

La méthode du balayage de Poincaré comme algorithme numérique : application à la Géodésie

Nicolas BOULEAU

Quoique célèbre parce qu'elle fournit l'existence d'une solution d'un problème aux limites dont on n'a pas de résolution analytique, la méthode du balayage n'est pas seulement un outil de démonstration mathématique, elle donne un algorithme intéressant numériquement à plusieurs titres (monotonie, possibilités d'encadrements, généralisation à des opérations non linéaires). Nous montrons sa pertinence ici sur un exemple tiré d'un problème de géodésie.

C'est dans son cours à la Sorbonne de 1894-95 sur *la théorie du potentiel newtonien* [1] qu'Henri Poincaré a exposé cette méthode pour résoudre le problème de Dirichlet dans un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière vérifiant la condition de sphère extérieure (cf. plus bas). La méthode, appelée par la suite méthode du balayage fut à l'origine de développements importants en théorie du potentiel, son idée est au coeur de la méthode des sur-solution et sous-solution dite de Perron-Wiener-Brelot pour la résolution du problème de Dirichlet dans un ouvert quelconque, elle se généralise en une théorie contemporaine du balayage des mesures (cf [2] et s'interprète de façon probabiliste dans la théorie des processus de Markov (cf. [3]) par le balayage des fonctionnelles additives. Certaines présentations de la théorie moderne du potentiel en font la notion de base à partir de laquelle on reconstruit toute la théorie. Dans la première partie nous rappelons la méthode de Poincaré avec les notations usuelles aujourd'hui pour son intérêt pédagogique et pour pouvoir en tirer les algorithmes numériques étudiés dans la deuxième partie.

1 Le balayage de Poincaré.

Nous ne nous appuyons que sur quelques propriétés fondamentales et aisées des fonctions harmoniques (cf. $\hat{E}[4]$).

1.1 Intégrales de Poisson pour la sphère.

On se place sur \mathbb{R}^n pour $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ n'est pas sans intérêt mais il est très facile). Soit f une fonction continue sur la sphère $S(0, R)$ frontière de la boule ouverte $B(0, R)$ de centre 0 de rayon R .

La fonction harmonique $H^S(f)$ dans $B(0, R)$ égale à f à la frontière est alors donnée par

$$H^S(f)(x) = \frac{1}{\alpha_n R} \int_R \frac{R^2 - |x|^2}{|y - x|^n} f(y) d\sigma(y)$$

où σ est la mesure d'aire sur S et où α_n est l'aire de la sphère $S(0, 1)$ donné par

$$\alpha_n = n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

soit

$$\alpha_{2p} = 2 \frac{\pi^p}{(p-1)!} \quad p \geq 1$$

$$\alpha_{2p+1} = 2 \frac{(2\pi)^p}{1.3.5 \dots (2p-1)} \quad p \geq 1$$

De façon analogue, la fonction $K^S(f)$ définie hors de $B(0, R)$ par

$$K^S(f)(x) = \frac{1}{\alpha_n R} \int_S \frac{|x|^2 - R^2}{|x - y|^n} f(y) d\sigma(y)$$

est harmonique dans l'ouvert $(\bar{B})^c$ et tend vers $f(y)$ pour $y \in S$.

On a :

$$\| H^S(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty$$

$$\| K^S(f) \|_\infty \leq \| f \|_\infty$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} K^S(f)(x) &= 0 && \text{si } n \geq 3 \\ &= \int_S f(y) \frac{d\sigma(y)}{2\pi R} && \text{si } n = 2 \end{aligned}$$

1.2 Balayée d'une fonction surharmonique.

Soit G un ouvert de \mathbb{R}^n . Nous n'avons besoin que de fonctions surharmoniques continues, dans ce cas la définition est très simple : f est surharmonique continue dans G si pour toute sphère $S(A, r)$ incluse dans G , on a $f(A) \geq \int_S f(x) \frac{d\sigma(x)}{\sigma(S)}$.

C'est une propriété locale : il suffit que pour tout $A \in G$ la propriété $f(A) \geq \int_S f(x) \frac{d\sigma(x)}{\sigma(S)}$ soit vérifiée pour les sphères assez petites, pour que f soit surharmonique dans G .

