Discipline

Combinatoire/*Combinatorics*

Adresses des auteurs

• G. Duchamp : Laboratoire d'Informatique de Rouen – Université de Rouen – Faculté des Sciences – 76134 Mont Saint-Aignan Cedex

• D. Krob, B. Leclerc : Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation – Université Paris 7 – 2, place Jussieu – 75251 Paris Cedex 05

• J.Y. Thibon : Institut Gaspard Monge – Université de Marne-la-Vallée – 2, Rue de la Butte-Verte – 93166 Noisy-le-Grand Cedex

Correspondance et envoi des épreuves

• Jean-Yves THIBON, Institut Gaspard Monge, Université de Marne-la-Vallée, 2 rue de la Butte-Verte, 93166 Noisy-le-Grand cedex

Fonctions quasi-symétriques, fonctions symétriques non-commutatives, et algèbres de Hecke à $q = 0$

Gérard DUCHAMP, Daniel KROB, Bernard LECLERC et Jean-Yves THIBON

Résumé — Nous montrons que deux généralisations récentes des fonctions symétriques – les fonctions quasi-symétriques et les fonctions symétriques non commutatives – s'interprètent dans le cadre des la théorie des représentations des algèbres de Hecke de type A à $q = 0$ et fournissent pour celles-ci un analogue de la théorie de Frobenius pour le groupe symétrique.

Quasi-symmetric functions, Noncommutative symmetric functions, and Hecke algebras at $q = 0$

Abstract — We show that two recent generalizations of symmetric functions – quasi-symmetric functions and noncommutative symmetric functions – can be interpreted in the context of the representation theory of the 0-Hecke algebras of type A, and provide for them an analogue of Frobenius theory for the symmetric group.

On sait, depuis les travaux de Frobenius, que l'algèbre des fonctions symétriques peut s'interpréter comme la somme directe $R = \bigoplus_{n\geq 0} R(\mathfrak{S}_n)$ des anneaux de classes de représentations complexes des tous les groupes symétriques. La table des caractères apparaît alors comme la matrice de transition entre deux bases naturelles de fonctions symétriques, et le produit usuel des fonctions symétriques correspond aux inductions de $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ à $\mathfrak{S}_{m+n}$. Cette théorie, qui peut être étendue à diverses suites de groupes (*cf.* [15]), reste valable pour l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ de type A_{n-1} pourvu que q soit non nul et ne soit pas une racine de l'unité.

L'objet de cette Note est de montrer que deux généralisations des fonctions symétriques récemment introduites en Combinatoire, les fonctions *quasi-symétriques* [4] et les *fonctions symétriques non-commutatives* [3], décrivent en fait une théorie à la Frobenius pour les algèbres de Hecke $H_n(0)$, spécialisations à $q = 0$ des algèbres génériques de type A_{n-1}.

La théorie des représentations de $H_n(0)$ est bien connue. Elle à été déterminée par Norton [9], et on en trouvera un résumé dans l'article de Carter [1], qui établit également certaines propriétés combinatoires spécifiques au type A dont nous aurons besoin dans la suite. Pour le type A, l'algèbre de Hecke $H_n(q)$ est engendrée (sur $\mathbf{C}$) par les éléments $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$, et admet pour présentation

$$\left\{ \begin{array}{ccll} T_iT_j & = & T_jT_i & |i-j| > 1 \\ T_iT_{i+1}T_i & = & T_{i+1}T_iT_{i+1} & \\ T_i^2 & = & (q-1)T_i + q & \end{array} \right. \tag{1}$$

Pour les valeurs génériques de q, cette algèbre est semi-simple, et isomorphe à $\mathbf{C}\mathfrak{S}_n$. Elle admet donc $p(n)$ (nombre de partitions de n) modules simples $V_\lambda(q)$, qui sont des q-analogues des modules de Specht V_λ du groupe symétrique. On peut définir pour $H_n(q)$ une table de caractères de la manière suivante. Pour une partition λ de n, soit w_λ l'élément

$$w_\lambda = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{\lambda_1-1}\cdot\sigma_{\lambda_1+1}\cdots\sigma_{\lambda_1+\lambda_2}\cdots\sigma_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{r-1}+1}\cdots\sigma_{n-1}$$

