

# Réseaux d'Automates de Caianiello

## Revisité

René Ndoundam, Maurice Tchunte

Département d'Informatique,

Université de Yaoundé I, B.P. 812 Yaoundé, Cameroun

E.mail: ndoundam@uycdc.uninet.cm, tchunte@uycdc.uninet.cm

### Résumé

Nous exhibons une famille d'automates de McCulloch et Pitts de taille  $2nk + 2$  qui est simulable par un réseau d'automates de Caianiello de taille  $2n + 2$  et de taille mémoire  $k$ . Cette simulation nous permet de retrouver l'un des résultats de l'article suivant: [Cycles exponentiels des réseaux de Caianiello et compteurs en arithmétique redondante, Technique et Science Informatiques Vol. 19, pages 985-1008] sur l'existence d'un réseau d'automates de Caianiello de taille  $2n + 2$  et de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $k \times 2^{nk}$ .

**Mots Clés:** Réseau d'automates de Caianiello, mémoire, transitoire, cycle.

## 1 Introduction

Le cerveau humain peut être vu comme un ensemble de neurones interconnectés. McCulloch et Pitts ont suggéré en 1943 de modéliser le cerveau par un réseau d'automates à seuil, où chaque automate représente un neurone formel [5].

Si nous supposons qu'à chaque neurone formel est associé un numéro per-

mettant de le référencer, alors l'état à l'instant  $t$  du neurone  $i$  est donné par:

$$x_i(t+1) = \mathbf{1}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) - \theta_i\right) \quad 1 \leq i \leq n \quad (1)$$

où :

- $\mathbf{1}$  est la fonction de Heaviside définie par:

$$\mathbf{1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- $x_i(t)$  est la variable booléenne qui représente l'état du neurone  $i$  au temps  $t$ ,  $x_i(t) \in \{0, 1\}$ .
- $\theta_i$  est le seuil du neurone  $i$ .
- $a_{ij}$  est un réel appelé coefficient d'interaction qui représente l'influence du neurone  $j$  au temps  $t$  sur l'état du neurone  $i$  au temps  $t + 1$
- $n$  est le nombre de neurones.

L'influence du neurone  $j$  sur le neurone  $i$  est dite excitatrice si  $a_{ij}$  est positif, inhibitrice si  $a_{ij}$  est négatif, et nulle si  $a_{ij}$  est égal à zéro.

Caianiello et De Luca [1] ont proposé l'étude de la dynamique de l'équation (1) dans le cas d'un neurone qui n'interagit pas avec aucun autre neurone par une équation neuronale de la forme:

$$x(n) = \mathbf{1}\left(\sum_{j=1}^k a_j x(n-j) - \theta\right) \quad (2)$$

où :

- $x(n-j)$  est l'état du neurone à l'instant  $n-j$ .
- $a_j$  est un nombre réel qui représente l'influence de l'état du neurone à l'instant  $n-j$  sur l'état du neurone à l'instant  $n$ .

- $\theta$  est le seuil d'excitation du neurone.
- $k$  est la taille de la mémoire, c'est-à-dire que l'état du neurone à l'instant  $n$  ne dépend que de ses états aux  $k$  étapes précédentes.

Le comportement dynamique de l'équation neuronale (2) ci-dessus est entièrement déterminé par la taille de la mémoire  $k$ , le seuil d'excitation  $\theta$ , les coefficients d'interaction  $(a_j)_{1 \leq j \leq k}$  et les  $k$  termes initiaux  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ .

Caianiello a généralisé l'étude du réseau neuronal (1) de McCulloch et Pitts en considérant que chaque neurone a une taille mémoire  $k$

$$y_i(t+1) = \mathbf{1} \left( \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^k a_{ij}(s) y_j(t+1-s) - \theta_i \right) \quad 1 \leq i \leq n, \quad t \geq k-1 \quad (3)$$

où :

- $y_j(t+1-s)$  est l'état du neurone  $j$  à l'instant  $t+1-s$ .
- $a_{ij}(s)$  est un réel qui représente l'influence de l'état du neurone  $j$  à l'instant  $t+1-s$  sur l'état du neurone  $i$  à l'instant  $t+1$ .
- $\theta_i$  est le seuil d'excitation du neurone  $i$ .
- $\sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^k a_{ij}(s) y_j(t+1-s)$  est le potentiel membranaire du neurone  $i$  à l'instant  $t$ .
- $n$  est le nombre de neurones du réseau.
- $k$  est la taille de la mémoire.

Dans l'étude de la dynamique du réseau neuronal (1) de McCulloch et Pitts, Goles et Olivos [7] ont démontré que dans le cas où  $A = (a_{ij})$  est symétrique, le réseau converge vers un cycle de longueur 2 ou vers un point fixe. Dans l'étude du réseau neuronal de McCulloch et Pitts, Goles [8] a démontré que

si  $A = (a_{ij})$  est symétrique et les éléments diagonaux sont positifs, l'itération séquentielle converge vers des points fixes. Dans le cas où la matrice  $A$  est non symétrique, Matamala [15] a exhibé une évolution cyclique de longueur  $2^n$ , Ndoundam [16, 18] a exhibé une évolution cyclique de longueur  $2^{n/2}$  où  $n$  est le nombre de neurones. Goles et Martínez [11] ont exhibé dans le cas où la matrice d'interaction  $A = (a_{ij})$  est symétrique une configuration qui décrit un transitoire de longueur  $2^{n/3}$ .

Dans l'étude de la dynamique de l'équation neuronale récurrente (2) de Caianiello et De Luca, nous notons  $LP(k)$  la plus longue période des suites que peut générer un neurone dont la taille mémoire est  $k$ . Dans [2], il est conjecturé que  $LP(k)$  est inférieure ou égale à  $2k$ . Cette conjecture a été infirmée dans [14, 3, 22] où on a exhibé respectivement des suites de périodes  $2k+6$ ,  $O(k^3)$ , et  $O(e^{\sqrt{k}})$  générés par des équations neuronales de taille mémoire  $k$ . Cette borne est portée aisément à  $O(e^{\sqrt{k \log(k)}})$  en prenant la même construction que dans [22], mais en se restreignant aux périodes qui sont les nombres premiers.

Dans l'étude de la dynamique du réseau neuronal (3) de Caianiello, Goles [10] a démontré que si la classe des matrices d'interaction est palindromique (c'est-à-dire  $A(k+1-s) = {}^t A(s)$ ), alors la période  $T$  est un diviseur de  $k+1$  et d'autre part [6] que si les matrices  $A(i)$ ,  $i = 1, \dots, k$  ne sont pas symétriques, il existe des cycles de longueur  $\frac{(k-1)(k+2)}{2} + 1$ .

Dans cet article, nous rappelons la simulation d'un compteur BS par un réseau neuronal de McCulloch et Pitts donnée dans [18]. Nous montrons comment une famille de réseaux de McCulloch et Pitts de taille  $2nk + 2$  peut être simulée par un réseau d'automates de Caianiello de taille  $2n + 2$  et de taille mémoire  $k$ . Cette simulation nous permet de retrouver l'un des résultats de l'article [18] sur l'existence d'un réseau neuronal de Caianiello de taille  $2n + 2$

et de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $k \times 2^{nk}$ .

Le reste du papier est organisé ainsi: le paragraphe 2 est consacré à la simulation du compteur BS par un réseau neuronal de McCulloch et Pitts. Le paragraphe 3 présente les suites  $U_n$  et  $V_n$ . Le paragraphe 4 est dédié la simulation de la suite  $V_n$  par un réseau neuronal de McCulloch et Pitts. L'étude de l'évolution pour les réseaux généraux de Caianiello est faite dans le paragraphe 5. Le paragraphe 6 est consacré à la conclusion.

## 2 Incrémenteur BS

La notation BS de l'anglais *Borrow-Save* par analogie avec la notation *Carry-Save* est due à Guyot, Herreros et Muller [13], elle utilise deux bits pour l'écriture d'un chiffre appartenant à  $\{-1, 0, 1\}$ . Les nombres sont écrits en base 2 avec des chiffres égaux à  $\bar{1}$  (pour -1), 0 et 1. On convient de représenter un chiffre  $c$ ,  $c \in \{-1, 0, 1\}$  par un couple de bits  $(c^+, c^-)$  tel que  $c$  est égal à  $c^+ - c^-$ . En notation BS, le code suivant  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_i^+, a_i^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$  est égal à  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_i^+ - a_i^-) \times 2^i$  en base dix.

