0,0)} = 1I_\emptyset = f_{(-\infty,1)}$).
Par définition des $e_t^{(\theta'',\theta')}$ on a $e_t^{(\theta_b,\theta_a)} = \phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,0)}$, $e_t^{(\theta_c,\theta_a)} = \phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,0)}$ et $e_t^{(\theta_c,\theta_b)} = \phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,0)}$ (voir le début de la partie I de cette démonstration), donc $e_t^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{e_t^{(\theta_b,\theta_a)}, e_t^{(\theta_c,\theta_a)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}}(T)\}$. Ceci implique

l'inégalité recherchée car $\Theta_0 \subseteq \{\theta \succ \theta_a\}$ entraîne : $D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}} \subseteq D_i^{\Theta_0}$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV), donc $1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}}(T) \leq 1I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$.

ii) $\forall \omega \in T^{-1}(t)$, $p_{\theta'}(\omega) = 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$.

Montrons d'abord qu'il existe $\theta_a \in \Theta_1$ et $\omega_a \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta_a}(\omega_a) > 0$.

Lorsque la densité p_{θ_1}, $\theta_1 \in \Theta_1$, est nulle sur $T^{-1}(t)$, notons I_{t,θ_1} le plus grand intervalle de $I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1})$ contenant t et indéterminé pour (θ', θ_1). Comme $t \notin N$ il n'est pas totalement indéterminé ; d'après la propriété 2 du lemme 1 de l'annexe III on a $h^{\Theta_1}_{(\theta',\theta_1)}(I^+_{t,\theta_1}) = +\infty$; on a donc $h^{\Theta_1}_{(\theta',\theta_1)}(t') = +\infty$ pour $t' \in I = \{x > I_{t,\theta_1}\}$, ce qui implique que la densité p_{θ_1} est nulle sur $T^{-1}(I)$; comme il en est de même sur I_{t,θ_1}, t appartient à $D_s^{\theta_1}$.

On ne peut pas avoir cette situation pour tous les éléments de Θ_1 puisque $t \notin D_s^{\Theta_1}$. Il existe donc bien $\theta_a \in \Theta_1$ pour lequel la densité p_{θ_a} est non identiquement nulle sur $T^{-1}(t)$.

t étant indéterminé pour (θ'', θ') on a $h_{(\theta',\theta_a)}(t) = h_{(\theta'',\theta_a)}(t) = 0$, ce qui implique $]-\infty, t] \subseteq D_i^{\theta'} \cap D_i^{\theta''} = D_i^{\theta'}$; $h_{(\theta'',\theta')}$ est donc égale à k_3 sur $D_i^{\theta'} \cap D_i^{\theta''} = D_i^{\theta'}$ puisqu'elle est constante sur tout intervalle indéterminé pour (θ'', θ') ; on a donc $e_t^{(\theta'',\theta')} = f_{(-\infty,1)}$ et l'inégalité recherchée est évidemment vérifiée.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\theta' \in \Theta_1$, $\theta'' \in \Theta_1$ et $\theta' \prec \theta''$.

La démonstration est semblable à celle du 1^{er} cas.

Posons $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k_1$. On a $k_1 > 0$; en effet si on avait $h_{(\theta'',\theta')}(t) = 0$, la densité $p_{\theta''}$ serait nulle sur $T^{-1}(]-\infty, t])$ et t appartiendrait à $D_i^{\theta''}$ donc à $D_i^{\Theta_0}$ puisque $\theta'' \prec \Theta_0$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV) ; ceci est impossible car $t \in I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N)$.

On peut avoir $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k_1 > 0$ dans deux situations :

– $\exists \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta''}(\omega_t) > 0$

– $\forall \omega \in T^{-1}(t)$, $p_{\theta'}(\omega) = 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$.

Nous allons les analyser successivement.

i) $\exists \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta''}(\omega_t) > 0$.

Montrons d'abord qu'il existe $\theta_c \in \Theta_0$ tel que $p_{\theta_c}(\omega_t) > 0$; si ce n'était pas le cas on aurait $h_{(\theta_0,\theta'')}(t) = 0$ pour tout $\theta_0 \in \Theta_0$; les densités p_{θ_0} seraient toutes nulles sur $T^{-1}(]-\infty, t])$, ce qui est impossible puisque $t \notin D_i^{\Theta_0}$.

Nous allons appliquer la propriété 3 du lemme 2 de l'annexe IV, avec $\theta_a = \theta' \prec \theta_b = \theta'' \prec \theta_c$. On obtient : $\phi_{(k_1,0)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{\phi_{(k_2,0)}^{(\theta_c,\theta_a)}, \phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}}(T)\}$ (avec $h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1$, $h_{(\theta_c,\theta_a)}(t) = k_2$, $h_{(\theta_c,\theta_b)}(t) = k_3$ et la convention $\phi_{(0,0)}^{(\theta'',\theta')} = 1I_{\emptyset} = f_{(-\infty,1)}$).
Comme dans le 1^er^ cas on a : $e_t^{(\theta_b,\theta_a)} = \phi_{(k_1,0)}^{(\theta_b,\theta_a)}$, $e_t^{(\theta_c,\theta_a)} = \phi_{(k_2,0)}^{(\theta_c,\theta_a)}$ et $e_t^{(\theta_c,\theta_b)} = \phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)}$, donc $e_t^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{e_t^{(\theta_c,\theta_a)}, e_t^{(\theta_c,\theta_b)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}}(T)\}$.
Ceci implique l'inégalité recherchée puisque $\Theta_0 \subseteq \{\theta \succ \theta_b\}$ entraîne comme précédemment $1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}}(T) \leq 1I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$.

ii) $\forall \omega \in T^{-1}(t)$, $p_{\theta'}(\omega) = 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$.

Montrons d'abord qu'il existe $\theta_c \in \Theta_0$ et $\omega_c \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta_c}(\omega_c) > 0$.

Lorsque la densité p_{θ_0}, $\theta_0 \in \Theta_0$, est nulle sur $T^{-1}(t)$, notons I_{t,θ_0} le plus grand intervalle de $IR - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1})$ contenant t et indéterminé pour (θ_0, θ''). Comme $t \notin N$ il n'est pas totalement indéterminé ; d'après la propriété 2 du lemme 1 de l'annexe III on a $h_{(\theta_0,\theta'')}^{\Theta_1}(I_{t,\theta_0}^-) = 0$; $h_{(\theta_0,\theta'')}^{\Theta_1}$ est donc nulle sur $I = \{x < I_{t,\theta_0}\}$, ce qui implique que la densité p_{θ_0} est nulle sur $T^{-1}(I)$; comme il en est de même sur I_{t,θ_0}, t appartient à $D_i^{\theta_0}$.
On ne peut pas avoir cette situation pour tous les éléments de Θ_0 puisque $t \notin D_i^{\Theta_0}$. Il existe donc bien $\theta_c \in \Theta_0$ pour lequel la densité p_{θ_c} est non identiquement nulle sur $T^{-1}(I)$.
t étant indéterminé pour (θ'', θ') on a $h_{(\theta_c,\theta'')}(t) = h_{(\theta_c,\theta')}(t) = +\infty$, ce qui implique $[t, +\infty[\subseteq D_s^{\theta''} \cap D_s^{\theta'} = D_s^{\theta''}$; $h_{(\theta'',\theta')}$ est donc égale à k_1 sur $D_s^{\theta''} \cap D_s^{\theta'} = D_s^{\theta''}$ puisqu'elle est constante sur tout intervalle

indéterminé pour (θ'',θ') ; on a donc $e_t^{(\theta'',\theta')} \leq 1-\ 1\!I_{D_s^{\theta''}}\ (T)$ alors que $e_t^{(\theta_c,\theta'')} \geq 1-\ 1\!I_{D_s^{\theta''}}\ (T)$ puisque $\{h_{(\theta_c,\theta'')} = +\infty\} \subseteq D_s^{\theta''}$; l'inégalité recherchée est ainsi démontrée.

c) Pour $t \notin D_s^{\Theta_1}$ on a $f_{(b_t,v_t)} \overset{p.s.}{\leq} f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)}$.

D'après la définition de $f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)}$ à partir des $g_t^{(\theta_0,\theta_1)}$, nous avons : $f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)} \geq inf\{f_{(b_t,v_t)}, 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}\ (T)\}$. La propriété recherchée revient à démontrer : $f_{(b_t,v_t)} \overset{p.s.}{\leq} 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}\ (T)$. Nous allons le faire en montrant qu'il existe $\theta_1 \in \Theta_1$ tel que $inf\{g_t^{(\theta,\theta_1)}\}_{\theta\in\Theta_0} \overset{p.s.}{\leq} 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}\ (T)$.

Comme $t \notin D_s^{\Theta_1}$, il existe $\theta_1 \in \Theta_1$, $x_1 \geq t$ et $\omega_1 \in T^{-1}(x_1)$ tels que $p_{\theta_1}(\omega_1) > 0$. Pour tout θ de Θ_0 on a $h_{(\theta,\theta_1)}(x_1) < +\infty$, donc $h_{(\theta,\theta_1)}(t) = k_\theta < +\infty$ et $g_t^{(\theta,\theta_1)} = \{h_{(\theta,\theta_1)}(T) \leq k_\theta\}$.

Pour que θ_1 convienne il nous faut montrer que le cas de figure $inf\{g_t^{(\theta,\theta_1)}\}_{\theta\in\Theta_0} > 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}\ (T)$ implique $inf\{g_t^{(\theta,\theta_1)}\}_{\theta\in\Theta_0} \overset{p.s.}{=} 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}$ (T).

Il est équivalent de supposer $I = \cap_{\theta\in\Theta_0}\{h_{(\theta,\theta_1)}(t) \leq k_\theta\} \cap D_s^{\Theta_1}$ non vide et de montrer que l'on a $P_\theta(T^{-1}(I)) = 0$ pour tout θ de Θ. C'est évident pour $\theta \in \Theta_1$ puisque la densité p_θ est alors nulle sur $T^{-1}(D_s^{\Theta_1}) \supseteq T^{-1}(I)$ (voir la définition 4.2.1). Lorsque $\theta \in \Theta_0$ la densité p_θ est encore nulle sur $T^{-1}(I)$; en effet pour tout $\omega \in T^{-1}(I)$ on a $p_{\theta_1}(\omega) = 0$ et $h_{(\theta,\theta_1)}(T(\omega)) \leq k_\theta < +\infty$, ceci n'est possible qu'avec $p_\theta(\omega) = 0$.

d) Pour $t \notin D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1} \cup N$ on a $f_{(b_t,v_t)} \overset{p.s.}{\geq} f^{\Theta_1}_{(b'_t,v'_t)}$.

Cette inégalité s'écrit :
$inf\{g_t^{(\theta'',\theta')}\}_{\theta'\prec\theta''} \overset{p.s.}{\geq} inf\{g_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \cup \{1-1\!I_{D_s^{\Theta_1}}(T)\}$. Comme en b), nous allons considérer les couples (θ'',θ') composés de deux éléments de Θ_0 (resp. Θ_1), $\theta' \prec \theta''$, il suffit de montrer qu'il existe $\theta_a \in \Theta_1$ (resp. $\theta_c \in \Theta_0$) tel que : $g_t^{(\theta'',\theta')} \overset{p.s.}{\geq} inf\{g_t^{(\theta',\theta_a)}, g_t^{(\theta'',\theta_a)}, 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}\ (T)\}$ (resp. $g_t^{(\theta'',\theta')} \overset{p.s.}{\geq} inf\{g_t^{(\theta_c,\theta')}, g_t^{(\theta_c,\theta'')}, 1-\ 1\!I_{D_s^{\Theta_1}}\ (T)\}$).

1^{er} cas : $\theta' \in \Theta_0$, $\theta'' \in \Theta_0$ et $\theta' \prec \theta''$.

Ces conditions sont celles du 1^{er} cas de b), elles nous conduisent à analyser les deux mêmes situations.

i) $\exists \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta'}(\omega_t) > 0$.

Comme en i) du 1^{er} cas de b), il existe $\theta_a \in \Theta_1$ tel que $p_{\theta_a}(\omega_t) > 0$. La propriété 2 du lemme 2 de l'annexe IV appliquée à $\theta_a \prec \theta_b = \theta' \prec \theta_c = \theta''$ nous donne :
$\phi_{(k_3,1)}^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{\phi_{(k_1,1)}^{(\theta_b,\theta_a)}, \phi_{(k_2,1)}^{(\theta_c,\theta_a)}, 1-\ 1I_{D_s^{\{\theta \prec \theta_b\}}}(T)\}$, (avec $h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1$, $h_{(\theta_c,\theta_a)}(t) = k_2$, $h_{(\theta_c,\theta_b)}(t) = k_3$ et la convention $\phi_{(\infty,1)}^{(\theta'',\theta')} = 1I_\Omega = f_{(+\infty,0)}$). Par définition des $g_t^{(\theta'',\theta')}$ on a $g_t^{(\theta_b,\theta_a)} = \phi_{(k_1,1)}^{(\theta_b,\theta_a)}$, $g_t^{(\theta_c,\theta_a)} = \phi_{(k_2,1)}^{(\theta_c,\theta_a)}$ et $g_t^{(\theta_c,\theta_b)} = \phi_{(k_3,1)}^{(\theta_c,\theta_b)}$ (voir le début de la partie I de cette démonstration), donc $g_t^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{g_t^{(\theta_b,\theta_a)}, g_t^{(\theta_c,\theta_a)}, 1-\ 1I_{D_s^{\{\theta \prec \theta_b\}}}(T)\}$. Ceci implique l'inégalité recherchée car $\Theta_1 \subseteq \{\theta \prec \theta_b\}$ entraîne : $D_s^{\{\theta \prec \theta_b\}} \subseteq D_s^{\Theta_1}$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV), donc $1-\ 1I_{D_s^{\{\theta \prec \theta_b\}}}(T) \geq 1-\ 1I_{D_s^{\Theta_1}}(T)$.

ii) $\forall \omega \in T^{-1}(t)$, $p_{\theta'}(\omega) = 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$.

Comme en ii) du 1^{er} cas de b), il existe $\theta_a \in \Theta_1$ et $\omega_a \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta_a}(\omega_a) > 0$; de plus $h_{(\theta'',\theta')}$ est égale à $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k_3$ sur $D_i^{\theta'} \cap D_i^{\theta''} = D_i^{\theta'}$.
On a donc $g_t^{(\theta'',\theta')} \geq 1I_{D_i^{\theta'}}(T)$, alors que $g_t^{(\theta',\theta_a)} \leq 1I_{D_i^{\theta'}}(T)$ puisque $t \in \{h_{(\theta',\theta_a)} = 0\} \subseteq D_i^{\theta'}$. L'inégalité recherchée est bien vérifiée.

$2^{\text{ème}}$ cas : $\theta' \in \Theta_1$, $\theta'' \in \Theta_1$ et $\theta' \prec \theta''$.

On obtient deux situations possibles, celles du $2^{\text{ème}}$ cas de b).

i) $\exists \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta''}(\omega_t) > 0$.

Comme en i) du $2^{\text{ème}}$ cas de b), il existe $\theta_c \in \Theta_0$ tel que $p_{\theta_c}(\omega_t) > 0$. La propriété 3 du lemme 2 de l'annexe IV appliquée à $\theta_a = \theta' \prec \theta_b = \theta'' \prec \theta_c$ donne :
$\phi_{(k_1,1)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{\phi_{(k_2,1)}^{(\theta_c,\theta_a)}, \phi_{(k_3,1)}^{(\theta_c,\theta_b)}, 1-\ 1I_{D_s^{\{\theta \prec \theta_c\}}}(T)\}$ (avec $h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1$, $h_{(\theta_c,\theta_a)}(t) = k_2$, $h_{(\theta_c,\theta_b)}(t) = k_3$ et la convention $\phi_{(\infty,1)}^{(\theta'',\theta')} = 1I_\Omega =$

$f_{(+\infty,0)})$. Comme dans le 1^{er} cas de cette partie on a :
$g_t^{(\theta_b,\theta_a)} = \phi_{(k_1,1)}^{(\theta_b,\theta_a)}$, $g_t^{(\theta_c,\theta_a)} = \phi_{(k_2,1)}^{(\theta_c,\theta_a)}$ et $g_t^{(\theta_c,\theta_b)} = \phi_{(k_3,1)}^{(\theta_c,\theta_b)}$, donc $g_t^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{g_t^{(\theta_c,\theta_a)}, g_t^{(\theta_c,\theta_b)}, 1- 1I_{D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}}(T)\}$. Ceci implique l'inégalité recherchée puisque $\Theta_1 \subseteq \{\theta \prec \theta_c\}$ entraîne comme précédemment $1- 1I_{D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}}(T) \geq 1- 1I_{D_s^{\Theta_1}}(T)$.

ii) $\forall\omega \in T^{-1}(t)$, $p_{\theta'}(\omega) = 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$.

Comme en ii) du $2^{\text{ème}}$ cas de b), $h_{(\theta'',\theta')}$ est égale à $h_{(\theta'',\theta')}(t) = k_1$ sur $D_s^{\theta''} \cap D_s^{\theta'} = D_s^{\theta''}$. On a donc $g_t^{(\theta'',\theta')} = f_{(+\infty,0)} = 1I_\Omega$ et l'inégalité recherchée est évidente.

III – $\forall t \in (D_i^{\Theta_0} - N), \quad \forall\theta_0 \in \Theta_0, \quad G_{\theta_0}(K(t)) = 0.$

Soient $t \in (D_i^{\Theta_0} - N)$ et $\theta_0 \in \Theta_0$. Par définition de $D_i^{\Theta_0}$, les densités p_θ, $\theta \in \Theta_0$, sont nulles sur $T^{-1}(t)$. Comme $t \notin N$, il existe $\theta_1 \in \Theta_1$ et $\omega_1 \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta_1}(\omega_1) > 0$; on a alors $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = 0$ et d'après la partie I de cette démonstration : $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, $f_{(b_t,v_t)} \leq \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$; $G_{\theta_0}(K(t))$ étant égal à $[E_{\theta_0}(f_{(a_t,u_t)}) + E_{\theta_0}(f_{(b_t,v_t)})]/2$ avec $f_{(a_t,u_t)} \leq f_{(b_t,v_t)}$ (voir I), on a $G_{\theta_0}(K(t)) \leq E_{\theta_0}(f_{(b_t,v_t)}) \leq E_{\theta_0}(\phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}) = 0$.

IV — $\forall t \in (D_s^{\Theta_1} - N), \quad \forall\theta_1 \in \Theta_1, \quad G_{\theta_1}(K(t)) = 1.$

La démonstration est semblable à celle de III.

Soient $t \in (D_s^{\Theta_1} - N)$ et $\theta_1 \in \Theta_1$. Par définition de $D_s^{\Theta_1}$, les densités p_θ, $\theta \in \Theta_1$, sont nulles sur $T^{-1}(t)$. Comme $t \notin N$, il existe $\theta_0 \in \Theta_0$ et $\omega_0 \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta_0}(\omega_0) > 0$; on a alors $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = +\infty$ et d'après la partie I de cette démonstration : $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$, $f_{(a_t,u_t)} \geq \phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$; cette fois on a $G_{\theta_1}(K(t)) \geq E_{\theta_1}(f_{(a_t,u_t)}) \geq E_{\theta_1}(\phi_{(\infty,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}) = 1$.

Proposition 5.2.3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone pour une statistique réelle T, Θ étant un intervalle de IR muni de l'ordre usuel. $K(T)$ est une statistique essentielle globale et G_θ désigne sa fonction de répartition moyenne sous P_θ. Notons $(\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\})_{f\in\mathcal{F}}$ l'ensemble des hypothèses unilatérales et considérons pour chacun de ces problèmes de décision le vote le plus favorable sous Θ_1^f (resp. Θ_0^f) ; pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $f \in \mathcal{F}$ posons $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = Q^\omega_{\Theta_1^f}(\{1\})$ (resp. $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = Q^\omega_{\Theta_0^f}(\{1\})$).
Les applications Q_1 et Q_0, de $\Omega \times \{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$ dans $[0,1]$, définissent des votes compatibles si et seulement si, pour presque tout $t \in IR$, la fonction $G_\theta(K(t))$ vérifie :
1) $G_\theta(K(t))$ est continue à droite en $\theta_f \in \Theta - \{sup\Theta\}$ si $t \in IR - D_i^{\{\theta>\theta_f\}}$
2) $G_\theta(K(t))$ est continue à gauche en $\theta_f \in \Theta - \{inf\Theta\}$ si $t \in IR - D_s^{\{\theta<\theta_f\}}$
3) si $inf\Theta \notin \Theta$ on a $lim_{\theta\to inf\Theta} G_\theta(K(t)) = 1$
4) si $sup\Theta \notin \Theta$ on a $lim_{\theta\to sup\Theta} G_\theta(K(t)) = 0$.
Sous ces conditions les deux types de votes Q_1 et Q_0 ont presque partout le même prolongement en une probabilité sur les boréliens de Θ.

Démonstration

Posons $N = \{t \in IR\,; \forall\omega \in T^{-1}(t) \quad \forall\theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0\}$ et notons simplement D_i^f et D_s^f les demi-droites inférieures et supérieures $D_i^{\Theta_0^f}$ et $D_s^{\Theta_1^f}$. D'après les propositions 4.3.1 et 5.2.2, pour une réalisation $\omega \notin T^{-1}(N)$ et des hypothèses unilatérales $\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\}$, le vote Q_θ^ω est défini par :

$$Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = \begin{cases} 1 & si \quad T(\omega) \in D_i^f - D_s^f \\ 1 - G_\theta(K(T(\omega))) & si \quad T(\omega) \in IR - (D_i^f \cup D_s^f) \\ 0 & si \quad T(\omega) \in D_s^f \end{cases}$$

Dans cette proposition nous considérons deux familles de votes, la première est définie presque sûrement par $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = sup_{\theta\in\Theta_1^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\})$, la seconde par $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = 1 - Q^\omega_{\Theta_0^f}(\{0\}) = 1 - sup_{\theta\in\Theta_0^f} Q_\theta^\omega(\{0_f\}) =$

$inf_{\theta\in\Theta_0^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ (voir la définition 4.3.2). Ces deux familles sont identiques si toutes les hypothèses unilatérales du modèle sont adjacentes.

Nous devons démontrer que Q_1 et Q_0 vérifient les propriétés a), b) et c) de la définition 5.2.1 pour presque tout ω de $\Omega - T^{-1}(N)$ si et seulement si G_θ possède les quatre propriétés de l'énoncé.

I — Condition suffisante.

Notons N_c l'ensemble des $t \in I\!R$ pour lesquels $G_\theta(K(t))$ ne vérifie pas les quatre propriétés de l'énoncé. $T^{-1}(N_c)$ étant négligeable, il suffit de démontrer les propriétés a),b) et c) sur $\Omega - T^{-1}(N \cup N_c)$.

Soit ω tel que $T(\omega) = t \notin (N \cup N_c)$.

1$^{\text{er}}$ cas : $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = sup_{\theta\in\Theta_1^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

a) Si $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$ on a $Q_1^\omega(\Theta_1^f) \leq Q_1^\omega(\Theta_1^{f'})$.

Lorsque $t \in D_i^{f'} - D_s^{f'}$ (resp. $t \in D_s^f$) l'inégalité recherchée est évidente car on a, pour tout θ de Θ, $Q_\theta^\omega(\{1_{f'}\}) = 1$ (resp. $Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = 0$) donc $Q_1^\omega(\Theta_1^{f'}) = 1$ (resp. $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = 0$).

Il nous reste le cas $t \notin (D_i^{f'} - D_s^{f'}) \cup D_s^f$. Comme $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$ implique $D_i^f \subseteq D_i^{f'}$ et $D_s^f \supseteq D_s^{f'}$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV), t n'appartient pas non plus à $D_i^f - D_s^f \subseteq D_i^{f'} - D_s^{f'}$ et à $D_s^{f'}$. On a, pour tout θ de Θ, $Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = Q_\theta^\omega(\{1_{f'}\}) = 1 - G_\theta(K(t))$ donc
$Q_1^\omega(\Theta_1^f) = sup_{\theta\in\Theta_1^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\}) \leq sup_{\theta\in\Theta_1^{f'}\supset\Theta_1^f} Q_\theta^\omega(\{1_{f'}\}) = Q_1^\omega(\Theta_1^{f'})$.

b-1) Si $(\Theta_1^{f_n})_{n\in I\!N}$ croît vers Θ, la suite $(Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in I\!N}$ croît vers 1.

$\Theta_1^{f_n} = \Theta\cap]-\infty, \theta_n)$ n'étant jamais égal à Θ, l'existence d'une suite $(\Theta_1^{f_n})$ croissant vers Θ n'est possible que si $sup\Theta \notin \Theta$. C'est dans ce cas qu'il y a quelque chose à démontrer.

Posons $D_i^+ = \cup_{n\in I\!N} D_i^{f_n}$ et $D_s^- = \cap_{n\in I\!N} D_s^{f_n}$; la suite $(\Theta_1^{f_n})$ étant croissante les suites $(D_i^{f_n})$ et $(D_s^{f_n})$ sont respectivement croissante et

décroissante (voir le lemme 1 de l'annexe IV) ; la suite $(D_i^{f_n} - D_s^{f_n})$ croît vers $D_i^+ - D_s^-$.
Lorsque $t \in D_i^+ - D_s^-$ on a la propriété recherchée puisqu'à partir d'un certain rang $t \in (D_i^{f_n} - D_s^{f_n})$ donc $Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 1$.
Le cas $t \in D_s^-$ est impossible car $D_s^- \subseteq N$; en effet, la convergence de $(\Theta_1^{f_n})$ vers Θ et le lemme 1 de l'annexe IV entraînent $D_s^- = \cap_{\theta \in \Theta} D_s^\theta$.
Il reste le cas $t \in IR - (D_i^+ \cup D_s^-) \neq \emptyset$. On a toujours : $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim \nearrow_{n \to +\infty} sup_{\theta \in \Theta_1^{f_n}} Q_\theta^\omega(\{1_{f_n}\})$. Comme $t \notin D_i^+ \cup D_s^-$, à partir d'un certain rang $t \notin D_i^{f_n} \cup D_s^{f_n}$, on a donc $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = sup_{\theta \in \Theta}(1 - G_\theta(K(t)))$.
$G_\theta(K(t))$ étant une fonction décroissante de θ (voir la partie a) de la démonstration de 5.1.1), $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim_{\theta \to sup\Theta}(1 - G_\theta(K(t)))$ qui est égal à 1 d'après la propriété 4) de l'énoncé.

b-2) Si $(\Theta_1^{f_n})_{n \in IN}$ décroît vers le vide, la suite $(Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n \in IN}$ décroît vers 0.

La démonstration est semblable à celle de b-1).
$\Theta_1^{f_n} = \Theta \cap] - \infty, \theta_n)$ n'étant jamais vide, l'existence d'une suite $(\Theta_1^{f_n})$ décroissant vers le vide n'est possible que si $inf\Theta \notin \Theta$. On pose alors $D_i^- = \cap_{n \in IN} D_i^{f_n}$ et $D_s^+ = \cup_{n \in IN} D_s^{f_n}$.
Lorsque $t \in D_s^+$, la propriété recherchée est évidente puisqu'à partir d'un certain rang $t \in D_s^{f_n}$ donc $Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 0$.
Le cas $t \in D_i^-$ est impossible car $D_i^- \subseteq N$; en effet, la convergence de $(\Theta_0^{f_n})$ vers Θ et le lemme 1 de l'annexe IV entraînent $D_i^- = \cap_{\theta \in \Theta} D_i^\theta$.
Il reste le cas $t \in IR - (D_i^- \cup D_s^+) \neq \emptyset$. On a cette fois :
$lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim \searrow_{n \to +\infty} sup_{\theta \in \Theta_1^{f_n}} Q_\theta^\omega(\{1_{f_n}\}) =$
$lim_{n \to +\infty} sup_{\theta \in \Theta_1^{f_n}} (1 - G_\theta(K(t))) = lim_{\theta \to inf\Theta}(1 - G_\theta(K(t)))$.
La propriété 3) de l'énoncé implique bien $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 0$.

c) Si $(\Theta_1^{f_n})_{n \in IN}$ et $(\Theta_1^{f'_n})_{n \in IN}$ sont deux suites ayant même limite, l'une étant croissante l'autre décroissante, les suites $(Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n \in IN}$

et $(Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}))_{n\in IN}$ ont même limite.

La limite commune de $(\Theta_1^{f_n})$ et $(\Theta_1^{f'_n})$ ne peut pas être vide ou égale à Θ, elle est donc de la forme $\Theta_1^f = \Theta\cap]-\infty,\theta_f)$ avec $\theta_f\in\Theta$. Lorsque θ_f appartient à Θ_1^f (resp. $\Theta_0^f=\Theta-\Theta_1^f$), les $\Theta_1^{f_n}$ (resp. $\Theta_1^{f'_n}$) sont égaux à Θ_1^f à partir d'un certain rang. Etudions séparément ces deux cas.

i) $\Theta_1^f = \Theta\cap]-\infty,\theta_f]$ $(\theta_f\in\Theta-\{sup\Theta\},\ \Theta_1^{f'_n}\neq\Theta_1^f)$.

On a $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = Q_1^\omega(\Theta_1^f)\le lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n})$ et
$D_i^f = D_i^{\{\theta>\theta_f\}} = \cap\searrow_{n\in IN} D_i^{f'_n},\quad D_s^f\supseteq\cup\nearrow_{n\in IN} D_s^{f'_n} = D'_s$.

L'égalité des deux limites est évidente lorsque t appartient à $D_i^f - D_s^f$ (resp. D'_s) car on a alors $Q_1^\omega(\Theta_1^f)=1$ (resp. $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n})=0$).

t n'appartenant pas à N il n'appartient pas à $D_i^f\cap D_s^f$, il nous reste alors le cas : $t\notin D_i^f\cup D'_s$; à partir d'un certain rang on a $t\notin D_i^{f'_n}\cup D_s^{f'_n}$ donc $Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = sup_{\theta\in\Theta_1^{f'_n}}(1-G_\theta(K(t)))$; ceci implique $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = lim_{\theta>\theta_f\searrow\theta_f}(1-G_\theta(K(t)))$. D'après la propriété 1) de l'énoncé on a $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = 1-G_{\theta_f}(K(t))$; l'égalité entre $1-G_{\theta_f}(K(t))$ et $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = Q_{\theta_f}^\omega(\{1_f\})$ (voir la partie a) de la démonstration 5.1.1) est triviale lorsque $t\notin D_i^f\cup D_s^f$, dans le cas contraire $t\in D_s^f - D'_s$ on a $Q_{\theta_f}^\omega(\{1_f\})=0$ mais aussi $G_{\theta_f}(K(t))=1$ d'après la propriété 3) d'une statistique essentielle globale (voir la proposition 5.2.2).

ii) $\Theta_1^f = \Theta\cap]-\infty,\theta_f[$ $(\theta_f\in\Theta-\{inf\Theta\})$.

On a $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = Q_1^\omega(\Theta_1^f)\ge lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n})$ et
$D_i^f\supseteq\cup\nearrow_{n\in IN} D_i^{f_n} = D_i,\quad D_s^f = D_s^{\{\theta<\theta_f\}} = \cap\searrow_{n\in IN} D_s^{f_n}$.

L'égalité des deux limites est évidente lorsque t appartient à $D_i - D_s^f$ (resp. D_s^f) car on a alors $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n})=1$ (resp. $Q_1^\omega(\Theta_1^f)=0$).

Il nous reste le cas : $t\notin D_i\cup D_s^f$; à partir d'un certain rang $t\notin D_i^{f_n}\cup D_s^{f_n}$ donc $Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = sup_{\theta\in\Theta_1^{f_n}}(1-G_\theta(K(t)))$; ceci implique $lim_{n\to+\infty}Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = sup_{\theta\in\Theta_1^f}(1-G_\theta(K(t)))$; cette quantité est évidemment égale à $Q_1^\omega(\Theta_1^f)$ lorsque $t\notin D_i^f\cup D_s^f$. Dans le cas contraire, $t \in (D_i^f - D_s^f) - D_i$, on a $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = 1$ et on doit montrer $sup_{\theta\in\Theta_1^f}(1 - G_\theta(K(t))) = 1$, c'est-à-dire $G_{\theta_f}(K(t)) = 0$ d'après la propriété 2) de l'énoncé et la décroissance en θ de $G_\theta(K(t))$ (voir la fin de la partie a) de la démonstration 5.1.1) ; cette égalité est une conséquence directe de la propriété 2) d'une statistique essentielle globale (voir la proposition 5.2.2) puisque $\theta_f \in \Theta_0^f$.

2ème cas : $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = inf_{\theta\in\Theta_0^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ pour tout $f \in \mathcal{F}$.

a) Si $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$ on a $Q_0^\omega(\Theta_1^f) \leq Q_0^\omega(\Theta_1^{f'})$.

La démonstration du a) du 1er cas convient en utilisant la définition de Q_0^ω à la place de celle de Q_1^ω.

b-1) $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN} \nearrow \Theta \quad \Longrightarrow \quad (Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN} \nearrow 1$.

Il suffit de reprendre le début du b-1) du 1er cas et pour $t \in I\!R - (D_i^+ \cup D_s^-)$ on a :
$lim_{n\to+\infty} Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim\nearrow_{n\to+\infty}\ inf_{\theta\in\Theta_0^{f_n}} Q_\theta^\omega(\{1_{f_n}\}) =$
$lim_{n\to+\infty} inf_{\theta\in\Theta_0^{f_n}}(1 - G_\theta(K(t))) = lim_{\theta\to sup\Theta}(1 - G_\theta(K(t))) = 1$
d'après la décroissance de $\Theta_0^{f_n} = \Theta \cap (\theta_n, +\infty[$ vers le vide et la propriété 4) de l'énoncé.

b-2) $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN} \searrow \emptyset \quad \Longrightarrow \quad (Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN} \searrow 0$.