Si B est une boule ouverte incluse dans G de frontière S , la fonction \tilde{f} obtenue en remplaçant f par son intégrale de Poisson $H^S(f)$ dans B est encore surharmonique continue dans G et $\tilde{f} \leq f$.

On appellera \tilde{f} la balayée de f hors de B . (Cette terminologie provenant du fait qu'on peut montrer que la mesure positive $-\Delta\tilde{f}$ s'obtient à partir de la mesure positive $-\Delta f$ en répartissant convenablement les masses qui sont dans B sur la frontière $\delta B = S$ sans modifier le reste ni la masse totale).

1.3 La méthode.

Soit Ω un ouvert connexe borné de \mathbb{R}^n . On se donne une fonction continue f sur la frontière $\partial\Omega$ de Ω et on cherche une fonction $H(f)$ harmonique dans Ω tendant vers f à la frontière. Si une telle fonction existe elle est unique en vertu du fait classique qu'une fonction harmonique dans un ouvert connexe ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de l'ouvert sans être constante dans l'ouvert.

Le vrai problème est donc l'existence, pour cela on se ramène d'abord au cas où f est la trace sur $\partial\Omega$ d'une fonction F de classe C^2 dans \mathbb{R}^n et telle que $\Delta F < 0$ dans une boule \underline{B} choisie aussi grande qu'on veut contenant $\bar{\Omega}$. Ceci est possible car la fonction f continue sur le compact $\partial\Omega$ de \mathbb{R}^n est limite uniforme de polynômes p_n , et si les fonctions $H(p_n)$ existent, par les propriétés classiques de convergence des fonctions harmoniques, les $H(p_n)$ convergent uniformément sur $\bar{\Omega}$ vers une fonction harmonique qui est donc $H(f)$. Or tout polynôme est différence de polynômes p tels que $\Delta p < 0$ dans \underline{B} .

Considérant alors un recouvrement de Ω par des boules ouvertes $B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$ de frontières incluses dans Ω , on balaye F successivement hors de chaque boule, dans un ordre quelconque pourvu qu'on balaye une infinité de fois hors de chaque boule (par exemple dans l'ordre $B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1,$

B_2, B_3, B_4, \dots). On obtient une suite décroissante de fonctions $F_1 = F, F_2, F_3, \dots, F_n, \dots$ surharmoniques dans Ω , continues sur \underline{B} coïncidant avec F sur $\underline{B} \setminus \Omega$. Soit F_∞ la limite de cette suite. Dans chacune des boules B_k, F_∞ comme limite décroissante de fonctions harmonique est harmonique donc F_∞ est harmonique dans Ω .

Supposons maintenant qu'en un point $y \in \partial\Omega$ on puisse faire passer une sphère S extérieure à Ω et contenue dans \underline{B} . Si on résoud le problème de Dirichlet extérieur pour S avec F comme donnée frontière on obtient $K^S(F)$ et la fonction U égale à $K^S(F)$ à l'extérieur de S et à F sur S et à l'intérieur de S est harmonique à l'extérieur de S donc dans Ω et continue dans \underline{B} . On a dans \underline{B} facilement :

$$\begin{aligned} U &\leq F_n \leq F & \forall n \\ \text{d'où } U &\leq F_\infty \leq F \end{aligned}$$

et F_∞ est encadrée par deux fonctions continues qui coïncident au point y et est donc continue en y .

Ainsi si l'ouvert Ω vérifie la condition de sphère extérieure en chaque point de sa frontière F_∞ résoud le problème de Dirichlet pour f .

2 Balayage numérique.

On rencontre couramment en géodésie le problème de nivellement suivant :

E est un ensemble fini qu'on peut supposer inclus dans \mathbb{R}^2 . Pour tous $x, y \in E$ on a mesuré des différences d'altitude $h_x - h_y = \alpha_{xy}$, $\alpha_{yx} = -\alpha_{xy}$, entre x et certains points y voisins (ou non) de x . Mais ces mesures ne sont pas compatibles à cause des erreurs de mesure. Il n'existe aucune fonction h de E dans \mathbb{R} telle que :

$$h(x) - h(y) = \alpha_{xy} \quad \forall x, y$$

Ainsi on souhaite trouver h minimisant la fonctionnelle

$$\sum_{(x,y) \in M} (h(x) - h(y) - \alpha_{xy})^2$$

où la relation symétrique $M \subset E^2$ désigne les couples (x, y) ayant fait l'objet d'une mesure (chacun de ces couples est compté deux fois dans la somme ci-dessus ce qui est sans importance) ou, plus généralement, minimisant la fonctionnelle

$$(1) \quad \sum_{(x,y) \in M} q(x, y) (h(x) - h(y) - \alpha_{xy})^2$$

où les poids $q(x, y)$ sont positifs et en relation avec ce qu'on sait de la qualité de la mesure entre x et y .