L'incrémenteur BS [4] utilise le principe de l'additionneur BS introduit par Duprat et Muller [4] et nécessite une seule rangée de cellules. Plus précisément, soient:

$$\begin{aligned} A &= ((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_i^+, a_i^-) \dots (a_0^+, a_0^-)) \\ S &= ((s_n^+, s_n^-)(s_{n-1}^+, s_{n-1}^-) \dots (s_i^+, s_i^-) \dots (s_0^+, s_0^-)) \end{aligned}$$

où 1 est codé sous la forme  $((0, 0) \dots (0, 0)(1, 0))$ .

L'incrémenteur BS présenté dans la figure 1 reçoit en entrée  $a_i^+$ ,  $a_i^-$  ( $0 \leq$

$i \leq n - 1$ ) et délivre en sortie les termes  $s_i^+$ ,  $s_i^-$  ( $0 \leq i \leq n$ ).

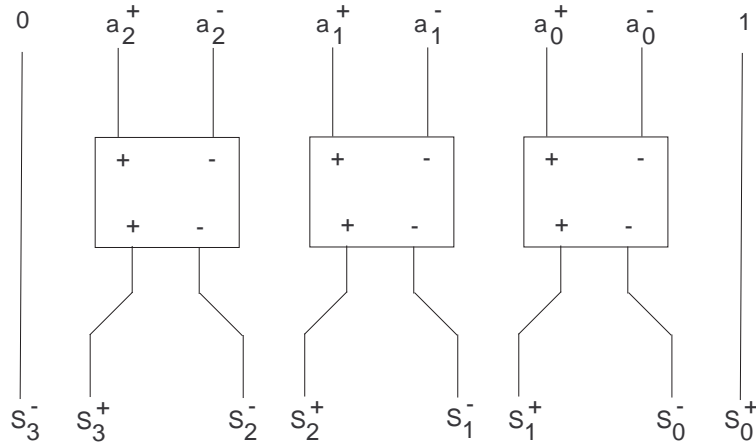


Figure 1: Incrémenteur BS

La cellule élémentaire d'un incrémenteur BS fonctionne comme l'indique la figure 2:

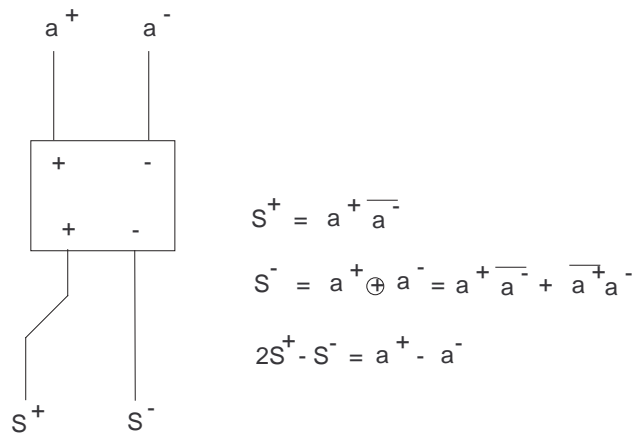


Figure 2: Cellule élémentaire d'incrémentaion BS

En utilisant le fait que  $a^+ \oplus a^- = a^+ \overline{a^-} + \overline{a^+} a^-$ , l'incrémenteur BS se décompose aisément en deux étages comme présenté dans la figure 3:

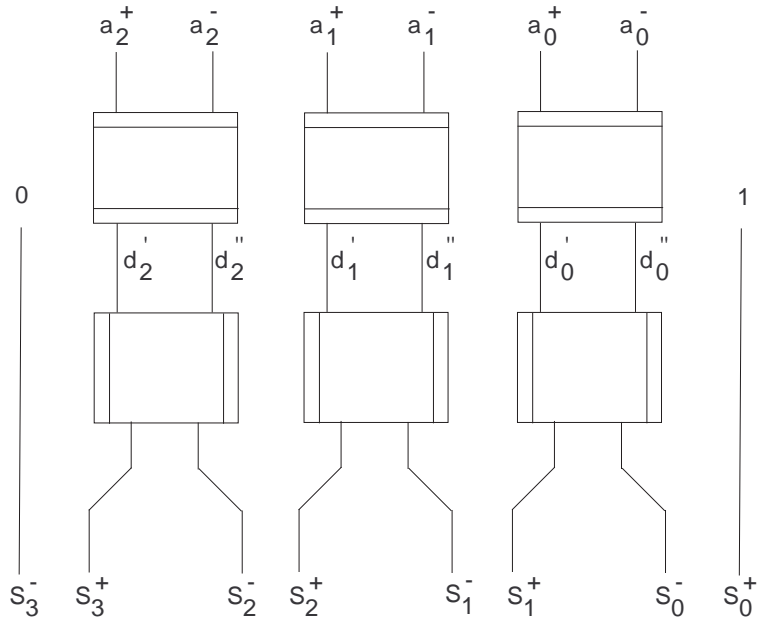


Figure 3: Incrémenteur BS à deux étages

**Première étape:**

Le premier étage reçoit en entrée  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_i^+, a_i^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$ , calcule les termes  $a_i^+ \overline{a_i^-}$ ,  $\overline{a_i^+} a_i^-$  et délivre en sortie  $(d'_{n-1}, d''_{n-1}, \dots, d'_0, d''_0)$

selon les formules:

$$d'_i = a_i^+ \overline{a_i^-} \quad \text{et} \quad d''_i = \overline{a_i^+} a_i^- \quad 0 \leq i \leq n-1$$

**Deuxième étape:**

Le second étage reçoit en entrée  $(d'_{n-1}, d''_{n-1}, \dots, d'_0, d''_0)$  et délivre en sortie  $((s_n^+, s_n^-) \dots (s_i^+, s_i^-) \dots (s_0^+, s_0^-))$  selon les formules:

$$\begin{aligned} s_i^- &= d_i' + d_i'' & 0 \leq i \leq n-1 \\ s_i^+ &= d_i' & 0 \leq i \leq n-1 \end{aligned}$$

avec les conditions aux bords suivantes:

$$s_0^+ = 1 \quad \text{et} \quad s_n^- = 0$$

### 3 Suites $U_n$ et $V_n$

Ce paragraphe est consacré à l'étude de deux suites construites à partir de l'incrémenteur BS. Le sous-paragraphe 3.1 est dédié à la présentation de la suite  $U_n$ , le sous-paragraphe 3.2 présente la construction de la suite  $V_n$ . Le sous-paragraphe 3.3 est consacré à la relation de passage entre deux termes consécutifs de la suite  $V_n$ .

#### 3.1 Présentation de la suite $U_n$

La notation BS est redondante, c'est-à-dire un nombre peut avoir plusieurs représentations (ou codes) possibles, ceci nous conduit à introduire la notion d'identité de code:

**Définition 1** Soient deux codes  $A_{BS}$  et  $B_{BS}$  de deux nombres  $A$  et  $B$  écrits en notation BS,

$$\begin{aligned} A_{BS} &= ((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_i^+, a_i^-) \dots (a_0^+, a_0^-)) \\ B_{BS} &= ((b_{n-1}^+, b_{n-1}^-) \dots (b_i^+, b_i^-) \dots (b_0^+, b_0^-)) \end{aligned}$$

$A_{BS}$  et  $B_{BS}$  sont identiques si et seulement si:

$$a_j^+ = b_j^+ \quad \text{et} \quad a_j^- = b_j^- \quad , \quad 0 \leq j \leq n-1$$

**Commentaire 1.** A cause de la redondance du système BS, deux nombres écrits en notation BS peuvent être égaux sans être identique.

Partant de l'incrémenteur BS à deux étages, on introduit une suite  $U_n$  telle que  $U_n(k)$  soit un représentant de  $k$  en notation BS.

**Définition 2** Suite  $U_n$

$\forall j, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

$U_n(0)$  est identique à  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$

$$\text{où } \begin{cases} a_i^+ = a_i^- = 1 & \text{si } i \in \{0, 1\} \\ a_i^+ = a_i^- = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$U_n(j+1)$  est identique à  $((d_{n-1}^+, d_{n-1}^-) \dots (d_0^+, d_0^-))$

avec  $((d_n^+, d_n^-)(d_{n-1}^+, d_{n-1}^-) \dots (d_0^+, d_0^-)) = U_n(j)+1$  où 1 est codé sous la forme  $((0,0) \dots (0,0)(1,0))$

**Remarque 1** Pour obtenir  $U_n(j+1)$ , on incrémente  $U_n(j)$  grâce à l'incrémenteur BS, mais on ne retient que les  $2n$  bits de poids faibles, car on travaille modulo  $2^n$ .