On reprend la démonstration du b-2) du 1er cas et pour $t \in I\!R - (D_i^- \cup D_s^+)$ on a cette fois :
$lim_{n\to+\infty} Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim\searrow_{n\to+\infty}\ inf_{\theta\in\Theta_0^{f_n}} Q_\theta^\omega(\{1_{f_n}\}) =$
$lim_{n\to+\infty} inf_{\theta\in\Theta_0^{f_n}}(1 - G_\theta(K(t))) = inf_{\theta\in\Theta}(1 - G_\theta(K(t))) = 0$
d'après la décroissance en θ de $G_\theta(K(t))$ et la propriété 3) de l'énoncé.

c) $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN} \nearrow \Theta_1^f \quad et \quad (\Theta_1^{f'_n})_{n\in IN} \searrow \Theta_1^f \quad \Longrightarrow$
$(Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN} \nearrow Q_0^\omega(\Theta_1^f) \quad et \quad (Q_0^\omega(\Theta_1^{f'_n}))_{n\in IN} \searrow Q_0^\omega(\Theta_1^f)$.

Comme pour le c) du 1er cas on distingue deux éventualités.

i) $\Theta_1^f = \Theta \cap]-\infty, \theta_f]$ $(\theta_f \in \Theta - \{sup\Theta\})$.

On a $lim_{n\to+\infty}Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}) = Q_0^\omega(\Theta_1^f) \leq lim_{n\to+\infty}Q_0^\omega(\Theta_1^{f'_n})$. Les demi-droites D_i^f et D_s^f ont les mêmes propriétés qu'en i) c) du 1^er cas, la démonstration est identique pour $t \in D_i^f \cup D'_s$.

Dans le cas contraire on a :

$lim_{n\to+\infty}Q_0^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = lim_{n\to+\infty}inf_{\theta\in\Theta_0^{f'_n}}(1 - G_\theta(K(t))) =$
$inf_{\theta\in\Theta_0^f}(1 - G_\theta(K(t)))$; cette dernière quantité est évidemment égale à $Q_0^\omega(\Theta_1^f)$ quand $t \notin D_i^f \cup D_s^f$; il reste le cas $t \in (D_s^f - D'_s) - D_i^f$, on a alors $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = 0$ et on doit montrer $inf_{\theta\in\Theta_0^f}(1 - G_\theta(K(t))) = 0$, c'est-à-dire $G_{\theta_f}(K(t)) = 1$ d'après la propriété 1) de l'énoncé et la décroissance en θ de $G_\theta(K(t))$; c'est une conséquence directe de la propriété 3) d'une statistique essentielle globale (voir la proposition 5.2.2) puisque $\theta_f \in \Theta_1^f$.

ii) $\Theta_1^f = \Theta\cap]-\infty, \theta_f[$ ($\theta_f \in \Theta - \{inf\Theta\}$, $\Theta_1^{f_n} \neq \Theta_1^f$).

On reprend le début de la démonstration du ii) c) du 1^er cas en remplaçant Q_1^ω par Q_0^ω. Lorsque $t \notin D_i \cup D_s^f$ on a maintenant :

$lim_{n\to+\infty}Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim\nearrow_{n\to+\infty} inf_{\theta\in\Theta_0^{f_n}}(1 - G_\theta(K(t))) =$
$lim_{\theta<\theta_f\nearrow\theta_f}(1 - G_\theta(K(t))) = 1 - G_{\theta_f}(K(t))$ d'après la décroissance en θ de $G_\theta(K(t))$ et la propriété 2) de l'énoncé ($D_s^f = D_s^{\{\theta<\theta_f\}}$). On obtient bien $Q_0^\omega(\Theta_1^f)$ quand $t \notin D_i^f \cup D_s^f$ car $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = inf_{\theta\geq\theta_f}(1 - G_\theta(K(t))) = 1 - G_{\theta_f}(K(t))$; lorsque $t \in (D_i^f - D_s^f) - D_i$, on a $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = 1$ et il en est de même de $1 - G_{\theta_f}(K(t))$ d'après la propriété 2) d'une statistique essentielle globale (voir la proposition 5.2.2) puisque $\theta_f \in \Theta_0^f$.

II – Condition nécessaire.

Q_1 et Q_0 sont supposés définir des votes compatibles.

Sur $\Omega - T^{-1}(N)$ on a $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = sup_{\theta\in\Theta_1^f}Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ et $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = inf_{\theta\in\Theta_0^f}Q_\theta^\omega(\{1_f\})$. Par définition les votes $Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ ne dépendent que de t ; les propriétés a), b) et c) de la définition 5.2.1 sont donc vérifiées en dehors d'un négligeable de la forme $T^{-1}(M \cup N)$. Il suffit de démontrer que $G_\theta(K(t))$ vérifie les quatre propriétés de l'énoncé pour $t \notin M \cup N$.

Soit ω tel que $T(\omega) = t \notin M \cup N$.

1) Soit $\theta_f \in \Theta - \{sup\Theta\}$, $G_\theta(K(t))$ est continue à droite en θ_f si $t \notin D_i^{\{\theta>\theta_f\}}$.

Considérons une suite $\{\theta_n\}_{n\in IN}$ décroissant vers θ_f, $\theta_n \neq \theta_f$; posons $\Theta_1^{f'_n} = \Theta\cap]-\infty, \theta_n]$ et $\Theta_1^{f_n} = \Theta\cap]-\infty, \theta_f] = \Theta_1^f$. La propriété c) de la définition 5.2.1 étant vérifiée pour la réalisation ω nous avons : $lim_{n\to+\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = Q_1^\omega(\Theta_1^f)$.

Reprenons les notations de la partie c)-i) du 1$^{\text{er}}$ cas de I.

Lorsque $t \notin (D_i^f \cup D'_s) = (D_i^{\{\theta>\theta_f\}} \cup D'_s)$, nous avons obtenu : $lim_{n\to+\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = lim_{\theta>\theta_f \searrow \theta_f}(1 - G_\theta(K(t)))$. La continuité à droite en θ_f de $G_\theta(K(t))$ s'en déduit immédiatement pour $t \notin (D_i^f \cup D_s^f)$, car dans ce cas : $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = sup_{\theta\in\Theta_1^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = sup_{\theta\in\Theta_1^f}(1 - G_\theta(K(t))) = 1 - G_{\theta_f}(K(t))$; cette continuité est encore valable pour $t \in (D_s^f - D'_s)$ car on a alors $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = 0$ mais aussi $1 - G_{\theta_f}(K(t)) = 0$ d'après la propriété 3) d'une statistique essentielle globale (voir la proposition 5.2.2).

Il reste le cas $t \in D'_s - D_i^f$ (ce qui suit est valable pour $t \in D'_s$). A partir d'un certain rang t appartient aux $D_s^{f'_n}$ et d'après la propriété 3) d'une statistique essentielle globale on a $G_{\theta_n}(K(t)) = 1$ car $\theta_n \in \Theta_1^{f'_n}$; ceci démontre la continuité à droite en θ_f puisque $D'_s \subseteq D_s^f$ et la propriété 3) précédente impliquent : $G_{\theta_f}(K(t)) = 1$.

2) Soit $\theta_f \in \Theta - \{inf\Theta\}$, $G_\theta(K(t))$ est continue à gauche en θ_f si $t \notin D_s^{\{\theta<\theta_f\}}$

La démonstration est semblable à la précédente. On considère cette fois une suite $\{\theta_n\}_{n\in IN}$ croissant vers θ_f, $\theta_n \neq \theta_f$; on pose $\Theta_1^{f_n} = \Theta\cap]-\infty, \theta_n[$ et $\Theta_1^{f'_n} = \Theta\cap]-\infty, \theta_f[= \Theta_1^f$. Les votes Q_0 étant compatibles en ω on a : $lim_{n\to+\infty} Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}) = Q_0^\omega(\Theta_1^f)$.

Reprenons les notations de la partie c)-ii) du 1$^{\text{er}}$ cas de I.

Lorsque $t \notin (D_i \cup D_s^f) = (D_i \cup D_s^{\{\theta<\theta_f\}})$, la partie c)-ii) du 2$^{\text{ème}}$ cas implique : $lim_{n\to+\infty} Q_0^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim_{\theta<\theta_f \nearrow \theta_f}(1 - G_\theta(K(t)))$. La continuité à gauche en θ_f de $G_\theta(K(t))$ s'en déduit immédiatement pour

$t \notin (D_i^f \cup D_s^f)$, car dans ce cas : $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = inf_{\theta \in \Theta_0^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = inf_{\theta \geq \theta_f}(1 - G_\theta(K(t))) = 1 - G_{\theta_f}(K(t))$; cette continuité est encore valable pour $t \in (D_i^f - D_i) - D_s^f$ car on a alors $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = 1$ mais aussi $1 - G_{\theta_f}(K(t)) = 1$ d'après la propriété 2) d'une statistique essentielle globale (voir la proposition 5.2.2).

Il reste le cas $t \in D_i - D_s^f$ (ce qui suit est valable pour $t \in D_i$). A partir d'un certain rang t appartient aux $D_i^{f_n}$ et d'après la propriété 2) d'une statistique essentielle globale on a $G_{\theta_n}(K(t)) = 0$ car $\theta_n \in \Theta_0^{f_n}$; ceci démontre la continuité à gauche en θ_f puisque $D_i \subseteq D_i^f$ et la propriété 2) précédente impliquent : $G_{\theta_f}(K(t)) = 0$.

3) si $inf\Theta \notin \Theta$ on a $lim_{\theta \to inf\Theta} G_\theta(K(t)) = 1$

Considérons une suite $\{\theta_n\}_{n \in IN}$ décroissant vers $inf\Theta$ et posons $\Theta_1^{f_n} = \Theta \cap]-\infty, \theta_n]$. On a $\cap_{n \in IN} \Theta_1^{f_n} = \emptyset$ et d'après la propriété b) de la définition 5.2.1 : $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 0$.

Reprenons les notations de la partie b-2) du 1er cas.

Lorsque $t \notin (D_i^- \cup D_s^+)$ nous avons obtenu $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim_{\theta \to inf\Theta}(1 - G_\theta(K(t)))$, ce qui implique bien l'égalité recherchée.

De plus nous avons vu que t n'appartient pas à $D_i^- \subseteq N$. Quant au cas $t \in D_s^+$, il est évident puisqu'à partir d'un certain rang $t \in D_s^{f_n}$ et $G_{\theta_n}(K(t)) = 1$ d'aprés la propriété 3) d'une statistique essentielle globale(voir la proposition5.2.2).

4) si $sup\Theta \notin \Theta$ on a $lim_{\theta \to sup\Theta} G_\theta(K(t)) = 0$.

Considérons une suite $\{\theta_n\}_{n \in IN}$ croissant vers $sup\Theta$ et posons $\Theta_1^{f_n} = \Theta \cap]-\infty, \theta_n[$. On a $\cup_{n \in IN} \Theta_1^{f_n} = \Theta$ et d'après la propriété b) de la définition 5.2.1 : $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 1$.

Reprenons les notations de la partie b-1) du 1er cas.

Lorsque $t \notin (D_i^+ \cup D_s^-)$ nous avons obtenu $lim_{n \to +\infty} Q_1^\omega(\Theta_1^{f_n}) = lim_{\theta \to sup\Theta}(1 - G_\theta(K(t)))$, ce qui implique bien l'égalité recherchée.

De plus, t n'appartient pas à $D_s^- \subseteq N$. Quant au cas $t \in D_i^+$, il est évident puisqu'à partir d'un certain rang $t \in D_i^{f_n}$ et $G_{\theta_n}(K(t)) = 0$ d'après la propriété 2) d'une statistique essentielle globale ($\theta_n \in \Theta_0^{f_n}$).

III - Q_1 et Q_0 ont presque partout le même prolongement.

Sous les conditions de l'énoncé, Q_1 et Q_0 définissent des votes compatibles ; ils sont donc presque partout prolongeables à la σ-algèbre engendrée par $\{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$ qui est la tribu borélienne de Θ.

Considérons une réalisation ω vérifiant les quatre propriétés de l'énoncé et n'appartenant pas a $T^{-1}(N \cup N_c)$, c'est-à-dire $T(\omega) = t \notin (N \cup N_c)$ (voir le début de I). Il suffit de montrer que $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = Q_0^\omega(\Theta_1^f)$ pour $\Theta_1^f = \Theta\cap]-\infty, \theta_f]$, avec $\theta_f \in \Theta - \{sup\Theta\}$.

Lorsque $t \notin (D_i^f \cup D_s^f)$, $Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = 1 - G_\theta(K(t))$ donc $Q_1^\omega(\Theta_1^f) = sup_{\theta\in\Theta_1^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = 1 - G_{\theta_f}(K(t))$ et $Q_0^\omega(\Theta_1^f) = inf_{\theta\in\Theta_0^f} Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = lim_{\theta>\theta_f\searrow\theta_f}(1 - G_{\theta_f}(K(t)))$; la propriété 1) de l'énoncé entraîne :

$Q_1^\omega(\Theta_1^f) = Q_0^\omega(\Theta_1^f)$.

On a aussi cette égalité lorsque $t \in (D_i^f - D_s^f)$ (resp. $t \in D_s^f$) puisque pour tout θ de Θ, $Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ est égal à 1 (resp. 0).

La plupart des modèles statistiques à rapport de vraisemblance monotone classiquement étudiés vérifient les conditions de cette proposition. Pour que les conditions 1) et 2) soient réalisées il suffit que l'application, qui associe à θ l'élément de $L_1(\Omega; \mathcal{A}, \mu)$ correspondant à la densité p_θ, soit continue pour la topologie faible de L_1 (en effet $G_\theta(K(t)) = \int_\Omega f_t.p_\theta d\mu$ avec f_t bornée). Dans ces modèles, la probabilité ainsi obtenue sur Θ peut aider à choisir entre des hypothèses non expertisables. C'est ce que nous étudierons dans les paragraphes suivants.

Il y a bien d'autres manières d'obtenir des votes compatibles sur l'ensemble des hypothèses unilatérales $(\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\})_{f\in\mathcal{F}}$. Considérons pour chacun de ces problèmes de décision un vote pondéré par la probabilité Λ^f définie sur l'intervalle Θ muni de la tribu des boréliens. Posons $Q^\omega(\Theta_1^f) = Q_{\Lambda^f}^\omega(\{1_f\}) = \int_\Theta Q_\theta^\omega(\{1_f\})d\Lambda^f(\theta)$, $Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ étant la fréquence des votes en faveur de Θ_1^f sous

P_θ, pour la réalisation ω (cette intégrale a un sens car $Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ est une fonction croissante de θ à valeurs dans $[0,1]$ (voir le a) de la démonstration 5.1.1)). Si l'on veut que la famille des pondérations $(\Lambda^f)_{f\in\mathcal{F}}$ définisse des votes compatibles, il faut que l'application Q, de $\Omega \times \{\Theta_1^f\}_{f\in\mathcal{F}}$ dans $[0,1]$, vérifie les propriétés a), b) et c) de la définition 5.2.1 pour presque toutes les réalisations ω . Q a un comportement moins simple que les votes Q_1 et Q_0 précédents, il dépend à la fois du modèle et des pondérations. Nous allons définir des conditions peu contraignantes qui donnent à Q les bonnes propriétés.

Proposition 5.2.4

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone pour une statistique réelle T, Θ étant un intervalle de IR muni de l'ordre usuel et de la tribu des boréliens $\mathcal{B}$. $K(T)$ est une statistique essentielle globale et G_θ désigne sa fonction de répartition moyenne sous P_θ. On suppose avoir les deux propriétés suivantes : i) si $\theta_f \in \Theta - \{sup\Theta\}$, $\quad D_s^{\theta_f} = \cup_{\theta>\theta_f} D_s^\theta$,
ii) si $\theta_f \in \Theta - \{inf\Theta\}$, $\quad D_i^{\theta_f} = \cup_{\theta<\theta_f} D_i^\theta$. Notons $(\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\})_{f\in\mathcal{F}}$ l'ensemble des hypothèses unilatérales. $\mathcal{F}$ est totalement ordonné par la relation : $f \leq f' \Leftrightarrow \Theta_1^f \subseteq \Theta_1^{f'}$, on le munit de la topologie définie par cet ordre.
Soit $(\Lambda^f)_{f\in\mathcal{F}}$ une famille de probabilités sur $(\Theta, \mathcal{B})$, on considère, pour tout $t \in$IR, la fonction définie sur $\mathcal{F}$ par : $H_t(f) = \int_\Theta (1 - G_\theta(K(t)))d\Lambda^f(\theta)$; pour presque tout t, on suppose que H_t est croissante, continue et vérifie :
1) si $\mathcal{F}$ n'a pas de borne inférieure ($inf\Theta \notin \Theta$) on a $inf_{f\in\mathcal{F}} H_t(f) = 0$
2) si $\mathcal{F}$ n'a pas de borne supérieure ($sup\Theta \notin \Theta$) on a $sup_{f\in\mathcal{F}} H_t(f) = 1$.

Si on associe à chaque hypothèse unilatérale Θ_1^f le vote pondéré Q_{Λ^f}, on obtient alors des votes compatibles.

Démonstration

Posons $N = \{t \in$IR$; \forall\omega \in T^{-1}(t) \quad \forall\theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0\}$ et notons simplement D_i^f et D_s^f les demi-droites inférieures et supérieures $D_i^{\Theta_0^f}$ et $D_s^{\Theta_1^f}$. D'après les propositions 4.3.1 et 5.2.2, pour une réalisation

$\omega \notin T^{-1}(N)$ et des hypothèses unilatérales $\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\}$, le vote Q_θ^ω est défini par :

$$Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = \begin{cases} 1 & si \quad T(\omega) \in D_i^f - D_s^f \\ 1 - G_\theta(K(T(\omega))) & si \quad T(\omega) \in IR - (D_i^f \cup D_s^f) \\ 0 & si \quad T(\omega) \in D_s^f \end{cases}$$

Nous considérons la famille de votes définie par : $Q^\omega(\Theta_1^f) = Q_{\Lambda^f}^\omega(\{1_f\}) = \int_\Theta Q_\theta^\omega(\{1_f\}) d\Lambda^f(\theta)$; cette intégrale (resp. $H_t(f)$) est bien définie puisque $Q_\theta^\omega(\{1_f\})$ (resp. $1 - G_\theta(K(t))$) est une fonction croissante en θ, à valeurs dans $[0, 1]$ (voir le a) de la démonstration 5.1.1).

Nous devons démontrer que Q vérifie les propriétés a), b) et c) de la définition 5.2.1 pour presque tout ω de $\Omega - T^{-1}(N)$. On va suivre les étapes de la partie I de la démonstration 5.2.3.

Notons N_c l'ensemble des $t \in IR$ pour lesquels H_t ne vérifie pas les propriétés supposées dans l'énoncé. $T^{-1}(N_c)$ étant négligeable, il suffit de démontrer les propriétés a),b) et c) sur $\Omega - T^{-1}(N \cup N_c)$.

Soit ω tel que $T(\omega) = t \notin (N \cup N_c)$.

a) — Si $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$ on a $Q^\omega(\Theta_1^f) \leq Q^\omega(\Theta_1^{f'})$.

Lorsque $t \in D_i^{f'} - D_s^{f'}$ (resp. $t \in D_s^f$) l'inégalité recherchée est évidente car on a, pour tout θ de Θ, $Q_\theta^\omega(\{1_{f'}\}) = 1$ (resp. $Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = 0$) donc $Q^\omega(\Theta_1^{f'}) = 1$ (resp. $Q^\omega(\Theta_1^f) = 0$).

Il nous reste le cas $t \notin (D_i^{f'} - D_s^{f'}) \cup D_s^f \neq \emptyset$. Comme $\Theta_1^f \subset \Theta_1^{f'}$ implique $D_i^f \subseteq D_i^{f'}$ et $D_s^f \supseteq D_s^{f'}$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV), t n'appartient pas non plus à $D_i^f - D_s^f \subseteq D_i^{f'} - D_s^{f'}$ et à $D_s^{f'}$. On a, pour tout θ de Θ, $Q_\theta^\omega(\{1_f\}) = Q_\theta^\omega(\{1_{f'}\}) = 1 - G_\theta(K(t))$ donc $Q^\omega(\Theta_1^f) = H_t(f)$ et $Q^\omega(\Theta_1^{f'}) = H_t(f')$; la croissance de H_t entraîne l'inégalité recherchée.

b-1) - Si $(\Theta_1^{f_n})_{n \in IN}$ croît vers Θ, la suite $(Q^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n \in IN}$ croît vers 1.

$\Theta_1^{f_n} = \Theta \cap]-\infty, \theta_n)$ n'étant jamais égal à Θ, l'existence d'une suite $(\Theta_1^{f_n})$ croissant vers Θ n'est possible que si $sup\Theta \notin \Theta$. Il est équivalent de dire que $\mathcal{F}$ n'a pas de borne supérieure.

Posons $D_i^+ = \cup_{n\in IN} D_i^{f_n}$ et $D_s^- = \cap_{n\in IN} D_s^{f_n}$; la suite $(\Theta_1^{f_n})$ étant croissante les suites $(D_i^{f_n})$ et $(D_s^{f_n})$ sont respectivement croissante et décroissante (voir le lemme 1 de l'annexe IV) ; la suite $(D_i^{f_n} - D_s^{f_n})$ croît vers $D_i^+ - D_s^-$.

Lorsque $t \in D_i^+ - D_s^-$ on a la propriété recherchée puisqu'à partir d'un certain rang $t \in (D_i^{f_n} - D_s^{f_n})$ donc $Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 1$.

Le cas $t \in D_s^-$ est impossible car $D_s^- \subseteq N$; en effet, la convergence de $(\Theta_1^{f_n})$ vers Θ et le lemme 1 de l'annexe IV entraînent $D_s^- = \cap_{\theta\in\Theta} D_s^\theta$.

Il reste le cas $t \notin D_i^+ \cup D_s^-$. A partir d'un certain rang $t \notin D_i^{f_n} \cup D_s^{f_n}$, on a alors $Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = H_t(f_n)$. La propriété 2) de l'énoncé et la croissance de H_t impliquent bien $lim_{n\to+\infty} H_t(f_n) = 1$.

b-2) - Si $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$ décroît vers le vide, la suite $(Q^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN}$ décroît vers 0.

La démonstration est semblable à celle de b-1).

$\Theta_1^{f_n} = \Theta \cap] - \infty, \theta_n)$ n'étant jamais vide, l'existence d'une suite $(\Theta_1^{f_n})$ décroissant vers le vide n'est possible que si $inf\Theta \notin \Theta$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ n'a pas de borne inférieure. On pose alors $D_i^- = \cap \searrow_{n\in IN} D_i^{f_n}$ et $D_s^+ = \cup \nearrow_{n\in IN} D_s^{f_n}$.

Lorsque $t \in D_s^+$, la propriété recherchée est évidente puisqu'à partir d'un certain rang $t \in D_s^{f_n}$ donc $Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 0$.

Le cas $t \in D_i^-$ est impossible car $D_i^- \subseteq N$; en effet, la convergence de $(\Theta_0^{f_n})$ vers Θ et le lemme 1 de l'annexe IV entraînent $D_i^- = \cap_{\theta\in\Theta} D_i^\theta$.

Il reste le cas $t \in IR - (D_i^- \cup D_s^+) \neq \emptyset$. A partir d'un certain rang $t \notin D_i^{f_n} \cup D_s^{f_n}$, on a alors $Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = H_t(f_n)$. La propriété 1) de l'énoncé et la croissance de H_t impliquent bien $lim_{n\to+\infty} H_t(f_n) = 0$.

c) — Si $(\Theta_1^{f_n})_{n\in IN}$ et $(\Theta_1^{f'_n})_{n\in IN}$ sont deux suites ayant même limite, respectivement croissante et décroissante, les suites $(Q^\omega(\Theta_1^{f_n}))_{n\in IN}$ et $(Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}))_{n\in IN}$ ont même limite.

La limite commune de $(\Theta_1^{f_n})$ et $(\Theta_1^{f'_n})$ ne peut pas être vide ou égale à Θ, elle est donc de la forme $\Theta_1^f = \Theta \cap] - \infty, \theta_f)$ avec $\theta_f \in \Theta$.

Lorsque θ_f appartient à Θ_1^f (resp. $\Theta_0^f = \Theta - \Theta_1^f$), les $\Theta_1^{f_n}$ (resp. $\Theta_1^{f'_n}$) sont égaux à Θ_1^f à partir d'un certain rang. Etudions séparément ces deux cas.

i) - $\Theta_1^f = \Theta \cap]-\infty, \theta_f]$ ($\theta_f \in \Theta - \{sup\Theta\}$).

On a $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = Q^\omega(\Theta_1^f)$, $D_i^f = D_i^{\Theta_0^f} = \cap \searrow_{n\in IN} D_i^{f'_n}$, $D_s^f = D_s^{\theta^f} \supseteq \cup \nearrow_{n\in IN} D_s^{f'_n}$ et la suite $(f'_n)_{n\in IN}$ décroît vers f. D'après la propriété i) de l'énoncé on a même $D_s^f = \cup \nearrow_{n\in IN} D_s^{f'_n}$.

L'égalité des deux limites est évidente lorsque $t \in D_i^f - D_s^f$; t appartenant aussi à $D_i^{f'_n} - D_s^{f'_n}$ on a à la fois $Q^\omega(\Theta_1^f) = 1$ et $Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = 1$.

Lorsque $t \in D_s^f$ on a $Q^\omega(\Theta_1^f) = 0$ mais aussi $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = 0$ car t appartient à $D_s^{f'_n}$ à partir d'un certain rang.

Il nous reste le cas : $t \notin D_i^f \cup D_s^f$; à partir d'un certain rang t n'appartient pas à $D_i^{f'_n} \cup D_s^{f'_n}$, ce qui entraîne $Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = H_t(f'_n)$; H_t étant continue on a $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = H_t(f)$; l'égalité entre $H_t(f)$ et $Q^\omega(\Theta_1^f)$ est triviale puisque $t \notin D_i^f \cup D_s^f$.

ii) - $\Theta_1^f = \Theta \cap]-\infty, \theta_f[$ ($\theta_f \in \Theta - \{inf\Theta\}$).

On a $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(\Theta_1^{f'_n}) = Q^\omega(\Theta_1^f)$, $D_i^f = D_i^{\theta^f} \supseteq \cup \nearrow_{n\in IN} D_i^{f_n}$, $D_s^f = D_s^{\Theta_1^f} = \cap \searrow_{n\in IN} D_s^{f_n}$ et la suite $(f_n)_{n\in IN}$ croît vers f. D'après la propriété ii) de l'énoncé on a même $D_i^f = \cup \nearrow_{n\in IN} D_i^{f_n}$.

L'égalité des deux limites est évidente lorsque $t \in D_s^f$; il appartient aussi aux $D_s^{f_n}$, on a donc $Q^\omega(\Theta_1^f) = 0$ et $Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 0$.

Lorsque $t \in D_i^f - D_s^f$, on a $Q^\omega(\Theta_1^f) = 1$; comme à partir d'un certain rang, $t \in D_i^{f_n} - D_s^{f_n}$, on a aussi $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = 1$.

Il nous reste le cas : $t \notin D_i^f \cup D_s^f$; à partir d'un certain rang t n'appartient pas à $D_i^{f_n} \cup D_s^{f_n}$, on a alors $Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = H_t(f_n)$ et la continuité de H_t implique $lim_{n\to+\infty} Q^\omega(\Theta_1^{f_n}) = H_t(f)$; cette quantité est évidemment égale à $Q^\omega(\Theta_1^f)$ puisque $t \notin D_i^f \cup D_s^f$.

Les conditions d'application de cette proposition ne sont pas très contraignantes.

Les propriétés i) et ii) interdisent certaines discontinuités des demi-droites D_s^θ et D_i^θ. La plupart du temps, elles ne varient pas ou varient continûment : $\cap_{\theta<\theta_f} D_s^\theta = D_s^{\theta_f} = \cup_{\theta>\theta_f} D_s^\theta$ et $\cup_{\theta<\theta_f} D_i^\theta = D_i^{\theta_f} = \cap_{\theta>\theta_f} D_i^\theta$. Dans cette situation les votes de la proposition 5.2.3 sont d'ailleurs neutres pour toutes les hypothèses unilatérales (voir la proposition 4.3.2).

On a supposé les fonctions $H_t(f) = \int_\Theta (1 - G_\theta(K(t)))d\Lambda^f(\theta)$ croissantes sur $\mathcal{F}$ pour presque tout t. Comme $1 - G_\theta(K(t))$ est une fonction croissante en θ, pour avoir la croissance de H_t il suffit que la probabilité Λ^f soit d'autant plus grande que f est grand (voir [DacD] p. 79-80), c'est-à-dire que les fonctions de répartitions F_f décroissent lorsque f croît. Les pondérations Λ^f chargent alors d'autant plus les grandes valeurs de θ que Θ_1^f est grand, ceci semble assez "naturel". Si $G_\theta(K(t))$ est continue en θ, ce qui est souvent le cas, il suffit d'ajouter la continuité des Λ^f au sens de la convergence étroite ($f_n \to f \ \Rightarrow \ \Lambda^{f_n} \overset{et.}{\to} \Lambda^f$) pour avoir la continuité de H_t.

En ce qui concerne les propriétés 1) et 2) de H_t, elles n'imposent aucune contrainte lorsque Θ est fermé. Lorsque Θ est ouvert à gauche (resp. droite) la condition 3) (resp. 4)) de la proposition 5.2.3 entraîne la propriété 1) (resp. 2)) si les fonctions de répartition F_f tendent vers 1 (resp. 0) quand Θ_1^f décroît vers le vide (resp. croît vers Θ).

Considérons le cas classique d'un n-échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ d'une loi normale, $N(\theta, \sigma^2)$, de moyenne inconnue $\theta \in I\!R$ et de variance connue σ^2 $(\sigma > 0)$. Nous avons vu à la fin du paragraphe 5.1 que ce modèle d'échantillonnage est à rapport de vraisemblance monotone par rapport à $\overline{X}$, qui est une statistique essentielle pour le choix entre deux hypothèses unilatérales quelconques. $\overline{X}$ est donc une statistique essentielle globale, sa fonction de répartition moyenne est donnée par : $G_\theta(\overline{x}) = F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x} - \theta))$ (F est la fonction de répartition de la loi normale $N(0,1)$).

$G_\theta(\overline{x})$ vérifie bien les quatre conditions de la proposition 5.2.3 puisque $F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x}-\theta))$ est continu en θ, $lim_{\theta\to-\infty} F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x}-\theta)) = 1$ et $lim_{\theta\to+\infty} F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{x}-\theta)) = 0$. Quelles que soient les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1^f =]-\infty, \theta_f), \Theta_0^f\}$ les deux votes les plus favorables sous Θ_1^f et sous Θ_0^f sont identiques ; pour toute réalisation ω on a : $Q^\omega_{\Theta_1^f}(\{1_f\}) = Q^\omega_{\Theta_0^f}(\{1_f\}) = Q^\omega_{\theta_f}(\{1_f\}) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta_f))$. Ils définissent des votes compatibles sur l'ensemble des hypothèses unilatérales : $Q^\omega(\Theta_1^f) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta_f))$. Le prolongement en une probabilité unique sur les boréliens de $\Theta = I\!R$ vérifie $Q^\omega(]-\infty, \theta_f[) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta_f)) = F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\theta_f - \overline{X}(\omega)))$. C'est donc la loi normale $N(\overline{x}, \frac{\sigma^2}{n})$. En théorie bayésienne, ce résultat est la loi a postériori associée à la mesure de Lebesgue sur $I\!R$ (cf. [Ber.] p. 132).

Considérons maintenant des votes pondérés. Comme dans le paragraphe précédent nous allons prendre pour chaque problème unilatéral $\{\Theta_1^f =]-\infty, \theta_f), \Theta_0^f\}$ une pondération $\Lambda^f = N(\theta_f, c^2)$ avec $c > 0$. Les deux hypothèses Θ_1^f et Θ_0^f sont ainsi traitées de façon symétrique. On a :

$Q^\omega(\Theta_1^f) = Q^\omega_{\Lambda^f}(\{1_f\}) = 1 - \int_\Theta F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta)) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, c} exp(-\frac{(\theta-\theta_f)^2}{2c^2}) \, d\theta.$

En posant $\theta' = (\theta - \theta_f)$, les calculs de la fin de 5.1 donnent :

$Q^\omega(\Theta_1^f) = 1 - F(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X}(\omega) - \theta_f)\sqrt{\frac{\sigma^2}{nc^2+\sigma^2}}) = F(\sqrt{\frac{n}{nc^2+\sigma^2}}(\theta_f - \overline{X}(\omega))).$

D'après la proposition 5.2.4, Q^ω se prolonge en une probabilité sur $\Theta = I\!R$ qui est donc la loi $N(\overline{x}, \frac{\sigma^2}{n} + c^2)$. Lorsque c tend vers 0 on obtient le prolongement précédent, celui des votes les plus favorables. Plus l'écart type c est grand, plus les votes extrêmes prennent de l'importance et la probabilité sur Θ a une dispersion plus grande autour de $\overline{x}$, ce qui présente peu d'intérêt. Pour avoir une famille de pondérations intéressante il faut partir d'une information a priori. Nous le ferons dans le paragraphe 5.4. Les votes que nous venons de définir sont neutres, on a $E_{\theta_f}(Q^\omega(\Theta_1^f)) = \frac{1}{2}$ pour tout θ_f. Dans le premier cas c'est une conséquence directe de la proposition 4.3.2. Pour les votes pondérés on a :

$$\begin{aligned} E_{\theta_f}(Q^\omega(\Theta_1^f)) &= \int_{I\!R} F(\sqrt{\frac{n}{nc^2+\sigma^2}}(\theta_f - y)) \, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{n}{2\sigma^2}(y-\theta_f)^2) \, dy \\ &= \int_{I\!R} F(\sqrt{\frac{n}{nc^2+\sigma^2}} z) \, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp(-\frac{n}{2\sigma^2} z^2) \, dz \end{aligned}$$

il suffit d'intégrer séparément sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en utilisant l'égalité $F(\sqrt{\frac{n}{nc^2+\sigma^2}}(-z)) = 1 - F(\sqrt{\frac{n}{nc^2+\sigma^2}} z)$.