La fonction h vérifie donc, en posant $M_x = \{y : (x, y) \in M\}$

$$(2) \quad 2 \sum_{y \in M_x} q(x, y) (h(x) - h(y) - \alpha_{xy}) = 0 \quad \forall x \in E$$

qui est l'expression du gradient de la fonctionnelle quadratique (1).

Si on considère alors la matrice stochastique

$$(3) \quad P(x, y) = \frac{q(x, y)}{\sum_{y \in M_x} q(x, y)}, \quad P(x, y) = 0 \text{ si } y \notin M_x,$$

l'équation (2) devient

$$(4) \quad (P - I)h = -\beta$$

avec

$$\beta(x) = \left(\sum_{y \in M_x} q(x, y) \alpha_{x,y} \right) / \sum_{y \in M_x} q(x, y)$$

et où on a adopté les notations classiques pour les chaînes de Markov (cf. [5]) :

Ph désigne la fonction $x \rightarrow \sum_y P(x, y)h(y)$, notations que nous employerons aussi dans la suite.

Quand conditions aux limites, il est clair que pour arriver à une carte du relief on doit caler le champ de mesures par rapport à des mesures absolues existantes et on suppose donc que h est imposée en certains points de E qu'on appellera le bord qu'on notera ∂E , et qui est donc supposé non vide.

Finalement on cherche h vérifiant

$$(5) \quad \begin{cases} (P - I)h = -\beta & \text{dans } E \setminus \partial E \\ h = f & \text{dans } \partial E \end{cases}$$

Dans ce problème la matrice $P(x, y)$ n'intervient que pour $x \in E \setminus \partial E$. Pour la commodité nous modifions la définition de P en considérant qu'elle est la matrice de transition de la chaîne arrêtée sur ∂E , ce qui revient à définir P par (3) si $x \in E \setminus \partial E$ et à poser, si $x \in \partial E$

$$P(x, y) = 1$$

$$P(x, y) = 0 \text{ si } y \neq x.$$

2.1 le problème homogène.

Considérons d'abord le problème homogène

$$(6) \quad \begin{cases} (P - I)h = 0 & \text{dans } E \setminus \partial E \\ h = f & \text{dans } \partial E \end{cases}$$

Définissons une fonction η_0 par

$$\begin{cases} \eta_0(x) = \max(f) & \text{pour } x \in E \setminus \partial E \\ \eta_0(x) = f(x) & \text{pour } x \in \partial E \end{cases}$$

qui vérifie clairement $P\eta_0 \leq \eta_0$.

On définit alors itérativement η_{n+1} en fonction de η_n en posant :

$$\eta_{n+1} = K_n \eta_n$$

où K_n est l'opérateur défini par

$$(7) \quad K_n g(x) = g(x)1_{\{x \neq x_n\}} + P g(x_n)1_{\{x = x_n\}}$$

dans ces définitions x_n est une suite de points de $E \setminus \partial E$ passant une infinité de fois en chaque point de $E \setminus \partial E$. Notons le fait suivant :

Lemme 1 *Si ξ est une fonction de E dans \mathbb{R} vérifiant :*

$$P\xi \leq \xi, \quad \text{alors on a aussi}$$

$$PK_n \xi \leq K_n \xi.$$

Démonstration 2 a) hors de $\{x_n\}$

de $\xi \geq P\xi$ on tire $K_n \xi \geq P\xi \geq PK_n \xi$

b) au point x_n

$$K_n \xi(x_n) = P\xi(x_n) \geq PK_n \xi(x_n). \quad \square$$

Il résulte de ce lemme que la suite η_n est décroissante. Elle est minorée par la constante $\min(f)$, appelons η_∞ sa limite. De $\eta_n \geq P\eta_n$ on tire $\eta_\infty \geq P\eta_\infty$. Mais au point x_n on a

$$\eta_{n+1}(x_n) = P\eta_n(x)$$

et η_∞ est aussi la limite de la sous-suite des η_n qui vérifient au point x

$$\eta_{n+1}(x) = P\eta_n(x)$$

et vérifie par conséquent

$$\eta_\infty(x) = P\eta_\infty(x) \quad \forall x \in E \setminus \partial E$$

Enfin on a $\eta_\infty(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial E$ car $\eta_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \partial E \quad \forall n$.