En se servant de la notion d'identité de code en notation BS, on établit les résultats suivants:

**Lemme 1**  $\forall i, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Si:

$U_n(i)$  est identique à  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_1^+, a_1^-)(a_0^+, a_0^-))$

$U_n(i+1)$  est identique à  $((b_{n-1}^+, b_{n-1}^-) \dots (b_1^+, b_1^-)(b_0^+, b_0^-))$

$U_{n+1}(i)$  est identique à  $((c_n^+, c_n^-)(c_{n-1}^+, c_{n-1}^-) \dots (c_1^+, c_1^-)(c_0^+, c_0^-))$

Alors,

$U_{n+1}(i+1)$  est identique à  $((a_{n-1}^+ \overline{a_n^-}, c_n^+ \oplus c_n^-)(b_{n-1}^+, b_{n-1}^-) \dots (b_1^+, b_1^-)(1, b_0^-))$

**Démonstration.** Posons  $a_0^+ = b_0^+ = c_0^+ = 1$ , par définition des termes généraux des suites  $U_n, U_{n+1}$  et du principe de l'incrémenteur BS, on a l'égalité suivante:

$$\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n-1 \quad a_j^+ = c_j^+ \quad \text{et} \quad a_j^- = c_j^- \quad (4)$$

Du principe de l'incrémenteur BS et de l'équation (4), on déduit:

$$\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n-1 \quad a_j^+ \oplus a_j^- = c_j^+ \oplus c_j^- = b_j^- \quad (5)$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq n-2 \quad a_j^+ \overline{a_j^-} = c_j^+ \overline{c_j^-} = b_{j+1}^+ \quad (6)$$

De la définition 2, on déduit que:  $U_{n+1}(i+1)$  est identique à

$$((c_{n-1}^+ \overline{c_{n-1}^-}, c_n^+ \oplus c_n^-)(c_{n-2}^+ \overline{c_{n-2}^-}, c_{n-1}^+ \oplus c_{n-1}^-) \dots (c_0^+ \overline{c_0^-}, c_1^+ \oplus c_1^-)(1, c_0^+ \oplus c_0^-))$$

Des équations (4), (5) et (6), on déduit que  $U_{n+1}(i+1)$  est identique à

$$((a_{n-1}^+ \overline{a_{n-1}^-}, c_n^+ \oplus c_n^-)(b_{n-1}^+, b_{n-1}^-) \dots (b_1^+, b_1^-)(1, b_0^-)).$$

■

**Lemme 2**  $\forall k, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Si:

$$U_n(k) = ((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$$

Alors,

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_i^+ - a_i^-) \times 2^i \equiv k \left[ 2^n \right]$$

**Démonstration.** Suivant les valeurs de  $k$ , on distingue deux cas:

**Premier Cas:**  $0 \leq k \leq n$

Par définition de  $U_n(k)$ , il est immédiat que:  $\sum_{i=0}^{n-1} (a_i^+ - a_i^-) \times 2^i = k$

**Deuxième Cas:**  $n < k$

Soit la suite  $A$  écrite en notation BS, dont le terme général est défini comme suit:

$$A(n) \text{ est identique à } U_n(n).$$

Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à  $n$ ,  $A(k+1)$  est défini à partir de  $A(k) = ((d_{k-1}^+, d_{k-1}^-) \dots (d_0^+, d_0^-))$  comme suit:

$$\begin{aligned} A(k+1) &= ((e_k^+, e_k^-) \dots (e_0^+, e_0^-)) \\ &= A(k) + 1 \quad \text{où } 1 \text{ est codé sous la forme } ((0,0) \dots (0,0)(1,0)) \\ &= ((d_{k-1}^+, d_{k-1}^-) \dots (d_0^+, d_0^-)) + ((0,0) \dots (0,0)(1,0)) \end{aligned}$$

$A(k+1)$  est le résultat de l'incrémement de  $A(k)$  grâce à l'incrémenteur BS, il est immédiat que:

$$\begin{aligned} k &= \sum_{i=0}^{k-1} (d_i^+ - d_i^-) \times 2^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (d_i^+ - d_i^-) \times 2^i + \sum_{i=0}^{k-1-n} (d_{n+i}^+ - d_{n+i}^-) \times 2^{n+i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (d_i^+ - d_i^-) \times 2^i + 2^n \left( \sum_{i=0}^{k-1-n} (d_{n+i}^+ - d_{n+i}^-) \times 2^i \right) \end{aligned}$$

Or  $\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq n-1, a_i^+ = d_i^+$  et  $a_i^- = d_i^-$ . Il s'ensuit que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (a_{n-1}^+ - a_{n-1}^-) \times 2^i \equiv k \left[ 2^n \right] \quad (7)$$

■

**Lemme 3**  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, U_n(2^n)$  est identique à  $U_n(0)$

**Démonstration.**

On fera la démonstration par récurrence sur  $n$  à partir du rang 3,

**Cas de base.**  $n = 3$

En utilisant la définition 2, on vérifie aisément que:

$$\begin{aligned} U_3(0) &\text{ est identique à } ((0,0)(1,1)(1,1)) \\ U_3(1) &\text{ est identique à } ((0,0)(0,0)(1,0)) \\ U_3(2) &\text{ est identique à } ((0,0)(1,0)(1,1)) \\ U_3(3) &\text{ est identique à } ((1,0)(0,1)(1,0)) \end{aligned}$$

$U_3(4)$  est identique à  $((0, 1)(1, 1)(1, 1))$

$U_3(5)$  est identique à  $((0, 1)(0, 0)(1, 0))$

$U_3(6)$  est identique à  $((0, 1)(1, 0)(1, 1))$

$U_3(7)$  est identique à  $((1, 1)(0, 1)(1, 0))$

$U_3(8)$  est identique à  $((0, 0)(1, 1)(1, 1))$

**Hypothèse de récurrence.** On suppose la propriété vraie au rang  $k$ ,  
c'est-à-dire:

$$U_k(2^k) \text{ est identique à } U_k(0) \quad (8)$$

**Rang  $k+1$ .** Supposons:

$U_k(0)$  est identique à  $((a_{k-1}^+, a_{k-1}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$ ,

$U_k(2^k - 1)$  est identique à  $((x_{k-1}^+, x_{k-1}^-) \dots (x_0^+, x_0^-))$ ,

$U_k(2^k)$  est identique à  $((y_{k-1}^+, y_{k-1}^-) \dots (y_0^+, y_0^-))$ ,

$U_k(2^{k+1} - 1)$  est identique à  $((t_{k-1}^+, t_{k-1}^-) \dots (t_0^+, t_0^-))$ ,

$U_k(2^{k+1})$  est identique à  $((z_{k-1}^+, z_{k-1}^-) \dots (z_0^+, z_0^-))$ ,

$U_{k+1}(2^{k+1} - 1)$  est identique à  $((q_k^+, q_k^-) \dots (q_0^+, q_0^-))$ ,

$U_{k+1}(2^{k+1})$  est identique à  $((r_k^+, r_k^-) \dots (r_0^+, r_0^-))$ .

Du principe de l'incrémenteur BS et de l'équation (8), on déduit

$$y_{k-1}^- = x_{k-1}^+ \oplus x_{k-1}^- = 0$$

Par conséquent, on a:

$$x_{k-1}^+ = x_{k-1}^- \quad (9)$$

L'équation (8) implique que  $U_k(2^{k+1} - 1)$  est identique à  $U_k(2^k - 1)$ , ce qui entraîne:

$$\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1 \quad t_i^+ = x_i^+ \text{ et } t_i^- = x_i^- \quad (10)$$

On a:

$$\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1 \quad a_i^+ = a_i^- \quad (11)$$

Par application du Lemme 1, on a:

$$U_{k+1}(2^{k+1}) = ((t_{k-1}^+ \overline{t_{k-1}^-}, q_k^+ \oplus q_k^-)(z_{k-1}^+, z_{k-1}^-) \dots (z_0^+, z_0^-))$$

Par application du Lemme 2, on a également:

$$((t_{k-1}^+ \overline{t_{k-1}^-}) - (q_{k-1}^+ \oplus q_{k-1}^-)) \times 2^k + \sum_{i=0}^{k-1} (z_i^+ - z_i^-) \times 2^i \equiv 0 \left[ 2^{k+1} \right]$$

**Remarque 2** *il y a abus de l'utilisation des expressions booléennes dans les expressions arithmétiques.*

Les équations (9) et (10) entraînent que:

$$t_{k-1}^+ = x_{k-1}^+ = x_{k-1}^- = t_{k-1}^-$$

par conséquent  $t_{k-1}^+ \overline{t_{k-1}^-} = 0$ .