5.3 HYPOTHÈSES BILATÉRALES.

$(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta\subseteq IR})$ désigne un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone par rapport à la statistique T. Considérons deux couples d'hypothèses unilatérales : $\{\Theta'_1, \Theta'_0\}$ et $\{\Theta''_1, \Theta''_0\}$, $\Theta'_1 \subset \Theta''_1$ (voir la définition 5.1.2). Ils définissent une partition ordonnée de Θ en trois intervalles non vides : Θ'_1, $\Theta''_1 - \Theta'_1$ et Θ''_0. On étudie des hypothèses bilatérales lorsque l'appartenance de θ à Θ'_1 et celle de θ à Θ''_0 sont considérées comme équivalentes pour l'interprétation. On casse ainsi la structure d'ordre sur Θ et on étudie les hypothèses : $\Theta_1 = \Theta'_1 \cup \Theta''_0$ et $\Theta_0 = \Theta'_0 - \Theta''_0 = \Theta''_1 - \Theta'_1$. Cette cassure entraîne des conséquences lourdes sur les possibilités d'expertise lorsque les deux parties de Θ_1 ne peuvent pas s'analyser séparément.

Définition 5.3.1

$(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta\subseteq IR})$ est un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone par rapport à la statistique T.

Soient $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ des hypothèses bilatérales basées sur les hypothèses unilatérales $\{\Theta'_1, \Theta'_0\}$ et $\{\Theta''_1, \Theta''_0\}$, $\Theta'_1 \subset \Theta''_1$.
Ces hypothèses sont dites bilatérales impropres si pour tout θ_0 de Θ_0 elles vérifient $P_{\theta_0}(T^{-1}(IR - D_s^{\Theta'_1})) = 0$ ou $P_{\theta_0}(T^{-1}(IR - D_i^{\Theta''_0})) = 0$. Elles sont dites bilatérales pures si aucune sous hypothèse de la forme $\{\Theta_1, \Theta_0^h \subseteq \Theta_0\}$ n'est impropre ($\forall \theta_0 \in \Theta_0 \quad P_{\theta_0}(T^{-1}(IR - D_s^{\Theta'_1})) > 0$ et $P_{\theta_0}(T^{-1}(IR - D_i^{\Theta''_0})) > 0$).

Le cas des hypothèses bilatérales impropres revient à traiter deux problèmes de décision unilatéraux distincts.
Posons $\Theta_0^i = \{\theta \in \Theta_0 \ , \ P_\theta(T^{-1}(IR - D_s^{\Theta'_1})) > 0\}$ et
$\Theta_0^s = \{\theta \in \Theta_0 \ , \ P_\theta(T^{-1}(IR - D_i^{\Theta''_0})) > 0\}$, le modèle étant à rapport de vraisemblance monotone on a : $\Theta'_1 < \Theta_0^i < \Theta_0 - \Theta_0^i - \Theta_0^s < \Theta_0^s < \Theta''_0$ (parmi ces trois nouveaux sous espaces de paramètres certains peuvent être vides). Lorsque l'événement $(IR - D_s^{\Theta_0^i}) \cap (IR - D_i^{\Theta''_0})$ (resp. $(IR - D_s^{\Theta'_1}) \cap (IR - D_i^{\Theta_0^s})$) n'est pas vide, il est $\Theta - (\Theta_0^s \cup \Theta''_0)$ (resp. $\Theta - (\Theta'_1 \cup \Theta_0^i)$) négligeable ; ceci permet une analyse

séparée des deux parties de l'hypothèse Θ_1. Les experts du choix entre Θ_1 et Θ_0 s'obtiennent presque sûrement en ajoutant un expert du choix entre Θ_1' et Θ_0 à un expert du choix entre Θ_0'' et Θ_0. C'est une conséquence directe de la définition 4.1.1 et de la propriété suivante.

Proposition 5.3.1

Soit δ un expert du choix entre Θ_1 et Θ_0. Si l'événement C vérifie : $\Theta_1^C = \{\theta \in \Theta_1\ ,\ P_\theta(C) > 0\} \neq \emptyset$ et $\Theta_0^C = \{\theta \in \Theta_0\ ,\ P_\theta(C) > 0\} \neq \emptyset$, la restriction de δ à C est un expert du choix entre Θ_1^C et Θ_0^C sur le sous modèle statistique conditionné par C.

Démonstration

δ est un expert du problème de décision $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$. $C \in \mathcal{A}$ est muni de la tribu $\mathcal{C}$ trace de $\mathcal{A}$ sur C. Le modèle statistique conditionné par C, $(C, \mathcal{C}, (P_\theta^C)_{\theta\in\Theta_0^C\cup\Theta_1^C})$ est défini par $P_\theta^C(C') = P_\theta(C')/P_\theta(C)$ $(C' \in \mathcal{C})$. On doit démontrer que δ^C, la restriction de δ à C est un expert du choix entre Θ_1^C et Θ_0^C.

La condition ii) de la définition 4.1.1 est évidente car pour $A \in \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $1I_A \overset{\Theta_0^C p.s.}{=} 0$ (resp. $1I_A \overset{\Theta_1^C p.s.}{=} 0$) on a aussi $1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$ (resp. $1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 0$).

Soient $\theta_0 \in \Theta_0^C \subseteq \Theta_0$ et $\theta_1 \in \Theta_1^C \subseteq \Theta_1$, la condition i) est aussi triviale lorsque $E_{\theta_0}(\delta) = 0$ ou $E_{\theta_1}(\delta) = 1$ car pour $\theta \in \Theta_0^C \cup \Theta_1^C$, $E_\theta^C(\delta) = \int_C \delta^C dP_\theta^C = \frac{1}{P_\theta(C)} \int_\Omega \delta\ 1I_C\ dP_\theta$. Il nous reste le cas où δ est un expert du choix entre P_{θ_1} et P_{θ_0} ; on peut facilement vérifier que δ^C est aussi un expert du choix entre $P_{\theta_1}^C$ et $P_{\theta_0}^C$ (voir la définition 2.1.1).

Faire voter les experts d'hypothèses bilatérales impropres est un problème équivalent à celui du vote des experts sous des hypothèses unilatérales. Pour une réalisation ω, le vote Q_θ^ω sous P_θ ne dépend que d'un seul des deux experts unilatéraux qui définissent l'expert bilatéral.

Les hypothèses bilatérales le plus souvent traitées dans le cadre de la théorie des tests sont en fait des hypothèses bilatérales pures. C'est en particulier le cas dans les modèles exponentiels à un paramètre, $D_i^{\Theta''_0}$ et $D_s^{\Theta'_1}$ sont alors négligeables. Plus généralement, les hypothèses bilatérales sont parfois étudiées sur les familles de densités strictement totalement positives à l'ordre trois ou plus (cf. [Leh.] p. 120 et 140). Les densités étant strictement positives on a $D_i^{\Theta''_0} = D_s^{\Theta'_1} = \emptyset$ et les hypothèses bilatérales sont pures. Ces hypothèses ne possèdent généralement que des experts triviaux, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.3.2

$(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta \in \Theta \subseteq I\!R})$ est un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone par rapport à la statistique T.

Soient $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ des hypothèses bilatérales pures basées sur les hypothèses unilatérales $\{\Theta'_1, \Theta'_0\}$ et $\{\Theta''_1, \Theta''_0\}$, $\Theta'_1 \subset \Theta''_1$.
L'ensemble des experts de ce problème de décision se réduit aux experts triviaux, presque sûrement égaux à $1\!I_{D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_0}}(T)$ ou $1 - 1\!I_{D_i^{\Theta''_0} \cap D_s^{\Theta'_1}}(T)$, lorsque $B = T^{-1}(I\!R - D_i^{\Theta''_0} - D_s^{\Theta'_1})$ est négligeable et dans le cas contraire dès qu'il existe $\theta_a \in \Theta'_1$, $\theta_b \in \Theta_0$ et $\theta_c \in \Theta''_0$ pour lesquels on ne peut pas trouver un recouvrement de B, $B_a \cup B_c \overset{p.s.}{\supseteq} B$, tel que le rapport des densités $p_{\theta_b}/p_{\theta_a}$ (resp. $p_{\theta_c}/p_{\theta_b}$) soit constant sur B_a (resp. B_c) quand il est défini.

Démonstration

Nous allons commencer par établir une propriété des événements négligeables dans un modèle à rapport de vraisemblance monotone.

I — Lemme : Soient deux sous espaces ordonnés de Θ : $\Theta' < \Theta''$.

Si $N \subset T^{-1}(I\!R - D_s^{\Theta'})$ (resp. $N \subset T^{-1}(I\!R - D_i^{\Theta''})$) est un événement Θ' (resp. Θ'') négligeable, il est $\Theta' \cup \Theta''$ négligeable.

1$^{\text{er}}$cas : $N \subset T^{-1}(I\!R - D_s^{\Theta'})$ et N est Θ' négligeable.

Soit $\theta'' \in \Theta''$, on doit montrer que l'événement N est $P_{\theta''}$ négligeable. Nous distinguerons deux éventualités.

i) $\theta_s = sup\Theta' \in \Theta'$. Dans ce cas $P_{\theta_s}(N) = 0$ et $D_s^{\Theta'} = D_s^{\theta_s}$ (voir le lemme 1 de l'annexe IV). Posons $N = N_1 + N_2 + N_3$ avec $N_1 = N \cap \{p_{\theta''} = 0\}$, $N_2 = N \cap \{p_{\theta''} > 0\} \cap \{p_{\theta_s} > 0\}$ et $N_3 = N \cap \{p_{\theta''} > 0\} \cap \{p_{\theta_s} = 0\}$. On a évidemment $P_{\theta''}(N_1) = 0$ mais aussi $P_{\theta''}(N_2) = 0$ car $P_{\theta_s}(N_2) = 0$ implique que N_2 est μ négligeable. Pour finir nous allons montrer que N_3 est vide. S'il existait $\omega \in N_3$ on aurait $h_{(\theta'',\theta_s)}(T(\omega)) = +\infty$ donc $h_{(\theta'',\theta_s)}(t) = +\infty$ pour $t \in D = [T(\omega), +\infty[$; la densité p_{θ_s} serait nulle sur $T^{-1}(D)$; $T(\omega)$ appartiendrait à $D_s^{\theta_s}$, ce qui est impossible puisque $T(\omega)$ appartient à $T(N)$ qui est d'intersection vide avec $D_s^{\Theta'} = D_s^{\theta_s}$.

ii) $\theta_s = sup\Theta' \notin \Theta'$. On considère dans Θ' une suite $(\theta'_n)_{n \in IN}$ croissant vers θ_s. On a $D_s^{\Theta'} = \cap_{n \in IN} D_s^{\theta'_n}$. Pour tout $n \in IN$, l'événement N est $P_{\theta'_n}$ négligeable et comme précédemment on le décompose en $N_1 + N_2^n + N_3^n$ avec $N_1 = N \cap \{p_{\theta''} = 0\}$, $N_2^n = N \cap \{p_{\theta''} > 0\} \cap \{p_{\theta'_n} > 0\}$, $N_3^n = N \cap \{p_{\theta''} > 0\} \cap \{p_{\theta'_n} = 0\}$; on a encore $P_{\theta''}(N_1) = 0$ et $P_{\theta''}(N_2^n) = 0$. Il nous suffit maintenant de montrer que $N' = \cap_{n \in IN} N_3^n$ est vide puisque $N = N_1 + (\cup_{n \in IN} N_2^n) + N'$. S'il existait $\omega \in N'$ on aurait pour tout θ'_n, comme précédemment pour θ_s : $T(\omega) \in D_s^{\theta'_n}$; ceci est impossible puisque $T(\omega)$ appartient à $T(N)$ qui est d'intersection vide avec $D_s^{\Theta'} = \cap_{n \in IN} D_s^{\theta'_n}$.

$2^{\text{ème}}$cas : $N \subset T^{-1}(IR - D_i^{\Theta''})$ et N est Θ'' négligeable.

Soit $\theta' \in \Theta'$, on doit montrer que l'événement N est $P_{\theta'}$ négligeable. La démonstration est semblable à celle du premier cas.

Pour tout $\theta'' \in \Theta''$ on pose $N = N_1 + N_2^{\theta''} + N_3^{\theta''}$ avec $N_1 = N \cap \{p_{\theta'} = 0\}$, $N_2^{\theta''} = N \cap \{p_{\theta'} > 0\} \cap \{p_{\theta''} > 0\}$ et $N_3^{\theta''} = N \cap \{p_{\theta'} > 0\} \cap \{p_{\theta''} = 0\}$. On a toujours $P_{\theta'}(N_1) = 0$ et $N_2^{\theta''}$ μ négligeable. Quant à $N_3^{\theta''}$ il est inclus dans $T^{-1}(D_i^{\theta''})$. En effet pour $\omega \in N_3^{\theta''}$ on a $h_{(\theta'',\theta')}(T(\omega)) = 0$; la fonction $h_{(\theta'',\theta')}$ est alors nulle sur $D =]-\infty, T(\omega)]$ et il en est donc de même de la densité $p_{\theta''}$ sur $T^{-1}(D)$; $T(\omega)$ appartient bien à $D_i^{\theta''}$.

Si $\theta_i = inf\Theta''$ appartient à Θ'' on a bien $P_{\theta'}(N) = 0$ car l'événement $N_3^{\theta_i}$ est vide. En effet $N_3^{\theta_i}$ est alors inclus à la fois dans $T^{-1}(D_i^{\theta_i})$ et dans $N \subset T^{-1}(IR - D_i^{\Theta''})$ avec $D_i^{\Theta''} = D_i^{\theta_i}$.

Dans le cas contraire, $\theta_i = inf\Theta'' \notin \Theta''$, on considère une suite $(\theta''_n)_{n\in IN}$ de Θ'' décroissant vers θ_i et la décomposition :
$N = N_1 + (\cup_{n\in IN} N_2^{\theta''_n}) + N'$ avec $N' = \cap_{n\in IN} N_3^{\theta''_n}$. L'événement N' est encore vide car $N' \subset \cap_{n\in IN} T^{-1}(D_i^{\theta''_n}) = T^{-1}(\cap_{n\in IN} D_i^{\theta''_n})$ et $\cap_{n\in IN} D_i^{\theta''_n} = D_i^{\Theta''}$. L'événement N est donc bien $P_{\theta'}$ négligeable.

II – $\phi_0 = 1I_{D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_0}}(T)$ et $\phi_1 = 1 - 1I_{D_i^{\Theta''_0} \cap D_s^{\Theta'_1}}(T)$ sont des experts.

ϕ_0 (resp. ϕ_1) vérifient bien la propriété i) de la définition 4.1.1 puisque $E_\theta(\phi_0) = 0$ (resp. $E_\theta(\phi_1) = 1$) pour tout θ de Θ_0 (resp. Θ_1).

La propriété ii) de cette même définition contient deux propriétés à démontrer.

1) $1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0 \implies \phi_0\ 1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1I_A$ (resp. $\phi_1\ 1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1I_A$).
C'est évident pour ϕ_1 qui est nul sur un événement Θ_1 négligeable : $T^{-1}(D_i^{\Theta''_0} \cap D_s^{\Theta'_1})$. On a la propriété recherchée sur tout événement A. Dans le cas de ϕ_0 on doit démontrer que $N = A - T^{-1}(D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_0})$ est Θ_1 négligeable. N étant Θ_0 négligeable, il suffit d'appliquer deux fois le lemme précédent avec $\Theta'_1 < \Theta_0$ puis $\Theta_0 < \Theta''_0$.

2) $1I_A \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 0 \implies \phi_0\ 1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$ (resp. $\phi_1\ 1I_A \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$).
C'est évident pour ϕ_0 qui est égal à 1 sur un événement Θ_0 négligeable : $T^{-1}(D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_0})$. On a la propriété recherchée sur tout événement A. Considérons le cas de ϕ_1. Le lemme précédent appliqué à $\Theta'_1 < \Theta_0$ et à l'événement Θ'_1 négligeable : $N' = A - T^{-1}(D_s^{\Theta'_1})$, nous dit que N' est aussi Θ_0 négligeable. En utilisant $\Theta_0 < \Theta''_0$ on obtient que $N'' = A - T^{-1}(D_i^{\Theta''_0})$, est Θ_0 négligeable . Posons $A' = A - (N' \cup N'')$,

il nous reste à montrer l'égalité : $\phi_1 \ 1I_{A'} \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$, c'est évident puisque ϕ_1 est nul sur $T^{-1}(D_i^{\Theta_0''} \cap D_s^{\Theta_1'})$ et $A' \subseteq T^{-1}(D_i^{\Theta_0''} \cap D_s^{\Theta_1'})$.

III - $B = T^{-1}(IR - D_i^{\Theta_0''} - D_s^{\Theta_1'})$ est négligeable.

Cette situation est équivalente à : $1I_{IR-D_s^{\Theta_1'}}(T) \overset{p.s.}{\leq} 1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T)$.

Les hypothèses étant bilatérales pures on a même :

$1I_{D_i^{\Theta_0}}(T) < 1I_{IR-D_s^{\Theta_1'}}(T) \overset{p.s.}{\leq} 1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T) < 1I_{IR-D_s^{\Theta_0}}(T)$.

Soit ϕ un expert du choix entre Θ_1 et Θ_0, on doit démontrer qu'il est presque sûrement égal à ϕ_0 ou ϕ_1.

Les événements $F = T^{-1}(D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_0})$ et $G = T^{-1}(D_i^{\Theta_0''} \cap D_s^{\Theta_1'})$ étant respectivement Θ_0 et Θ_1 négligeables, d'après la propriété ii) de la définition 4.1.1, l'expert ϕ vérifie : $\phi \ 1I_F \overset{\Theta_1 p.s.}{=} 1I_F$ et $\phi \ 1I_G \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$; il est, comme ϕ_0 et ϕ_1, presque sûrement égal à 1 sur F et à 0 sur G.

Pour obtenir $\phi \overset{p.s.}{=} \phi_0$ ou $\phi \overset{p.s.}{=} \phi_1$ il faut montrer que ϕ est presque sûrement constant sur $A + C$ avec $A = T^{-1}(D_i^{\Theta_0''} - D_i^{\Theta_0} - D_s^{\Theta_1'})$ et $C = T^{-1}(D_s^{\Theta_1'} - D_s^{\Theta_0} - D_i^{\Theta_0''})$ (on a $F^c = A + G + C$ ou $F^c = A + B + C$ si $G = \emptyset$), c'est-à-dire que $\{\phi = 1\} \cap (A + C) = A_1 + C_1$ ou $\{\phi = 0\} \cap (A + C) = A_0 + C_0$ est négligeable.

$A + C$ étant inclus dans F^c, d'après le lemme de la partie I, il suffit de démontrer que $A_1 + C_1$ ou $A_0 + C_0$ est Θ_0 négligeable.

Supposons que $A_1 + C_1$ ne soit pas Θ_0 négligeable, c'est-à-dire qu'il existe $\theta_0 \in \Theta_0$ tel que $P_{\theta_0}(A_1 + C_1) > 0$, nous devons montrer que l'événement $A_0 + C_0$ est Θ_0 négligeable.

1ère étape : $P_{\theta_0}(A_1) > 0 \implies C_0$ est Θ_0 négligeable.

C_0 étant inclus dans $T^{-1}(IR - D_i^{\Theta_0''})$, il suffit de démontrer que C_0 est Θ_0'' négligeable (voir le lemme de I). Si ce n'était pas le cas il existerait $\theta_1 \in \Theta_0''$ tel que $P_{\theta_1}(C_0) > 0$ et on aurait $E_{\theta_1}(\phi) < 1$; comme $P_{\theta_0}(A_1) > 0$ implique $E_{\theta_0}(\phi) > 0$, l'expert ϕ serait un expert du choix entre P_{θ_1} et P_{θ_0} (voir le i) de la définition 4.1.1) ; ceci est impossible, en effet $A_1 \subseteq T^{-1}(D_i^{\Theta_0''})$ étant θ_1 négligeable on devrait avoir $P_{\theta_0}(A_1 \cap \{\phi = 1\}) = P_{\theta_0}(A_1) = 0$ (voir la définition 2.1.1).

$2^{\text{ème}}$ étape : $P_{\theta_0}(C_1) > 0 \implies A_0$ est Θ_0 négligeable.

La démonstration est semblable à celle de l'étape précédente. Comme $A_0 \subseteq T^{-1}(I\!R - D_s^{\Theta'_1})$, il suffit de démontrer que A_0 est Θ'_1 négligeable (voir le lemme de I). Si ce n'était pas le cas il existerait $\theta_1 \in \Theta'_1$ tel que $P_{\theta_1}(A_0) > 0$ et on aurait $E_{\theta_1}(\phi) < 1$; $P_{\theta_0}(C_1) > 0$ impliquant $E_{\theta_0}(\phi) > 0$, l'expert ϕ serait un expert du choix entre P_{θ_1} et P_{θ_0} (voir le i) de la définition 4.1.1) ; ceci est impossible, en effet $C_1 \subseteq T^{-1}(D_s^{\Theta'_1})$ est θ_1 négligeable, on devrait avoir $P_{\theta_0}(C_1 \cap \{\phi = 1\}) = P_{\theta_0}(C_1) = 0$ (voir la définition 2.1.1).

A partir des deux propriétés précédentes, il nous suffit maintenant de montrer que l'on ne peut pas avoir $P_{\theta_0}(A_1) = 0$ ou $P_{\theta_0}(C_1) = 0$.

Si on avait $P_{\theta_0}(A_1) = 0$, on aurait $P_{\theta_0}(C_1) > 0$ puisque $P_{\theta_0}(A_1 + C_1) > 0$ et d'après la deuxième étape $P_{\theta_0}(A_0) = 0$, donc $P_{\theta_0}(A + T^{-1}(D_i^{\Theta_0})) = 0$ avec $A + T^{-1}(D_i^{\Theta_0}) = T^{-1}(D_i^{\Theta''_0} - D_s^{\Theta'_1})$ puisque $D_i^{\Theta_0} \cap D_s^{\Theta'_1} = \emptyset$; $T^{-1}(D_i^{\Theta''_0} - D_s^{\Theta'_1})$ étant égal à $T^{-1}(I\!R - D_s^{\Theta'_1}) - B$ avec B vide ou négligeable, on aurait $P_{\theta_0}(T^{-1}(I\!R - D_s^{\Theta'_1})) = 0$ ce qui est impossible pour des hypothèses bilatérales pures (voir la définition 5.3.1).

De même $P_{\theta_0}(C_1) = 0$ et $P_{\theta_0}(A_1) > 0$ est impossible pour des hypothèses bilatérales pures. Dans ce cas on aurait :
$0 = P_{\theta_0}(C_0) = P_{\theta_0}(C) = P_{\theta_0}(C + T^{-1}(D_s^{\Theta_0})) = P_{\theta_0}(T^{-1}(D_s^{\Theta'_1} - D_i^{\Theta''_0})) = P_{\theta_0}(T^{-1}(I\!R - D_i^{\Theta''_0}) - B) = P_{\theta_0}(T^{-1}(I\!R - D_i^{\Theta''_0}))$.

IV – $B = T^{-1}(I\!R - D_i^{\Theta''_0} - D_s^{\Theta'_1})$ n'est pas négligeable et il n'existe pas $B_a \cup B_c \overset{p.s.}{\supseteq} B$ avec $p_{\theta_b}/p_{\theta_a}$ (resp. $p_{\theta_c}/p_{\theta_b}$) constant sur B_a (resp. B_c).

Dans ce cas on a :

$1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T) \leq 1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) < 1\!I_{I\!R - D_s^{\Theta'_1}}(T) \leq 1\!I_{I\!R - D_s^{\Theta_0}}(T)$ et $\phi_1 = 1\!I_\Omega$.

Soit ϕ un expert du choix entre Θ_1 et Θ_0. Comme en III il est presque sûrement égal à 1, donc a ϕ_0 et ϕ_1, sur $F = T^{-1}(D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_0})$.

On doit démontrer qu'il est presque sûrement égal à 0 ou 1 sur $F^c = A + B + C$ avec $A = T^{-1}(D_i^{\Theta_0''} - D_i^{\Theta_0})$ et $C = T^{-1}(D_s^{\Theta_1'} - D_s^{\Theta_0})$. Ceci revient à montrer que $\{\phi = 1\} \cap (A + B + C) = A_1 + B_1 + C_1$ ou $\{\phi = 0\} \cap (A + B + C) = A_0 + B_0 + C_0$ est négligeable. Comme précédemment il suffit de démontrer que l'un de ces deux événements est Θ_0 négligeable.

Nous distinguerons deux cas suivant que B_0 est ou n'est pas négligeable. Nous aurons besoin des propriétés suivantes :

(1) si $\theta_0 \in \Theta_0$ et $P_{\theta_0}(A_1) > 0$, $B_0 + C_0$ est Θ_0 négligeable

(2) si $\theta_0 \in \Theta_0$ et $P_{\theta_0}(C_1) > 0$, $A_0 + B_0$ est Θ_0 négligeable

La propriété (1) (resp. (2)) se démontre en suivant le raisonnement de la 1ére (resp. 2éme) étape de III et en remplaçant C_0 par $B_0 + C_0$ (resp. A_0 par $A_0 + B_0$).

1er cas : B_0 est négligeable.

B n'étant pas négligeable, B_1 ne l'est pas. On doit donc démontrer que A_0 et C_0 sont Θ_0 négligeables.

a) Montrons que A_0 est Θ_0 négligeable.

Si C_1 n'est pas Θ_0 négligeable c'est une conséquence de la propriété (2). Lorsque C_1 est Θ_0 négligeable, montrons d'abord que ϕ est un expert du choix entre Θ_1' et Θ_0. ϕ étant un expert du problème de décision $\{\Theta_1, \Theta_0\}$, il suffit de vérifier que pour tout événement N, Θ_1' négligeable, on a $\phi\ 1I_N \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$ c'est-à- dire $(\{\phi = 1\} \cap N)$ Θ_0 négligeable (voir la définition 4.1.1). Pour cela décomposons N en $N_1 = N \cap T^{-1}(IR - D_s^{\Theta_1'})$, $N_2 = N \cap C$ et $N_3 = N \cap T^{-1}(D_s^{\Theta_0})$; $N_3 \subseteq T^{-1}(D_s^{\Theta_0})$ et $N_2 \cap \{\phi = 1\} \subseteq C_1$ sont évidemment Θ_0 négligeables, il en est de même de $N_1 \subseteq N$, d'après le lemme I, puisqu'il est Θ_1' négligeable.

Les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1', \Theta_0\}$ étant stables, d'après la proposition 4.2.2 il existe deux éléments successifs f et f' de $\overline{\Delta_s} \subseteq F$ qui encadrent ϕ, $\Theta_1' \cup \Theta_0 = \Theta_1''$ presque sûrement :

$1I_{D_i^{\Theta_0}}(T) \leq f \overset{\Theta_1'' p.s.}{\leq} \phi \overset{\Theta_1'' p.s.}{\leq} f' \leq 1I_{IR-D_s^{\Theta_1'}}(T)$ et $]f, f'[\cap\overline{\Delta_s} = \emptyset$.

B n'étant pas négligeable, il n'est pas Θ_0 négligeable (voir le lemme I) ; comme ϕ vaut presque sûrement 1 sur B on a : $f' \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{IR-D_s^{\Theta_1'}}(T)$.

La condition de l'énoncé implique en particulier que le rapport $p_{\theta_b}/p_{\theta_a}$ n'est pas constant sur $B_a \overset{p.s.}{\supseteq} B$. Il existe donc au moins une fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} \in \Phi_s^{(\theta_b,\theta_a)} \subseteq \Delta_s$ qui vérifie :

$1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T) \overset{p.s.}{<} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{<} 1I_{IR-D_s^{\Theta_1'}}(T)$; d'après le lemme I on a aussi :

$1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{<} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1I_{IR-D_s^{\Theta_1'}}(T)$.

On en déduit $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} < f'$ et comme $]f, f'[\cap\Phi_s^{(\theta_b,\theta_a)} = \emptyset$ on a :

$f \geq \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} > 1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T)$. ϕ est donc Θ_0 presque sûrement égal à 1 sur $T^{-1}(D_i^{\Theta_0''}) \supseteq A$, ce qui implique bien que A_0 est Θ_0 négligeable.

b) Montrons que C_0 est Θ_0 négligeable.

La démonstration est semblable à la précédente.

Pour A_1 non Θ_0 négligeable c'est la propriété (1) qui donne le résultat.

Lorsque A_1 est Θ_0 négligeable, ϕ est cette fois un expert du choix entre Θ_0'' et Θ_0 car $1I_N \overset{\Theta_0'' p.s.}{=} 0$ implique bien $\phi\ 1I_N \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$; il suffit de décomposer N en : $N_1 = N \cap T^{-1}(IR - D_i^{\Theta_0''})$, $N_2 = N \cap A$ et $N_3 = N \cap T^{-1}(D_i^{\Theta_0})$; $N_3 \subseteq T^{-1}(D_i^{\Theta_0})$ et $N_2 \cap \{\phi = 1\} \subseteq A_1$ sont bien Θ_0 négligeables, il en est de même de N_1 d'après le lemme de I.

L'application de la proposition 4.2.2 aux hypothèses $\{\Theta_0, \Theta_0''\}$ nous conduit à deux éléments g et g' de F vérifiant :

$1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T) \leq g \overset{\Theta_0' p.s.}{\leq} (1-\phi) \overset{\Theta_0' p.s.}{\leq} g' \leq 1I_{IR-D_s^{\Theta_0}}(T)$ et $]g, g'[\cap\overline{\Delta_s'} = \emptyset$ avec $\Delta_s' = \cup_{(\theta,\theta')\in\Theta_0\times\Theta_0''}\Phi_s^{(\theta',\theta)}$.

$(1-\phi)$ valant presque sûrement 0 sur B non Θ_0 négligeable on a :

$g \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{D_i^{\Theta_0''}}(T)$.

La condition de l'énoncé implique que le rapport $p_{\theta_c}/p_{\theta_b}$ n'est pas constant sur $B_c \overset{p.s.}{\supseteq} B$. Il existe donc au moins une fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)} \in \Phi_s^{(\theta_c,\theta_b)}$ qui vérifie :

$1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{<} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1\!I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$.

On en déduit $g < \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)}$ et comme $]g, g'[\cap \Phi_s^{(\theta_c,\theta_b)} = \emptyset$ on a :

$g' \leq \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)} < 1\!I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$. $(1-\phi)$ est donc Θ_0 presque sûrement égal à 0 sur $T^{-1}(IR - D_s^{\Theta'_1}) \supseteq C$, ce qui implique bien que $C_0 = C \cap \{(1-\phi) = 1\}$ est Θ_0 négligeable.

$2^{\text{ème}}$ cas : B_0 n'est pas négligeable.

B_0 étant inclus dans F^c il n'est pas Θ_0 négligeable (voir le lemme I). D'après les propriétés (1) et (2) on a donc : $\forall \theta_0 \in \Theta_0$ $P_{\theta_0}(A_1) = 0$ et $P_{\theta_0}(C_1) = 0$.

Nous devons démontrer que B_1 est Θ_0 négligeable.

Le fait que C_1 (resp. A_1) soit Θ_0 négligeable entraîne que ϕ est un expert du choix entre Θ'_1 et Θ_0 (resp. Θ''_0 et Θ_0)(voir les parties a) et b) du 1^{er}cas). Comme précédemment on obtient des éléments de F vérifiant :

$1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T) \leq f \overset{\Theta''_1 p.s.}{\leq} \phi \overset{\Theta''_1 p.s.}{\leq} f' \leq 1\!I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$, $]f, f'[\cap \overline{\Delta_s} = \emptyset$ et

$1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \leq g \overset{\Theta'_0 p.s.}{\leq} (1-\phi) \overset{\Theta'_0 p.s.}{\leq} g' \leq 1\!I_{IR-D_s^{\Theta_0}}(T)$, $]g, g'[\cap \overline{\Delta'_s} = \emptyset$.

Ces deux encadrements impliquent que les événements $\{f = 1\} \cap \{g = 1\}$ et $\{f' = 0\} \cap \{g' = 0\}$ sont Θ_0 négligeables car sur ces événements ϕ est Θ_0 presque sûrement égal à 0 et à 1. On a donc :

$1\!I_{D_i^{\Theta_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{=} inf\{f, g\} \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} 1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) < 1\!I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq}$ $sup\{f', g'\} \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1\!I_{IR-D_s^{\Theta_0}}(T)$.

Si $f' \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} 1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T)$ ou $g \overset{\Theta_0 p.s.}{\geq} 1\!I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$ l'expert ϕ est Θ_0 presque sûrement égal à 0 sur B et B_1 est bien Θ_0 négligeable.

Considérons l'autre possibilité :

$f' \overset{\Theta_0 p.s.}{>} 1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T)$ et $g \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1\!I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$. Nous allons distinguer deux cas suivant que $inf\{f, g\}$ est égal à f ou g.

a) $inf\{f, g\} = f$ donc $f \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} 1\!I_{D_i^{\Theta''_0}}(T)$.