du sous-groupe de Young $\mathfrak{S}(\lambda) = \mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_r}$ de $\mathfrak{S}_n$. On pose $\chi^\lambda_\mu = \mathrm{tr}_{V_\lambda}(T_{w_\mu})$ et on a un q-analogue de la formule des caractères de Frobenius [13, 5, 2, 6, 14, 11]

$$\chi^\lambda_\mu = \langle\, s_\lambda\,,\, Z_\mu(q)\,\rangle \tag{2}$$

où $Z_\mu(q) = (q-1)^{\ell(\mu)}h_\mu((q-1)X)$, la fonction symétrique $h_\mu((q-1)X)$ étant par définition l'image de $h_\mu = h_\mu(X)$ par le morphisme d'anneau $p_k \mapsto (q^k-1)p_k$.

La caractéristique de Frobenius est l'application linéaire $\mathcal{F} : R(\mathfrak{S}_n) \to Sym$ qui envoie la classe d'un module irreductible V_λ sur la fonction de Schur s_λ. La formule (2) montre que l'extension naturelle de $\mathcal{F}$ au cas de l'algèbre de Hecke est donnée par

$$\mathcal{F}([V_\lambda(q)]) = s_\lambda\ , \tag{3}$$

i.e. la dépendance par rapport à q dans la formule des caractères ne se manifeste pas dans la caractéristique, mais seulement dans le q-analogue $Z_\mu(q)$ de l'indicateur des cycles. Lorsque $q = 0$, les $V_\lambda(q)$ ne sont en général pas irréductibles, et la formule (3) ne donne pas tous les caractères. Les modules simples sur $H_n(0)$ sont de dimension 1, et sont indexés par les sous-ensembles D de $[n] = \{1,2,\ldots,n-1\}$. A un tel sous-ensemble $D = \{d_1,\ldots,d_k\}$ on associe une composition $I = C(D)$ de n définie par $i_j = d_{j+1}-d_j$ pour $j<k$, et $i_{k+1} = n-d_k$. La représentation irréductible de $H_n(0)$ indexée par l'ensemble D est définie par

$$\varphi_D(T_i) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad i\in D \\ 0 & \text{si} \quad i\notin D \end{cases} \tag{4}$$

Nous poserons $\eta_I = \varphi_D$ et le module correspondant sera noté $\mathbf{C}_I$.

Soit $G_0(H_n(0))$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des $H_n(0)$-modules de type fini. On peut prolonger à $\bigoplus_{n\geq 0} G_0(H_n(0))$ l'application $\mathcal{F}$ qui envoie $V_\lambda(0)$ sur s_λ, en plongeant l'algèbre des fonctions symétriques dans celle des fonctions *quasi-symétriques*, introduite par Gessel dans [4], et dont nous rappelons ci-dessous la définition.

Soit $X = \{x_1,x_2,\ldots\}$ un ensemble dénombrable totalement ordonné d'indéterminées commutatives. Un élément $f\in\mathbf{C}[X]$ est appelé *fonction quasi-symétrique* si pour $y_i, z_j \in X$ vérifiant $y_1 < y_2 < \ldots, y_m$, $z_1 < z_2 < \ldots < z_m$, et pour toute composition $K = (k_1,k_2,\ldots,k_r)$, les monômes $y^K = y_1^{k_1}y_2^{k_2}\cdots y_m^{k_m}$ et z^K ont même coefficient dans f. Les fonctions quasi-symétriques forment une sous-algèbre, notée $QSym(X)$ (ou simplement $QSym$) de $\mathbf{C}[X]$. Deux bases importantes sont les *fonctions quasi-monomiales* $M_K = \sum_{y_1<y_2<\ldots<Y_m} y^K$, et les *quasi-rubans* $F_I = \sum_{J\succeq I} M_J$, où la notation $J \succeq I$ signifie que J est plus fine que I, ce qui équivaut à $D(J)\supseteq D(I)$.