$U_k(2^{k+1})$  est identique à  $U_k(2^k)$ , et  $U_k(2^k)$  est identique à  $U_k(0)$ , par transitivité

$U_k(2^{k+1})$  est identique à  $U_k(0)$ . Ceci entraîne que:

$$\forall i \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq k-1 \quad z_i^+ = z_i^-$$

De ce qui précède, on déduit:

$$q_k^+ \oplus q_k^- = 0$$

Ce qui entraîne que:

$$U_{k+1}(2^{k+1}) \text{ est identique à } U_{k+1}(0).$$

■

**Lemme 4**  $\forall n, i, j \in \mathbb{N}, n \geq 3, 0 \leq i < j < 2^n, U_n(i)$  n'est pas identique à  $U_n(j)$ .

**Démonstration.**

Supposons:

$U_n(i)$  est identique à  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-)(a_{n-2}^+, a_{n-2}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$ ,  
 $U_n(j)$  est identique à  $((b_{n-1}^+, b_{n-1}^-)(b_{n-2}^+, b_{n-2}^-) \dots (b_0^+, b_0^-))$ ,

Par application du Lemme 2, on déduit:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k^+ - a_k^-) \times 2^k \equiv i [2^n] \\ \sum_{k=0}^{n-1} (b_k^+ - b_k^-) \times 2^k \equiv j [2^n] \end{cases} \quad (12)$$

La démonstration se fera par l'absurde, supposons  $U_n(i)$  identique à  $U_n(j)$ . Ceci entraîne:

$$a_k^+ = b_k^+ \text{ et } a_k^- = b_k^- \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (13)$$

Des équations (12) et (13), on déduit  $i \equiv j [2^n]$ , or par hypothèse  $0 \leq i < j < 2^n$ , d'où contradiction.

■

### 3.2 Présentation de la suite $V_n$

En entrée et en sortie de l'incrémenteur BS à deux étages de la figure 3,  $(a_i^+, a_i^-)$  et  $(s_i^+, s_i^-)$  représentent respectivement les termes de rang  $i$  des nombres  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-)(a_{n-2}^+, a_{n-2}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$  et  $((s_n^+, s_n^-)(s_{n-1}^+, s_{n-1}^-) \dots (s_0^+, s_0^-))$  écrits en notation BS.

Sémantiquement,  $d'_i$  et  $d''_{i+1}$  ne représentent pas les bits de rang  $i$  d'un nombre écrit en notation BS.

Supposons qu'on ait en entrée du premier étage de l'incrémenteur BS à deux étages de la figure 3, le terme  $U_n(i)$  identique à  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-)(a_{n-2}^+, a_{n-2}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$ .

Les  $2n$  bits de poids faibles  $((s_{n-1}^+, s_{n-1}^-) \dots (s_0^+, s_0^-))$  du nombre

$((s_n^+, s_n^-)(s_{n-1}^+, s_{n-1}^-) \dots (s_0^+, s_0^-))$  en sortie du deuxième étage de l'incrémenteur BS à deux étages représentent le terme de rang  $i+1$  de la suite  $U_n$ , c'est-à-dire  $U_n(i+1)$ .

Les termes  $d'_i$  et  $d''_i$  seront égaux respectivement à  $a_i^+ \overline{a_i^-}$  et  $\overline{a_i^+} a_i^-$ . Nous définissons

le terme général de la suite  $V_n$  à valeurs dans  $\{0, 1\}^{2n+2}$  à partir des termes  $d'_i$  et  $d''_i$ .

**Définition 3** : Suite  $V_n$

$\forall n, i \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Si:

$$U_n(i) \text{ est identique à } ((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-)(a_{n-2}^+, a_{n-2}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$$

Alors,

$$V_n(i+1) \text{ est égal à } (d'_{n-1}, 0, d'_{n-2}, d''_{n-1}, \dots, d'_j, d''_{j+1}, \dots, d'_0, d''_1, 1, d''_0)$$

$$\text{où } d'_j = a_j^+ \overline{a_j^-} \text{ et } d''_j = \overline{a_j^+} a_j^- \quad , \quad 0 \leq j \leq n-1$$

### 3.3 Relation de passage entre deux termes consécutifs de la suite $V_n$

Notre objectif est de dériver la relation de passage entre deux termes consécutifs de la suite  $V_n$ . Pour cela, considérons  $i \in \mathbb{N}$ ,

supposons:

$$U_n(i) \text{ est identique à } ((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-)(a_{n-2}^+, a_{n-2}^-) \dots (a_0^+, a_0^-))$$

$$U_n(i+1) \text{ est identique à } ((b_{n-1}^+, b_{n-1}^-)(b_{n-2}^+, b_{n-2}^-) \dots (b_0^+, b_0^-))$$

De même, supposons que:

$$V_n(i+1) \text{ est égal à } (c'_n, c''_n, \dots, c'_0, c''_0)$$

$$V_n(i+2) \text{ est égal à } (d'_n, d''_n, \dots, d'_0, d''_0)$$

Dans le diagramme suivant, les flèches en traits pleins matérialisent les transformations qui sont connues. Les flèches en traits interrompus désignent les transformations que nous allons dériver.

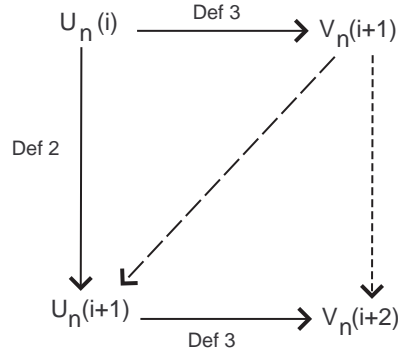


Figure 4:

De la définition 3, on a les conditions aux bords suivantes:

$$c'_0 = 1 \quad , \quad c''_n = 0$$

et les relations suivantes:

$$c'_{i+1} = a_i^+ \overline{a_i^-} \quad , \quad c''_i = \overline{a_i^+} a_i^- \quad \text{pour tout } i \text{ vérifiant } 0 \leq i \leq n-1 \quad (14)$$

De même, de la définition 3 on a les conditions aux bords suivantes

$$d'_0 = 1 \quad , \quad d''_n = 0$$

et les relations suivantes:

$$d'_{i+1} = b_i^+ \overline{b_i^-} \quad , \quad d''_i = \overline{b_i^+} b_i^- \quad \text{pour tout } i \text{ vérifiant } 0 \leq i \leq n-1 \quad (15)$$

De la définition 2, on a les relations suivantes:

$$\begin{cases} b_0^+ = 1 \\ b_i^- = a_i^+ \oplus a_i^- \quad , \quad 0 \leq i \leq n-1 \\ b_{i+1}^+ = a_i^+ \overline{a_i^-} \quad , \quad 0 \leq i \leq n-2 \end{cases} \quad (16)$$

Notre problème, c'est d'exprimer les  $d'_i, d''_i$  en fonction des  $c'_i$  et  $c''_i$ . On exprime tout d'abord les  $b_i^+, b_i^-$  en fonction des  $c'_i$  et  $c''_i$ .

**1<sup>ère</sup> Etape :**

Des équations (14) et (16), on déduit:

$$\begin{cases} b_0^+ = 1 \\ b_i^- = a_i^+ \oplus a_i^- = c'_{i+1} + c''_i, & 0 \leq i \leq n-1 \\ b_{i+1}^+ = a_i^+ \overline{a_i^-} = c'_{i+1}, & 0 \leq i \leq n-2 \end{cases} \quad (17)$$

**2<sup>ème</sup> Etape :**

On a les conditions aux bords suivantes:  $d'_0 = 1, d''_n = 0$ .

Des équations (15) et (17), on déduit:

$$d'_{i+1} = b_i^+ \overline{b_i^-} = \overline{c'_i(c'_{i+1} + c''_i)}, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (18)$$

De même, des équations (15) et (17), on déduit:

$$d''_i = \overline{b_i^+} b_i^- = \overline{c'_i(c'_{i+1} + c''_i)}, \quad 0 \leq i \leq n-1 \quad (19)$$

Ceci nous permet dénoncer la proposition fondamentale suivante:

**Proposition 1**  $\forall n, i \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Si:

$$V_n(i+1) \text{ est égal à } (c'_n, c''_n, \dots, c'_0, c''_0)$$

Alors,

$$V_n(i+2) \text{ est égal à } (d'_n, d''_n, \dots, d'_0, d''_0),$$

$$\text{où : } \begin{cases} d'_0 = 1, & d''_n = 0 \\ d'_{i+1} = \overline{c'_i(c'_{i+1} + c''_i)}, & 0 \leq i \leq n-1 \\ d''_i = \overline{c'_i(c'_{i+1} + c''_i)}, & 0 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

**Démonstration:**

Le résultat découle des équations (18) et (19).

■

Le lemme suivant donne la relation liant  $V_n(i+1)$  à  $U_n(i+1)$ .