Nous allons utiliser la fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)}$ définie dans la

partie a) du 1er cas. Comme elle n'appartient pas à $]f, f'[$ on a :
$f' \leq \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$.

Ceci implique : $sup\{f', g'\} = g' \overset{\Theta_0 p.s.}{\geq} 1I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$.

La fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)}$ définie dans la partie b) du 1er cas n'appartenant pas à $]g, g'[$, on a : $1I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{<} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)} \leq g$.

Lorsque $f' \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} g$ on a évidemment $\phi \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 0$ et B_1 est bien Θ_0 négligeable. Il nous reste le cas :
$f \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} 1I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{<} g \overset{\Theta_0 p.s.}{<} f' \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} g'$.

Il est impossible de l'avoir sous la condition de l'énoncé. En effet sur l'événement $\{f' - f = 1\}$ (resp. $\{g' - g = 1\}$) le rapport des densités $p_{\theta_b}/p_{\theta_a}$ (resp. $p_{\theta_c}/p_{\theta_b}$) est constant et $\{f' - f = 1\} \cup \{g' - g = 1\}$ formerait un recouvrement, Θ_0 donc Θ presque sûr, de B.

b) $inf\{f, g\} = g$ donc $g \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{D_i^{\Theta_0}}(T)$.

Nous allons utiliser la fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)}$ définie dans la partie b) du 1er cas. Comme elle n'appartient pas à $]g, g'[$ on a :
$g' \leq \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T)$.

Ceci implique : $sup\{f', g'\} = f' \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{IR-D_s^{\Theta_0}}(T)$.

La fonction de test simple $\phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)}$ définie dans la partie a) du 1er cas n'appartenant pas à $]f, f'[$, on a : $1I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{<} \phi_{(k,\beta)}^{(\theta_b,\theta_a)} \leq f$.

Le cas $g' \overset{\Theta_0 p.s.}{\leq} f$ est impossible car on aurait $\phi \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1$ et B_0 serait Θ_0 négligeable donc négligeable. Il nous reste le cas :
$g \overset{\Theta_0 p.s.}{=} 1I_{D_i^{\Theta''_0}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{<} f \overset{\Theta_0 p.s.}{<} g' \overset{\Theta_0 p.s.}{<} 1I_{IR-D_s^{\Theta'_1}}(T) \overset{\Theta_0 p.s.}{=} f'$.

Il est aussi impossible du fait de la condition imposée par l'énoncé. Comme nous l'avons vu a la fin du paragraphe a) précédent, $p_{\theta_b}/p_{\theta_a}$ (resp. $p_{\theta_c}/p_{\theta_b}$) est constant sur $\{f' - f = 1\}$ (resp. $\{g' - g = 1\}$) et on a encore $B \overset{p.s.}{\subseteq} \{f' - f = 1\} \cup \{g' - g = 1\}$.

L'existence de θ_a, θ_b et θ_c, vérifiant les conditions de l'énoncé, est réalisée dans les modèles à rapport de vraisemblance monotone classiquement étudiés. Nous allons cependant donner un exemple simple où des hypothèses bilatérales pures possèdent des experts non triviaux.

Soit $(I\!R, \mathcal{B}, (p_\theta.\lambda)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$, λ étant la mesure de Lebesgue, le problème de décision défini par : $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_1 = \{\theta_1', \theta_0''\}$, $p_{\theta_0} = \frac{1}{2}\ 1\!I_{[-1,+1]}$, $p_{\theta_1'} = \frac{1}{2}\ 1\!I_{[-\frac{3}{2},+\frac{1}{4}]} + \frac{1}{4}\ 1\!I_{]+\frac{1}{4},+\frac{3}{4}]}$ et $p_{\theta_0''} = \frac{1}{4}\ 1\!I_{[-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}[} + \frac{1}{2}\ 1\!I_{[-\frac{1}{4},+\frac{3}{2}]}$. Ce modèle est à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique identité et les hypothèses sont bien bilatérales pures. On a $B = [-\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}]$ et la condition de la proposition 5.3.2 n'est pas réalisée puisque : $p_{\theta_0}/p_{\theta_1'} = 1$ sur $B_a = [-1, +\frac{1}{4}]$, $p_{\theta_0''}/p_{\theta_0} = 1$ sur $B_c = [-\frac{1}{4}, +1]$ et $B \subset B_a \cup B_c$. Considérons les règles de décision valant 1 sur $]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$, 0 sur $[-1, -\frac{1}{4}[\cup]+\frac{1}{4}, +1]$, quelconques sur $[-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}]$ mais non triviales, c'est-à-dire non presque sûrement égales à 0 sur $[-\frac{1}{4}, +\frac{1}{4}]$. Ces règles sont des experts du choix entre Θ_1 et Θ_0 ; la propriété ii) de la définition 4.1.1 est évidente et il est facile de vérifier que ces règles de décision sont des experts du choix entre θ_1' (resp. θ_0'') et θ_0 ; en effet, elles sont $\{\theta_1', \theta_0\}$ (resp. $\{\theta_0'', \theta_0\}$) presque sûrement comprises entre $1\!I_{]-\infty,-1[}$ et $1\!I_{]-\infty,+\frac{1}{4}]}$ (resp. $1-\ 1\!I_{]-\infty,+1]}$ et $1-\ 1\!I_{]-\infty,-\frac{1}{4}[}$) (voir la proposition 2.3.1).

Revenons au cas des hypothèses bilatérales pures non expertisables. Deux traitements de cette pénurie d'experts nous semblent possibles suivant que l'ordre stucturant les paramètres est ou n'est pas important pour l'interprétation.

Dans bien des cas les deux parties Θ_1' et Θ_0'' de l'hypothèse Θ_1 ne sont pas vraiment équivalentes pour l'utilisateur. Son choix principal est entre Θ_0 et Θ_1 mais pour autant Θ_1' et Θ_0'' s'interprètent différemment, même si cette différence est mise au second plan. Les hypothèses $\{\Theta_1', \Theta_0'\}$, $\{\Theta_1'', \Theta_0''\}$, voire le choix entre les trois éventualités $\{\Theta_1', \Theta_0, \Theta_0''\}$, sont envisageables. Dans un tel cadre une bonne solution nous paraît être l'utilisation de votes compatibles pour les hypothèses unilatérales définissant le problème bilatéral, et même pour l'ensemble des hypothèses unilatérales (voir les propositions 5.2.3 et 5.2.4). Nous étudierons des exemples ultérieurement.

Considérons maintenant le cas où l'ordre sur les paramètres n'a pas d'intérêt pour différencier Θ_1' et Θ_0'', ces deux éventualités conduisent à la même interprétation alors que l'ordre les oppose. Cette équivalence entre Θ_1' et Θ_0'' se traduit sur les réalisations par une équivalence entre les petites et les grandes valeurs de la statistique T rendant le rapport de vraisemblance monotone. Reprenons par exemple le cas d'un n-échantillon de la loi normale de moyenne inconnue $\theta \in I\!R$ et de variance connue σ^2. La statistique T est alors la moyenne empirique $\overline{X}$. Intéressons nous aux hypothèses $\{\Theta_0 = [\theta_1, \theta_2], \Theta_1 = I\!R - \Theta_0\}$, ce problème de décision possède des symétries fortes par rapport à $\theta_0 = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Si les deux demi-droites $]-\infty, \theta_1[$ et $]\theta_2, +\infty[$ sont équivalentes pour l'interprétation il est tentant de dire qu'il est équivalent de réaliser $\overline{x}$ ou son symétrique par rapport à θ_0 : $2\theta_0 - \overline{x}$. C'est la statistique $T' = \mid \overline{X} - \theta_0 \mid$ qui devient alors primordiale et on est amené à travailler sur son modèle statistique image. Dans ce nouveau modèle les hypothèses $\{\Theta_0, \Theta_1\}$ sont expertisables sans problème puisque $(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}T')^2$ suit une loi de khi-deux décentrée à un degré de liberté et de paramètre d'excentricité $\frac{n}{\sigma^2}(\theta - \theta_0)^2$. Sur le modèle de départ ceci revient à remplacer, dans la définition des experts, la tribu $\mathcal{A}$ par la sous tribu $\mathcal{C}$ engendrée par T'. On impose ainsi des contraintes moins fortes pour le label expert et les hypothèses bilatérales pures non expertisables peuvent devenir stables. C'est un procédé équivalent à celui qui consiste, dans la théorie de la décision à partir d'une fonction de perte, à diminuer l'ensemble des règles admissibles en imposant une contrainte supplémentaire. Ici il faut enlever des contraintes car il y a pénurie et non pas trop-plein. Il reste le problème important du choix de la sous tribu $\mathcal{C}$. Dans un cadre général il est impossible de faire intervenir les symétries du modèle, comme dans l'exemple des lois normales, pour proposer une statistique T' définissant les petites et grandes valeurs de T équivalentes. Disons que l'on doit choisir les éléments de $\mathcal{C}$ de la forme $C' = T^{-1}(]-\infty, t) \cup (t', +\infty[)$ de telle sorte que l'on puisse dire qu'ils se comportent de façon semblable sous Θ_1' et Θ_0''. Les probabilités de C' sous Θ_1' et celles sous

Θ_0'' doivent se ressembler. Lorsque θ tend vers $inf\Theta$ (resp. $sup\Theta$) c'est la partie $]-\infty, t)$ (resp. $(t', +\infty[$) qui prend de l'importance. Une manière d'exprimer la ressemblance, sans probabiliser Θ_1' et Θ_0'', est d'imposer l'égalité des probabilités les plus proches :

$lim_{\theta\in\Theta_1' \nearrow sup\Theta_1'} P_\theta(C') = lim_{\theta\in\Theta_0'' \searrow inf\Theta_0''} P_\theta(C')$. Si Θ_0 est un intervalle d'extrémités $\theta_1 < \theta_2$, sous des conditions de continuité courantes (par exemple la continuité en θ de $p_\theta(t)$ pour presque tout t), l'égalité précédente s'écrit $P_{\theta_1}(C') = P_{\theta_2}(C')$. Ceci fait penser aux tests sans biais. La région de rejet C' doit vérifier $P_\theta(C') \geq \alpha$ pour tout θ de Θ_1. Sous la condition de continuité précédente et si la famille $\{p_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ est totalement positive à l'ordre trois, cette propriété de la région de rejet est équivalente à $P_{\theta_1}(C') = P_{\theta_2}(C')$ (cf. [Mor.1] p.63). La notion de sans biais est utile pour tester $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$ mais pas pour tester $H_0 : \theta \in \Theta_1$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_0$. En fait dans ce dernier cas c'est la notion de seuil sous $\Theta_1 = \Theta_1' \cup \Theta_0''$ qui impose une région de rejet de probabilité α sous θ_1 et θ_2. Une fois définie la sous tribu $\mathcal{C}$ à partir des C' précédents il faut réécrire le modèle avec des densités $\mathcal{C}$ mesurables. Dans ce nouveau modèle on pourra souvent trouver une statistique réelle T' rendant les hypothèses stables en réécrivant les C' sous la forme $T' \in (x, +\infty[$. Les résultats du paragraphe 4 peuvent alors s'appliquer. Pour l'exemple précédent le modèle peut même être paramétré par $[\theta_0, +\infty[$, les hypothèses sont alors unilatérales et le modèle à rapport de vraisemblance monotone. Nous n'insisterons pas plus sur ce type de solutions car nous pensons que dans la majorité des applications, l'ordre sur l'espace des paramètres influence les interprétations de $\theta \in \Theta_1'$ et $\theta \in \Theta_0''$.

L'étude des tests bilatéraux est classiquement faite dans les modèles exponentiels à un paramètre : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = c(\theta)e^{\theta T(\omega)}.\mu)_{\theta\in\Theta\subseteq IR})$. Θ étant un intervalle de IR muni de l'ordre usuel, ces modèles sont à rapport de vraisemblance monotone par rapport à T. Pour $\theta' < \theta''$, le rapport des densités $h_{(\theta'',\theta')}(t) = p_{\theta''}(t)/p_{\theta'}(t) = [c(\theta'')/c(\theta')]e^{(\theta''-\theta')t}$ est toujours défini et strictement croissant à valeur dans $]0, +\infty[$. T est évidemment une statistique essentielle globale de fonction de répartition moyenne : $G_\theta(t) = F_\theta(t) + \frac{1}{2}p_\theta(t)\mu(T^{-1}[t])$ (F_θ étant la fonction de répartition de l'image de P_θ par T). Comme fonction de θ, $G_\theta(t)$ est même continue pour tout t puisque $p_\theta(t)$ l'est, ce qui implique la continuité des p_θ dans $L_1(\mu)$ (cf. [Mon.1] p. 138). Toutes les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\}$ sont donc adjacentes : $Q^\omega_{\Theta_1^f}(1_f) = Q^\omega_{\Theta_0^f}(1_f) = Q^\omega_{\theta^f}(1_f) = 1 - G_{\theta^f}(T(\omega))$ avec $\theta^f = sup\Theta_1^f = inf\Theta_0^f$ (voir la définition 4.3.2 et les propositions 4.3.1-2). Ces votes sont évidemment compatibles sur les deux hypothèses unilatérales $\{\Theta_1', \Theta_0'\}$ et $\{\Theta_1'' \supset \Theta_1', \Theta_0''\}$ qui définissent les hypothèses bilatérales $\{\Theta_1, \Theta_0\}$. Posons $\theta_1 = inf\Theta_0$ et $\theta_2 = sup\Theta_0$, le prolongement de ces votes nous donne pour les hypothèses bilatérales les votes suivants, lorsqu'on réalise ω ou $t = T(\omega)$:

$Q^\omega(\Theta_0) = Q^\omega_{\theta_2}(\Theta_1'') - Q^\omega_{\theta_1}(\Theta_1') = [F_{\theta_1}(t) - F_{\theta_2}(t)] + \frac{1}{2}[p_{\theta_1}(t) - p_{\theta_2}(t)]\mu(T^{-1}[t])$ et $Q^\omega(\Theta_1) = 1 - Q^\omega(\Theta_0)$.

On obtiendrait les mêmes résultats à partir de la probabilité définie sur Θ par la proposition 5.2.3 lorsqu'elle s'applique. Sur les exemples du paragraphe suivant nous verrons que c'est généralement le cas pour les modèles exponentiels et nous donnerons des applications de la proposition 5.2.4.

Les votes que nous venons de définir ne s'interprètent pas comme seuil minimum des deux tests bilatéraux. Pour obtenir ceci il faudrait choisir la solution précédente du changement de modèle. Le vote $Q^\omega(\Theta_0)$ tend évidemment vers 0 lorsque $t = T(\omega)$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$; si le rapport des densités $h_{(\theta_2,\theta_1)}(T)$ est égal à 1 en ω, le vote $Q^\omega(\Theta_0)$ croît avant $t = T(\omega)$ et décroît ensuite. Le maximum de $Q^\omega(\Theta_0)$ est d'autant plus grand que la probabilité P_{θ_2} est grande par rapport à P_{θ_1} donc que l'intervalle Θ_0 est grand. Lorsque Θ_0 se réduit à un point θ_0 on a $Q^\omega(\Theta_0) = 0$, on ne décide donc jamais $\theta = \theta_0$. Ceci nous semble totalement légitime car la continuité autour de θ_0 fait que dans Θ_1 il y a des probabilités aussi proches que l'on veut de P_{θ_0}. Ce type d'hypothèses, bien que souvent utilisé, correspond rarement à une bonne traduction de ce que veut vérifier l'utilisateur : il cherche généralement à savoir si le paramètre est autour de θ_0. Cet "autour" dépend du contexte : ordre de grandeur des erreurs de mesure, ordre de grandeur des différences qui entraînent une interprétation différente, etc... Réduire cet intervalle autour de θ_0 à $[\theta_0]$ est très populaire car ceci évite bien des questions à l'utilisateur. Malgré des critiques renouvelées (cf. par exemple [Reu.],[Wan.]) ces hypothèses restent très utilisées, elles procurent un confort attirant si l'on ne se pose pas de question sur la manière dont fonctionne la solution statistique employée. Nous n'en proposerons pas de nouvelle, il faudrait prendre en compte des votes autres que celui sous θ_0. Une telle démarche est envisageable si on veut traduire un a priori positif par rapport à la décision $\theta = \theta_0$. Par exemple, lorsque cette hypothèse est l'approximation d'une hypothèse qui se concentre autour de θ_0 et qui a priori a des chances d'être vraie (cf. [BerD]).

5.4 EXEMPLES.

La notion de votes compatibles nous a permis de proposer une aide à la décision pour des hypothèses bilatérales. Bien souvent, cette aide peut être définie à partir d'une probabilisation de l'espace des paramètres. Il est alors possible de traiter toutes les hypothèses dont la structure repose sur l'ordre de l'espace des paramètres. Cette probabilité peut aussi aider à prendre une décision dans le cas de plus de deux hypothèses, en particulier lorsque Θ est partagé en une partition d'intervalles ordonnés. L'explicitation de la probabilité définie sur Θ par les propositions 5.2.3 et 5.2.4 est inutile dans les problèmes ne faisant intervenir que des intervalles, ce qui est le cadre normal d'utilisation de ces propositions. Les fonctions de répartition moyenne, $(G_\theta)_{\theta\in\Theta}$, de la statistique essentielle globale suffisent. On n'a pas besoin d'inverser les rôles de θ et de la réalisation ω afin de définir la probabilisation de Θ par les fonctions de répartition $(Q^\omega(]\leftarrow,\theta[))_{\omega\in\Omega}$. Il est toutefois intéressant d'obtenir ces probabilités sur quelques exemples classiques. Nous devrons en particulier vérifier les conditions d'application de la proposition 5.2.3. Comme nous l'avons vu précédemment, les deux premières le sont dès que $p_\theta(\omega)$ est continu en θ pour presque tout ω (cf. [Mon.1] p. 138).

EXEMPLE 1 : paramètre de position.

Considérons un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone et une statistique essentielle globale $K(T)$ dont les fonctions de répartition moyenne G_θ vérifient les conditions de la proposition 5.2.3. Si θ est un paramètre de position pour $K(T)$, c'est-à-dire si $K(T)$ admet des densités de la forme $g(x-\theta)$ par rapport à la mesure de Lebesgue, il est facile d'expliciter la probabilité induite sur Θ par les votes les plus favorables. En effet lorsque l'égalité $Q^\omega(]\leftarrow,\theta[) = 1 - G_\theta(K(T(\omega)))$ s'applique on peut l'écrire :

$Q^\omega(]\leftarrow,\theta[) = \int \mathit{1I}_{]K(T(\omega)),+\infty[}(x) g(x-\theta)\,dx = \int \mathit{1I}_{]-\infty,\theta[}(\lambda) g(K(T(\omega))-\lambda)\,d\lambda$

avec $\lambda = [\theta + K(T(\omega))] - x$.

La famille des lois uniformes sur $[\theta-1,\theta+1]$ entre dans ce cadre. Les densités $(\frac{1}{2}\ \mathit{1I}_{[\theta-1,\theta+1]}(x))_{\theta\in I\!R}$ définissent un modèle à rapport de vraisemblance monotone par rapport à la statistique identité, qui est aussi une statistique essentielle globale. On a $G_\theta(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\ 1I_{[-1,+1]}\,(x-\theta)\,dx$ qui est continue en θ pour tout t et tend vers 0 (resp. 1) lorsque θ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$). Les quatre conditions de la proposition 5.2.3 sont donc vérifiées, $Q^t(]-\infty,\theta[)$ est le vote $Q^t_\theta(1)$ pour les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1 =]-\infty,\theta[, \Theta_0 = [\theta,+\infty[\}$.

$Q^t(]-\infty,\theta[)$ est égal à 1 si $\theta \geq t+1$, à 0 si $\theta < t-1$ et à $1-G_\theta(t) = \int_{-\infty}^{\theta} \frac{1}{2}\ 1I_{[-1,+1]}$ $(t-\lambda)\,d\lambda$ sinon. Quand on réalise t, on obtient sur l'espace des paramètres la loi uniforme sur $[t-1,t+1]$. C'est la loi a posteriori de la mesure de Lebesgue, loi a priori impropre et non informative.

L'exemple le plus classique de ce type de paramètre de position est celui de la famille des lois normales $(N(\theta,a^2))_{\theta\in IR}$, l'écart-type $a>0$ étant connu. Nous avons déjà traité ce cas à la fin du paragraphe 5.2, avec l'exemple d'un n-échantillon d'une loi normale de moyenne θ inconnue et de variance σ^2 connue ($a^2 = \sigma^2/n$). La proposition 5.2.3 s'applique et on trouve sur $\Theta = IR$ la loi $N(t,a^2)$ lorsqu'on réalise t. Si pour chaque problème unilatéral $\{\Theta_1^f =]-\infty,\theta_f), \Theta_0^f\}$ on considère la pondération $N(\theta_f,c^2)$, la proposition 5.2.4 s'applique et nous avons obtenu sur Θ la loi $N(t,a^2+c^2)$. Nous avons aussi vu que ces votes étaient neutres. Ceci n'est pas étonnant puisque cette pondération traite les hypothèses de chaque problème unilatéral de façon semblable et symétriquement. Pour chacun de ces problèmes elle réduit l'écart entre le vote pour Θ_1^f et le vote pour Θ_0^f, ce qui ne facilite pas la conclusion.

Essayons maintenant de construire une pondération qui tienne compte d'une information a priori. Par exemple, d'une valeur médiane θ_0, pour laquelle l'utilisateur considérerait qu'il y a autant de chance que la vraie valeur de θ soit en dessous qu'au dessus. On est alors amené à privilégier l'hypothèse $\Theta_1^f =]-\infty,\theta_f)$ (resp. Θ_0^f) lorsque θ_f est supérieur (resp. inférieur) à θ_0. Ceci ne peut se faire qu'en considérant d'autres possibilités de votes que celle sous θ_f. Une pondération gaussienne des votes du type $N(\mu_f,c^2)$, $c^2>0$, donne des calculs simples, nous reviendrons sur ce choix à la fin. Pour avantager Θ_1^f (resp. Θ_0^f) lorsque $\theta_f > \theta_0$ (resp. $\theta_f < \theta_0$) il faut que μ_f soit supérieur (resp. inférieur) à θ_f. Un μ_f du type $\theta_f + \lambda(\theta_f - \theta_0)$, avec $\lambda > 0$, semble une solution intéressante. Plus θ_f est loin de θ_0 plus on avantage l'une des hypothèses. Le paramètre λ sera d'autant plus grand que l'utilisateur considère qu'à une faible distance de θ_0 il n'y a pratiquement plus qu'une hypothèse de plausible. Dans un tel cadre, les hypothèses $\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\}$ sont traitées avec un vote pondéré par Λ^f qui est la loi normale : $N(\mu_f = \theta_f + \lambda(\theta_f - \theta_0), c^2)$. Nous devons regarder si la propriété 5.2.4 s'applique. Les propriétés i) et ii) sont évidentes puisque $D_i^\theta = D_s^\theta = \emptyset$. Quant à $H_t(f)$, il vérifie :

$$
\begin{aligned}
H_t(f) =& \int_\Theta (1 - G_\theta(t)) d\Lambda^f(\theta) \\
=& 1 - \int_{IR} F(\tfrac{t-\theta}{a}) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, c} exp(-\tfrac{(\theta-\mu_f)^2}{2c^2})\, d\theta \\
=& 1 - \int F(\tfrac{t-\mu_f-\nu}{a}) \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, c} exp(-\tfrac{\nu^2}{2c^2})\, d\nu \\
=& 1 - \int [\int_{-\infty}^{t-\mu_f} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} exp(-\tfrac{(x-\nu)^2}{2a^2}\, dx] \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, c} exp(-\tfrac{\nu^2}{2c^2})\, d\nu \\
=& 1 - \int_{-\infty}^{t-\mu_f} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} exp(-\tfrac{x^2}{2a^2})[\int \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, c} exp(-\tfrac{1}{2}(\tfrac{\nu^2}{a^2} + \tfrac{\nu^2}{c^2} - \tfrac{2x\nu}{a^2}))\, d\nu]\, dx \\
=& 1 - \int_{-\infty}^{t-\mu_f} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, a} exp(-\tfrac{x^2}{2(a^2+c^2)})[\int \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, c} exp(-\tfrac{a^2+c^2}{2a^2c^2}(\nu - \tfrac{xc^2}{a^2+c^2})^2)\, d\nu]\, dx \\
=& 1 - F(\tfrac{t-\mu_f}{\sqrt{a^2+c^2}}) = F(\tfrac{\mu_f - t}{\sqrt{a^2+c^2}}) = F(\tfrac{1+\lambda}{\sqrt{a^2+c^2}}(\theta_f - \tfrac{t+\lambda\theta_0}{1+\lambda})).
\end{aligned}
$$

Il est évident que les votes Q_{Λ^f} sont compatibles, d'ailleurs $H_t(f)$ est bien une fonction croissante et continue de θ_f, donc de f, et elle tend vers 0 (resp. 1) lorsque θ_f tend vers $-\infty$ (resp. $+\infty$). On obtient sur Θ la loi normale : $N(\frac{t+\lambda\theta_0}{1+\lambda}, \frac{a^2+c^2}{(1+\lambda)^2})$. Plus λ est grand plus le point θ_0 choisi prend le pas sur la réalisation t. c^2, lui, n'intervient que dans la variance. Au départ il a été introduit pour prendre en compte des votes autres que celui de θ_f, limite entre les deux hypothèses Θ_1^f et Θ_0^f. Plus c^2 est petit, plus la loi sur Θ est concentrée. On peut d'ailleurs prendre $c^2 = 0$, c'est-à-dire considérer le vote sous $\theta = \mu_f$ pour les hypothèses $\{\Theta_1^f, \Theta_0^f\}$. $H_t(f)$ est alors égal à $1 - F(\frac{t-\mu_f}{a})$ et on obtient encore la loi $N(\frac{t+\lambda\theta_0}{1+\lambda}, \frac{a^2}{(1+\lambda)^2})$. Cependant, si l'information a priori demandée à l'utilisateur avait surtout pour but d'influencer le paramètre t de la distribution $N(t, a^2)$ on peut prendre $c^2 = \lambda(\lambda + 2)a^2$. Remarquons enfin que la loi $N(\frac{t+\lambda\theta_0}{1+\lambda}, \frac{a^2+c^2}{(1+\lambda)^2})$ est la loi a posteriori que l'on obtient à partir de la loi a priori $N(\theta_0, \tau^2)$ si $\lambda = \frac{a^2}{\tau^2}$ et $c^2 = \lambda a^2$ (cf. [Ber.] p. 127).

EXEMPLE 2 : paramètre d'échelle.

Soient un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone et une statistique essentielle globale $K(T)$ positive dont les fonctions de répartition moyenne G_θ vérifient les conditions de la proposition 5.2.3. Nous dirons que $\theta \in \Theta \subseteq]0,+\infty[$ est un paramètre d'échelle pour $K(T)$ si $K(T)$ admet des densités de la forme $\frac{1}{\theta}g(\frac{x}{\theta})$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^+$ (cf. [Leh.] p. 510). Lorsque l'égalité $Q^\omega(]0,\theta[) = 1 - G_\theta(K(T(\omega)))$ s'applique on peut l'écrire : $Q^\omega(]0,\theta[) = \int 1\!I_{]K(T(\omega)),+\infty[}(x)\frac{1}{\theta}g(\frac{x}{\theta})\,dx = \int 1\!I_{]0,\theta[}(\lambda)\frac{K(T(\omega))}{\lambda^2}g(\frac{K(T(\omega))}{\lambda})\,d\lambda$ avec $\lambda = \frac{\theta K(T(\omega))}{x}$. Il est alors facile d'expliciter la probabilisation de Θ induite par Q^ω.

La famille des lois uniformes sur $[0,\theta]$, $\theta > 0$, entre dans ce cadre. Les densités $(\frac{1}{\theta}\ 1\!I_{[0,\theta]}\ (x))_{\theta \in I\!R^+_*}$ définissent sur $I\!R^+$ un modèle à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique identité, qui est aussi une statistique essentielle globale. Les quatre conditions de la proposition 5.2.3 sont bien vérifiées puisque $G_\theta(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta}\ 1\!I_{[0,1]}(\frac{x}{\theta})\,dx$. $Q^t(]0,\theta[)$ est le vote $Q^t_\theta(1)$ pour les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1 =]0,\theta[, \Theta_0 = [\theta,+\infty[\}$. $Q^t(]0,\theta[)$ est égal à 0 si $\theta \leq t$ et à $1 - G_\theta(t) = \int_0^\theta \frac{t}{\lambda^2}\ 1\!I_{[0,1]}(\frac{t}{\lambda})\,d\lambda$ sinon. Quand on réalise t, on obtient sur l'espace des paramètres $I\!R^+_*$ la loi de densité $\frac{t}{\theta^2}\ 1\!I_{[t,+\infty[}(\theta)$. C'est la loi a posteriori associée à la mesure de densité $\frac{1}{\theta}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^+$, cette mesure est considérée comme une loi a priori impropre, non informative (cf. [Rob.] p. 108).

Un autre exemple classique de ce type de paramètre d'échelle est celui de la famille des lois normales $(N(m,\theta^2))_{\theta \in I\!R^+_*}$, la moyenne m étant connue. Les densités $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\theta}exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\theta})^2)$ définissent sur $I\!R$ un modèle à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique $T(x) = \mid x - m \mid$, qui est aussi une statistique essentielle globale. Les quatre conditions de la proposition 5.2.3 sont bien vérifiées puisque $G_\theta(t) = \int_0^t \frac{2}{\sqrt{2\pi}\,\theta}exp(-\frac{1}{2}(\frac{x}{\theta})^2)\,dx = 2F(\frac{t}{\theta}) - 1$. On obtient $Q^t(]0,\theta[) = \int_0^\theta \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{t}{\lambda^2}exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{\lambda})^2)\,d\lambda$. Cette loi sur $\Theta = I\!R^+_*$ est encore la loi a posteriori associée à la loi a priori impropre et non informative de densité $\frac{1}{\theta}$ puisque $\int_{I\!R^+_*} \frac{1}{\theta}g(\frac{t}{\theta}) \times \frac{1}{\theta}\,d\theta = \int_{I\!R^+_*} \frac{1}{t^2}g(\frac{\nu}{t})\,d\nu = \frac{1}{t}$.

Considérons enfin la famille des lois gamma $(\gamma(p,\theta))_{\theta \in I\!R^+_*}$, le paramètre

$p > 0$ est fixe et $\theta > 0$ est le paramètre d'échelle. Elles définissent sur IR_*^+ muni de la mesure de Lebesgue une famille de densité $(\frac{1}{\Gamma(p)\theta}(\frac{x}{\theta})^{p-1}exp(-\frac{x}{\theta}))_{\theta \in IR_*^+}$ à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique identité qui est aussi une statistique essentielle globale. $G_\theta(t)$ est alors égal à $\Gamma(p, \frac{t}{\theta}) = \int_0^{\frac{t}{\theta}} \frac{1}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-y}\, dy$ et l'application de la proposition 5.2.3 nous donne les votes compatibles suivant : $Q^t(]0, \theta[) = \int_0^\theta \frac{1}{\Gamma(p)t}(\frac{t}{\lambda})^{p+1} exp(-\frac{t}{\lambda})\, d\lambda$ $(t > 0)$. Leur prolongement est la loi inverse d'une loi $\gamma(p, \frac{1}{t})$ qui est bien sûr la loi a posteriori pour la loi a priori impropre et non informative de densité $\frac{1}{\theta}$ (cf. [Ber.]p. 255). Comme cas particulier considérons celui d'un n-échantillon d'une loi normale de moyenne m connue et de variance inconnue σ^2. Nous avons sur IR^n un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique $T(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2$ qui est aussi une statistique essentielle globale. T/σ^2 suivant une loi de khi-deux à n degrés de liberté, T est de loi $\gamma(\frac{n}{2}, \theta = 2\sigma^2)$. La loi obtenue pour le paramètre θ nous donne pour $v = \sigma^2$ une loi sur IR_*^+ de densité $f_t(v) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})t}(\frac{t}{v})^{\frac{n}{2}+1} exp(-\frac{t}{2v})$. C'est la loi inverse d'une loi $\gamma(\frac{n}{2}, \frac{2}{t})$ (cf. [Ber.] p. 561). Lorsque $n = 1$, la loi du paramètre $\theta = \sigma$ est bien sûr celle obtenue dans l'exemple précédent.