Les fonctions quasi-symétriques forment une algèbre de Hopf, dont le dual (gradué) est l'algèbre **Sym** des fonctions symétriques non commutatives [8, 3]. La base duale de (F_I) est notée (R_I) (fonctions de Schur rubans non commutatives). On peut réaliser **Sym** comme sous-algèbre de l'algèbre associative libre $\mathbf{C}\langle\, A\,\rangle$ sur un alphabet dénombrable totalement ordonné $A = \{a_1, a_2\ldots\}$, en posant

$$R_I(A) = \sum_{\substack{w\in A^* \\ C(w)=I}} w$$

où $C(w)$ est la composition associée à l'ensemble des descentes du mot w. La dualité entre **Sym** et $QSym$ est alors essentiellement équivalente à la "formule de Cauchy non commutative"

$$\prod_{i\geq 1}^{\longrightarrow}\left(\prod_{j\geq 1}^{\longrightarrow}(1-x_i a_j)^{-1}\right) = \sum_I F_I(X) R_I(A)\ . \tag{5}$$

La transformation $A \to (q-1)A$ peut être définie sur les fonctions symétriques non commutatives [3]. Pour $q=0$, l'application $F(A) \mapsto F(-A)$ n'est autre que l'antipode de l'algèbre de Hopf **Sym**, qui envoie les fonctions symétriques complètes $S_n(A) = R_{(n)}(A)$ sur $(-1)^n\Lambda_n(A)$, où les $\Lambda_n(A) = R_{(1^n)}(A)$ sont les fonctions symétriques élémentaires.

Soit $\mathcal{G} = \bigoplus_{n\geq 0} G_0(H_n(0))$, où $G_0(H_n(0))$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie des $H_n(0)$-modules de type fini. Définissons un isomorphisme de modules $\mathcal{F} : \mathcal{G} \longrightarrow QSym$ par $\mathcal{F}([\mathbf{C}_I]) = F_I$, et posons $Z_I(q) = (q-1)^{-\ell(I)} S^I((q-1)A) \in \mathbf{Sym}$. On a alors :

Théorème 1 (i) *Soit* $(d_{\lambda I})$ *la matrice de décomposition de* $H_n(0)$, i.e. $[V_\lambda(0)] = \sum_{|I|=n} d_{\lambda I}[\mathbf{C}_I]$ *dans* $\mathcal{G}$. *Alors,* $\mathcal{F}(V_\lambda(0)) = \sum_{|I|=n} d_{\lambda I}\mathcal{F}(\mathbf{C}_I)$, *i.e.* $s_\lambda = \sum_I d_{\lambda I} F_I$.

(ii) (Formule des caractères) *Soit, pour toute composition* J *de* n,

$$w_J = (\sigma_1 \cdots \sigma_{j_1-1})(\sigma_{j_1+1}\cdots\sigma_{j_1+j_2})\cdots(\cdots\sigma_{n-1}) \in \mathfrak{S}(J)\ .$$

Alors, la table des caractères de $H_n(0)$ *est la matrice* $2^{n-1}\times 2^{n-1}$

$$\eta_I(T_{w_J}) = \langle\, F_I\,,\, Z_J(0)\,\rangle$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ *représente la dualité entre* $QSym$ *et* **Sym**, *i.e.* $\langle\, F_I\,, R_J\,\rangle = \delta_{IJ}$.

(iii) (Produit d'induction) *Le produit usuel* $QSym_m \otimes QSym_n \longrightarrow QSym_{m+n}$ *des fonctions quasi-symétriques correspond à l'induction de* $H_m(0)\otimes H_n(0)$ *à* $H_{m+n}(0)$, *pour le plongement naturel* $T_i \otimes 1 \mapsto T_i$, $1\otimes T_i \mapsto T_{i+m}$:

$$\mathcal{F}\left(\eta_I \otimes \eta_j \uparrow_{H_m(0)\otimes H_n(0)}^{H_{m+n}(0)}\right) = \mathcal{F}(\eta_I)\mathcal{F}(\eta_J) = F_I F_J\ . \tag{6}$$

Le point *(i)* n'est qu'une reformulation de résultats de [9] et [1].

Le groupe de Grothendieck $G_0(R)$ d'un anneau R est canoniquement en dualité avec $K_0(R)$, groupe de Grothendieck de la catégorie des R-modules projectifs de type fini.

Soit $\mathcal{K} = \bigoplus_{n\geq 0} K_0(H_n(0))$. On définit un isomorphisme linéaire $\mathcal{E} : \mathcal{K} \longrightarrow \mathbf{Sym}$ en posant $\mathcal{E}(P_I) = R_I$, où P_I est l'unique module projectif tel que $P_I/\mathrm{rad}\,P_I \simeq \mathbf{C}_I$. Munissons $\mathcal{K}$ d'une structure d'anneau en posant $[M][N] = \left[M\otimes N \uparrow_{H_m(0)\otimes H_n(0)}^{H_{m+n}(0)}\right]$ pour $[M] \in K_0(H_m(0))$ et $[N] \in K_0(H_n(0))$.