**Lemme 5**  $\forall n, i \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Si:

$$V_n(i+1) \text{ est égal à } (c'_n, c''_n, \dots, c'_0, c''_0)$$

Alors,

$$U_n(i+1) \text{ est identique à } ((b_{n-1}^+, b_{n-1}^-)(b_{n-2}^+, b_{n-2}^-) \dots (b_0^+, b_0^-)),$$

$$\text{où : } \begin{cases} b_0^+ = 1 \\ b_i^- = c'_{i+1} + c''_i, & 0 \leq i \leq n-1 \\ b_{i+1}^+ = c'_{i+1}, & 0 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

**Démonstration:**

Le résultat découle de l'équation (17).

■

Le réseau de la figure 5 implémente le passage de  $V_n(i+1)$  à  $V_n(i+2)$ .

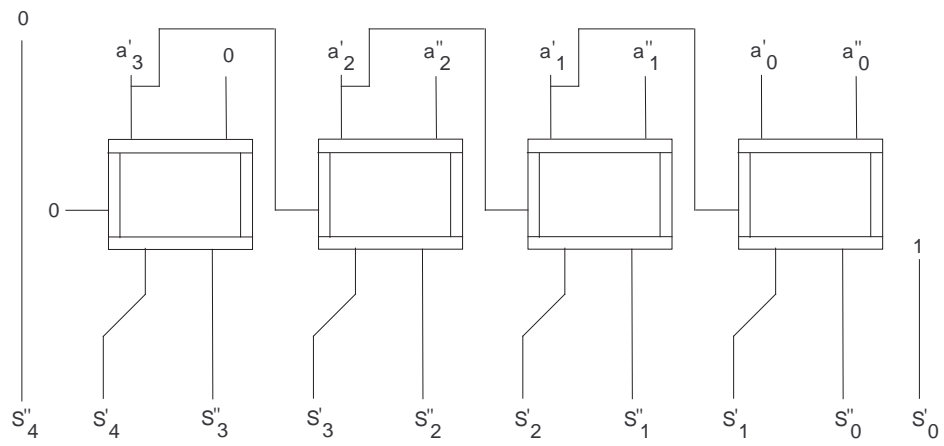


Figure 5: Réseau de passage entre deux termes consécutifs de  $V_n$

La cellule élémentaire fonctionne comme indiqué dans la figure 6:

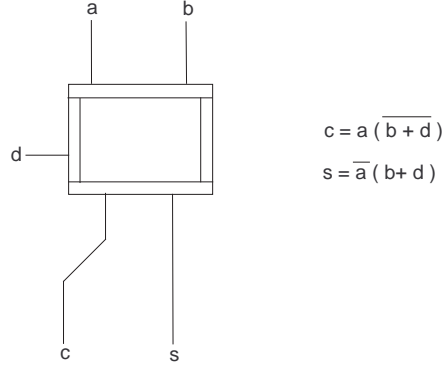


Figure 6: Cellule élémentaire

**Lemme 6**  $\forall i, n \in \mathbb{N}, n \geq 3$

Si:

$$V_n(i+1) \text{ est égal à } (e'_n, e''_n, \dots, e'_0, e''_0)$$

Alors,

$$\forall j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n \quad (e'_j, e''_{j-1}) \neq (1, 1)$$

**Démonstration:**

Supposons que  $U_n(i)$  est identique à  $((a_{n-1}^+, a_{n-1}^-)(a_{n-2}^+, a_{n-2}^-), \dots, (a_0^+, a_0^-))$ , de la définition 3,  $V_n(i+1)$  est égal à:

$$(d'_{n-1}, 0, d'_{n-2}, d''_{n-1}, \dots, d'_i, d''_{i+1}, \dots, d'_0, d''_1, 1, d''_0)$$

où

$$d'_j = a_j^+ \overline{a_j^-}, \quad d''_j = \overline{a_j^+} a_j^-$$

Par identification, on a:

$$\begin{cases} e'_0 = 1, & e''_n = 0 \\ e'_j = d'_{j-1} = a_{j-1}^+ \overline{a_{j-1}^-} & , 1 \leq j \leq n \\ e''_j = d''_j = \overline{a_j^+} a_j^- & , 0 \leq j \leq n-1 \end{cases}$$

Il s'ensuit:

$$\begin{cases} e'_j = a_{j-1}^+ \overline{a_{j-1}^-} & , 1 \leq j \leq n \\ e''_{j-1} = \overline{a_{j-1}^+} a_{j-1}^- & , 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Il est clair que  $(a_{j-1}^+ \overline{a_{j-1}^-}, \overline{a_{j-1}^+} a_{j-1}^-) \neq (1, 1)$  pour tout  $a_{j-1}^+, a_{j-1}^- \in \{0, 1\}$ , ceci implique que  $(e'_j, e''_{j-1}) \neq (1, 1)$ .

■

## 4 Simulation de la suite $V_n$ par un réseau neuronal de McCulloch et Pitts

L'idée de base est de construire un réseau neuronal de McCulloch et Pitts tel qu'au temps  $t$ , l'état du réseau  $(x_{2n+2}(t), x_{2n+1}(t), \dots, x_2(t), x_1(t))$  est égal à  $V_n(t+1)$ , où  $x_i(t)$  est l'état du neurone  $i$  au temps  $t$ .

Du point de vue de la suite  $V_n$ , entre deux tops consécutifs, les états du réseau représentent deux termes consécutifs de la suite. Tout se passera comme si on reboucle les sorties du réseau de la figure 5 sur ses entrées.

### 4.1 Configuration initiale

Soit  $n$  un entier supérieur à 3, on note  $I(n)$  l'ensemble suivant:  $I(n) = \{j : j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq 2n+2\}$ , nous considérons un ensemble de  $2n+2$  neurones

dont l'état au temps 0 est donné par:

$$\begin{cases} x_2(0) = 1 \\ x_i(0) = 0 \quad \text{si } i \in I(n) \setminus 2 \end{cases} \quad (20)$$

Du point de vue de la suite  $V_n$ , l'état du réseau est tel que:

$$(x_{2n+2}(0), x_{2n+1}(0), \dots, x_2(0), x_1(0)) \text{ est égal à } V_n(1). \quad (21)$$

## 4.2 Fonction de transition

Sous l'hypothèse qu'en entrée du réseau de la figure 5, on n'ait que les termes de la suite  $V_n$ . Notre objectif est de construire un réseau neuronal qui entre deux tops consécutifs simule le réseau de la figure 5.

Nous démontrons dans le sous-paragraphe suivant que le réseau neuronal de McCulloch et Pitts dont les fonctions de transition locales sont:

$$\begin{cases} x_2(t+1) = \mathbf{1}(x_2(t)) \\ x_{2i+2}(t+1) = \mathbf{1}(-x_{2i-1}(t) + x_{2i}(t) - x_{2i+2}(t) - 1) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \\ x_{2n+1}(t+1) = \mathbf{1}(x_{2n+1}(t) - 1) \\ x_{2i-1}(t+1) = \mathbf{1}(x_{2i-1}(t) - x_{2i}(t) + x_{2i+2}(t) - 1) \quad , \quad 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (22)$$

simule le réseau de la figure 5.

**Remarque 3** Les neurones  $2i+1, 2i+2$  ( $0 \leq i \leq n$ ) calculent respectivement les termes  $s''_i, s'_i$  en sortie du réseau de la figure 5. Au cours de l'évolution, l'état du neurone 2 reste à 1 et l'état du neurone  $2n+1$  reste à 0.

## 4.3 Dynamique du réseau de McCulloch et Pitts

Nous étudions la dynamique du réseau neuronal de McCulloch et Pitts dont la configuration initiale est donnée par l'équation (21) et les fonctions de transition

locales sont définies par l'équation (22).

**Lemme 7** Dans l'évolution du réseau neuronal de McCulloch et Pitts:

Si:

$$(x_{2n+2}(t), x_{2n+1}(t), \dots, x_2(t), x_1(t)) \text{ est égal à } V_n(p).$$

Alors,

$$(x_{2n+2}(t+1), x_{2n+1}(t+1), \dots, x_2(t+1), x_1(t+1)) \text{ est égal à } V_n(p+1).$$

**Démonstration:**

Le Lemme 6 nous assure que:

$$(x_{2i+2}(t), x_{2i-1}(t)) \neq (1, 1), \quad 1 \leq i \leq n \quad (23)$$

Considérons les termes  $a$ ,  $b$  et  $d$  de la cellule élémentaire de la figure 6. Dans le tableau 1, certaines entrées ne sont pas prises en compte pour des raisons qui seront données par la suite.

a	b	d	$\overline{a(b+d)}$	$\overline{a(b+d)}$	$\mathbf{1}(-a+b+d-1)$	$\mathbf{1}(a-b-d-1)$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	1	1				
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1				

Table 1: Entrées et sorties de la cellule élémentaire du réseau de la figure 6

Identifions  $a$ ,  $b$  et  $d$  respectivement avec  $x_{2i}(t)$ ,  $x_{2i-1}(t)$  et  $x_{2i+2}(t)$ . En se basant sur l'équation (23), on ne prend pas en compte les entrées 4 et 8 de la table 1.