Essayons maintenant de construire des votes qui tiennent compte d'une information a priori. Comme précédemment l'utilisateur est supposé fournir une valeur médiane θ_0. Les hypothèses $\{]0, \theta_0),)\theta_0, +\infty\}$ étant pour lui aussi probables l'une que l'autre, on choisit un vote neutre pour ces hypothèses. Le plus simple est de prendre le vote Q_{θ_0}. Les autres problèmes unilatéraux $\{\Theta_1^f =]0, \theta_f), \Theta_0^f\}$ doivent être traités dissymétriquement, lorsque θ_f est supérieur (resp. inférieur) à θ_0 l'avantage se porte sur Θ_1^f (resp. Θ_0^f). Ceci peut se faire en choisissant un vote Q_{μ_f} vérifiant $\mu_f > \theta_f$ (resp. $\mu_f < \theta_f$) lorsque $\theta_f > \theta_0$ (resp. $\theta_f < \theta_0$). Bien entendu, plus θ_f est loin de θ_0 plus l'écart entre μ_f et θ_f doit augmenter. θ étant un paramètre d'échelle, nous exprimerons ces distances par la valeur du rapport, donc par la différence des logarithmes. La solution utilisée dans l'exemple 1 devient : $ln(\mu_f) = ln(\theta_f) + \lambda(ln(\theta_f) - ln(\theta_0))$ ou $\mu_f = \theta_f(\frac{\theta_f}{\theta_0})^\lambda$ $(\lambda > 0)$. Le paramètre λ sera d'autant plus grand que l'utilisateur considère qu'à une faible distance de θ_0

il n'y a pratiquement plus qu'une hypothèse plausible. Nous devons appliquer la proposition 5.2.4 avec des Λ^f qui sont les masses de Dirac en μ_f. Les propriétés i) et ii) sont évidentes puisque $D_i^\theta = D_s^\theta = \emptyset$. Quant à $H_t(f)$, il vérifie bien les conditions de l'énoncé :

$$\begin{aligned} H_t(f) &= \int_\Theta (1 - G_\theta(t)) d\Lambda^f(\theta) = 1 - G_{\mu_f}(t) = \int_0^{\mu_f} \frac{1}{\Gamma(p)} \frac{t^p}{\nu^{p+1}} exp(-\frac{t}{\nu})\, d\nu \\ &= \int_0^{\theta_f} \frac{(\lambda+1)}{\Gamma(p)} \frac{t^p (\theta_0)^{p\lambda}}{\theta^{p(\lambda+1)+1}} exp(-\frac{t(\theta_0)^\lambda}{\theta^{\lambda+1}})\, d\theta \quad (\nu = \frac{\theta^{\lambda+1}}{(\theta_0)^\lambda}) \\ &= Q^t(]0, \theta_f)) \end{aligned}$$

La loi sur $\Theta = IR_*^+$ est la loi de $(\frac{1}{X})^{\frac{1}{\lambda+1}}$ avec X de loi $\gamma(p, \frac{1}{t(\theta_0)^\lambda})$. En prenant comme nouveau paramètre $\beta = ln(\frac{\theta^{\lambda+1}}{\theta_0^\lambda})$ donc $\beta_f = ln(\mu_f)$ et en posant $u = ln(t)$, le changement de variable $x = ln(\nu) - u$ nous donne :

$Q^t(]0, \theta_f)) = \int_{-\infty}^{\beta_f - u} \frac{1}{\Gamma(p)} exp[-px - e^{-x}]\, dx$. Dans le cas d'une loi exponentielle de paramètre θ on a $p = 1$ et $Q^t(]0, \theta_f)) = exp(-exp(u - \beta_f))$.

EXEMPLE 3 : paramètre d'une loi de Poisson.

Le modèle statistique, $(IN, \mathcal{P}(IN), (p_\theta.\mu)_{\theta \in IR^+})$ est défini par $p_\theta(x) = e^{-\theta}.\frac{\theta^x}{x!}$, μ étant la mesure de comptage sur IN. Il est à rapport de vraisemblance monotone pour la statistique identité qui est une statistique essentielle globale. La fonction de répartition moyenne $G_\theta(t) = \sum_{k=0}^t e^{-\theta}.\frac{\theta^k}{k!} - \frac{1}{2}e^{-\theta}.\frac{\theta^t}{t!}$ est évidemment continue en θ et elle tend bien vers 0 lorsque θ tend vers $+\infty$. Par contre $G_\theta(0)$ ne tend pas vers 1 mais vers $\frac{1}{2}$ lorsque θ tend vers 0. C'est pour cela que nous avons pris IR^+ comme espace des paramètres, contrairement à l'usage de le restreindre à IR_*^+. Ainsi la proposition 5.2.3 s'applique, elle nous donne les votes compatibles $Q^t([0, \theta]) = 1 - G_\theta(t)$. Nous allons utiliser l'expression de la fonction de répartition d'une loi de Poisson sous la forme d'une intégrale de la densité de la loi $\gamma(t+1, 1)$: $\sum_{k=0}^t e^{-\theta}.\frac{\theta^k}{k!} = 1 - \int_0^\theta \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} e^{-x}\, dx$ (cf. [Rén.] p. 112). Si $t > 0$, les votes $Q^t([0, \theta]) = 1 - [\sum_{k=0}^{t-1} e^{-\theta}.\frac{\theta^k}{k!} + \frac{1}{2}e^{-\theta}.\frac{\theta^t}{t!}]$ définissent une probabilité sur Θ qui est le mélange équipondéré de deux lois gamma : $\frac{1}{2}\gamma(t, 1) + \frac{1}{2}\gamma(t+1, 1)$. Lorsque $t = 0$, $Q^0([0, \theta]) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\theta}$ et la première gamma du mélange est remplacée par la masse de Dirac en 0. On obtient sur Θ la loi $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1, 1)$, $\gamma(1, 1)$ étant la loi exponentielle de paramètre 1.

Les mélanges obtenus sont équipondérés parce que nous avons pris en compte à part égale les deux votes possibles sous P_θ lorsque la réalisation n'est pas de probabilité nulle (voir le paragraphe 2.4). Ce choix a l'avantage de donner des votes neutres pour toutes les hypothèses unilatérales (voir la proposition 4.3.2).
Les lois gamma et leurs mélanges sont les lois a priori conjuguées privilégiées par l'analyse bayésienne des lois de Poisson (cf. [Rob.] p. 98 et 100). Mais la loi que nous venons d'obtenir n'est pas une loi a posteriori pour une loi a priori mélange de deux gamma. Elle a plutôt à voir avec les lois a posteriori des lois a priori impropres et non informatives souvent utilisées : les densités $\frac{1}{\theta}$ et $\frac{1}{\sqrt{\theta}}$ sur $I\!R_*^+$ (cf. [Ber.] p. 114).
Considérons un n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une loi de Poisson. Il est facile de voir que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique essentielle globale qui suit une loi de Poisson de paramètre $n\theta$. Ce qui précède nous donne, pour la réalisation $t = x_1 + ... + x_n$ une loi sur $\Theta = I\!R^+$ égale à $\frac{1}{2}\gamma(t, \frac{1}{n}) + \frac{1}{2}\gamma(t+1, \frac{1}{n})$ lorsque $t > 0$ et à $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1, \frac{1}{n})$ lorsque $t = 0$.

EXEMPLE 4 : paramètre d'une loi binomiale.

Soit un modèle binomial $(\Omega = \{0, 1, ..., n\}, \mathcal{P}(\Omega), (B(n, \theta))_{\theta \in [0,1]})$. Ce modèle est à rapport de vraisemblance monotone par rapport à la mesure μ de masse C_n^ω en ω et à la statistique identité : $p_\theta(\omega) = \theta^\omega (1-\theta)^{n-\omega}$ avec la convention $0^0 = 1$. La fonction de répartition moyenne de cette statistique essentielle globale est égale à : $G_\theta(\omega) = \sum_{i=0}^{\omega} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i} - \frac{1}{2} C_n^\omega \theta^\omega (1-\theta)^{n-\omega}$. Elle est continue en θ, ce qui permet l'application de la proposition 5.2.3. On obtient pour chaque réalisation ω une probabilité sur les boréliens de $\Theta = [0, 1]$ dont la fonction de répartition est définie pour $\theta > 0$ par :
$Q^\omega([0, \theta[) = 1 - G_\theta(\omega) = \sum_{i=\omega}^{n} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i} - \frac{1}{2} C_n^\omega \theta^\omega (1-\theta)^{n-\omega}$.
En utilisant la formule $\sum_{i=k}^{n} C_n^i \theta^i (1-\theta)^{n-i} = \int_0^\theta \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1-k)} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \, dx$ lorsque $k > 0$ (cf. [Rén.] p. 88), on a pour $0 < \omega < n$: $Q^\omega([0, \theta[) = \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\omega)\Gamma(n+1-\omega)} x^{\omega-1} (1-x)^{n-\omega} \, dx + \frac{1}{2} \int_0^\theta \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\omega+1)\Gamma(n-\omega)} x^{\omega} (1-x)^{n-\omega-1} \, dx$.
La loi sur Θ est alors un mélange équipondéré de deux loi bêta à densité sur $[0, 1]$,

$\frac{1}{2}\beta(\omega, n+1-\omega) + \frac{1}{2}\beta(\omega+1, n-\omega)$. Lorsque $\omega = 0$ (resp. $\omega = n$) on obtient sur Θ la loi $\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\beta(1,n)$ (resp. $\frac{1}{2}\beta(n,1) + \frac{1}{2}\delta_1$), δ_0 et δ_1 étant les masses de Dirac en 0 et 1.

Les lois bêta et leurs mélanges sont les lois a priori conjuguées privilégiées par l'analyse bayésienne des lois binomiales (cf. [Rob.] p. 98 et 100). La loi que nous avons obtenue n'est cependant pas la loi a posteriori d'un mélange de lois bêta. La neutralité des votes qui la définissent la rapproche plutôt de lois a posteriori obtenues à partir de lois a priori considérées comme non informatives (cf. [Gei.]). Ce mélange de lois bêta a déjà été trouvé et défendu, dans une étude s'appuyant sur les fonctions de perte "propres" (cf. [KroM]).

EXEMPLE 5 : paramètres d'une analyse de variance.

En analyse de variance à effets fixes on utilise des statistiques qui suivent des lois de Fisher décentrées (cf. [Sch.] p. 38). Le paramètre de non centralité λ étant la quantité qui intéresse l'utilisateur exprimée par rapport à l'écart-type commun des variables. Par exemple, dans une analyse de variance classique à deux facteurs, λ est égal à $\sqrt{\sum(\theta_{ij})^2}/\sigma$ pour le test sur l'additivité des facteurs, et égal à $\sqrt{\sum(\alpha_i)^2}/\sigma$ pour le test sur la nullité des effets additifs du premier facteur. Si une statistique W suit une loi de Fisher décentrée de paramètre λ et de degrés de liberté (k,l), nous savons que $(k/l)W$ suit une loi bêta sur IR^+ : $\beta(\frac{k}{2}, \frac{l}{2}, \frac{\lambda^2}{2})$ (cf. [Bar.] p. 84).Nous allons étudier ces lois.

Considérons sur IR^+ la famille des lois bêta décentrées : $\beta(p,q,\theta)$, les paramètres $p > 0$ et $q > 0$ sont connus, le paramètre de non centralité $\theta \geq 0$, lui, est inconnu. Comme pour la famille des lois de Fisher décentrées, on montre qu'elle est à rapport de vraisemblance strictement monotone pour la statistique identité (cf. [Kar.]). Cette statistique est donc une statistique essentielle globale. Sa fonction de répartition moyenne s'écrit :

$G_\theta(t) = \int_0^t [\sum_{m=0}^{+\infty} e^{-\theta}.\frac{\theta^m}{m!}\frac{\Gamma(p+m+q)}{\Gamma(p+m)\Gamma(q)}\frac{x^{p+m-1}}{(1+x)^{p+m+q}}]\,dx = \int_{IN} F(p+m,q,t)\,d\mathcal{P}_\theta(m)$, $\mathcal{P}_\theta$ étant une loi de Poisson de paramètre $\theta \geq 0$ et $F(p+m,q,t)$ la valeur en t de la fonction de répartition d'une loi $\beta(p+m,q)$. Cette loi est celle du quotient

$Z = X/Y$ de deux variables indépendantes X et Y de loi $\gamma(p+m,1)$ et $\gamma(q,1)$. La densité de $\beta(p+m,q)$ peut s'écrire comme intégrale en y de la loi du couple (Y,Z), on obtient alors :

$$F(p+m,q,t) = \int_0^t 1I_{IR_*^+}(z)[\int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(p+m)\Gamma(q)} z^{p+m-1} exp(-y(z+1)).y^{p+m+q-1}\,dy]\,dz$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(q)} exp(-y).y^{q-1}[\int_0^{ty} \frac{1}{\Gamma(p+m)} exp(-x).x^{p+m-1}\,dx]\,dy.$$

La loi $\gamma(p+m)$ est la loi de la somme de $m+1$ variables indépendantes, l'une de loi $\gamma(p)$ et les autres de loi $\gamma(1)$. Sa fonction de répartition tend donc vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$. On en déduit facilement qu'il en est de même de $F(p+m,q,t)$. Comme fonction de θ, $G_\theta(t)$ vérifie donc bien les conditions de la proposition 5.2.3 sur $\Theta = [0,+\infty[$. Les votes compatibles $Q^t([0,\theta]) = \int_{IN}[1-F(p+m,q,t)]\,d\mathcal{P}_\theta(m)$ définissent une loi de probabilité sur Θ muni de la tribu des boréliens.Cette probabilité possède une masse en 0 égale à $1-F(p,q,t)$, c'est le seuil minimum de rejet du test de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta > 0$. On peut exprimer $Q^t(]0,\theta])$ sous la forme $\int_0^\theta f_t(\lambda)\,d\lambda$ lorsque $p \geq \frac{1}{2}$, en utilisant l'expression de $F(p+m,q,t)$ précédente et quand $p > \frac{1}{2}$, le fait que la loi $\gamma(p+m,1)$ décentrée de θ est la convolution d'une loi $\gamma(\frac{1}{2},1)$ décentrée de θ par une loi $\gamma(p+m-\frac{1}{2},1)$ (cf. [Bar.] p. 82). Ceci permet de faire intervenir les propriétés de symétrie des lois normales, puisque la loi $\gamma(\frac{1}{2},1)$ décentrée de θ est la loi du carré d'une variable $N(\sqrt{\theta},\frac{1}{2})$. On trouve une densité sous la forme d'une intégrale double. Ne faisant pas partie des densités classiques elle présente peu d'intérêt, il vaut mieux calculer la probabilité d'un intervalle de Θ pour la réalisation t à partir de la première expression de $G_\theta(t)$.

6–HYPOTHÈSES STABLES ET PARAMÈTRES FANTÔMES.

6.1 INTRODUCTION.

Dans le modèle statistique $(\Omega, \mathcal{A}, (P_{(\theta,\upsilon)})_{(\theta,\upsilon)\in\Theta\times\Upsilon})$ considérons des hypothèses de la forme $\{\Theta_1 \times \Upsilon, \Theta_0 \times \Upsilon\}$, Θ_0 et Θ_1 définissant une partition de Θ ne contenant pas le vide. Le paramètre υ est un paramètre fantôme pour ce problème de décision (cf. [Bar.] p. 51). Nous noterons ce type de problème de décision : $(\Omega, \mathcal{A}, (P_{(\theta,\upsilon)})_{(\theta,\upsilon)\in(\Theta_0\cup\Theta_1)\times\Upsilon})$. Sauf cas exceptionnel, les hypothèses $\{\Theta_1 \times \Upsilon, \Theta_0 \times \Upsilon\}$ ne sont pas stables. Il est cependant absurde de considérer le problème du choix entre $P_{(\theta_1,\upsilon_1)}$ et $P_{(\theta_0,\upsilon_0)}$ lorsque $\upsilon_1 \neq \upsilon_0$, puisqu'on ne cherche aucune information sur υ. Ce qui est intéressant c'est la stabilité des hypothèses $\{\Theta_1 \times \{\upsilon\}, \Theta_0 \times \{\upsilon\}\}$ pour chaque $\upsilon \in \Upsilon$.

Définition 6.1.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_{(\theta,\upsilon)}.\mu)_{(\theta,\upsilon)\in(\Theta_0\cup\Theta_1)\times\Upsilon})$ *un problème de décision dominé par la mesure* μ*. Les hypothèses* $\{\Theta_0, \Theta_1\}$ *à paramètre fantôme* $\upsilon \in \Upsilon$ *sont stables si il existe une statistique réelle* T *rendant stables les hypothèses des sous problèmes de décision* $(\Omega, \mathcal{A}, (p_{(\theta,\upsilon)}.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ *pour tout* $\upsilon \in \Upsilon$*.*

Par exemple dans un modèle exponentiel de la forme $p_{(\theta,\upsilon)}(\omega) = exp(\theta T(\omega) + \langle \upsilon, U(\omega)\rangle - \psi(\theta,\upsilon))$, $\Theta \times \Upsilon \subseteq IR \times IR^k$, les hypothèses unilatérales sur Θ à paramètre fantôme υ sont stables par rapport à la statistique réelle T. Dans ce cas la famille $(p_{(\theta,\upsilon)})_{\theta\in\Theta}$ est même à rapport de vraisemblance monotone.

Pour toute réalisation $t = T(\omega)$ notons $Q^t_{(\theta,\upsilon)}$ le vote des experts sous $P_{(\theta,\upsilon)}$. Nous devons construire un vote à partir de la famille $(Q^t_{(\theta,\upsilon)})_{(\theta,\upsilon)\in\Theta\times\Upsilon}$. Nous avons déjà fait ce type de travail pour les sous modèles paramètrés par $\Theta\times\{\upsilon\}$ (voir le paragraphe 4.3). On peut utiliser une pondération Λ_υ sur Θ pour traduire une information a priori ou prendre le vote $Q^t_{\Theta_0\times\{\upsilon\}}$ (resp. $Q^t_{\Theta_1\times\{\upsilon\}}$) le plus favorable sous $\Theta_0\times\{\upsilon\}$ (resp. $\Theta_1\times\{\upsilon\}$). A chaque valeur υ du paramètre fantôme correspond alors un vote $Q^t(d,\upsilon)$ construit à partir des votes $(Q^t_{(\theta,\upsilon)}(d))_{\theta\in\Theta}$. Il peut arriver que les votes $Q^t(.,\upsilon)$ ne dépendent pas du paramètre fantôme υ. Considérons par exemple la famille de lois uniformes par rapport à la mesure de Lebesgue : $(\frac{1}{\theta}\ 1\!I_{[0,\upsilon\theta]})_{(\theta,\upsilon)\in I\!R_*^+\times\{-1,+1\}}$. Nous avons étudié ce problème dans l'exemple 2 de 5.4 avec $\upsilon = +1$. Ici nous ajoutons une direction miroir mais seule la distance θ à 0 intéresse l'utilisateur. Toutes les hypothèses unilatérales sur Θ à paramètre fantôme $\upsilon \in \{-1, +1\}$ sont stables par rapport à la statistique valeur absolue. Si l'on choisit pour les deux sous problèmes de décision les votes compatibles de la proposition 5.2.3 on obtient la même probabilité sur $\Theta = I\!R_*^+$ lorsque $\upsilon = +1$ et $\upsilon = -1$.

Le plus souvent la famille $(Q^t(., \upsilon))_{\upsilon\in\Upsilon}$ est constituée de votes différents, il faut construire un résumé de ces votes. Généralement il existe dans Υ des valeurs extrêmes qui avantagent outrageusement la décision $d = 1$ (resp. $d = 0$), on ne peut alors pas s'appuyer sur ces deux types de votes extrêmes pour essayer de prendre une décision. Il est par contre difficile de définir un vote "neutre" comme nous l'avons fait pour les hypothèses stables avec les votes les plus favorables sous Θ_0 ou sous Θ_1. Pour cela il faudrait faire intervenir un a priori sur une valeur médiane dans Υ. Il nous reste la possibilité de définir un vote moyen, $Q^t(., \upsilon)$ prenant d'autant plus d'importance que υ est probable. Si la réalisation ω ne donne aucune information sur υ on ne peut que faire une moyenne des votes à partir d'une loi a priori τ sur Υ. Dans ce cas il est aussi possible de travailler avec les densités $q_\theta(\omega) = \int p_{(\theta,\upsilon)}(\omega)\, d\tau(\upsilon)$ si elles existent et forment un problème de décision expertisable.

En fait, bien souvent la réalisation ω contient des informations sur le paramètre υ. Même si l'utilisateur ne veut rien savoir sur υ il est intéressant, pour résumer les votes $Q^t(., \upsilon)$, de tenir compte des résultats d'expertises sur Υ. On peut même parfois obtenir, à partir de votes compatibles, une probabilisation de Υ muni d'une tribu rendant $Q^t(., \upsilon)$ mesurable en υ. Pour que ces expertises sur Υ soient intéressantes il faut qu'elles donnent des informations ne dépendant pas de θ. Ceci nous conduit à la définition suivante.

Définition 6.1.2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (P_{(\theta,\upsilon)} = p_{(\theta,\upsilon)}.\mu)_{(\theta,\upsilon)\in(\Theta_0\cup\Theta_1)\times\Upsilon})$ *un problème de décision à hypothèses stables par rapport à la statistique réelle* T *de loi image* $P^T_{(\theta,\upsilon)}$. *Le paramètre fantôme est dit expertisable s'il existe une statistique réelle* U *et, pour tout* $\upsilon \in \Upsilon$, *une transition* Π_υ *de* $(I\!R, \mathcal{B})$ *dans* $(I\!R, \mathcal{B})$ *de la forme* $\Pi_\upsilon(t, du) = q_\upsilon(t, u).\nu_t(du)$ *telle que :*

i) $P^{(T,U)}_{(\theta,\upsilon)} = P^T_{(\theta,\upsilon)}\Pi_\upsilon$ *c'est-à-dire :*

$\forall\, B_1 \times B_2 \in \mathcal{B}^2 \quad P^{(T,U)}_{(\theta,\upsilon)}(B_1 \times B_2) = \int_{B_1} [\int_{B_2} q_\upsilon(t, u)\, d\nu_t(u)]\, dP^T_{(\theta,\upsilon)}(t)$

ii) pour presque tout t, *la famille des densités* $(q_\upsilon(t, u))_{\upsilon\in\Upsilon}$ *est à rapport de vraisemblance monotone par rapport à* u *et à un ordre* $\preceq$ *sur* Υ.

Dans ce cas de figure la réalisation de $t = T(\omega)$ définit les votes des experts et permet de choisir un résumé $Q^t(., \upsilon)$ de ces votes dans chacun des sous modèles indexés par $\upsilon \in \Upsilon$. L'information contenue dans le modèle image de U conditionnellement à $T = t$ peut servir à probabiliser Υ pour prendre la moyenne des $Q^t(., \upsilon)$. En effet ce modèle $(I\!R, \mathcal{B}, (\Pi_\upsilon(t, .))_{\upsilon\in\Upsilon})$ est à rapport de vraisemblance monotone et on peut choisir des votes compatibles pour les hypothèses unilatérales. Bien entendu il est préférable que la statistique (T, U) soit exhaustive et que T soit une statistique essentielle pour chacune des hypothèses $\{\Theta_1 \times \upsilon, \Theta_0 \times \upsilon\}$. Ceci est en particulier vérifié dans certains modèles exponentiels pour les hypothèses unilatérales. Nous les étudierons au paragraphe suivant.

Exemple : analyse de variance à effets fixes.

Dans de nombreux cas la statistique U de la définition 6.1.2 est indépendante de T, la transition Π_υ est alors la probabilité image de U. Reprenons l'exemple 5 de 5.4. Nous y avons étudié le paramètre de non centralité λ (ou λ^2) des lois de Fisher. Dans le cas de l'analyse de variance à effets fixes ce paramètre exprime la quantité qui intéresse l'utilisateur dans une unité qui est la valeur inconnue σ de l'écart-type. Nous allons supprimer cette référence à σ en travaillant sur le paramètre $\theta = \sigma^2\lambda^2$. La statistique de Fisher décentrée est construite à partir de deux statistiques indépendantes T et U ; T/σ^2 suit une loi de khi-deux décentré à k degrés de liberté et de paramètre de non centralité θ ; U/σ^2 suit une loi de khi-deux à l degrés de liberté (cf. [Sch.] p. 38). On retrouve aussi cette situation dans les modèles de régression multiple pour les hypothèses linéaires (cf. [Mon2] p. 261, [Leh.] p. 370). La réduction du problème de base à l'étude du modèle engendré par (T, U) se fait en imposant des propriétés d'invariance. Le modèle image s'écrit $((IR^+)^2, \mathcal{B}^2, (P^T_{(\theta,\sigma^2)} \otimes P^U_{\sigma^2})_{(\theta,\sigma^2)\in IR^+\times IR^+_*})$, $P^T_{(\theta,\sigma^2)}$ est une loi $\gamma(\frac{k}{2}, 2\sigma^2)$ décentrée de $\theta/(2\sigma^2)$ et $P^U_{\sigma^2}$ une loi $\gamma(\frac{l}{2}, 2\sigma^2)$.

Plus généralement nous allons étudier l'exemple des problèmes de décision de la forme : $((IR^+)^2, \mathcal{B}^2, (P^T_{(\theta,\upsilon)} \otimes P^U_{\upsilon})_{(\theta,\upsilon)\in\{\Theta_1=[0,\theta_1],\Theta_0=]\theta_1,+\infty[\}\times IR^+_*})$ où $P^T_{(\theta,\upsilon)}$ est une loi $\gamma(p, \upsilon)$ décentrée de θ/υ et P^U_{υ} une loi $\gamma(q, \upsilon)$. Les hypothèses $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ à paramètre fantôme $\upsilon \in IR^+_*$ sont stables puisque pour υ fixé le problème de décision se réduit à $(IR^+, \mathcal{B}, (P^T_{(\theta,\upsilon)})_{\theta\in\{\Theta_1=[0,\theta_1],\Theta_0=]\theta_1,+\infty[\}})$ donc au choix entre deux hypothèses unilatérales dans un modèle à rapport de vraisemblance strictement monotone par rapport à l'identité (cf. [Kar.]). La statistique identité est une statistique essentielle globale puisque le rapport de vraisemblance est strictement monotone. Notons $G_{(\theta,\upsilon)}$ sa fonction de répartition moyenne, c'est la fonction de répartition de $P^T_{(\theta,\upsilon)}$ qui a pour densité :

$f_{(\theta,\upsilon)}(t) = \int_{IN} \frac{1}{\Gamma(p+m)\upsilon} \, (\frac{t}{\upsilon})^{p+m-1} \, exp(-\frac{t}{\upsilon}) \, d\mathcal{P}_{\frac{\theta}{\upsilon}}(m)$ où $\mathcal{P}_{\frac{\theta}{\upsilon}}$ est une loi de poisson de paramètre $\frac{\theta}{\upsilon} \geq 0$ (cf. [Bar.] p. 82).

$G_{(\theta,\upsilon)}(t) = \int_{IN} \Gamma(p+m, \upsilon, t) \, d\mathcal{P}_{\frac{\theta}{\upsilon}}(m)$, le terme $\Gamma(p+m, \upsilon, t)$ désignant la valeur de la fonction de répartition d'une loi $\gamma(p+m, \upsilon)$ en t :

$\Gamma(p+m, \upsilon, t) = \int_0^t \frac{1}{\Gamma(p+m)\upsilon} \, (\frac{x}{\upsilon})^{p+m-1} \, exp(-\frac{x}{\upsilon}) \, dx = \Gamma(p+m, 1, \frac{t}{\upsilon})$.

Les hypothèses $\Theta_1 \times \{\upsilon\}$ et $\Theta_0 \times \{\upsilon\}$ sont évidemment adjacentes, les votes les plus favorables sous $\Theta_1 \times \{\upsilon\}$ et $\Theta_0 \times \{\upsilon\}$ sont donc égaux au vote des experts sous $P_{(\theta_1,\upsilon)}$. Si l'on ne veut ou peut pas faire intervenir une information a priori ce vote jouera le rôle de $Q^t(., \upsilon)$ qui sera alors défini par :

$Q^t(1, \upsilon) = Q^t([0, \theta_1], \upsilon) = 1 - G_{(\theta_1,\upsilon)}(t)$.

Nous allons maintenant probabiliser $\Upsilon = IR^+_*$ en utilisant la statistique U, ceci nous permettra d'obtenir une moyenne $Q^{(t,u)}([0, \theta_1])$ des votes $Q^t([0, \theta_1], \upsilon)$. Le modèle image de U conditionnellement à $T = t$ est défini par la transition constante $\Pi_\upsilon(t,.) = P_\upsilon^U = \gamma(q,\upsilon)$. Nous avons étudié ce modèle dans les exemples 2 de 5.4. Si on n'a pas d'information a priori sur le paramètre υ, la proposition 5.2.3 nous fournit des votes compatibles sur les hypothèses unilatérales pour chaque réalisation $U = u > 0$. Ils se prolongent en une probabilité sur les boréliens de $\Upsilon = I\!R_*^+$ qui est l'inverse d'une loi $\gamma(q, \frac{1}{u})$.

La moyenne des votes $Q^t([0,\theta_1],\upsilon)$ est alors égale à :

$$
\begin{aligned}
Q^{(t,u)}([0,\theta_1]) &= 1 - \int_{I\!R_*^+} G_{(\theta_1,\upsilon)}(t) \frac{1}{\Gamma(q)u} \left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{q+1} exp\left(-\frac{u}{\upsilon}\right) d\upsilon \\
&= 1 - \int_{I\!R_*^+} \int_{I\!N} \left[\int_0^t \frac{1}{\Gamma(p+m)\upsilon} \left(\frac{x}{\upsilon}\right)^{p+m-1} exp\left(-\frac{x}{\upsilon}\right) dx\right] d\mathcal{P}_{\frac{\theta_1}{\upsilon}}(m) \times \\
&\qquad\qquad \frac{1}{\Gamma(q)u} \left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{q+1} exp\left(-\frac{u}{\upsilon}\right) d\upsilon \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^t \left[\int_{I\!R_*^+} \frac{exp(-\frac{\theta_1}{\upsilon})\,(\frac{\theta_1}{\upsilon})^m}{m!\Gamma(p+m)\upsilon} \left(\frac{x}{\upsilon}\right)^{p+m-1} exp\left(-\frac{x}{\upsilon}\right) \frac{1}{\Gamma(q)u} \times \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{q+1} exp\left(-\frac{u}{\upsilon}\right) d\upsilon\right] dx \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^t \left[\int_{I\!R_*^+} \frac{(\theta_1)^m\, u^q\, x^{p+m-1}}{m!\Gamma(p+m)\Gamma(q)} \left(\frac{1}{\upsilon}\right)^{p+q+2m+1} exp\left(-\frac{\theta_1+u+x}{\upsilon}\right) d\upsilon\right] dx \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^t \frac{\Gamma(p+q+2m)}{m!\Gamma(p+m)\Gamma(q)} \frac{(\theta_1)^m\, u^q\, x^{p+m-1}}{(\theta_1+u+x)^{p+q+2m}} dx \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{t}{\theta_1+u}} \frac{\Gamma(p+q+2m)}{m!\Gamma(p+m)\Gamma(q)} \frac{(\theta_1)^m\, u^q}{(\theta_1+u)^{q+m}} \frac{y^{p+m-1}}{(1+y)^{p+q+2m}} dy \\
&= 1 - \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(q+m)}{m!\Gamma(q)} \frac{(\theta_1)^m\, u^q}{(\theta_1+u)^{q+m}} F\left(p+m, q+m, \frac{t}{\theta_1+u}\right)
\end{aligned}
$$

$F(p+m, q+m, \frac{t}{\theta_1+u})$ étant la valeur en $\frac{t}{\theta_1+u}$ de la fonction de répartition d'une loi $\beta(p+m, q+m)$ sur $I\!R^+$. Pour $\theta_1 = 0$ on obtient une masse $Q^{(t,u)}([0]) = 1 - F(p,q,\frac{t}{u})$. Dans le cas de l'analyse de variance, $p = \frac{k}{2}$ et $q = \frac{l}{2}$, cette masse est égale à la probabilité qu'une loi de Fisher, de degrés de liberté k et l, soit supérieure à $\frac{t/k}{u/l}$. C'est le seuil minimum de rejet du test de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta > 0$. Nous avions déjà obtenu ce type de résultat pour le paramètre $\frac{\theta}{\sigma^2}$ dans l'exemple 5 de 5.4.

Ce qui précède nous permet de définir une probabilité $Q^{(t,u)}$ sur $\Theta = I\!R^+$ comme mélange des probabilités $Q^t(.,\upsilon)$ définies par les votes compatibles $(Q^t([0,\theta_f],\upsilon))_{\theta_f \in I\!R^+}$. Pour tout $\upsilon \in \Upsilon$, la compatibilité de ces votes découle de la proposition 5.2.3 ; la fonction de répartition $G_{(\theta,\upsilon)}(t)$ est évidemment continue en θ et elle tend bien vers 0 lorsque θ tend vers $+\infty$ puisque $\Gamma(p+m,\upsilon,t) = \Gamma(p+m,1,\frac{t}{\upsilon})$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$ (voir l'exemple 5 de 5.4). Cette probabilité sur Θ complète l'information donnée par le résultat du test classique de $H_0 : \theta = 0$ contre $H_1 : \theta > 0$. Le seuil minimum de rejet $\alpha_m(\frac{t}{u})$ de ce test est vu comme la fréquence $Q^{(t,u)}([0])$ des experts qui votent pour l'hypothèse $H_0 : \theta = 0$. Dans le cas du non rejet de H_0, c'est-à-dire lorsque $\alpha_m(\frac{t}{u})$ est supérieur au seuil choisi, on peut préciser cette réponse en regardant si $Q^{(t,u)}([0, \theta])$ se rapproche rapidement de 1 lorsque θ croît. C'est plus simple que d'analyser la fonction puissance du test. Le cas du rejet de H_0 pose problème lorsque l'hypothèse $H_0 : \theta = 0$ est une idéalisation de l'hypothèse réelle à tester. Bien souvent l'utilisateur se demande si θ est petit et non pas si θ est nul. Une interprétation trop rapide du rejet peut conduire à considérer que θ est notable alors qu'il est négligeable. Une analyse de la croissance de $Q^{(t,u)}([0, \theta])$ lorsque θ s'éloigne de 0 permet d'éviter facilement ce piège. On peut tout simplement porter un jugement sur la valeur θ_1 (resp. θ_2) qui donne une fréquence de votes $Q^{(t,u)}([0, \theta_1])$ (resp. $Q^{(t,u)}([0, \theta_2])$) considérée comme petite (resp. grande). Il est cependant plus satisfaisant d'essayer de traduire l'hypothèse "θ est petit" par $\theta \in [0, \theta_0]$ et de porter un jugement à partir de $Q^{(t,u)}([0, \theta_0])$.