Théorème 2 (i) $\mathcal{E}$ *est un isomorphisme d'anneaux.*

(ii) *L'application* π : **Sym** $\longrightarrow QSym$ *induite par les morphismes naturels* $K_0(H_n(0)) \longrightarrow G_0(H_n(0))$ *a pour image l'anneau des fonctions symétriques, et correspond à l'image commutative* $S_n(A) \mapsto h_n(X)$.

Remarques 1) On sait que la décomposition $F_I F_J = \sum c_{IJ}^K F_K$ est donnée par le produit de mélange des permutations (*shuffle*). Si u est une permutation de $[1,n]$ telle que $C(u) = I$ et v une permutation de $[n+1, m+m]$ telle que $C(v) = J$, alors $F_I F_J = \sum_w a_w F_{C(w)}$, où les coefficients sont définis par $u \sqcup\!\sqcup v = \sum_w a_w w$. Par ailleurs les modules induits $M_{I,J} = \mathbf{C}_I \otimes \mathbf{C}_J \uparrow H_{m+n}(0)$ sont munis d'une filtration canonique, donnée par leurs séries de Loewy. On peut obtenir les rangs des facteurs de composition dans cette filtration en remplaçant, dans la formule précédente le produit de mélange par son analogue quantique $\sqcup\!\sqcup_q$, défini par la récurrence $(au) \sqcup\!\sqcup_q (bv) = a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) + q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q v)$ (*cf.* [10]).

2) En prenant en compte cette même filtration sur les 0-modules de Specht $V_\lambda(0)$, on obtient un q-analogue de la matrice de décomposition $(d_{\lambda I}(q))$, qui est à rapprocher de celui conjecturé dans [7] pour le cas où q est une racine de l'unité.

3) Sur les modules de Kazhdan-Lusztig, cette filtration est triviale. Ils restent semi-simples pour $q = 0$.

4) Les considérations précédentes suggèrent une définition des fonctions quasi-symétriques associées à un système de racines, qui semble coïncider avec une construction non publiée de Gessel.

References

[1] R.W. Carter, Representation theory of the 0-Hecke algebra, *J. Algebra*, 15, 1986, p. 89-103.

[2] I.V. Cherednik, An analogue of the character formula for Hecke algebras, *Funct. Anal. Appl.*, 21, 1987, p. 172-174.

[3] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh et J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions, *Adv. in Math.*, 112, 1995, p. 218-348.

[4] I. Gessel, Multipartie P-partitions and inner product of skew Schur functions, *Contemp. Math.*, 34, 1984, p. 289-301.

[5] N. Hoefsmit, Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical types, Thése, University of British Columbia, 1974.

[6] R.C. King et B.G. Wybourne, Representations and traces of the Hecke algebras $H_n(q)$ of type A_{n-1}, *J. Math. Phys*, 33, 1992, p. 4-14.

[7] A. Lascoux, B. Leclerc et J.-Y. Thibon, Une conjecture pour le calcul des matrices de décomposition des algèbres de hecke de type A aux racines de l'unité, *C.R.A.S.*, à paraître.

[8] C. Malvenuto et C. Reutenauer, Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra, prépublication UQAM, Montréal, 1993.

[9] P.N. Norton, 0-Hecke algebras, *J. Austral. Math. Soc. Ser A*, 27, 1979, p. 337-357.

[10] M. Rosso, ????????????

[11] A. Ram, A Frobenius formula for the characters of the Hecke algebras, *Invent. Math*, 106, 11991, p. 461-488.

[12] L. Solomon, A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group, *J. Algebra*, 41, 1976, p. 255-268.

[13] A.J. Starkey, Characters of the generic Hecke algebra of a system of BN-pairs, Thèse, University of Warwick, 1975.

[14] A.M. Vershik et S.V. Kerov, Characters and realizations of representations of an infinite dimensional Hecke algebra, and knot invariants, *Soviet Math. Dokl.*, 38, 1989, p. 134-137.

[15] A.V. Zelevinsky, Representations of finite classical groups, Springer Lecture Notes in Math. n^o 869, 1981.