On vérifie aisément grâce à la table 1 que:

$$\begin{cases} x_2(t+1) = 1 \\ x_{2i+2}(t+1) = x_{2i}(t)\overline{(x_{2i-1}(t) + x_{2i+2}(t))} & , 1 \leq i \leq n \\ x_{2n+1}(t+1) = 0 \\ x_{2i-1}(t+1) = \overline{x_{2i}(t)}(x_{2i-1}(t) + x_{2i+2}(t)) & , 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (24)$$

Identifions  $c'_i$ ,  $c''_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) de la Proposition 1 respectivement avec  $x_{2i+2}(t)$  et  $x_{2i+1}(t)$ . La Proposition 1 nous permet de conclure que:

$$(x_{2n+2}(t+1), x_{2n+1}(t+1), \dots, x_2(t+1), x_1(t+1)) \text{ est égal à } V_n(p+1).$$

■.

**Théorème 1**  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ , le réseau neuronal de McCulloch et Pitts:

$$x(t+1) = \mathbf{1}(Ax(t) - b)$$

où  $A$  n'est pas symétrique admet  $2n + 2$  neurones qui décrivent une évolution cyclique de longueur  $2^n$ .

**Démonstration:**

Considérons le réseau neuronal de McCulloch et Pitts dont la configuration initiale est donnée par l'équation (21) et les fonctions de transition locales sont données par l'équation (22).

Au temps  $t = 0$ , on a:  $(x_{2n+2}(0), x_{2n+1}(0), \dots, x_2(0), x_1(0))$  est égal à  $V_n(1)$ .

Le Lemme 7 nous permet de déduire que:

$$\forall t \in \mathbb{N}, (x_{2n+2}(t), x_{2n+1}(t), \dots, x_2(t), x_1(t)) \text{ est égal à } V_n(t+1) \quad (25)$$

La définition 3 et le Lemme 4 nous permettent de déduire que  $V_n(i+1)$  n'est pas égal à  $V_n(j+1)$ , pour  $0 \leq i < j \leq 2^n - 1$ .

De l'équation (25) et de ce qui précède, on déduit:

$$x(t) \neq x(t'), \quad 0 \leq t < t' \leq -1 + 2^n$$

De la définition 3 et du Lemme 3, on déduit que  $V_n(1)$  est identique à  $V_n(1+2^n)$ .

Ce qui implique que:  $x(0) = x(2^n)$ .

■

**Exemple 1:**

Nous exhibons une évolution cyclique de longueur 8 sur 8 neurones pour illustrer le Théorème 1 dans le cas où  $n$  est égal à 3.

Neurones								
	8	7	6	5	4	3	2	1
Temps								
0	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0
2	0	0	1	0	0	0	1	0
3	1	0	0	0	1	1	1	0
4	0	0	0	1	0	0	1	0
5	0	0	0	1	1	0	1	0
6	0	0	1	1	0	0	1	0
7	0	0	0	0	1	1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0

Table 2: Evolution Cyclique de longueur 8 sur 8 neurones

**Commentaire 2:** on remarque que les fonctions de transition locales du réseau de neurones de McCulloch et Pitts définies les équations (22) sont régulières.

## 5 Evolution pour les réseaux généraux de Caianiello

L'idée de base est d'exploiter la régularité des fonctions de transition locales d'une famille d'équations neuronales de McCulloch et Pitts de taille  $2nk + 2$  pour le simuler à l'aide d'un réseau neuronal de Caianiello de taille  $2n + 2$  et de taille mémoire  $k$ .

Soit un réseau neuronal de McCulloch et Pitts de taille  $2n + 2$  dont les fonctions de transition locales sont:

$$\begin{cases} x_2(t+1) = \mathbf{1}(x_2(t)) \\ x_{2i+2}(t+1) = \mathbf{1}(a_1x_{2i-1}(t) + a_2x_{2i}(t) + a_3x_{2i+2}(t) - \theta_1) \quad 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} x_{2n+1}(t+1) = \mathbf{1}(x_{2n+1}(t) - 1) \\ x_{2i-1}(t+1) = \mathbf{1}(b_1x_{2i-1}(t) + b_2x_{2i}(t) + b_3x_{2i+2}(t) - \theta_2) \quad 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (27)$$

et dont l'état initial  $(x_{2n+2}(0), x_{2n+1}(0), \dots, x_2(0), x_1(0))$  vérifie la contrainte

$$\begin{cases} x_2(0) = 1 \\ x_{2n+1}(0) = 0 \end{cases} \quad (28)$$

qui décrit un transitoire de longueur  $T(2n+2)$  et un cycle de longueur  $L(2n+2)$ . Dans son évolution, le réseau neuronal de McCulloch et Pitts de taille  $2n + 2$  défini par les équations neuronales (26) et (27) décrit une suite:

$$W_n(0), W_n(1), W_n(2), \dots, W_n(-1 + T(2n+2) + L(2n+2)), \dots$$

où:

$$W_n(i) = (x_{2n+2}(i), x_{2n+1}(i), \dots, x_2(i), x_1(i)).$$

Le graphe de dépendance des fonctions de transition locales des neurones  $2, 2i+2(1 \leq i \leq n), 2i-1(1 \leq i \leq n)$  et  $2n+1$  définies d'une part par les équations (22) et d'autre part par les équations (26), (27) est:

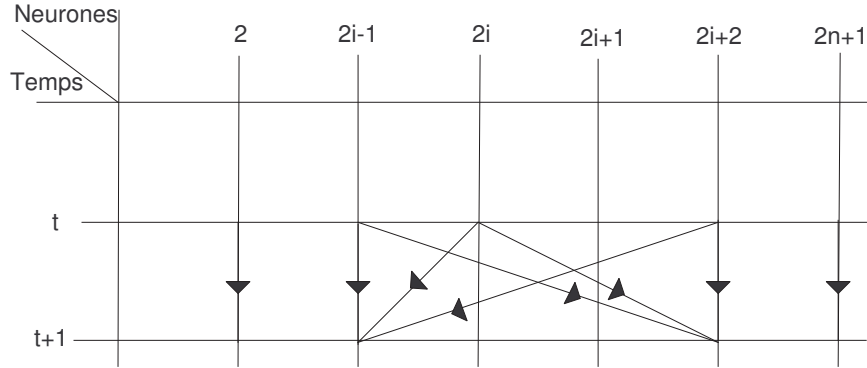


Figure 7: graphe de dépendance des fonctions de transition locales

L'idée est d'exploiter la régularité des fonctions de transition locales du réseau neuronal de McCulloch et Pitts défini en (26) et en (27) pour construire un réseau de Caianiello de taille  $2n+2$  et de mémoire  $k$  qui simule en  $k$  itérations une itération de l'équation neuronale de McCulloch et Pitts qui implémente le passage entre deux termes consécutifs de la suite  $W_{nk}$ .

Le réseau neuronal de McCulloch et Pitts qui implémente la suite  $W_{nk}$  a pour état initial  $(x_{2nk+2}(0), x_{2nk+1}(0), \dots, x_2(0), x_1(0))$  avec la contrainte:

$$\begin{cases} x_2(0) = 1 \\ x_{2nk+1}(0) = 0 \end{cases} \quad (29)$$

et dont les fonctions de transition locales sont:

$$\begin{cases} x_2(t+1) = \mathbf{1}(x_2(t)) \\ x_{2i+2}(t+1) = \mathbf{1}(a_1 x_{2i-1}(t) + a_2 x_{2i}(t) + a_3 x_{2i+2}(t) - \theta_1) & 1 \leq i \leq nk \\ x_{2nk+1}(t+1) = \mathbf{1}(x_{2nk+1}(t) - 1) \\ x_{2i-1}(t+1) = \mathbf{1}(b_1 x_{2i-1}(t) + b_2 x_{2i}(t) + b_3 x_{2i+2}(t) - \theta_2) & 1 \leq i \leq nk \end{cases} \quad (30)$$

**Remarque 4** Dans le réseau neuronal de Caianiello défini par l'équation (30), en affectant à:

$$a_1 = -1; a_2 = 1; a_3 = -1; \theta_1 = 1 \quad (31)$$

$$b_1 = 1; b_2 = -1; b_3 = 1; \theta_2 = 1 \quad (32)$$

$$x_1(0) = 0; x_i(0) = 0, 3 \leq i \leq 2nk; x_{2nk+2}(0) = 0 \quad (33)$$

on retrouve le réseau neuronal de McCulloch et Pitts de taille  $2nk+2$  qui simule la suite  $V_{nk}$ . De plus, en affectant aux  $a_i$ ,  $b_i$  et  $\theta_i$  les valeurs données par les équations (31), (32), et (33) et en imposant  $k = 1$ , on retrouve le réseau neuronal de McCulloch et Pitts défini par l'équation (22).