Considérons un modèle exponentiel $(\Omega, \mathcal{A}, (p_{(\theta,\upsilon)}.\mu)_{(\theta,\upsilon)\in\Theta\times\Upsilon})$ de la forme $p_{(\theta,\upsilon)}(\omega) = exp(f(\theta,\upsilon)T(\omega) + g(\upsilon)U(\omega) - \psi(\theta,\upsilon))$.

La fonction $f(\theta,\upsilon)$ (resp. $g(\upsilon)$) est supposée strictement croissante en θ (resp. υ) sur l'intervalle Θ (resp. Υ) de $I\!R$.

Les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ à paramètre fantôme $\upsilon \in \Upsilon$ sont stables par rapport à la statistique réelle T, qui est même une statistique essentielle globale pour chacun des modèles à rapport de vraisemblance monotone : $(\Omega, \mathcal{A}, (p_{(\theta,\upsilon)}.\mu)_{\theta\in\Theta})$. En effet, si $\theta_1 < \theta_2$ on a pour tout $\upsilon \in \Upsilon$:

$p_{(\theta_2,\upsilon)}(\omega)/p_{(\theta_1,\upsilon)}(\omega) = exp[(f(\theta_2,\upsilon) - f(\theta_1,\upsilon))T(\omega)].exp[\psi(\theta_1,\upsilon) - \psi(\theta_2,\upsilon)]$, qui est une fonction strictement croissante de T.

Les lois de T forment une famille exponentielle, ainsi que les lois conditionnelles de U quand $T = t$, cette deuxième famille ne dépendant que de υ (cf. [Mon.2] p. 60 et 62). Plus précisément, il existe sur $I\!R$ des mesures μ_υ et ν_t telles que :

$P^T_{(\theta,\upsilon)}(dt) = exp[f(\theta,\upsilon)t - \psi(\theta,\upsilon)].\mu_\upsilon(dt)$ et

$P^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}(du) = exp[g(\upsilon)u - \psi_t(\upsilon)].\nu_t(du)$.

Les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ définissent donc un problème de décision à paramètre fantôme expertisable, par rapport à la statistique U et pour l'ordre ordinaire sur $\Upsilon \subseteq I\!R$ (voir la définition 6.1.2). Il suffit de poser $q_\upsilon(t,u) = exp[g(\upsilon)u - \psi_t(\upsilon)]$. Dans le sous problème de décision correspondant à la valeur υ du paramètre fantôme, $Q^t_{(\theta,\upsilon)}(1)$ est le vote en faveur de Θ_1 sous $P_{(\theta,\upsilon)}$ lorsqu'on réalise $t = T(\omega)$. Notons $G_{(\theta,\upsilon)}$ la fonction de répartition moyenne de la statistique essentielle T, elle permet de définir le vote précédent puisque $D_i = D_s = \emptyset$ (voir la proposition 4.3.1) et on a :

$$Q^t_{(\theta,\upsilon)}(1) = 1 - G_{(\theta,\upsilon)}(t) = \frac{1}{2} exp[f(\theta,\upsilon)t - \psi(\theta,\upsilon)]\mu_\upsilon(\{t\}) + \int 1\!I_{]t,+\infty[}(x) exp[f(\theta,\upsilon)x - \psi(\theta,\upsilon)]\, d\mu_\upsilon(x).$$

Les votes $(Q^t_{(\theta,\upsilon)}(1))_{\theta\in\Theta}$ sont alors résumés en un vote $Q^t(1,\upsilon)$. Il y a plusieurs choix possibles (voir le paragraphe 4.3), on peut utiliser une pondération de ces votes ou choisir le vote le plus favorable sous Θ_0 (resp. Θ_1). Ces deux derniers

votes sont généralement égaux, il suffit par exemple que les densités $p_{(\theta,\upsilon)}(\omega)$ soient continues en θ (voir les commentaires sur la proposition 5.1.1). Dans ce cas on a : $Q^t(1,\upsilon) = Q^t_{(\theta_1,\upsilon)}(1)$ avec $\theta_1 = sup\Theta_1 = inf\Theta_0$.
Le paramètre fantôme étant expertisable nous allons utiliser le modèle image de U conditionnellement à $T = t$, $(IR, \mathcal{B}, (exp[g(\upsilon)u - \psi_t(\upsilon)].\nu_t(du))_{\upsilon\in\Upsilon})$, pour probabiliser Υ à partir d'un ensemble de votes compatibles sur l'ensemble des hypothèses unilatérales. La proposition 5.2.3 permet souvent de définir une probabilité $\Lambda^{(t,u)}$, sur les boréliens de Υ, à partir des votes les plus favorables. Cette probabilité est particulièrement intéressante car elle ne repose sur aucune information supplémentaire concernant le paramètre fantôme. Les conditions d'application de la proposition 5.2.3 portent ici sur la fonction de répartition de la statistique identité
$G^{U|t}_\upsilon(u) = \frac{1}{2}exp[g(\upsilon)u - \psi_t(\upsilon)]\nu_t(\{u\}) + \int 1I_{]-\infty,u[}(y)exp[g(\upsilon)y - \psi_t(\upsilon)]\, d\nu_t(y)$.
Le point important est qu'elle soit continue en υ pour presque tout t, c'est en particulier le cas lorsque $g(\upsilon)$ est continue.
Le vote final est alors : $Q^{(t,u)}(1) = \int_\Upsilon Q^t(1,\upsilon)\, d\Lambda^{(t,u)}(\upsilon)$.
Nous allons expliciter cette solution sur quelques exemples classiques.

Exemple 1 : moyenne d'une loi normale.
Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un n-échantillon de la loi $N(\mu, \sigma^2)$, μ et σ^2 inconnus ($n > 1$).
Considérons les hypothèses $\{\mu \leq \mu_0\}$ et $\{\mu > \mu_0\}$.
Posons $\theta = \mu - \mu_0$ et $\upsilon = \sigma^2$, en travaillant sur les variables $Y_i = X_i - \mu_0$ on doit traiter le problème de décision suivant : $(IR^n, \mathcal{B}, (P_{(\theta,\upsilon)})_{(\theta,\upsilon)\in\{\Theta_1\cup\Theta_0\}\times IR^+_*})$
avec $\Theta_1 = \{\theta \leq 0\}$, $\Theta_0 = \{\theta > 0\}$ et $P_{(\theta,\upsilon)}$ de densité

$$p_{(\theta,\upsilon)}(y_1, ..., y_n) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\upsilon}}\right)^n exp\left[-\frac{1}{2\upsilon}\sum_{i=1}^n (y_i - \theta)^2\right]$$
$$= exp\left[\frac{\theta}{\upsilon}\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \frac{1}{2\upsilon}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right) - \frac{n\theta^2}{2\upsilon} - \frac{n}{2}ln(2\pi\upsilon)\right]$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur IR^n. C'est bien un cas particulier du modèle exponentiel étudié dans ce paragraphe, $T(y_1, ..., y_n) = \sum_{i=1}^n y_i$, $U(y_1, ..., y_n) = \sum_{i=1}^n y_i^2$, $f(\theta,\upsilon) = \frac{\theta}{\upsilon}$, $g(\upsilon) = -\frac{1}{2\upsilon}$ et $\psi(\theta,\upsilon) = \frac{n}{2}[\frac{\theta^2}{\upsilon} + ln(2\pi\upsilon)]$. T est de loi $N(n\theta, n\upsilon)$ de densité $p^T_{(\theta,\upsilon)}$, quant à la statistique $\frac{U}{\upsilon}$ elle suit une loi de khi-deux à n degrés de liberté et à paramètre de non centralité $n\theta^2$. Pour obtenir la loi conditionnelle de U quand $T = t$, notée $P^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}$, nous allons nous servir de l'indépendance entre T et $Z(y_1, ..., y_n) = \frac{1}{\upsilon}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 = \frac{U}{\upsilon} - \frac{T^2}{n\upsilon}$ qui suit une loi de khi-deux à $n-1$ degrés de liberté. (T, Z) admet donc, par rapport à la mesure de Lebesgue sur $I\!R^2$, la densité : $p^T_{(\theta,\upsilon)}(t) \times 1\!I_{I\!R^+}(z)\frac{1}{2^{(n-1)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}z^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{z}{2}}$. Le changement de variable qui associe $(t, u = \upsilon z + \frac{t^2}{n}) \in I\!R^2$ à $(t, z) \in I\!R^2$ conduit à l'expression suivante de la densité de (T, U) :

$p^T_{(\theta,\upsilon)}(t) \times 1\!I_{I\!R^+}(\frac{u}{\upsilon} - \frac{t^2}{n\upsilon})\frac{1}{2^{(n-1)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})\upsilon}(\frac{u}{\upsilon} - \frac{t^2}{n\upsilon})^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{u}{2\upsilon}+\frac{t^2}{2n\upsilon}}$.

La densité de la loi $P^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned}
p^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}(u) &= [1\!I_{I\!R^+}(\tfrac{u}{\upsilon} - \tfrac{t^2}{n\upsilon})(\tfrac{u}{\upsilon} - \tfrac{t^2}{n\upsilon})^{\frac{n-3}{2}}\, e^{-\frac{u}{2\upsilon}}] / \int 1\!I_{I\!R^+}(\tfrac{u}{\upsilon} - \tfrac{t^2}{n\upsilon})(\tfrac{u}{\upsilon} - \tfrac{t^2}{n\upsilon})^{\frac{n-3}{2}}\, e^{-\frac{u}{2\upsilon}}\, du \\
&= [1\!I_{[\frac{t^2}{n},+\infty[}(u)(u - \tfrac{t^2}{n})^{\frac{n-3}{2}}\, e^{-\frac{u}{2\upsilon}}] / \int_0^{+\infty} x^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2\upsilon}}\, e^{-\frac{t^2}{2n\upsilon}}\, dx \\
&= 1\!I_{[\frac{t^2}{n},+\infty[}(u)\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})(2\upsilon)^{\frac{n-1}{2}}}(u - \tfrac{t^2}{n})^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2\upsilon}(u-\frac{t^2}{n})}
\end{aligned}$$

C'est une loi $\gamma(\frac{n-1}{2}, 2\upsilon)$ translatée de $\frac{t^2}{n}$. Comme nous l'avons fait dans l'exemple 2 de 5.4, on peut obtenir une probabilité $\Lambda^{(t,u)}$ sur $(\Upsilon = I\!R^+, \mathcal{B})$ en appliquant la proposition 5.2.3, puisque la fonction de répartition moyenne de $P^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
G^{U|t}_{\upsilon}(u) &= \int_{-\infty}^{u} 1\!I_{[\frac{t^2}{n},+\infty[}(x)\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})(2\upsilon)^{\frac{n-1}{2}}}(x - \tfrac{t^2}{n})^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{1}{2\upsilon}(x-\frac{t^2}{n})}\, dx \\
&= \Gamma(\tfrac{n-1}{2}, (u - \tfrac{t^2}{n})/2\upsilon) = \Gamma(\tfrac{n-1}{2}, \tfrac{(n-1)s^2}{2\upsilon})
\end{aligned}$$

Lorsque $s^2 > 0$, $\Lambda^{(t,u)}$ est la loi inverse de la loi $\gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{2}{(n-1)s^2})$, c'est-à-dire que le paramètre $\frac{1}{\upsilon}$ suit une loi de densité $1\!I_{I\!R^+}(\lambda)\frac{(n-1)s^2}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})}(\frac{(n-1)s^2}{2}\lambda)^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\lambda}$. On retrouve la loi a postériori correspondant a la loi a priori impropre et non informative de densité : $\frac{1}{\upsilon}\ 1\!I_{I\!R^+_*}(\upsilon)$ (cf. [Ber.] p. 289). Nous aurions obtenu le même résultat en travaillant avec la statistique exhaustive $(T, (n-1)S^2 = \upsilon Z)$ dont les composantes sont indépendantes (voir l'exemple de 6.1).

Dans le sous problème de décision correspondant à la valeur υ du paramètre fantôme, le vote le plus favorable sous Θ_0 est égal au vote le plus favorable sous Θ_1. C'est le vote $Q^t_{(0,\upsilon)}$ correspondant à la probabilité frontière $P_{(0,\upsilon)}$. Si l'on choisit ce vote dans chacun des sous problèmes de décision et qu'on réalise $t = T(y_1, ..., y_n)$, la famille des votes en faveur de $\Theta_1 = \{\theta \leq 0\}$, donc en faveur de $\{\mu \leq \mu_0\}$, est définie par :

$Q^t(1,\upsilon) = Q^t_{(0,\upsilon)}(1) = 1 - P^T_{(0,\upsilon)}(]-\infty,t[) = 1 - F(\frac{t}{\sqrt{n\upsilon}})$,

F étant la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$.

La moyenne de ces votes par rapport à la probabilité $\Lambda^{(t,u)}$ est alors presque partout ($s^2 > 0$) égale à :

$$\begin{aligned}
Q^{(t,u)}(1) &= \int [1 - F(\tfrac{t}{\sqrt{n\upsilon}})]\, d\Lambda^{(t,u)}(\upsilon) \\
&= \int_{IR^+} [1 - F(\tfrac{t}{\sqrt{n}}\sqrt{\lambda})] \tfrac{(n-1)s^2}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})} (\tfrac{(n-1)s^2}{2}\lambda)^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\lambda}\, d\lambda \\
&= \int_{IR^+} [\int_{\frac{t}{\sqrt{n}}}^{+\infty} \tfrac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}\lambda}\, dx] \tfrac{(n-1)s^2}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})} (\tfrac{(n-1)s^2}{2}\lambda)^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\lambda}\, d\lambda \\
&= \int_{IR^+} [\int_{\frac{t}{\sqrt{ns^2}}}^{+\infty} \tfrac{\sqrt{s^2\lambda}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}s^2\lambda}\, dy] \tfrac{(n-1)s^2}{2\Gamma(\frac{n-1}{2})} (\tfrac{(n-1)s^2}{2}\lambda)^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{(n-1)s^2}{2}\lambda}\, d\lambda \\
&= \int_{\frac{t}{\sqrt{ns^2}}}^{+\infty} [\int_0^{+\infty} \tfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}\nu} \times \tfrac{(\frac{n-1}{2})^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \nu^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{-\frac{n-1}{2}\nu}\, d\nu]\, dy
\end{aligned}$$

L'intégrale entre crochets donne la densité d'une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté comme mélange des lois $N(0,\frac{1}{\nu})$ par la loi $\gamma(\frac{n-1}{2},\frac{2}{n-1})$ (cf. [Dic.]). Le vote $Q^{(t,u)}(0)$ est donc égal à la valeur de la fonction de répartition d'un Student $(n-1)$ en $\frac{t}{\sqrt{ns^2}} = \sqrt{n}\frac{\overline{y}}{\sqrt{s^2}} = \sqrt{n}\frac{(\overline{x}-\mu_0)}{\sqrt{s^2}}$. C'est le seuil minimum de rejet du test de Student de $H_0 : \{\mu > \mu_0\}$ contre $H_1 : \{\mu \leq \mu_0\}$. De même $Q^{(t,u)}(1)$ est le seuil minimum de rejet du test de Student de $H_0 : \{\mu \leq \mu_0\}$ contre $H_1 : \{\mu > \mu_0\}$.

Lorsque μ_0 parcourt IR, les votes précédents sont évidemment compatibles. Ils définissent, sur l'espace IR du paramètre μ, une probabilité qui est une loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté, de moyenne $\overline{x}$ et de paramètre d'échelle $\frac{s^2}{n}$ (cf. [Dic.] ou [Ber.] p. 561). La loi de μ^2 n'est pas celle trouvée dans l'exemple d'analyse de variance traité au paragraphe 6.1. Il n'y a rien d'étonnant puisque dans ce dernier cas on traite des hypothèses unilatérales pour μ^2 donc bilatérales pour μ. L'ordre qui intéresse l'utilisateur est différent.

Exemple 2 : comparaison de deux fréquences à partir d'échantillons indépendants.

Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes de lois binomiales $\mathcal{B}(n_1,p_1)$ et $\mathcal{B}(n_2,p_2)$, $0 < p_1 < 1$ et $0 < p_2 < 1$. Considérons les hypothèses $\{p_1 \leq p_2\}$ et $\{p_1 > p_2\}$. Le modèle statistique image de (X_1,X_2) est défini sur $\Omega = \{0,...,n_1\} \times \{0,...,n_2\}$, les paramètres (p_1,p_2) appartenant à $]0,1[\times]0,1[$. Par rapport à la mesure de masse $C_{n_1}^{x_1}C_{n_2}^{x_2}$ en $(x_1, x_2) \in \Omega$, il admet des densités de forme exponentielle : $exp[x_1 ln(\frac{p_1}{1-p_1}) + x_2 ln(\frac{p_2}{1-p_2}) + n_1 ln(1-p_1) + n_2 ln(1-p_2)]$.

Posons $\theta = ln(\frac{p_1}{1-p_1}) - ln(\frac{p_2}{1-p_2}) = ln(\frac{p_1(1-p_2)}{(1-p_1)p_2}) \in IR$ et $\upsilon = ln(\frac{p_2}{1-p_2}) \in IR$.

La fonction $ln(\frac{p}{1-p})$ étant strictement croissante en p, les hypothèses précédentes s'écrivent : $\{\theta \leq 0\}$ et $\{\theta > 0\}$. La densité devient :

$exp[\theta x_1 + \upsilon(x_1 + x_2) - n_1 ln(1 + e^{\theta+\upsilon}) - n_2 ln(1 + e^{\upsilon})]$, elle est de la forme étudiée avec $T(x_1, x_2) = x_1$ et $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. La loi $P^T_{(\theta,\upsilon)}$ est une binomiale $\mathcal{B}(n_1, p_1 = \frac{exp(\theta+\upsilon)}{1+exp(\theta+\upsilon)})$. D'après l'exemple 4 de 5.4 les votes les plus favorables dans $\Theta_1 = \{\theta \leq 0\} \times \{\upsilon\}$ ou dans $\Theta_0 = \{\theta > 0\} \times \{\upsilon\}$ sont identiques au vote sous $P^T_{(0,\upsilon)} = \mathcal{B}(n_1, p_2 = \frac{exp(\upsilon)}{1+exp(\upsilon)})$. Si l'on fait ce choix on a :

$Q^t(1, \upsilon) = Q^t_{(0,\upsilon)}(1) = \frac{1}{2}F(t, n_1 + 1 - t, \frac{exp(\upsilon)}{1+exp(\upsilon)}) + \frac{1}{2}F(t + 1, n_1 - t, \frac{exp(\upsilon)}{1+exp(\upsilon)})$,

$F(p, q, x)$ est la valeur en x de la fonction de répartition de la loi $\beta(p, q)$ sur $[0, 1]$ lorsque $p > 0$ et $q > 0$, pour $p = 0$ (resp. $q = 0$), c'est-à-dire $t = 0$ (resp. $t = n_1$), c'est la fonction de répartition de la masse de Dirac en 0 (resp. 1).

Nous allons maintenant nous servir de la loi $P^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}$ qui ne dépend que de υ, pour probabiliser $\Upsilon = IR$ et considérer la moyenne des votes précédents. $P^{U|t}_{(\theta,\upsilon)}$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(n_2, p_2 = \frac{exp(\upsilon)}{1+exp(\upsilon)})$ translatée de t. Pour $u \in \{t, ..., t + n_2\}$ sa fonction de répartition moyenne est égale à :

$G^{U|t}_{\upsilon}(u) = \sum_{i=0}^{u-t} C^i_{n_2} p_2^i (1 - p_2)^{n_2-i} - \frac{1}{2}C^{u-t}_{n_2} p_2^{u-t}(1 - p_2)^{n_2-u+t}$.

Comme dans l'exemple 4 de 5.4 on obtient pour le paramètre $p_2 \in]0, 1[$ la loi $\frac{1}{2}\beta(u-t, n_2+1-u+t)+\frac{1}{2}\beta(u-t+1, n_2-u+t)$ avec la convention $\beta(0, n_2+1) = \delta_0$ et $\beta(n_2 + 1, 0) = \delta_1$. L'expression de la loi de $\upsilon \in IR$ est inutile pour faire la moyenne des votes $Q^t(1, \upsilon)$ puisqu'ils ne dépendent que de $p_2 = \frac{exp(\upsilon)}{1+exp(\upsilon)}$). La moyenne des votes en faveur de $\{p_1 \leq p_2\}$, $Q^{(t,u)}(1)$, correspond aux observations $x_1 = t$ et $x_2 = u - t$. Pour les observations $n_1 - x_1$ et $n_2 - x_2$ les votes sont inversés, on trouve $Q^{(t,u)}(1)$ comme moyenne des votes en faveur de $\{p_1 > p_2\}$, car $F(q, p, x) = 1 - F(p, q, 1 - x)$. C'est une propriété classique des procédures de sélection entre deux binomiales (cf. [DhaM]).

Remarquons enfin que le vote moyen $Q^{(t,u)}(1)$ trouvé est égal à la probabilité de l'événement $\{p_1 \leq p_2\}$ lorsque l'espace des paramètres $[0,1]^2$ est muni de la probabilité produit obtenue en probabilisant séparément les paramètres p_1 et p_2 à partir des réalisations indépendantes x_1 et x_2 (voir l'exemple 4 de 5.4). Ceci nous donne une solution pour d'autres types d'hypothèses construites à partir de p_1 et p_2. Dès que ces hypothèses dépendent de p_1 et p_2 elles ne sont d'ailleurs pas stables puisque le choix entre (p_1, p_2) et (p'_1, p_2) dépend de X_1 alors que le choix entre (p_1, p_2) et (p_1, p'_2) dépend de X_2. Cette remarque reste vraie pour toutes les hypothèses qui font intervenir des paramètres expertisables à partir de statistiques indépendantes.

ANNEXE I.

Soient P_0 et P_1, deux probabilités définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Elles admettent toujours des densités p_0 et p_1 par rapport à une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (cf. [Leh.] p. 74). En 2.2 nous avons défini une statistique K à valeurs dans $\overline{IR^+}$ qui est égale au rapport p_0/p_1 quand il est défini, c'est-à-dire dans le complémentaire de $A = \{\omega \in \Omega\,;\, p_0(\omega) = 0\, et\, p_1(\omega) = 0\}$. Rappelons que cette statistique vérifie :
$\{K = k\} = \{\omega \in \Omega\,;\, p_0(\omega) = k.p_1(\omega)\} \bigcap A^c$ pour $k \in IR^+$,
$\{K = \infty\} = \{\omega \in \Omega\,;\, p_1(\omega) = 0\}$.

La forme indéterminée $0/0$ prend ici la valeur $+\infty$. Tout autre statistique égale au rapport p_0/p_1 quand il est défini, est P_0 et P_1 presque sûrement égale à K. En fait, cette statistique est unique, P_0 et P_1 presque sûrement, au sens suivant : elle ne dépend pas de la mesure et des densités choisies pour exprimer P_0 et P_1.

Démonstration

Soient p'_0 et p'_1 des densités de P_0 et P_1 par rapport à une mesure μ' sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et K' la statistique associée au rapport p'_0/p'_1. Nous devons montrer que K et K' sont égales P_0 et P_1 presque sûrement. C'est-à-dire que les événements $B = \{K > K'\}$ et $C = \{K < K'\}$ sont de probabilités nulles pour P_0 et P_1.

Démontrons que $P_1(B)$ est nulle. Il est équivalent d'avoir $P_1(B') = 0$ avec $B' = B \cap \{p_1 > 0\}$. Sur B', la statistique K est finie, on a $K' < K < +\infty$ et donc $p_0 = K.p_1$, $p'_0 = K'.p'_1$; ceci entraîne :
$P_0(B') = \int_{B'} p_0\, d\mu = \int_{B'} K.p_1\, d\mu = \int_{B'} K\, dP_1$ et
$P_0(B') = \int_{B'} p'_0\, d\mu' = \int_{B'} K'.p'_1\, d\mu' = \int_{B'} K'\, dP_1$;
on en déduit $\int_{B'} (K - K')\, dP_1 = 0$ et donc $P_1(B') = 0$ puisque $(K - K') > 0$ sur B'.

On obtient de même $P_0(B) = 0$ en démontrant que $B'' = B \cap \{p'_0 > 0\}$ est de probabilité nulle sous P_0. Sur B'', la statistique K' est strictement positive, on a $0 < K' < K \leq +\infty$ et donc $p'_1 = p'_0/K'$, $p_1 = p_0/K$; ceci entraîne :
$P_1(B'') = \int_{B''} p_1 \, d\mu = \int_{B''} (p_0/K) \, d\mu = \int_{B''} (1/K) \, dP_0$ et
$P_1(B'') = \int_{B''} p'_1 \, d\mu' = \int_{B''} (p'_0/K') \, d\mu' = \int_{B''} (1/K') \, dP_0$;
on en déduit $\int_{B''} (1/K') - (1/K) \, dP_0 = 0$ et donc $P_0(B'') = 0$ puisque $(1/K') - (1/K) > 0$ sur B''.

De façon semblable on démontre : $P_1(C) = 0$ et $P_0(C) = 0$. Il faut simplement prendre $C' = C \cap \{p'_1 > 0\}$ afin que les statistiques K' et K soient finies ; pour l'autre cas on pose $C'' = C \cap \{p_0 > 0\}$, ce qui rend K et K' strictement positives.

ANNEXE II.

Dans un problème de décision à hypothèses stables $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$, on suppose l'existence d'une statistique réelle T et de fonctions croissantes $h''_{(\theta_0,\theta_1)}$: $I\!R\rightarrow \overline{I\!R^+}$ vérifiant $p_{\theta_0}/p_{\theta_1} = h''_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ quand ce rapport n'est pas indéterminé (voir la définition 4.1.2). Son étude est facilitée lorsque les fonctions $h''_{(\theta_0,\theta_1)}$ sont normalisées (voir la définition 4.2.1.). Nous allons montrer que ceci est toujours possible. Partant d'une famille $\{h''_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ nous allons en construire une normalisée : $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$.

1$^{\text{ère}}$ étape.

Soit $(\theta_0,\theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$. Nous allons commencer par construire une fonction $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ constante sur tout intervalle $I \subset I\!R$ définissant un événement $T^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \in I\}$ sur lequel le rapport $p_{\theta_0}/p_{\theta_1}$ est indéterminé : $p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0$. Ceci revient à trouver $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ constante sur chacun des intervalles maximaux de $N_{(\theta_0,\theta_1)} = \{t \in I\!R\,;\, \forall\omega \in T^{-1}(t)\ p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0\}$. Notons $\mathcal{I}_m$ l'ensemble de ces intervalles (certains pouvant être non bornés). La fonction $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ est égale à $h''_{(\theta_0,\theta_1)}$ en dehors de $N_{(\theta_0,\theta_1)}$ et sur tout intervalle I de $\mathcal{I}_m$ elle est égale à une constante b_I. Pour que $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ soit croissante cette constante b_I doit vérifier :

$b_I \geq a_I = sup\{h''_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\,;\, t < I\}\cup\{0\}$ et $b_I \leq c_I = inf\{h''_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\,;\, t > I\}\cup\{+\infty\}$. La fonction $\{h''_{(\theta_0,\theta_1)}\}$ n'ayant été modifiée que sur $N_{(\theta_0,\theta_1)}$, $h'_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ est encore égale au rapport des densités $p_{\theta_0}/p_{\theta_1}$, sur le domaine de définition de ce rapport.

2$^{\text{ème}}$ étape.

Afin d'obtenir une famille normalisée $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ nous allons modifier les fonctions $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ précédentes sur D_i et D_s. Rappelons que $D_i =]-\infty, t)$ (resp. $D_s = (t, +\infty[$) désigne la plus grande demi-droite ouverte ou fermée telle que $T^{-1}(D_i) \subseteq \cap_{\theta\in\Theta_0}\{p_\theta = 0\}$ (resp. $T^{-1}(D_s) \subseteq \cap_{\theta\in\Theta_1}\{p_\theta = 0\}$). Pour avoir les propriétés ii) et iii) de la définition 4.2.1 nous posons :

$$h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & si \quad t \in D_i - D_s \\ h'_{(\theta_0,\theta_1)}(t) & si \quad t \in IR - (D_i \cup D_s) \\ +\infty & si \quad t \in D_s \end{cases}$$

$h_{(\theta_0,\theta_1)}$ est bien une fonction croissante et $h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ est toujours égale à $p_{\theta_0}/p_{\theta_1}$ sur le domaine de définition de ce rapport. En effet, pour tout ω de $T^{-1}(D_i)$ (resp. $T^{-1}(D_s)$) on a $p_{\theta_0}(\omega) = 0$ (resp. $p_{\theta_1}(\omega) = 0$) et le rapport $p_{\theta_0}(\omega)/p_{\theta_1}(\omega)$ est soit indéterminé soit égal à 0 (resp. $+\infty$) ; bien entendu, s'il existe ω appartenant à $D_i \cap D_s$ le rapport des densités est indéterminé.
Les fonctions $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ vérifient aussi les propriétés de la définition 4.2.1, elles définissent donc une famille normalisée.

Les propriétés ii) et iii) des familles normalisées conduisent à deux lemmes utiles pour les démonstrations des propositions 4.2.1 et 4.2.2.

Lemme 1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ un problème de décision à hypothèses stables. On note Δ_s l'ensemble des fonctions de test simples définies à partir d'une famille $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ normalisée.
Pour tout $\theta_0 \in \Theta_0$; on a $sup\{\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}\}_{\theta_1\in\Theta_1} = f_{(t_1,u_1)} = sup\Delta_s$

Démonstration

Soit $\theta_0 \in \Theta_0$. Posons $f_{(t,u)} = sup\{\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(\infty,0)}\}_{\theta_1\in\Theta_1}$ et notons D_t la demi-droite $[t, +\infty[$ (resp. $]t, +\infty[$) si $u = 0$ (resp. $u = 1$).
Lorsque $(t, u) = (+\infty, 0)$ on a évidemment $f_{(t,u)} = sup\Delta_s$. Dans le cas contraire D_t est non vide et est inclus dans D_s (voir la définition 4.2.1) puisque pour tout $\theta' \in \Theta_1$ et tout $t' \in D_t$, $\phi^{(\theta_0,\theta')}_{(\infty,0)}$ est nulle sur $\{T = t'\}$, ce qui implique $h_{(\theta_0,\theta')}(t') = +\infty$, donc $p_{\theta'} = 0$ sur $\{T = t'\}$.

Par définition de $f_{(t_1,u_1)} = sup\Delta_s$ on a $f_{(t,u)} \leq f_{(t_1,u_1)}$. On doit montrer l'égalité.

Si on avait $f_{(t,u)} < f_{(t_1,u_1)}$, il existerait $(\theta'_0, \theta'_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ tel que : $f_{(t,u)} < \phi^{(\theta'_0,\theta'_1)}_{(\infty,0)} \leq f_{(t_1,u_1)}$; l'événement $A = \{\phi^{(\theta'_0,\theta'_1)}_{(\infty,0)} - f_{(t,u)} = 1\}$ serait non vide et pour $\omega' \in A$ on aurait $h_{(\theta'_0,\theta'_1)}(T(\omega')) < +\infty$ avec $t' = T(\omega')$ appartenant à $D_t \subseteq D_s$ ce qui est impossible puisque sur D_s la fonction normalisée $h_{(\theta'_0,\theta'_1)}$ vaut $+\infty$.

Lemme 2

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1})$ un problème de décision à hypothèses stables. On note Δ_s l'ensemble des fonctions de test simples définies à partir d'une famille $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ normalisée.
Pour tout $\theta_1 \in \Theta_1$; on a $inf\{\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}\}_{\theta_0\in\Theta_0} = f_{(t_0,u_0)} = inf\Delta_s$

Démonstration

La démonstration est semblable à celle du lemme 1.
Soit $\theta_1 \in \Theta_1$. On pose $f_{(t,u)} = inf\{\phi^{(\theta_0,\theta_1)}_{(0,1)}\}_{\theta_0\in\Theta_0}$ et on note D_t la demi-droite $]-\infty, t[$ (resp. $]-\infty, t]$) si $u = 0$ (resp. $u = 1$).
Lorsque $(t, u) = (-\infty, 0)$ on a évidemment $f_{(t,u)} = inf\Delta_s$. Dans le cas contraire D_t est non vide et est inclus dans D_i (voir la définition 4.2.1) car pour tout $\theta \in \Theta_0$ et tout $t' \in D_t$ on a $h_{(\theta,\theta_1)}(t') = 0$, donc $p_\theta = 0$ sur $\{T = t'\}$. On a même $D_t \subseteq D_i - D_s$ puisque $f_{(t,u)} \leq f_{(t_1,u_1)}$ et $1\!\!I_{D_s}(T) = 1 - f_{(t_1,u_1)}$ (voir la proposition 4.2.1).

Par définition de $f_{(t_0,u_0)} = inf\Delta_s$ on a $f_{(t,u)} \geq f_{(t_0,u_0)}$. On doit montrer l'égalité.
Si on avait $f_{(t,u)} > f_{(t_0,u_0)}$, il existerait $(\theta'_0, \theta'_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ tel que : $f_{(t_0,u_0)} \leq \phi^{(\theta'_0,\theta'_1)}_{(0,1)} < f_{(t,u)}$; l'événement $A = \{f_{(t,u)} - \phi^{(\theta'_0,\theta'_1)}_{(0,1)} = 1\}$ serait non vide et pour $\omega' \in A$ on aurait $h_{(\theta'_0,\theta'_1)}(T(\omega')) > 0$ avec $t' = T(\omega')$ appartenant à $D_t \subseteq D_i - D_s$; ceci est impossible puisque sur $D_i - D_s$ la fonction normalisée $h_{(\theta'_0,\theta'_1)}$ vaut 0.