On a donc trouvé une solution η_∞ du problème (6).

Cette solution avec les seules hypothèses précédentes n'est pas nécessairement unique. On peut voir qu'elle est unique si pour tout $x \in E \setminus \partial E$ la probabilité que la chaîne de Markov de matrice P partant de x atteigne le bord ∂E est strictement positive.

D'un point de vue pratique pour le problème de géodésie dont nous parlons l'unicité est en général simple à vérifier compte tenu du réseau des mesures faites et du calage imposé.

2.2 Le problème inhomogène.

Considérons maintenant le problème

$$(8) \quad \begin{cases} (P - I)h = -\beta & \text{dans } E \setminus \partial E \\ h = 0 & \text{dans } \partial E \end{cases}$$

Posant $\beta = \beta^+ - \beta^-$ on se ramène au cas $\beta \geq 0$.

Supposons qu'on ait trouvé une fonction ξ_0 telle que

$$\xi_0 \geq P\xi_0 + \beta$$

et vérifiant $\xi_0 = 0$ sur ∂E .

Alors l'algorithme

$$(9) \quad \xi_{n+1} = J_n \xi_n$$

avec J_n défini par

$$(10) \quad J_n \xi(x) = \xi(x)1_{\{x \neq x_n\}} + (P\xi(x_n) + \beta(x_n))1_{\{x = x_n\}}$$

pour une suite (x_n) de points de $E \setminus \partial E$ passant une infinité de fois par chaque point de $E \setminus \partial E$ converge vers une solution du problème (8).

Le raisonnement est identique au préc édent : un lemme analogue montre que la suite ξ_n est décroissante. Elle est positive, sa limite ξ_∞ est aussi limite de la sous-suite qui vérifie en x

$$\xi_{n+1}(x) = P\xi_n(x) + \beta(x)$$

donc $\xi_\infty(x) = P\xi_\infty(x) + \beta(x) \quad \forall x \in E \setminus \partial E$ et $\xi_\infty(x) = 0$ sur ∂E .

Une condition suffisante pour que le problème (8) (et donc aussi le problème (6)) ait une solution unique est qu'il existe ξ_0 positive finie pour vérifiant

$$\xi_0 - P\xi_0 > 0 \quad \text{dans } E \setminus \partial E.$$

En effet posant $\gamma = \xi_0 - P\xi_0$, si h vérifie

$$\begin{cases} (P - I)h = 0 & \text{dans } E \setminus \partial E \\ h = 0 & \text{dans } \partial E \end{cases}$$

h vérifie $h = Ph$ partout donc $h = P^n h$.

Or on a $\sum_{n=0}^{\infty} P^n \gamma \leq \xi_0$ donc $P^n \gamma \rightarrow 0$ quand $n \uparrow \infty$ ce qui, puisque $\gamma > 0$ dans $E \setminus \partial E$, que $h = 0$ sur ∂E et que l'on est sur un espace fini, entraîne que $P^n h \rightarrow 0$. Donc $h = 0$.

2.3 Mise en oeuvre de ces algorithmes.

a) Encadrement.

Il est intéressant, pour avoir la précision obtenue lorsqu'on arrête, de procéder à un encadrement par des sur-solutions et des sous-solutions, les algorithmes étant appliqués également par en dessous de façon analogue et engendrant alors des suites croissantes.

b) Choix de la suite (x_n) .

Quoique n'importe quelle suite dans $E \setminus \partial E$ convienne dès qu'elle passe une infinité de fois en chaque point, les suites où x_{n+1} , n'est pas voisin de x_n (plus précisément où $x_{n+1} \notin M_{x_n}$ sont meilleures (car on y balaye davantage à chaque étape).

c) Mise en oeuvre simultanée dans le cas linéaire.