La simulation en  $k$  itérations par un réseau neuronal de Caianiello constitué de  $2n + 2$  neurones de taille mémoire  $k$  d'une itération de l'équation (30) se déroule suivant les règles ci-dessous:

**Règle 1:**

L'état du neurone  $j$  ( $1 \leq j \leq 2n$ ) du réseau neuronal de Caianiello au temps  $tk + i$  ( $0 \leq i \leq k - 1$ ) est égal à l'état du neurone  $2ni + j$  de l'équation (30) au temps  $t$ , en d'autres termes:

$$y_j(tk + i) = x_{2ni+j}(t)$$

**Règle 2:** au top  $(t+1)k-1$

L'état du neurone  $2n + 1$  du réseau neuronal de Caianiello au temps  $(t + 1)k - 1$  est égal à l'état du neurone  $2nk + 1$  de l'équation (30) au temps  $t$ , c'est-à-dire:

$$y_{2n+1}((t + 1)k - 1) = x_{2nk+1}(t)$$

L'état du neurone  $2n + 2$  du réseau neuronal de Caianiello au temps  $(t + 1)k - 1$  est égal à l'état du neurone  $2nk+2$  de l'équation (30) au temps  $t$ , ce qui entraîne:

$$y_{2n+2}((t + 1)k - 1) = x_{2nk+2}(t)$$

Etant donné que l'état du neurone  $2n + 2$  du réseau neuronal de Caianiello au temps  $(t + 1)k - 1$  est  $x_{2n+2}(t)$  et que par souci de régularité, on aimerait que l'état de tout neurone  $i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, 2n, 2n + 2\}$  à deux tops consécutifs de l'intervalle  $[tk, (t + 1)k - 1]$  soit respectivement  $x_s(t)$  et  $x_{s'}(t)$ ,  $s$  et  $s'$  vérifiant la relation suivante  $s - s' = 2n$ . On introduit la règle suivante:

**Règle 3:**

L'état du neurone  $2n + 2$  du réseau neuronal de Caianiello au temps  $tk + i$  est égal à l'état du neurone  $2n(i + 1) + 2$  de l'équation (30) au temps  $t$ , en d'autres termes:

$$y_{2n+2}(tk + i) = x_{2n(i+1)+2}(t)$$

On remarque également que l'état du neurone d'indice 2 de l'équation (30) est constant au cours de l'évolution alors que l'état du neurone d'indice  $2ni + 2$  ( $0 < i \leq k$ ) du réseau neuronal (30) n'est pas constant au cours de l'évolution. Etant donné que c'est le neurone d'indice 2 du réseau de Caianiello qui simule au top  $tk + i$  ( $0 \leq i \leq k - 1$ ) le neurone d'indice  $2ni + 2$  du réseau neuronal (30), on introduit la règle 4 suivante:

**Règle 4:**

Le neurone  $2n + 1$  du réseau neuronal de Caianiello délivre 1 au top  $tk$  et 0 au top  $tk + i$  ( $1 \leq i \leq k - 1$ ).

**Commentaire 3:**

L'état du neurone  $2n + 1$  du réseau neuronal de Caianiello au top  $t$  permet au neurone 2 du réseau neuronal de Caianiello de savoir s'il simule au top  $t + 1$  le neurone 2 du réseau neuronal de McCulloch et Pitts ou non.

Schématiquement, l'état du réseau neuronal de Caianiello en fonction de l'état du réseau neuronal (30) de McCulloch et Pitts aux temps  $ak, ak + 1, ak + 2, \dots, (a + 1)k - 1$  est illustré dans le tableau 3:

Temps	$ak$	$ak + 1$	$\dots$	$ak + i$	$\dots$	$(a + 1)k - 1$
Neurones						
$y_1$	$x_1(a)$	$x_{2n+1}(a)$		$x_{2ni+1}(a)$		$x_{2n(k-1)+1}(a)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$y_j$	$x_j(a)$	$x_{2n+j}(a)$		$x_{2ni+j}(a)$		$x_{2n(k-1)+j}(a)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				
$y_{2n}$	$x_{2n}(a)$	$x_{4n}(a)$		$x_{2n(i+1)}(a)$		$x_{2nk}(a)$
$y_{2n+1}$	1	0		0		0
$y_{2n+2}$	$x_{2n+2}(a)$	$x_{4n+2}(a)$		$x_{2n(i+1)+2}(a)$		$x_{2nk+2}(a)$

Table 3: Simulation

Sémantiquement  $(y_{2n+2}((a+1)k-1), \dots, y_1((a+1)k-1), \dots, y_{2n}(ak+i), \dots, y_1(ak+i), \dots, y_{2n}(ak), \dots, y_1(ak))$  représente  $W_{nk}(a)$ .

Notre but est de démontrer que le réseau neuronal de Caianiello dont l'état initial est:

$$\begin{cases} y_j(i) = x_{2ni+j}(0) & 1 \leq i \leq 2n \text{ et } 0 \leq i \leq k-1 \\ y_{2n+1}(0) = 1 \\ y_{2n+1}(i) = 0 & 1 \leq i \leq k-1 \\ y_{2n+2}(i) = x_{2n(i+1)+2}(0) & 0 \leq i \leq k-1 \end{cases} \quad (34)$$

et les fonctions de transition locales sont:

$$\begin{cases} y_2(t+1) = \mathbf{1}(y_{2n+1}(t+1-k) + y_{2n+2}(t) - 1) \\ y_{2i+2}(t+1) = \mathbf{1}(a_1 y_{2i-1}(t+1-k) + a_2 y_{2i}(t+1-k) + a_3 y_{2i+2}(t+1-k) - \theta_1) & 1 \leq i \leq n \\ y_{2n+1}(t+1) = \mathbf{1}(y_{2n+1}(t+1-k) - 1) \\ y_{2i-1}(t+1) = \mathbf{1}(b_1 y_{2i-1}(t+1-k) + b_2 y_{2i}(t+1-k) + b_3 y_{2i+2}(t+1-k) - \theta_2) & 1 \leq i \leq n \end{cases} \quad (35)$$

simule le réseau neuronal (30) de McCulloch et Pitts. La proposition ci-dessous établit le lien entre les itérations des réseaux (30) et (35).

**Proposition 2** Dans l'évolution du réseau neuronal (35) de Caianiello, soit  $e \in \mathbb{N}$ :

Si:

$$a) \quad y_j(ek + i) = x_{2ni+j}(e), \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq i \leq k-1, \\ 1 \leq j \leq 2n+2 \text{ et } j \neq 2n+1$$

b)

$$y_{2n+1}(ek) = 1 \\ y_{2n+1}(ek + j) = 0, \quad 1 \leq j \leq k-1$$

Alors

$$c) \quad y_j((e+1)k + i) = x_{2ni+j}(e+1), \quad \forall i, j \in \mathbb{N} \text{ tel que } 0 \leq i \leq k-1, \\ 1 \leq j \leq 2n+2 \text{ et } j \neq 2n+1$$

d)

$$y_{2n+1}((e+1)k) = 1 \\ y_{2n+1}((e+1)k + j) = 0 \text{ pour } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq k-1$$

**Démonstration:**

La démonstration se fera en deux étapes, la première étape et la deuxième étape sont consacrées respectivement aux neurones d'indices pairs et impairs.

**Première étape:** les neurones d'indices pairs

1) le neurone d'indice  $2j+2$ ,  $1 \leq j \leq n$

La démonstration s'appuie sur les hypothèses de la Proposition 2. Au top  $t = (e+1)k + i$ , l'état du neurone  $2j+2$  est:

$$y_{2j+2}((e+1)k + i) = \mathbf{1}(a_1 y_{2j-1}(ek + i) + a_2 y_{2j}(ek + i) + a_3 y_{2j+2}(ek + i) - \theta_1) \\ = \mathbf{1}(a_1 x_{2ni+2j-1}(e) + a_2 x_{2ni+2j}(e) + a_3 x_{2ni+2j+2}(e) - \theta_1) \text{ par hypothèse} \\ = x_{2ni+2j+2}(e+1) \text{ par application de l'équation (30)}$$

2) le neurone d'indice 2

Considérons le top  $t = (e+1)k + i$ , la démonstration se fera de proche en proche sur  $i$ .