ANNEXE III.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta_0\cup\Theta_1=\Theta})$, un problème de décision à hypothèses stables par rapport à la statistique réelle T. D'après la définition 4.1.2, ceci implique l'existence, pour tout couple $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$, d'une fonction croissante $h_{(\theta_0,\theta_1)}$: $I\!R \rightarrow \overline{I\!R^+}$ vérifiant $p_{\theta_0}/p_{\theta_1} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ sur le domaine de définition de ce rapport. Les votes $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ (voir la proposition 4.3.1) ont été construits à partir d'une famille normalisée : $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ (voir la définition 4.2.1.). Il existe toujours une famille normalisée (voir l'annexe II) mais elle n'est généralement pas unique. Il est légitime de se demander si le choix de cette famille normalisée influence les votes $\{Q_\theta\}$.

Considérons deux familles normalisées :

$$\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \quad et \quad \{h'_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$$

Notons respectivement $K(T)$ et $K'(T)$ les statistiques essentielles qu'elles permettent de construire (voir la définition 4.3.1). Les votes $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Theta}$ (resp. $\{Q'_\theta\}_{\theta\in\Theta}$) ne dépendent que de la statistique $K(T)$ (resp. $K'(T)$)(voir la proposition 4.3.1). La fonction croissante K : $I\!R \rightarrow \overline{I\!R}$ (resp. K') est construite à partir de $\Delta_s = \cup_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\Delta'_s = \cup_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}\Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}$), $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}$) étant l'ensemble des fonctions de test simples basées sur le rapport des densités, $p_{\theta_0}/p_{\theta_1}$, défini par $K_{(\theta_0,\theta_1)} = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ (resp. $K'_{(\theta_0,\theta_1)} = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$) (voir la définition 2.2.1).

Nous allons commencer par caractériser les réels pour lesquels les valeurs des fonctions normalisées $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ peuvent être différentes. La définition 4.2.1 sur les familles normalisées fait intervenir deux demi-droites D_i et D_s. $D_i =]-\infty, t)$ (resp. $D_s = (t, +\infty[$) désigne la plus grande demi-droite ouverte ou fermée telle que $T^{-1}(D_i) \subseteq \cap_{\theta\in\Theta_0}\{p_\theta = 0\}$ (resp. $T^{-1}(D_s) \subseteq \cap_{\theta\in\Theta_1}\{p_\theta = 0\}$).

Lemme 1

Soient $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ *et* $t \in I\!R$. *Un intervalle* $I \subset I\!R$ *est dit indéterminé pour* (θ_0, θ_1) *lorsque les densités* p_{θ_0} *et* p_{θ_1} *sont nulles sur* $T^{-1}(I)$.
Si $t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$ *et si* $[t]$ *est indéterminé pour* (θ_0, θ_1), *notons* I_t *le plus grand intervalle de* $I\!R - (D_i \cup D_s)$ *contenant* t *et indéterminé pour* (θ_0, θ_1) ; $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ *étant une fonction normalisée posons :* $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = sup\{h_{(\theta_0,\theta_1)}(x)\,;\, x < I_t\} \cup \{0\}$ *et* $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) = inf\{h_{(\theta_0,\theta_1)}(x)\,;\, x > I_t\} \cup \{+\infty\}$.

1) Il existe une fonction normalisée différente de $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ *en* t *si et seulement si :*
$t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$, *t est indéterminé pour* (θ_0, θ_1) *et* $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) < h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$
(les limites $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-)$ *et* $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$ *ne dépendent pas de la fonction normalisée choisie)*

2) Si $t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$ *est indéterminé pour* (θ_0, θ_1), *il est totalement indéterminé :* $\forall \omega \in T^{-1}(t) \quad \forall \theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0$, *lorsque* $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) > 0$ *ou* $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) < +\infty$.

Démonstration

I — Condition nécessaire de 1).

La condition $t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$ est nécessaire puisque pour $t \in D_s$ (resp. $t \in D_i - D_s$) toutes les fonctions normalisées valent $+\infty$ (resp. 0). C'est une conséquence directe des propriétés ii) et iii) de la définition 4.2.1.

La condition t indéterminé pour (θ_0, θ_1), c'est-à-dire :
$\forall \omega \in T^{-1}(t) \quad p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0$, est aussi nécessaire. En effet, lorsqu'il existe $\omega \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta_0}(\omega) > 0$ ou $p_{\theta_1}(\omega) > 0$ le rapport $p_{\theta_0}(\omega)/p_{\theta_1}(\omega)$ est défini, il prend une valeur $k \in \overline{I\!R^+}$ qui doit être la valeur en t de toute fonction normalisée pour le couple (θ_0, θ_1).

La dernière condition a un sens lorsque les deux premières sont vérifiées, on a alors $I_t \neq \emptyset$. La propriété i) de la définition 4.2.1 impose à la fonction normalisée $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ d'être constante sur I_t. Lorsque

$h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)$ ne peut prendre que cette valeur commune des deux limites pour être croissante. Nous aurons démontré la nécessité de la condition $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) < h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$, si nous montrons que ces limites ne dépendent pas de la fonction normalisée choisie pour les définir.

i) $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-)$ ne dépend pas de la fonction normalisée choisie pour la définir.

Si $\{x < I_t\} = D_i - D_s$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-)$ ne peut prendre que la valeur 0, que $D_i - D_s$ soit vide ou pas. Dans le cas contraire il existe une suite $(x_n)_{n\in IN}$ croissant vers $inf I_t$ et dont les éléments n'appartiennent ni à I_t ni à $D_i - D_s$. Par définition de I_t on peut même supposer que les x_n ne sont pas indéterminés pour (θ_0, θ_1). D'après ce qui précède, toutes les fonctions normalisées pour (θ_0, θ_1) prennent la même valeur h_n en x_n. On a bien sûr $lim_{n\to+\infty} h_n = h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-)$.

ii) $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$ ne dépend pas de la fonction normalisée choisie pour la définir.

La démonstration est semblable à la précédente. Lorsque $\{x > I_t\} = D_s$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$ ne peut prendre que la valeur $+\infty$, que D_s soit vide ou pas. Dans le cas contraire il existe une suite $(x_n)_{n\in IN}$ décroissant vers $supI_t$ et dont les éléments n'appartiennent ni à I_t ni à D_s. Par définition de I_t on peut même supposer que les x_n ne sont pas indéterminés pour (θ_0, θ_1). Toutes les fonctions normalisées pour (θ_0, θ_1) prennent alors la même valeur h_n en x_n et $lim_{n\to+\infty} h_n = h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$.

II – Condition suffisante de 1).

Les trois conditions nécessaires étant réalisées, nous devons trouver une fonction normalisée $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ dont la valeur en t est différente de $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)$. Considérons :

$$h'_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = \begin{cases} h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) & si \quad x \notin I_t \\ c \in [h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-), h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)] - \{h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\} & si \quad x \in I_t \end{cases}$$

Comme $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) < h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$, on a $[h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-), h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)] - \{h_{(\theta_0,\theta_1)}(t)\} \neq \emptyset$ et la fonction $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ est bien définie. Elle est croissante par définition de $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-)$ et $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+)$; elle est égale à $p_{\theta_0}/p_{\theta_1}$ sur le domaine de définition de ce rapport, mais différente de $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ en t et même sur I_t.

Il reste à vérifier que $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ est normalisée.

Elle possède les propriétés ii) et iii) de la définition 4.2.1 puisque $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ est normalisée et que l'intervalle I_t est d'intersection vide avec $D_i \cup D_s$. D'autre part, tout intervalle $I \subseteq I\!R - (D_i \cup D_s)$ indéterminé pour (θ_0, θ_1) vérifie : $I \cap I_t = \emptyset$ ou $I \subseteq I_t$, par définition de I_t ; $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ possède donc aussi la propriété i).

III - t est totalement indéterminé lorsque $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) > 0$ ou $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) < +\infty$.

$t \in I\!R - (D_i \cup D_s)$ est pris indéterminé pour (θ_0, θ_1) : $\forall \omega \in T^{-1}(t) \quad p_{\theta_0}(\omega) = p_{\theta_1}(\omega) = 0$.

Nous allons démontrer le résultat recherché, c'est-à-dire : $\forall \omega \in T^{-1}(t) \quad \forall \theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0$, en raisonnant par l'absurde.

Supposons qu'il existe $\omega' \in T^{-1}(t)$ et $\theta' \in \Theta$ tels que $p_{\theta'}(\omega') > 0$. Nous allons montrer qu'on aurait $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = 0$ et $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) = +\infty$. Etudions d'abord les conséquences de cette supposition suivant que θ' appartient à Θ_0 ou Θ_1.

1^er^ cas : si $\theta' \in \Theta_0$ alors $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) = +\infty$.

On a $p_{\theta'}(\omega')/p_{\theta_1}(\omega') = +\infty$ donc $h_{(\theta',\theta_1)}(t) = +\infty$. $h_{(\theta',\theta_1)}$ est aussi infinie sur $[t, +\infty[$, on a donc p_{θ_1} nulle sur $\Omega_t = T^{-1}([t, +\infty[)$. Quant au rapport $p_{\theta_0}/p_{\theta_1}$ il est soit indéterminé soit égal à $+\infty$ sur Ω_t.

Montrons que $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) = inf\{h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) \,;\, x > I_t\} \cup \{+\infty\}$ est égal à $+\infty$. C'est évident lorsque $\{x > I_t\} = D_s$, que D_s soit vide ou pas. Dans le cas contraire il existe une suite $(x_n)_{n \in I\!N}$ décroissant vers $sup I_t$ et dont les éléments ne sont pas indéterminés pour (θ_0, θ_1), puisque I_t est un intervalle maximum de $I\!R-(D_i \cup D_s)$ indéterminé pour (θ_0, θ_1). Comme $T^{-1}(x_n) \subseteq \Omega_t$ on a $h_{(\theta_0,\theta_1)}(x_n) = +\infty$ et donc $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) = +\infty$.

2$^{\text{ème}}$ cas : si $\theta' \in \Theta_1$ alors $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = 0$.

On a $p_{\theta_0}(\omega')/p_{\theta'}(\omega') = 0$ donc $h_{(\theta_0,\theta')}(t) = 0$. $h_{(\theta_0,\theta')}$ est aussi égale à 0 sur $]-\infty, t]$, on a donc p_{θ_0} nulle sur $T^{-1}(]-\infty, t])$. Tout élément $x \in]-\infty, t]$ qui n'est pas indéterminé pour (θ_0, θ_1) vérifie $h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = 0$. Montrons que $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = sup\{h_{(\theta_0,\theta_1)}(x)\,;\, x < I_t\} \cup \{0\}$ est égal à 0. C'est évident lorsque $\{x < I_t\} = D_i - D_s$, que $D_i - D_s$ soit vide ou pas. Dans le cas contraire il existe une suite $(x_n)_{n\in I\!N}$ croissant vers $inf I_t$ et dont les éléments ne sont pas indéterminés pour (θ_0, θ_1), puisque I_t est un intervalle maximum de $I\!R-(D_i \cup D_s)$ indéterminé pour (θ_0, θ_1). De plus $x_n \in]-\infty, t]$, on a donc $h_{(\theta_0,\theta_1)}(x_n) = 0$ et bien sûr $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = 0$.

Ces deux cas nous amènent à la conclusion recherchée :

$h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^-) = 0$ et $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_t^+) = +\infty$, lorsqu'on a les deux conditions :

1) il existe $\omega' \in T^{-1}(t)$ et $\theta' \in \Theta_0$ tels que $p_{\theta'}(\omega') > 0$

2) il existe $\omega'' \in T^{-1}(t)$ et $\theta'' \in \Theta_1$ tels que $p_{\theta''}(\omega'') > 0$.

Nous n'en avons supposé qu'une seule vraie au départ, mais nous allons montrer que l'on ne peut pas avoir l'une sans l'autre.

Si on avait la première condition sans la seconde, on aurait pour tout θ_1 de Θ_1 : $p_{\theta_1}(\omega') = 0$ et $p_{\theta'}(\omega') > 0$, donc $h_{(\theta',\theta_1)}(t) = +\infty$; ce qui implique : $\forall \theta_1 \in \Theta_1$ et $\forall \omega \in T^{-1}([t, +\infty[)$, $p_{\theta_1}(\omega) = 0$; ceci est impossible puisque $t \notin D_s$.

De même lorsque la deuxième condition est vérifiée, on ne peut pas avoir : $\forall \theta_0 \in \Theta_0\ \forall \omega \in T^{-1}(t)\ p_{\theta_0}(\omega) = 0$, car on aurait $h_{(\theta_0,\theta'')}(t) = 0$ et donc : $\forall \theta_0 \in \Theta_0$ et $\forall \omega \in T^{-1}(]-\infty, t])$, $p_{\theta_0}(\omega) = 0$; ce qui est impossible puisque $t \notin D_i$.

Démontrons maintenant que le choix de la famille normalisée n'influence pas les votes $\{Q_\theta\}_{\theta\in\Theta}$.

Proposition 1

Soient $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ *et* $\{h'_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ *deux familles normalisées associées à un problème de décision à hypothèses stables par rapport à la statistique réelle* T *définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, (P_\theta = p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$. *Elles définissent des votes* Q_θ *et* Q'_θ *identiques en dehors d'une partie* $T^{-1}(M)$ *de* Ω, *sur laquelle les densités* p_θ *sont toutes nulles* ($\forall\omega \notin T^{-1}(M)\ \forall\theta \in \Theta \quad Q^\omega_\theta(\{1\}) = Q'^\omega_\theta(\{1\})$ *et* $\forall\omega \in T^{-1}(M)\ \forall\theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0$).

Démonstration

Notons G_θ et G'_θ les fonctions de répartition moyenne des statistiques essentielles $K(T)$ et $K'(T)$ définies par les deux familles normalisées (voir la définition 4.3.1). D'après la proposition 4.3.1, pour chaque réalisation ω, les votes Q^ω_θ sont définis par :

$$Q^\omega_\theta(\{1\}) = \begin{cases} 1 & si \quad T(\omega) \in D_i - D_s \\ 1 - G_\theta(K(T(\omega))) & si \quad T(\omega) \in I\!R - (D_i \cup D_s) \\ 0 & si \quad T(\omega) \in D_s \end{cases}$$

Ces votes, comme les votes Q'^ω_θ ne dépendent que de la valeur $T(\omega) = t$.

Lorsque $t \in D_i \cup D_s$ on obtient les mêmes votes Q^ω_θ et Q'^ω_θ puisque D_i et D_s ne dépendent que des densités p_θ.

Il nous reste à comparer les votes lorsque $t \in I\!R - (D_i \cup D_s) \neq \emptyset$, ce qui peut s'écrire : $1\!I_{D_i}(T) \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq 1 - 1\!I_{D_s}(T)$.
La valeur de $K(t)$ est alors construite à partir de deux experts (voir la définition 4.3.1) :
$f_{(a_t,u_t)} = sup\{f \in \Delta_s\,;\, f \leq f_{(t,0)}\}$ et $f_{(b_t,v_t)} = inf\{f \in \Delta_s\,;\, f \geq f_{(t,1)}\}$.
Ceux permettant d'obtenir $K'(t)$ sont notés :
$f_{(a'_t,u'_t)} = sup\{f \in \Delta'_s\,;\, f \leq f_{(t,0)}\}$ et $f_{(b'_t,v'_t)} = inf\{f \in \Delta'_s\,;\, f \geq f_{(t,1)}\}$.
Nous n'avons pas ajouté dans les définitions les éléments $f_{(-\infty,0)}$ et $f_{(+\infty,1)}$ car lorsque $t \notin D_i \cup D_s$ on a : $f_{(-\infty,1)} \leq inf\Delta_s = 1\!I_{D_i}(T) \leq f_{(t,0)} < f_{(t,1)} \leq 1 - 1\!I_{D_s}(T) = sup\Delta_s \leq f_{(+\infty,0)}$ (voir la proposition 4.2.1). Nous avons aussi remplacé $\overline{\Delta_s}$ par Δ_s (resp. $\overline{\Delta'_s}$ par Δ'_s), ce qui

ne change rien puisque $]f_{(t,0)}, f_{(t,1)}[$ ne contient aucun élément de Δ_s (resp. Δ'_s).

La valeur de $K(t)$ est alors donné par :

$$K(t) \quad = \quad \begin{cases} b_t - 1 & si \quad (a_t, u_t) = (-\infty, 1) \\ [a_t + b_t]/2 & si \quad -\infty < a_t \leq b_t < +\infty \\ a_t + 1 & si \quad (b_t, v_t) = (+\infty, 0) \ et \ a_t > -\infty \end{cases}$$

On obtient la définition de $K'(t)$ en remplaçant (a_t, u_t) et (b_t, v_t) par (a'_t, u'_t) et (b'_t, v'_t). Posons

$$N = \{t \in IR \ ; \ \forall \omega \in T^{-1}(t) \quad \forall \theta \in \Theta \quad p_\theta(\omega) = 0\}$$

Nous allons montrer que pour t appartenant à $IR-(D_i \cup D_s \cup N)$, nous avons les deux égalités suivantes :

$$f_{(a_t,u_t)} \overset{p.s.}{=} f_{(a'_t,u'_t)} \quad et \quad f_{(b_t,v_t)} \overset{p.s.}{=} f_{(b'_t,v'_t)}$$

Ceci conduit au résultat recherché avec $M \subseteq N$. En effet, on a

$\{K(T) = K(t)\} = \{f_{(b_t,v_t)} - f_{(a_t,u_t)} = 1\}$ et

$\{K'(T) = K'(t)\} = \{f_{(b'_t,v'_t)} - f_{(a'_t,u'_t)} = 1\}$

(voir le $2^{\text{ème}}$ cas de la démonstration de la proposition 4.3.1), donc pour tout θ de Θ :

$$\begin{aligned} G_\theta(K(t)) &= [E_\theta(f_{(a_t,u_t)}) + E_\theta(f_{(b_t,v_t)})]/2 \\ &= [E_\theta(f_{(a'_t,u'_t)}) + E_\theta(f_{(b'_t,v'_t)})]/2 = G'_\theta(K'(t)) \end{aligned}$$

I — $f_{(a_t,u_t)} \overset{p.s.}{=} f_{(a'_t,u'_t)}$ pour $t \in IR-(D_i \cup D_s \cup N)$.

Pour tout couple $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ on considère :

$e_t^{(\theta_0,\theta_1)} = sup\{f \in \Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)} \ ; \ f \leq f_{(t,0)}\} \cup \{f_{(-\infty,1)}\}$ et

$\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = sup\{f \in \Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)} \ ; \ f \leq f_{(t,0)}\} \cup \{f_{(-\infty,1)}\}$.

Nous devons démontrer :

$$sup\{e_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \overset{p.s.}{=} sup\{\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$$

Une condition suffisante est de pouvoir associer à tout couple (θ_0, θ_1) un couple (θ'_0, θ'_1) tel que : $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} \varphi_t^{(\theta'_0,\theta'_1)}$ et $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} e_t^{(\theta'_0,\theta'_1)}$. Ceci est en particulier réalisé lorsque $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{=} \varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$. Nous allons distinguer deux cas.

1^{er} cas : les densités p_{θ_0} et p_{θ_1} ne sont pas séparées.

Les densités p_{θ_0} et p_{θ_1} sont dites non séparées lorsque : $I\!R - (D_i^{\theta_0} \cup D_s^{\theta_1}) \neq \emptyset$; $D_i^{\theta_0} =]-\infty, t_i)$ (resp. $D_s^{\theta_1} = (t_s, +\infty[$) étant la plus grande demi-droite ouverte ou fermée pour laquelle la densité p_{θ_0} (resp. p_{θ_1}) est nulle sur $T^{-1}(D_i^{\theta_0})$ (resp. $T^{-1}(D_s^{\theta_1})$).

$t \in I\!R - (D_i \cup D_s \cup N)$ n'est pas totalement indéterminé puisque $t \notin N$. Nous allons montrer qu'il n'est pas indéterminé pour (θ_0, θ_1).

a) Il existe $\omega' \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta_0}(\omega') > 0$ ou $p_{\theta_1}(\omega') > 0$.

Nous devons démontrer que si $x \in I\!R - (D_i \cup D_s)$ est indéterminé pour (θ_0, θ_1), les densités p_{θ_0} et p_{θ_1} étant non séparées, x est totalement indéterminé.

Nous allons utiliser le résultat 2) du lemme précédent. Il suffit de montrer que l'on ne peut pas avoir $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_x^-) = 0$ et $h_{(\theta_0,\theta_1)}(I_x^+) = +\infty$. Si cela était, on aurait $h_{(\theta_0,\theta_1)}(y) = 0$ (resp. $h_{(\theta_0,\theta_1)}(z) = +\infty$) sur $\{y < I_x\}$ (resp. $\{z > I_x\}$) ; p_{θ_0} (resp. p_{θ_1}) serait nulle sur $T^{-1}(\{y < I_x\})$ (resp. $T^{-1}(\{z > I_x\})$) ; p_{θ_0} et p_{θ_1} étant nulles sur $T^{-1}(I_x)$, on aurait $D_i^{\theta_0} \cup D_s^{\theta_1} = I\!R$; ce qui est impossible puisque p_{θ_0} et p_{θ_1} ne sont pas séparées.

b) $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{=} \varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$.

D'après a) il existe $\omega' \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta_0}(\omega') > 0$ ou $p_{\theta_1}(\omega') > 0$. On a alors $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = p_{\theta_0}(\omega')/p_{\theta_1}(\omega') = k \in \overline{I\!R^+}$.
Lorsque $k = 0$ ceci implique $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = f_{(-\infty,1)}$.
Lorsque $k > 0$ on a $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \phi_{(k,0)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \phi'^{(\theta_0,\theta_1)}_{(k,0)}$ (voir la définition 2.2.1 avec respectivement $K = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ et $K = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$).
Pour obtenir $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{=} \varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$, on doit démontrer que l'événement $E = \{e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \neq \varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}$ est négligeable pour tout P_θ. C'est évident lorsque $E = \emptyset$. Dans le cas contraire $E = T^{-1}(I)$, I étant l'intervalle non vide de $]-\infty, t[$ dont les éléments appartiennent à un seul des intervalles $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = k\}$ et $\{h'_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = k\}$. Tout élément x de I appartient à

$I\!R-(D_i \cup D_s)$ et est indéterminé pour (θ_0,θ_1), sinon les fonctions $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ seraient égales en x. Nous avons vu en a) que x, donc I, est totalement indéterminé. $E = T^{-1}(I)$ est alors bien négligeable.

$2^{\text{ème}}$ cas : les densités p_{θ_0} et p_{θ_1} sont séparées.

Dans ce cas $D_i^{\theta_0} \cup D_s^{\theta_1} = I\!R$. On a bien sûr : $D_i \subseteq D_i^{\theta_0}$ et $D_s \subseteq D_s^{\theta_1}$. De plus $D_i - D_s = D_i$ puisque $t \in I\!R-(D_i \cup D_s \cup N)$, ce qui suppose $D_i \cup D_s \neq I\!R$.

Les différentes positions de $D_s^{\theta_1}$ par rapport à D_i et de $D_i^{\theta_0}$ par rapport à D_s nous conduisent à définir une partition de $I\!R$ en trois intervalles : $A = D_i \cup (I\!R - D_s^{\theta_1})$, $C = D_s \cup (I\!R - D_i^{\theta_0})$ et $B = I\!R - (A + C) \subseteq D_i^{\theta_0} \cap D_s^{\theta_1}$ (on a l'égalité lorsque $D_i \cap D_s^{\theta_1} = \emptyset$ et $D_s \cap D_i^{\theta_0} = \emptyset$).

Ceci revient à poser $1\!I_A\ (T) = sup\{1\!I_{D_i}\ (T), 1 - 1\!I_{D_s^{\theta_1}}\ (T)\}$ et

$1 - 1\!I_C\ (T) = inf\{1 - 1\!I_{D_s}\ (T), 1\!I_{D_i^{\theta_0}}\ (T)\}$.

a) Etude de $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}$.

Nous allons démontrer que $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}$ sont inclus dans $\{1\!I_A\ (T), 1 - 1\!I_C\ (T)\}$. Pour cela nous allons montrer que les fonctions $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ sont égales à 0 sur A, constantes sur B et égales à $+\infty$ sur C. $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}$) est réduit à $\{1\!I_A\ (T)\}$ ou $\{1 - 1\!I_C\ (T)\}$ lorsque la fonction normalisée correspondante est égale à $+\infty$ ou 0 sur l'intervalle B.

i) Si $x \in A$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = 0$.

C'est évident lorsque $x \in D_i$. Dans le cas contraire x n'appartient pas à $D_s^{\theta_1}$; par définition de $D_s^{\theta_1}$, il existe $y \in [x, +\infty[- D_s^{\theta_1}$ et $\omega_y \in T^{-1}(y)$ tels que $p_{\theta_1}(\omega_y) > 0$; comme $y \in D_i^{\theta_0}$ on a en plus $p_{\theta_0}(\omega_y) = 0$, donc $h_{(\theta_0,\theta_1)}(y) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(y) = 0$; la croissance des deux fonctions normalisées entraîne la même propriété en x.

ii) Sur B, $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ sont constantes.

B étant inclus dans $D_i^{\theta_0} \cap D_s^{\theta_1}$, il est indéterminé pour (θ_0,θ_1) ; on a aussi $B \subseteq I\!R-(D_i \cup D_s)$; $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ étant normalisées, elles sont constantes sur l'intervalle B (voir la propriété i) de la définition 4.2.1).

iii) Si $x \in C$, $h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = +\infty$.

C'est évident lorsque $x \in D_s$. Dans le cas contraire x n'appartient pas à $D_i^{\theta_0}$; par définition de $D_i^{\theta_0}$, il existe $y \in]-\infty, x] - D_i^{\theta_0}$ et $\omega_y \in T^{-1}(y)$ tels que $p_{\theta_0}(\omega_y) > 0$; comme $y \in D_s^{\theta_1}$ on a en plus $p_{\theta_1}(\omega_y) = 0$, donc $h_{(\theta_0,\theta_1)}(y) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(y) = +\infty$; la croissance des deux fonctions normalisées entraîne la même propriété en x.

b) $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} \varphi_t^{(\theta'_0,\theta'_1)}$ et $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} e_t^{(\theta'_0,\theta'_1)}$.

Soit $t \in I\!R - (D_i \cup D_s \cup N)$. Il y a trois possibilités par rapport à la partition $I\!R = A + B + C$.

i) $t \in A$.

D'après a-i) on a $h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = 0$, donc
$e_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = f_{(-\infty,1)}$; $(\theta'_0, \theta'_1) = (\theta_0, \theta_1)$ convient.

ii) $t \in B$.

D'après a), $e_t^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$) est égale à $1\!I_A\ (T)$ ou $f_{(-\infty,1)}$.
Nous avons vu en a-ii) que t appartient à $I\!R - (D_i \cup D_s)$ et qu'il est indéterminé pour (θ_0, θ_1) ; mais t n'est pas totalement indéterminé puisque $t \notin N$; d'après la fin de la partie III de la démonstration du lemme précédent, il existe $\theta' \in \Theta_0$ et $\omega' \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta'}(\omega') > 0$. On a donc $h_{(\theta',\theta_1)}(t) = h'_{(\theta',\theta_1)}(t) = +\infty$, ce qui implique : $e_t^{(\theta',\theta_1)} = \phi_{(\infty,0)}^{(\theta',\theta_1)}$ et $\varphi_t^{(\theta',\theta_1)} = \phi'^{(\theta',\theta_1)}_{(\infty,0)}$ (voir la partie b) du 1er cas) ; mais pour $x \in A$ on a $h_{(\theta',\theta_1)}(x) = h'_{(\theta',\theta_1)}(x) < +\infty$ (suivre le raisonnement fait en a-i) avec $\theta_0 = \theta'$ et $p_{\theta'}(\omega_y) \geq 0$), donc $e_t^{(\theta',\theta_1)} \geq 1\!I_A\ (T)$ et $\varphi_t^{(\theta',\theta_1)} \geq 1\!I_A\ (T)$.
Nous venons ainsi de trouver un couple (θ', θ_1) tel que : $e_t^{(\theta_0,\theta_1)} \leq \varphi_t^{(\theta',\theta_1)}$ et $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)} \leq e_t^{(\theta',\theta_1)}$.

iii) $t \in C$.

D'après a), $e_t^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$) est égale à $1\!I_A\ (T)$ ou $1 - 1\!I_C\ (T)$.
Pour obtenir les inégalités recherchées on va trouver un couple (θ_0, θ'_1) tel que : $e_t^{(\theta_0,\theta'_1)} \overset{p.s.}{\geq} 1 - 1\!I_C\ (T)$ et $\varphi_t^{(\theta_0,\theta'_1)} \overset{p.s.}{\geq} 1 - 1\!I_C\ (T)$.

En fait $t \in C-(D_i \cup D_s \cup N)$, il appartient donc à $D_s^{\theta_1}$ sans appartenir à D_s ; par définition de D_s, ceci permet de trouver $\theta_1' \in \Theta_1$ tel que $t \notin D_s^{\theta_1'}$. Comme t n'appartient pas à $D_i^{\theta_0}$, il existe $x \in]-\infty, t]-D_i^{\theta_0}$ et $\omega \in T^{-1}(x)$ tels que $p_{\theta_0}(\omega) > 0$; ce qui implique : $h_{(\theta_0,\theta_1')}(x) > 0$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1')}(x) > 0$; ces deux fonctions étant croissantes on a aussi : $h_{(\theta_0,\theta_1')}(t) = k > 0$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1')}(t) = k' > 0$, donc $e_t^{(\theta_0,\theta_1')} = \phi_{(k,0)}^{(\theta_0,\theta_1')}$ et $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1')} = \phi'^{(\theta_0,\theta_1')}_{(k',0)}$.
Nous allons démontrer l'inégalité $e_t^{(\theta_0,\theta_1')} \overset{p.s.}{\geq} 1- 1\!I_C\ (T)$
(resp. $\varphi_t^{(\theta_0,\theta_1')} \overset{p.s.}{\geq} 1- 1\!I_C\ (T)$)en montrant que l'intervalle $I = \{h_{(\theta_0,\theta_1')}(y) = k\} - C$ (resp. $I' = \{h'_{(\theta_0,\theta_1')}(y) = k'\} - C$) est totalement indéterminé. Comme I (resp. I') est inclus dans $D_i^{\theta_0}$, la densité p_{θ_0} est nulle sur cet intervalle ; k (resp. k') étant non nul, cet intervalle est indéterminé pour (θ_0, θ_1'). Les densités p_{θ_0} et $p_{\theta_1'}$ n'étant pas séparées puisque $t \notin D_i^{\theta_0} \cup D_s^{\theta_1'}$, d'après la partie a) du 1er cas les intervalles I et I', qui sont inclus dans $I\!R-(D_i \cup D_s)$ ($I < t < D_s$, $k > 0$ et $I' < t < D_s$, $k' > 0$), sont totalement indéterminés.

II – $f_{(b_t,v_t)} \overset{p.s.}{=} f_{(b'_t,v'_t)}$ pour $t \in I\!R-(D_i \cup D_s \cup N)$.

Cette démonstration est semblable à celle de la partie I. Pour tout couple $(\theta_0, \theta_1) \in \Theta_0 \times \Theta_1$ on considère :
$g_t^{(\theta_0,\theta_1)} = inf\{f \in \Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}\, ;\, f \geq f_{(t,1)}\} \cup \{f_{(+\infty,0)}\}$ et
$\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = inf\{f \in \Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}\, ;\, f \geq f_{(t,1)}\} \cup \{f_{(+\infty,0)}\}$.
Nous devons démontrer :

$$inf\{g_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1} \overset{p.s.}{=} inf\{\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$$

Une condition suffisante est de pouvoir associer à tout couple (θ_0, θ_1) un couple (θ_0', θ_1') tel que : $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\geq} \psi_t^{(\theta_0',\theta_1')}$ et $\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\geq} g_t^{(\theta_0',\theta_1')}$. Ceci est en particulier réalisé lorsque $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{=} \psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$. Nous allons encore distinguer deux cas.

1er cas : les densités p_{θ_0} et p_{θ_1} ne sont pas séparées.

On va démontrer : $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{=} \psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$.

La partie a) du 1er cas de I reste valable, il existe donc $\omega' \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta_0}(\omega') > 0$ ou $p_{\theta_1}(\omega') > 0$ et on a encore :

$h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(t) = p_{\theta_0}(\omega')/p_{\theta_1}(\omega') = k \in \overline{I\!R^+}$.

Lorsque $k = +\infty$ ceci implique $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = f_{(+\infty,0)}$.

Lorsque $k < +\infty$ on a $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \phi_{(k,1)}^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \phi_{(k,1)}^{'(\theta_0,\theta_1)}$ (voir la définition 2.2.1 avec respectivement $K = h_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$ et $K = h'_{(\theta_0,\theta_1)}(T)$).

Pour obtenir $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{=} \psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$, on doit démontrer que l'événement $E = \{g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \neq \psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}\}$ est négligeable pour tout P_θ. C'est évident lorsque $E = \emptyset$. Dans le cas contraire $E = T^{-1}(I)$, I étant l'intervalle non vide de $]t, +\infty[$ dont les éléments appartiennent à un seul des intervalles $\{h_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = k\}$ et $\{h'_{(\theta_0,\theta_1)}(x) = k\}$. Tout élément x de I appartient à $I\!R - (D_i \cup D_s)$ et est indéterminé pour (θ_0, θ_1), sinon les fonctions $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ et $h'_{(\theta_0,\theta_1)}$ seraient égales en x. Nous avons vu que la partie a) du 1er cas de I reste valable, l'intervalle I est donc totalement indéterminé. $E = T^{-1}(I)$ est alors bien négligeable.