Ici l'opérateur P est un opérateur linéaire de telle sorte qu'on peut

ajouter les relations (7) et (10) terme à terme et que plus précisément si on applique l'algorithme

$$\psi_{n+1} = J_n \psi_n$$

avec J_n défini par (10) avec pour ψ_0 une fonction finie vérifiant la seule hypothèse que $\psi_0 = f$ sur ∂E alors ψ_n converge vers une solution du problème initial (5), sous les hypothèses rendant valides les algorithmes précédents. Evidemment l'algorithme n'est plus monotone, et cette application directe de l'algorithme de balayage ne fournit plus la précision obtenue lorsqu'on arrête.

2.4 Cas non linéaire.

Dans le cas ci-dessus où P est un opérateur linéaire la résolution du système (5) peut se faire par bien d'autres méthodes classiques du calcul matriciel, l'intérêt de la méthode de balayage est sa simplicité de mise en oeuvre ainsi que sa remarquable stabilité qui fait qu'on peut l'employer également pour un lissage final d'une solution obtenue par une autre méthode.

Mais il est intéressant également de remarquer que le fait que P soit linéaire n'intervient pas dans l'algorithme qui n'utilise que la croissance $f_1 \leq f_2 \implies Pf_1 \leq Pf_2$ la continuité monotone, ainsi que l'existence de sur-solutions ou sous-solutions pour initier l'algorithme. Evidemment dans le cas non linéaire l'unicité est plus difficile à obtenir et son étude relève de propriétés particulières.

Une famille d'exemples est fournie par les moyennes non linéaires :

Soit d un entier ≥ 2 et m une application de $(\mathbb{R}_+^*)^d$ dans \mathbb{R}_+^* telle que

- i) $a_i \leq b_i \quad i = 1, \dots, d \quad \implies \quad m(a_1, \dots, a_d) \leq m(b_1, \dots, b_d)$
- ii) $\lim_{a_i \downarrow b_i, \dots, a_d \downarrow b_d} m(a_1, \dots, a_d) = m(b_1, \dots, b_d)$
- iii) $\inf_i a_i \leq m(a_1, \dots, a_d) \leq \sup_i a_i$

Parmi ces moyennes non linéaires on peut citer

- . La moyenne géométrique

$$m(a_1, \dots, a_d) = (a_1, \dots, a_d)^{\frac{1}{d}}$$

(mais ce cas se ramène au cas linéaire par passage au logarithme)

. les moyennes dans $\ell^p : 1 < p < \infty$

$$m(a_1, \dots, a_d) = \left[\frac{1}{d} (a_1^p + \dots + a_d^p) \right]^{\frac{1}{p}}$$

. dans le cas $d = 2$ la moyenne arithmético-géométrique définie par

$$u_0 = a_1, v_0 = a_2$$

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n)$$

$$m(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

. les moyennes définies par des minimax telles que

$$m(a_1, \dots, a_d) = \sup_{i \neq j} a_i \wedge a_j$$

$$m(a_1, \dots, a_d) = \bigvee_{I \in J} \bigwedge_{i \in I} a_i \quad \text{pour } J \text{ une famille de parties de } \{1, \dots, d\}.$$

Et d'autres définitions avec davantage d'alternance des symboles \bigvee (sup) et \bigwedge (inf) tels qu'on en rencontre dans les problèmes de fiabilités.

Pour ces moyennes si on définit l'opérateur P par

$$Pf(x) = m(F(y_1), \dots, f(y_d))$$

où les points y_1, \dots, y_d sont les points voisins de x en un sens à préciser sur chaque exemple. Et l'algorithme (7) résoud pour ces opérateurs le problème (6) en partant de la même fonction η_0 que dans le cas linéaire.

References

- [1] H. Poincaré, Théorie du potentiel newtonien, cours de la Sorbonne 1894-95, Carré et Naud, (1899), Paris.
- [2] Cl. Dellacherie, P.A. Meyer, Probabilités et potentiels, chapitres IX à XI, Hermann, (1983).
- [3] N. Bouleau, La fonction entre la théorie du potentiel et les probabilités, Cahier du Sémin. d'Histoire des mathématiques n°8, p. 43-66, (1987).

- [4] M. Brelot, Théorie classique du potentiel, CDU, (1969).
- [5] N. BOULEAU, Processus stochastiques et applications, Hermann, (1988).