**Rang 0:** au top  $t = (e+1)k$

$$\begin{aligned}
y_2((e+1)k) &= \mathbf{1}(y_{2n+1}(ek) + y_{2n+2}(ek + k - 1) - 1) \\
&= \mathbf{1}(1 + x_{2nk+2}(e) - 1) && \text{par hypothèse on a } y_{2n+1}(ek) = 1 \\
&= 1 \\
&= x_2(e+1) && \text{car } x_2(t) = 1, \forall t \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

**Hypothèse de récurrence:** on suppose la propriété vraie au rang  $i-1$

**Rang i:** au top  $t = (e+1)k + i$ ,  $1 \leq i \leq k-1$

$$\begin{aligned}
y_2((e+1)k + i) &= \mathbf{1}(y_{2n+1}(ek + i) + y_{2n+2}((e+1)k + i - 1) - 1) \\
&= \mathbf{1}(y_{2n+2}((e+1)k + i - 1) - 1) && \text{par hypothèse } y_{2n+1}(ek + i) = 0 \\
&= \mathbf{1}(x_{2ni+2}(e+1) - 1) && \text{de 1), on a } y_{2n+2}((e+1)k + i - 1) = x_{2ni+2}(e+1) \\
&= x_{2ni+2}(e+1)
\end{aligned}$$

**Deuxième étape:** les neurones d'indices impairs

3) le neurone d'indice  $2j-1$ ,  $1 \leq j \leq n$

La démonstration s'appuie sur les hypothèses de la Proposition 2. Au top  $t = (e+1)k + i$ , l'état du neurone  $2j-1$  est:

$$\begin{aligned}
y_{2j-1}((e+1)k + i) &= \mathbf{1}(b_1 y_{2j-1}(ek + i) + b_2 y_{2j}(ek + i) + b_3 y_{2j+2}(ek + i) - \theta_2) \\
&= \mathbf{1}(b_1 x_{2ni+2j-1}(e) + b_2 x_{2ni+2j}(e) + b_3 x_{2ni+2j+2}(e) - \theta_2) && \text{par hypothèse} \\
&= x_{2ni+2j-1}(e+1) && \text{par application de l'équation (30)}
\end{aligned}$$

4) le neurone d'indice  $2n+1$

La démonstration se fera en se basant sur les hypothèses de la proposition. Au

top  $t = (a + 1)k + i$ , l'état du neurone  $2n + 1$  est:

$$\begin{aligned} y_{2n+1}((e + 1)k + i) &= \mathbf{1}(y_{2n+1}(ek + i) - 1) \\ &= y_{2n+1}(ek + i) \end{aligned}$$

En se basant sur les hypothèses de la Proposition 2 (en particulier sur le  $b$ ), on déduit le résultat.

■

### **Théorème 2 .**

Si

$RMC$  est un réseau neuronal de McCulloch et Pitts de taille  $2nk + 2$  dont les fonctions de transition locales sont données par l'équation (30) et l'état initial vérifie la contrainte de l'équation (29) qui décrit un transitoire de longueur  $T(2nk + 2)$  et un cycle de longueur  $L(2nk + 2)$

Alors,

il existe un réseau neuronal de Caianiello de taille  $2n + 2$  et de mémoire  $k$  qui simule  $RMC$  et qui décrit un transitoire de longueur  $k \times T(2nk + 2)$  et un cycle de longueur  $k \times L(2nk + 2)$ .

**Démonstration** La preuve est une conséquence de la Proposition 2.

■

Le Théorème 2 nous permet de retrouver l'un des résultats de l'article [18]:

### **Corollaire 1 [18] .**

Il existe un réseau neuronal de Caianiello constitué de  $2n + 2$  neurones de taille mémoire  $k$  qui décrit un cycle de longueur  $k2^{nk}$

### **Démonstration**

Du Théorème 1 et de la Remarque 4, on déduit qu'il existe une instance  $RMC$  du réseau neuronal (30) de McCulloch et Pitts qui simule la suite  $V_{nk}$ . Par application du Théorème 2 à l'instance  $RMC$  du réseau neuronal (30) de McCulloch et Pitts qui simule la suite  $V_{nk}$ , on déduit le résultat. ■

## 6 Conclusion

L'interdiction de certains codes a été utilisé pour construire très simplement, à partir de compteurs dans des systèmes arithmétiques redondants où l'addition se fait sans propagation de retenue, des réseaux de McCulloch et Pitts qui génèrent des cycles de longueur exponentielle. La contribution est la méthode de simulation d'une famille d'équations neuronales de McCulloch et Pitts de taille  $2nk + 2$  dont les fonctions de transition locales sont régulières par une famille de réseaux neuronaux de Caianiello de taille  $2n + 2$  et de taille mémoire  $k$ . Cette technique vient enrichir la gamme des constructions combinatoires qui ont déjà montré leur puissance dans le passé [21, 3, 15, 19, 20].

## References

- [1] E. R. Caianiello and A. De Luca, "Decision Equation for Binary Systems : Applications to Neuronal Behavior," *Kybernetic*, **3**(1966) 33-40
- [2] M. Cosnard, D. Moumida, E. Goles and T.de.St. Pierre, "Dynamical Behavior of a Neural Automaton with Memory," *Complex Systems*, **2**, (1988), 161-176.
- [3] M. Cosnard, M. Tchunte, G. Tindo, "Sequences generated by neuronal automata with memory," *Complex Systems*, **6**, (1992), 13-20.
- [4] J. Duprat, J. M. Muller, "Ecrire les nombres autrement pour calculer plus vite", *Technique et Science Informatique*, Vol. 10 N(**3**) pp 211-224.
- [5] W. S. Mc Culloch and W. Pitts, "A Logical Calculus of the Ideas Immanent in Nervous Activity", *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5** (1943) 115-133.
- [6] E. Goles, "Comportement oscillatoire d'une famille d'automates cellulaires non uniformes", *Doctoral Dissertation*, University of Grenoble, 1980.

- [7] E. Goles, J. Olivos, "Comportement Périodique des Fonctions à seuil Binaires et Applications", *Disc. App. Math.*, **3**, 1981, 95-105.
- [8] E. Goles, "Fixed Point Behaviour of Threshold Functions on a finite set," *SIAM J. on Alg. and Disc Methods*, **3(4)**(1982) pages 529-531.
- [9] E. Goles and M. Tchunte, "Iterative Behaviour of Generalized Majority Functions", *Mathematical Social Sciences*, **4**, 1983, 197-204.
- [10] E. Goles, "Dynamical Behavior of Neural Networks", *SIAM J. Disc. Alg. Methods*, **6**, 1985, 749-754.
- [11] E. Goles and S. Martínez, "Exponential Transient Classes of Symmetric Neural Networks for Synchronous and Sequential Updating", *Complex Systems*, **3(1989)** 589-597.
- [12] E. Goles and S. Martínez, "Neural and Automata Networks, Dynamical Behaviour and Applications" (Norwell, MA, Kluwer Academic Publishers, 1990)
- [13] A. Guyot, Y. Herreros, J.M.Muller, "Janus: an on-line Multiplier-Divider for Manipulating Large Numbers", *Proceedings IEEE 9<sup>th</sup> Symposium on Computer Arithmetic*, Santa-Monica, Sept 1989.
- [14] D. Moumida, "Contribution à l'étude de la Dynamique d'un Automate à mémoire", *Doctoral Dissertation*, University of Grenoble, 1989.
- [15] M. Matamala, "Recursive Construction of Periodic Steady State for Neural Networks", *Theoretical Computer Science*, **143(2)** (1995) 251-267.
- [16] R. Ndoundam "Analyse et Synthèse de Certains Réseaux d'Automates", *Thèse de Doctorat de 3eme Cycle*, Université de Yaoundé I, 1995.

- [17] R. Ndoundam and M. Matamala, "No Polynomial Bound for the Period of Neuronal Automata with Memory With Inhibitory Memory", *Complex Systems*, **12(2000)**, 391-397.
- [18] R. Ndoundam and M. Tchunte, "Cycles exponentiels des réseaux de Cianiello et compteurs en arithmétique redondante", *Technique et Science Informatiques*, Vol **19**, N 7/2000 pages 985-1008.
- [19] R. Ndoundam and M. Tchunte, "Exponential transient length generated by a neuronal recurrence equation", *Theoretical Computer Science*, **306(2003)**, 513-533.
- [20] R. Ndoundam and M. Tchunte, "Exponential Period of Neuronal Recurrence Automata with Excitatory Memory", *Complex Systems*, **15(2004)**, 79-88.
- [21] M. Tchunte "Sequential Simulation of Parallel Iterations and Applications", *Theoretical Computer Science*, **vol. 48**, 1986, p. 135-144.
- [22] M. Tchunte and G. Tindo, "Suites générées par une équation neuronale à mémoire", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **tome 317, Serie I**, 625-630, 1993.