2ème cas : les densités p_{θ_0} et p_{θ_1} sont séparées.

Comme dans le 2ème cas de la partie I, $\Phi_s^{(\theta_0,\theta_1)}$ et $\Phi_{s'}^{(\theta_0,\theta_1)}$ sont inclus dans $\{1\!I_A\,(T), 1-\,1\!I_C\,(T)\}$. Nous allons montrer qu'il existe un couple (θ'_0, θ'_1) tel que : $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\geq} \psi_t^{(\theta'_0,\theta'_1)}$ et $\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\geq} g_t^{(\theta'_0,\theta'_1)}$.

Soit $t \in I\!R - (D_i \cup D_s \cup N)$. On considère les trois possibilités de la partition $I\!R = A + B + C$ définie, à partir de deux densités séparées, dans le 2ème cas de la partie I.

i) $t \in A$.

$g_t^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$) est égale à $1\!I_A\,(T)$ ou $1-\,1\!I_C\,(T)$. Pour obtenir les inégalités recherchées on va trouver un couple (θ'_0, θ_1) tel que : $g_t^{(\theta'_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} 1\!I_A\,(T)$ et $\psi_t^{(\theta'_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} 1\!I_A\,(T)$.

En fait $t \in A - (D_i \cup D_s \cup N)$, il appartient donc à $D_i^{\theta_0}$ sans appartenir à D_i ; par définition de D_i, ceci permet de trouver $\theta'_0 \in \Theta_0$ tel que $t \notin D_i^{\theta'_0}$. Comme t n'appartient pas à $D_s^{\theta_1}$, il existe $x \in [t, +\infty, [-D_s^{\theta_1}$ et $\omega \in T^{-1}(x)$ tels que $p_{\theta_1}(\omega) > 0$; ce qui implique : $h_{(\theta'_0,\theta_1)}(x) < +\infty$

et $h'_{(\theta'_0,\theta_1)}(x) < +\infty$; ces deux fonctions étant croissantes on a aussi : $h_{(\theta'_0,\theta_1)}(t) = k < +\infty$ et $h'_{(\theta'_0,\theta_1)}(t) = k' < +\infty$, donc $g_t^{(\theta'_0,\theta_1)} = \phi_{(k,1)}^{(\theta'_0,\theta_1)}$ et $\psi_t^{(\theta'_0,\theta_1)} = \phi'^{(\theta'_0,\theta_1)}_{(k',1)}$.

Nous allons démontrer l'inégalité $g_t^{(\theta'_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} \mathit{1I}_A\ (T)$
(resp. $\psi_t^{(\theta'_0,\theta_1)} \overset{p.s.}{\leq} \mathit{1I}_A\ (T)$)en montrant que l'intervalle
$I = \{h_{(\theta'_0,\theta_1)}(y) = k\} - A$ (resp. $I' = \{h'_{(\theta'_0,\theta_1)}(y) = k'\} - A$) est totalement indéterminé. Comme I (resp. I') est inclus dans $D_s^{\theta_1}$, la densité p_{θ_1} est nulle sur cet intervalle ; k (resp. k') n'étant pas infini, cet intervalle est indéterminé pour (θ'_0, θ_1). Les densités $p_{\theta'_0}$ et p_{θ_1} étant non séparées puisque $t \notin D_i^{\theta'_0} \cup D_s^{\theta_1}$, d'après la propriété a) du 1$^{\text{er}}$ cas de la partie I les intervalles I et I', qui sont inclus dans $\mathit{IR} - (D_i \cup D_s)$ ($D_i < t < I$, $k < +\infty$ et $D_i < t < I'$, $k' < +\infty$), sont totalement indéterminés.

ii) $t \in B$.

$g_t^{(\theta_0,\theta_1)}$ (resp. $\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)}$) est égale à $1-\ \mathit{1I}_C\ (T)$ ou $f_{(+\infty,0)}$.
Nous avons vu en a-ii) du 2$^{\text{ème}}$ cas de la partie I que t appartient à $\mathit{IR} - (D_i \cup D_s)$ et qu'il est indéterminé pour (θ_0, θ_1) ; mais t n'est pas totalement indéterminé puisque $t \notin N$; d'après la fin de la partie III de la démonstration du lemme précédent, il existe $\theta'' \in \Theta_1$ et $\omega'' \in T^{-1}(t)$ tels que $p_{\theta''}(\omega'') > 0$. On a donc $h_{(\theta_0,\theta'')}(t) = h'_{(\theta_0,\theta'')}(t) = 0$, ce qui implique : $g_t^{(\theta_0,\theta'')} = \phi_{(0,1)}^{(\theta_0,\theta'')}$ et $\psi_t^{(\theta_0,\theta'')} = \phi'^{(\theta_0,\theta'')}_{(0,1)}$ (voir le 1$^{\text{er}}$ cas) ; mais pour $x \in C$ on a $h_{(\theta_0,\theta'')}(x) = h'_{(\theta_0,\theta'')}(x) > 0$ (suivre le raisonnement fait en a-iii) du 2$^{\text{ème}}$ cas de la partie I avec $\theta_1 = \theta''$ et $p_{\theta''}(\omega_y) \geq 0$), donc $g_t^{(\theta_0,\theta'')} \leq 1-\ \mathit{1I}_C\ (T)$ et $\psi_t^{(\theta_0,\theta'')} \leq 1-\ \mathit{1I}_C\ (T)$.
Nous venons ainsi de trouver un couple (θ_0, θ'') tel que : $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} \geq \psi_t^{(\theta_0,\theta'')}$ et $\psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} \geq g_t^{(\theta_0,\theta'')}$.

iii) $t \in C$.

On a $g_t^{(\theta_0,\theta_1)} = \psi_t^{(\theta_0,\theta_1)} = f_{(+\infty,0)}$; $(\theta'_0, \theta'_1) = (\theta_0, \theta_1)$ convient.

ANNEXE IV.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, (p_\theta.\mu)_{\theta\in\Theta})$ un modèle statistique à rapport de vraisemblance monotone par rapport à la statistique réelle T, Θ étant muni de la relation d'ordre totale : $\preceq$. Ceci suppose l'existence, pour $\theta' \prec \theta''$, d'une fonction croissante $h_{(\theta'',\theta')} : I\!R \to \overline{I\!R^+}$ vérifiant $p_{\theta''}/p_{\theta'} = h_{(\theta'',\theta')}(T)$ sur le domaine de définition de ce rapport c'est-à-dire en dehors de $\{\omega \in \Omega\,;\, p_{\theta'}(\omega) = p_{\theta''}(\omega) = 0\}$.

Nous dirons que la fonction $h_{(\theta'',\theta')}$, $\theta' \prec \theta''$, est normalisée si elle est constante sur tout intervalle I indéterminé pour (θ', θ'') :
$\forall \omega \in T^{-1}(I) \quad p_{\theta'}(\omega) = p_{\theta''}(\omega) = 0.$
Nous allons travailler avec une famille $\{h_{(\theta'',\theta')}\}_{\theta'\prec\theta''}$ de fonctions normalisées ; ceci est toujours possible d'après la première étape de l'annexe II ($\theta_0 = \theta''$ et $\theta_1 = \theta'$). Une telle famille permet de construire facilement une famille normalisée $\{h^{\Theta_1}_{(\theta_0,\theta_1)}\}_{(\theta_0,\theta_1)\in\Theta_0\times\Theta_1}$ pour les hypothèses unilatérales $\{\Theta_1, \Theta_0\}$ (voir les définitions 4.2.1 et 5.1.2). D'après la deuxième étape de l'annexe II, il suffit de tronquer les $h_{(\theta_0,\theta_1)}$ de la façon suivante :

$$h^{\Theta_1}_{(\theta_0,\theta_1)}(t) \quad = \quad \begin{cases} 0 & si \quad t \in D_i^{\Theta_0} - D_s^{\Theta_1} \\ h_{(\theta_0,\theta_1)}(t) & si \quad t \in I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1}) \\ +\infty & si \quad t \in D_s^{\Theta_1} \end{cases}$$

avec $D_i^{\Theta_0} = \cap_{\theta\in\Theta_0} D_i^\theta$ et $D_s^{\Theta_1} = \cap_{\theta\in\Theta_1} D_s^\theta$, $D_i^\theta =]-\infty, t)$ (resp. $D_s^\theta = (t, +\infty[$) désignant la plus grande demi-droite ouverte ou fermée pour laquelle p_θ est nulle sur $T^{-1}(D_i^\theta)$ (resp. $T^{-1}(D_s^\theta)$).

Nous allons démontrer quelques propriétés des problèmes de choix entre deux hypothèses simples $\theta' \in \Theta$ et $\theta'' \in \Theta$, $\theta' \prec \theta''$.
$\Phi_s^{(\theta'',\theta')} = \left\{\phi^{(\theta'',\theta')}_{(0,1)}\,;\, \{\phi^{(\theta'',\theta')}_{(k,\beta)}\}_{k\in I\!R^+_*,\,\beta\in\{0,1\}}\,;\, \phi^{(\theta'',\theta')}_{(\infty,0)}\right\}$ est l'ensemble des fonctions de test simples construites à partir du rapport des densités $K = h_{(\theta'',\theta')}(T)$ (voir la définition 2.2.1).

Lemme 1

Soient $\theta' \prec \theta''$, on a :
$\phi_{(0,1)}^{(\theta'',\theta')} \leq 1I_{D_i^{\theta''}}(T)$ *et* $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta'',\theta')} \geq 1 - 1I_{D_s^{\theta'}}(T)$; $D_i^{\theta'} \subseteq D_i^{\theta''}$ *et* $D_s^{\theta''} \subseteq D_s^{\theta'}$.

Démonstration

a) — $\phi_{(0,1)}^{(\theta'',\theta')} \leq 1I_{D_i^{\theta''}}(T)$.

Nous devons démontrer que $\{h_{(\theta'',\theta')} = 0\}$ est inclus dans $D_i^{\theta''}$, puisque $\{\phi_{(0,1)}^{(\theta'',\theta')} = 1\} = \{h_{(\theta'',\theta')}(T) = 0\}$.
Soit t tel que $h_{(\theta'',\theta')}(t) = 0$, pour tout ω de $T^{-1}(t)$ on a $p_{\theta''}(\omega) = 0$, sinon on aurait $h_{(\theta'',\theta')}(t) = p_{\theta''}(\omega)/p_{\theta'}(\omega) > 0$. La demi-droite inférieure $\{h_{(\theta'',\theta')} = 0\}$ est donc bien incluse dans $D_i^{\theta''}$.

b) — $\phi_{(\infty,0)}^{(\theta'',\theta')} \geq 1 - 1I_{D_s^{\theta'}}(T)$.

Ceci est équivalent à $\{h_{(\theta'',\theta')} = +\infty\} \subseteq D_s^{\theta'}$, puisque : $\{\phi_{(\infty,0)}^{(\theta'',\theta')} = 0\} = \{h_{(\theta'',\theta')}(T) = +\infty\}$.
Soit t tel que $h_{(\theta'',\theta')}(t) = +\infty$, pour tout ω de $T^{-1}(t)$ on a $p_{\theta'}(\omega) = 0$, sinon on aurait $h_{(\theta'',\theta')}(t) = p_{\theta''}(\omega)/p_{\theta'}(\omega) < +\infty$. La demi-droite supérieure $\{h_{(\theta'',\theta')} = +\infty\}$ est donc bien incluse dans $D_s^{\theta'}$.

c) — $D_i^{\theta'} \subseteq D_i^{\theta''}$.

Si on avait $I = D_i^{\theta'} - D_i^{\theta''} \neq \emptyset$, il existerait $\omega \in T^{-1}(t)$, $t \in I$, tel que $p_{\theta''}(\omega) > 0$ et $p_{\theta'}(\omega) = 0$; on aurait $h_{(\theta'',\theta')}(t) = +\infty$ et $[t, +\infty[$ serait inclus dans $D_s^{\theta'}$ (voir b)) ; ceci est impossible car on ne peut pas avoir $D_i^{\theta'} \cup D_s^{\theta'} = IR$.

d) — $D_s^{\theta''} \subseteq D_s^{\theta'}$.

La démonstration est semblable à la précédente. Si on avait $I = D_s^{\theta''} - D_s^{\theta'} \neq \emptyset$, il existerait $\omega \in T^{-1}(t)$, $t \in I$, tel que $p_{\theta'}(\omega) > 0$ et $p_{\theta''}(\omega) = 0$; on aurait $h_{(\theta'',\theta')}(t) = 0$ et $]-\infty, t]$ serait inclus dans $D_i^{\theta''}$ (voir a)) ; ceci est impossible car on ne peut pas avoir $D_i^{\theta''} \cup D_s^{\theta''} = IR$.

Lemme 2

Soient $\theta_a \prec \theta_b \prec \theta_c$ et $t \in I\!R$. Posons $h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1$, $h_{(\theta_c,\theta_a)}(t) = k_2$ et $h_{(\theta_c,\theta_b)}(t) = k_3$ (les fonctions h étant normalisées).

1) S'il existe $\omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que : $p_{\theta_a}(\omega_t) > 0$ et $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$ (resp. $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$ et $p_{\theta_c}(\omega_t) > 0$), alors $k_2 = k_3.k_1$.

2) Dans le premier cas : $p_{\theta_a}(\omega_t) > 0$ et $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$, on a
$\phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{\phi_{(k_1,0)}^{(\theta_b,\theta_a)}, \phi_{(k_2,0)}^{(\theta_c,\theta_a)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}}(T)\}$ *et*
$\phi_{(k_3,1)}^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{\phi_{(k_1,1)}^{(\theta_b,\theta_a)}, \phi_{(k_2,1)}^{(\theta_c,\theta_a)}, 1 - 1I_{D_s^{\{\theta\prec\theta_b\}}}(T)\}$.

3) Dans le second cas : $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$ et $p_{\theta_c}(\omega_t) > 0$, on a
$\phi_{(k_1,0)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{\phi_{(k_2,0)}^{(\theta_c,\theta_a)}, \phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}}(T)\}$ *et*
$\phi_{(k_1,1)}^{(\theta_b,\theta_a)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{\phi_{(k_2,1)}^{(\theta_c,\theta_a)}, \phi_{(k_3,1)}^{(\theta_c,\theta_b)}, 1 - 1I_{D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}}(T)\}$.

Ces écritures peuvent contenir des fonctions de test de la forme $\phi_{(0,0)}^{(\theta'',\theta')}$ (resp. $\phi_{(\infty,1)}^{(\theta'',\theta')}$), elles représentent $1I_\emptyset$ (resp. $1I_\Omega$).

Démonstration

On considère les trois intervalles de $I\!R$ contenant t définis par :

$I_1 = \{h_{(\theta_b,\theta_a)} = k_1\}$, $I_2 = \{h_{(\theta_c,\theta_a)} = k_2\}$ et $I_3 = \{h_{(\theta_c,\theta_b)} = k_3\}$.

1^er^ cas : $\exists\, \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta_a}(\omega_t) > 0$ et $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$.

$k_1 = h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = h_{(\theta_b,\theta_a)}(T(\omega_t)) = p_{\theta_b}(\omega_t)/p_{\theta_a}(\omega_t) \in]0, +\infty[$.

Que $p_{\theta_c}(\omega_t)$ soit nul ou pas, on a toujours

$p_{\theta_c}(\omega_t)/p_{\theta_a}(\omega_t) = [p_{\theta_c}(\omega_t)/p_{\theta_b}(\omega_t)].[p_{\theta_b}(\omega_t)/p_{\theta_a}(\omega_t)]$, donc $k_2 = k_3.k_1$ (ce qui démontre le 1^er^ cas de la propriété 1) du lemmme).

a) — Démonstration de $\phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{\phi_{(k_1,0)}^{(\theta_b,\theta_a)}, \phi_{(k_2,0)}^{(\theta_c,\theta_a)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}}(T)\}$.

Lorsque $\{x < I_3\} \cap I_1 = \emptyset$ ou $\{x < I_3\} \cap I_2 = \emptyset$ ou $\{x < I_3\} \subseteq D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}$, l'inégalité recherchée est bien vérifiée puisque l'on a alors respectivement $\phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)} \leq \phi_{(k_1,0)}^{(\theta_b,\theta_a)}$ ou $\phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)} \leq \phi_{(k_2,0)}^{(\theta_c,\theta_a)}$ ou $\phi_{(k_3,0)}^{(\theta_c,\theta_b)} \leq 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}}(T)$.

Dans le cas contraire, on a $\{x < I_3\} \cap I_1 \neq \emptyset$, $\{x < I_3\} \cap I_2 \neq \emptyset$ et $\{x < I_3\} \supset D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}}$; ce qui est équivalent à $I = (\{x < I_3\} \cap I_1 \cap I_2) - D_i^{\{\theta\succ\theta_a\}} \neq \emptyset$ puisque l'intervalle $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ n'est pas vide (il contient t).

L'intervalle I est égal à $\{x < I_3\} \cap I_1$ ou $\{x < I_3\} \cap I_2$ ou $\{x < I_3\} - D_i^{\{\theta \succ \theta_a\}}$, pour démontrer l'inégalité recherchée il suffit de montrer que I est totalement indéterminé : $\forall \omega \in T^{-1}(I)$ $\forall \theta \in \Theta$ $p_\theta(\omega) = 0$.

Soit $x \in I$.

i) Commençons par montrer que x est indéterminé pour (θ_b, θ_a).

Supposons qu'il existe $\omega_x \in T^{-1}(x)$ tel que $p_{\theta_b}(\omega_x) > 0$, comme $x \in I_1$ et $k_1 < +\infty$ on aurait aussi $p_{\theta_a}(\omega_x) > 0$ donc $k_2 = h_{(\theta_c, \theta_b)}(x).k_1$ (d'après le 1[er] cas de la propriété 1) du lemme et le fait que x appartient à $I_1 \cap I_2$) ; ce qui est impossible car $k_2 = k_3.k_1$ et $h_{(\theta_c,\theta_b)}(x) < k_3$ puisque $x < I_3$.

La densité p_{θ_b} est donc nulle sur $T^{-1}(x)$; comme $h_{(\theta_b,\theta_a)}(x) = k_1 > 0$ la densité p_{θ_a} est aussi nulle sur $T^{-1}(x)$.

ii) x est totalement indéterminé.

Nous allons appliquer la propriété 2) du lemme 1 de l'annexe III à x indéterminé pour (θ_b, θ_a), les hypothèses unilatérales étant définies par $\Theta_1 = \{\theta \preceq \theta_a\}$ et $\Theta_0 = \{\theta \succ \theta_a\}$.

Montrons d'abord que x est un élément de $I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1})$; par définition il n'appartient pas à $D_i^{\{\theta \succ \theta_a\}} = D_i^{\Theta_0}$; d'après le lemme 1 de cette annexe on a $D_s^{\Theta_1} = D_s^{\theta_a}$, x n'appartient donc pas non plus à $D_s^{\Theta_1}$ puisque $x < t \in I_3$ et $p_{\theta_a}(\omega_t) > 0$.

Notons I_x le plus grand intervalle de $I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1})$ contenant x et indéterminé pour (θ_b, θ_a). Nous allons montrer que $h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(I_x^+) = inf\{h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(y) \,;\, y > I_x\} \cup \{+\infty\}$ n'est pas infini, la partie 2) du lemme 1 de l'annexe III implique alors la propriété recherchée. t n'étant pas indéterminé pour (θ_b, θ_a), on a $t > I_x$ et $t \notin D_s^{\Theta_1} = D_s^{\theta_a}$ donc

$h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(I_x^+) \leq h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(t) \leq h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1 < +\infty$.

b) — Démonstration de $\phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,1)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,1)}, \phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,1)}, 1 - 1\!I_{D_s^{\{\theta \prec \theta_b\}}}(T)\}$.

Lorsque $\{x > I_3\} \cap I_1 = \emptyset$ ou $\{x > I_3\} \cap I_2 = \emptyset$ ou $\{x > I_3\} \subseteq D_s^{\{\theta \prec \theta_b\}}$, l'inégalité recherchée est bien vérifiée puisque l'on a alors respectivement $\phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,1)} \geq \phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,1)}$ ou $\phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,1)} \geq \phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,1)}$ ou $\phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,1)} \geq 1-\ 1\!I_{D_s^{\{\theta\prec\theta_b\}}}(T)$.

Dans le cas contraire, on a $\{x > I_3\} \cap I_1 \neq \emptyset$, $\{x > I_3\} \cap I_2 \neq \emptyset$ et $\{x > I_3\} \supset D_s^{\{\theta\prec\theta_b\}}$; ce qui est équivalent à $J = (\{x > I_3\} \cap I_1 \cap I_2) - D_s^{\{\theta\prec\theta_b\}} \neq \emptyset$ puisque l'intervalle $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ n'est pas vide (il contient t). L'intervalle J est égal à $\{x > I_3\} \cap I_1$ ou $\{x > I_3\} \cap I_2$ ou $\{x > I_3\} - D_s^{\{\theta\prec\theta_b\}}$, pour démontrer l'inégalité recherchée il suffit de montrer que J est totalement indéterminé : $\forall \omega \in T^{-1}(J)\ \forall \theta \in \Theta\ p_\theta(\omega) = 0$.

Soit $x \in J$.

i) Commençons par montrer que x est indéterminé pour (θ_b, θ_a).
C'est le même raisonnement qu'en a)i), la contradiction venant du fait que $h_{(\theta_c,\theta_b)}(x) > k_3$, puisque $x > I_3$.
ii) x est totalement indéterminé.
Nous allons appliquer la propriété 2) du lemme 1 de l'annexe III à x indéterminé pour (θ_b, θ_a), les hypothèses unilatérales étant définies par $\Theta_1 = \{\theta \prec \theta_b\}$ et $\Theta_0 = \{\theta \succeq \theta_b\}$.
Montrons d'abord que x est un élément de $I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1})$; par définition il n'appartient pas à $D_s^{\{\theta\prec\theta_b\}} = D_s^{\Theta_1}$; d'après le lemme 1 de cette annexe on a $D_i^{\Theta_0} = D_i^{\theta_b}$, x n'appartient donc pas non plus à $D_i^{\Theta_0}$ puisque $x > t \in I_3$ et $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$.
Notons I_x le plus grand intervalle de $I\!R - (D_i^{\Theta_0} \cup D_s^{\Theta_1})$ contenant x et indéterminé pour (θ_b, θ_a). Nous allons montrer que $h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(I_x^-) = sup\{h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(y)\,;\, y < I_x\} \cup \{0\}$ n'est pas nul, la partie 2) du lemme 1 de l'annexe III implique alors la propriété recherchée. t n'étant pas indéterminé pour (θ_b, θ_a), on a $t < I_x$ et $t \notin D_i^{\Theta_0} = D_i^{\theta_b}$ donc
$h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(I_x^-) \geq h^{\Theta_1}_{(\theta_b,\theta_a)}(t) \geq h_{(\theta_b,\theta_a)}(t) = k_1 > 0$.

2^{ème} cas : $\exists\, \omega_t \in T^{-1}(t)$ tel que $p_{\theta_b}(\omega_t) > 0$ et $p_{\theta_c}(\omega_t) > 0$.

La démonstration est semblable à celle du 1^{er} cas.

$k_3 = h_{(\theta_c,\theta_b)}(t) = h_{(\theta_c,\theta_b)}(T(\omega_t)) = p_{\theta_c}(\omega_t)/p_{\theta_b}(\omega_t) \in]0, +\infty[$.

Que $p_{\theta_a}(\omega_t)$ soit nul ou pas, on a toujours $p_{\theta_c}(\omega_t)/p_{\theta_a}(\omega_t) = [p_{\theta_c}(\omega_t)/p_{\theta_b}(\omega_t)].[p_{\theta_b}(\omega_t)/p_{\theta_a}(\omega_t)]$, donc $k_2 = k_3.k_1$ (ce qui démontre le 2$^{\text{ème}}$ cas de la propriété 1) du lemmme).

a) — Démonstration de $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,0)} \overset{p.s.}{\leq} sup\{\phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,0)}, \phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,0)}, 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}}(T)\}$.

Lorsque $\{x < I_1\} \cap I_2 = \emptyset$ ou $\{x < I_1\} \cap I_3 = \emptyset$ ou $\{x < I_1\} \subseteq D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}$, l'inégalité recherchée est bien vérifiée puisque l'on a alors respectivement $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,0)} \leq \phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,0)}$ ou $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,0)} \leq \phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,0)}$ ou $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,0)} \leq 1I_{D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}}(T)$.

Dans le cas contraire, on a $\{x < I_1\} \cap I_2 \neq \emptyset$, $\{x < I_1\} \cap I_3 \neq \emptyset$ et $\{x < I_1\} \supset D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}$; ce qui est équivalent à $I = (\{x < I_1\} \cap I_2 \cap I_3) - D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}} \neq \emptyset$ puisque l'intervalle $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ n'est pas vide (il contient t). L'intervalle I est égal à $\{x < I_1\} \cap I_2$ ou $\{x < I_1\} \cap I_3$ ou $\{x < I_1\} - D_i^{\{\theta\succ\theta_b\}}$, pour démontrer l'inégalité recherchée il suffit de montrer que I est totalement indéterminé : $\forall\omega \in T^{-1}(I)$ $\forall\theta \in \Theta$ $p_\theta(\omega) = 0$.

Soit $x \in I$.

i) Commençons par montrer que x est indéterminé pour (θ_c, θ_b).

Supposons qu'il existe $\omega_x \in T^{-1}(x)$ tel que $p_{\theta_b}(\omega_x) > 0$, comme $x \in I_3$ et $k_3 > 0$ on aurait aussi $p_{\theta_c}(\omega_x) > 0$ donc $k_2 = k_3.h_{(\theta_b,\theta_a)}(x)$ (d'après le 2$^{\text{ème}}$ cas de la propriété 1) du lemme et le fait que x appartient à $I_2 \cap I_3$) ; ce qui est impossible car $k_2 = k_3.k_1$ et $h_{(\theta_b,\theta_a)}(x) < k_1$ puisque $x < I_1$.

La densité p_{θ_b} est donc nulle sur $T^{-1}(x)$; comme $h_{(\theta_c,\theta_b)}(x) = k_3 < +\infty$ la densité p_{θ_c} est aussi nulle sur $T^{-1}(x)$.

ii) x est totalement indéterminé.

La démonstration est celle de la partie a)ii) du 1$^{\text{er}}$ cas en remplaçant θ_b par θ_c, θ_a par θ_b, I_3 par I_1 et k_1 par k_3.

b) — Démonstration de $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,1)} \overset{p.s.}{\geq} inf\{\phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,1)}, \phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,1)}, 1- 1I_{D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}}(T)\}$.

Lorsque $\{x > I_1\} \cap I_2 = \emptyset$ ou $\{x > I_1\} \cap I_3 = \emptyset$ ou $\{x > I_1\} \subseteq D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}$, l'inégalité recherchée est bien vérifiée puisque l'on a alors respectivement $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,1)} \geq \phi^{(\theta_c,\theta_a)}_{(k_2,1)}$ ou $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,1)} \geq \phi^{(\theta_c,\theta_b)}_{(k_3,1)}$ ou $\phi^{(\theta_b,\theta_a)}_{(k_1,1)} \geq 1 - \mathit{1I}_{D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}}(T)$.

Dans le cas contraire, on a $\{x > I_1\} \cap I_2 \neq \emptyset$, $\{x > I_1\} \cap I_3 \neq \emptyset$ et $\{x > I_1\} \supset D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}$; ce qui est équivalent à $J = (\{x > I_1\} \cap I_2 \cap I_3) - D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}} \neq \emptyset$ puisque l'intervalle $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ n'est pas vide (il contient t). L'intervalle J est égal à $\{x > I_1\} \cap I_2$ ou $\{x > I_1\} \cap I_3$ ou $\{x > I_1\} - D_s^{\{\theta\prec\theta_c\}}$, pour démontrer l'inégalité recherchée il suffit de montrer que J est totalement indéterminé : $\forall \omega \in T^{-1}(J)$ $\forall \theta \in \Theta$ $p_\theta(\omega) = 0$.

Soit $x \in J$.

i) Commençons par montrer que x est indéterminé pour (θ_c, θ_b).
C'est le même raisonnement que celui de la partie a)i) du 2$^{\text{ème}}$ cas, la contradiction venant du fait que $h_{(\theta_b,\theta_a)}(x) > k_1$, puisque $x > I_1$.
ii) x est totalement indéterminé.
La démonstration est celle de la partie b)ii) du 1$^{\text{er}}$ cas en remplaçant θ_b par θ_c, θ_a par θ_b, I_3 par I_1 et k_1 par k_3.

BIBLIOGRAPHIE

[Bar.] J.R. Barra.

Notions fondamentales de statistique mathématique. Dunod, Paris, 1971.

[Ber.] J.O. Berger.

Statistical decision theory and Bayesian analysis (second edition). Springer-Verlag, New York, 1985.

[BerD] J.O. Berger, M. Delampady.

Testing precise hypotheses. *Statist. Science,* 2, p. 317-352, 1987.

[Bor.] A. Borovkov.

Statistique mathématique. Mir, Moscou, 1987.

[Bre.] L. Breiman.

Probability. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968.

[DacD] D. Dacunha-castelle, M. Duflo.

Probabilités et statistiques. Tome 1 : problèmes à temps fixe (2ème édition). Masson, Paris, 1994.

[DhaM] I.D. Dhariyal, N. Misra, R.K.S. Rathore.

Selecting the better of two binomial populations : optimal decision rules. *Calcutta Statist. Assoc. Bull.,* 38, p. 157-167, 1989.

[Dic.] J.M. Dickey.

Three multidimensional-integral identities with bayesian applications. *Ann. Math. Statist.,* 39, p. 1615-1628, 1968.

[Gei.] S. Geisser.

On prior distributions for binary trials. *American Statist.,* 38, p. 244-251, 1984.

[HenT] P.L. Hennequin, A. Tortrat.

Théorie des probabilités et quelques applications. Masson, Paris, 1965.

[HwaC] J.T. Hwang, G. Casella, C. Robert, M.T. Wells, R.H. Farrell.

Estimation of accuracy in testing. *Ann. Statist.,* 20, p. 490-509, 1992.

[Kar.] S. Karlin.

Decision theory for Pólya type distributions. Case of two actions, I. *Proc. Third Berkeley Symposium on Math. Statist. and Prob.,* Vol 1, Univ. of Calif. Press, Berkeley, p. 115-128, 1955.

[KarR] S. Karlin, H. Rubin.

The theory of decision procedures for distributions with monotone likelihood ratio. *Ann. Math. Statist.,* 27, p. 272-299, 1956.

[KroM] A.H. Kroese, E.A. van der Meulen, K. Poortema, W. Schaafsma.

Distributional inference. *Statistica Neerlandica,* 49, p. 63-82, 1995.

[Leh.] E.L. Lehmann.

Testing statistical hypotheses (second edition). Wiley, New York, 1986.

[Mon.] A. Monfort.

[1] Cours de probabilités. Economica, Paris, 1980.

[2] Cours de statistique mathématique. Economica, Paris, 1982.

[Mor.] G. Morel.

[1] Procédures statistiques pour espace de décisions totalement ordonné et famille de lois à vraisemblance monotone (thèse). Université de Rouen, France, 1987.

[2] Décisions liées aux intervalles d'une partition : le problème du choix dans la pratique de la recherche. *Pub. Inst. Stat. Univ.,* XXXII, fasc. 1-2, p. 93-111, 1987.

[Ney.] J. Neyman, E.S. Pearson.

On the testing of statistical hypotheses in relation to probability a priori. *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* 29, p. 492-510, 1933.

[Nev.] J. Neveu.

Calcul des probabilités. Masson, Paris, 1970.

[Nik.] M.S. Nikulin..

[1] On a result of L.N. Bol'shev from the theory of the statistical testing of hypotheses. *Zap. Nauchn. Sem. Leningr. Otd. Mat. Inst.,* 153, p. 129-137, 1986.

[2] Estimation of the efficiency of Bol'shev's decision rule in the problem of distinguishing of two hypotheses. *J. Soviet Math.,* 52, p.2955-2964, 1990.

[Pfa.] J. Pfanzagl.

A technical lemma for monotone likelihood ratio families. *Ann. Math. Statist.,* 38, p. 611-613, 1967.

[Rén.] A. Rényi.

Calcul des probabilités. Dunod, Paris, 1966.

[Reu.] M. Reuchlin.

Epreuves d'hypothèses nulles et inférence fiduciaire en psychologie. *J. de Psychologie,* 3, p. 277-292, 1977.

[Rob.] C. Robert.

L'analyse statistique bayésienne. Economica, Paris, 1992.

[Rou.] R.D. Routledge.

Practicing safe statistics with the mid-p^*. *Canad. J. Statist.,* 22, p. 103-110, 1994.

[SchT] W. Schaafsma, J. Tolboom, B. van der Meulen.

Discussing truth or falsity by computing a Q-value. *Statistical Data Analysis and Inference,* Dodge, North-Holland, p. 85-100, 1989.

[Sch.] H. Scheffé.

The analysis of variance(6ème édition). Wiley, New York, 1970.

[Ste.] W.L. STEVENS.

Shorter intervals for the parameter of the binomial and poisson distributions. *Biometrika,* 44, p. 436-440, 1957.

[Wan.] C. WANG.

Sense and nonsense of statistical inference. Dekker, New York, 1993.

TABLE des DÉFINITIONS

TABLE des PROPOSITIONS