

INSTITUT DE  
MATHÉMATIQUES DE  
BOURGOGNE

UMR 5584 DU CNRS

## Thèse

en vue d'obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

Spécialité : MATHÉMATIQUES

présentée par

**Samuel Petite**

## Pavages du demi-plan hyperbolique et laminations

soutenue publiquement le devant le jury composé de

Rapporteur )  
Directeur de thèse ) Université de Bourgogne  
Examineur  
Examineur  
Président  
Rapporteur



# Table des matières

0.1	Un problème issu de la physique . . . . .	5
0.2	Espace de pavages . . . . .	8
<b>1</b>	<b>Quelques constructions de pavages</b>	<b>11</b>
1.1	Pavages euclidiens . . . . .	12
1.1.1	Méthode de substitution . . . . .	12
1.1.2	Méthode coupée-projection . . . . .	15
1.2	Pavages hyperboliques . . . . .	18
1.2.1	Construction de Penrose . . . . .	18
1.2.2	Construction de G. Margulis et S. Mozes . . . . .	20
1.2.3	Construction de Mozes pour un espace symétrique . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Pavages : topologie et systèmes dynamiques</b>	<b>23</b>
2.1	Topologie et action de groupe . . . . .	23
2.2	Structure de $\Omega(T)$ . . . . .	27
<b>3</b>	<b>G-solénoïdes, surfaces branchées et limites inverses</b>	<b>29</b>
3.1	Une définition de G-solénoïde . . . . .	29
3.2	Surfaces branchées . . . . .	31
3.2.1	Modèle local . . . . .	31
3.2.2	Modèle global . . . . .	32
3.2.3	Morphismes . . . . .	34
3.3	Des surfaces branchées aux G-solénoïdes : la limite projective . . . . .	34
3.3.1	Limite projective . . . . .	35
3.3.2	Construction de limite projective . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Mesures et courants</b>	<b>39</b>
4.1	Cycles feuilletés . . . . .	40
4.1.1	Mesures invariantes et mesures transverses . . . . .	40
4.2	Courants harmoniques . . . . .	43
4.2.1	Courants harmoniques et mesures harmoniques . . . . .	43
4.2.2	Mesures harmoniques et théorème ergodique . . . . .	45
4.3	Mesures invariantes et mesures harmoniques . . . . .	45
4.3.1	Combinatoire des mesures invariantes . . . . .	48

<b>5 Exemples</b>	<b>51</b>
5.1 Exemples . . . . .	51
5.2 Remarques et perspectives . . . . .	55

# Introduction

## 0.1 Un problème issu de la physique

Au printemps 1982, L'équipe de D. Shechtman, chercheur de l'institut de technologie Technion (Haifa), découvre au NBS à Washington DC dans un alliage d'aluminium et de manganèse rapidement solidifié, une phase ayant toutes les caractéristiques d'un cristal [SBDC]. Afin de connaître la répartition des atomes d'une telle structure, l'équipe réalise son diagramme de diffraction (voir la figure 1). Ce diagramme est discret et semblable à celui obtenu avec d'un cristal. A partir de ce diagramme, ils déduisent que



FIG. 1 – Diagramme de diffraction

les atomes de la phase se répartissent dans l'espace de sorte que la distance entre deux atomes soit supérieure à une certaine constante et qu'il n'existe qu'un nombre fini de configurations locales à translation près.

Dans un cristal, il existe une configuration finie d'atomes, appelée *maille élémentaire* qui se répète une infinité de fois selon trois directions de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ . Le groupe des isométries qui préservent un cristal et dont les images de la maille élémentaire par ces isométries, recouvrent l'espace tout entier, forme un groupe discret nommé *groupe cristallographique*. Un théorème classique de Bieberbach [Bi] affirme qu'il n'existe qu'un

nombre fini, à isomorphisme près, de groupes cristallographiques. Il est donc possible de dresser la table des classes d'isomorphismes de tels groupes. A la fin du 19ème siècle, des cristallographes tels Bravais, ou Federov ont montré qu'il en existait 17 en dimension 2 et 219 en dimension 3 [Ha].

Cependant, le diagramme de diffraction découvert par Shechtman présente une symétrie d'ordre 10 autour du point central. Cette symétrie est également valable pour la configuration d'atomes de la phase mais elle est interdite par la classification précédente. La structure de cette phase est donc différente de celle des cristaux. En particulier la configuration d'atomes n'est stable par aucune translation. Cependant chaque configuration finie d'atomes se répète uniformément. Pour cette raison, une telle structure a été appelée *structure de quasi-cristal* en guise de contraction de cristal quasipériodique.

Par la suite, plus d'une centaine de structures quasi-cristallines ont été caractérisés ces vingt dernières années. La plupart d'entre elles sont des alliages métalliques, en grande majorité à base d'aluminium, et présentent pourtant des résistivités électroniques et thermiques exceptionnellement élevées. Des propriétés qui semblent ne dépendre que des configurations géométriques des atomes de ces quasi-cristaux.

Cette nouvelle structure soulève naturellement des questions fondamentales aussi bien en physique qu'en mathématiques. Comment modéliser cette structure? Comment distinguer deux quasi-cristaux? Comment peut-on classifier ces structures? Les atomes ne ressentent l'interaction que de leurs plus proches voisins, comment avec des règles locales, est-il possible de construire une structure quasipériodique? Avec quelles fréquences apparaissent les configurations finies?

Une façon naturelle de modéliser cette structure d'atomes est de considérer chaque atome comme un point d'un espace euclidien  $E$ . L'ensemble de ces points forme alors un *ensemble de Delone*<sup>1</sup>, c'est-à-dire un ensemble qui est *uniformément discret* (la distance entre deux points est bornée inférieurement) et *relativement dense* (tout point de l'espace se situe à une distance uniformément bornée de cet ensemble). De plus il n'existe qu'un nombre fini de configurations finies de points, à isométrie de l'espace près, cet ensemble de Delone est dit *de type fini*. Une configuration d'atomes dans un cristal ou un quasicristal forme donc un ensemble de Delone de type fini.

Une autre modélisation est possible, par l'intermédiaire d'un pavage. Un *pavage* est une collection de polygones recouvrant l'espace de sorte que les polygones se rencontrent face contre face. S'il n'y a qu'un nombre fini de type différents de polygones, le pavage est dit de *type fini*. Les atomes d'un cristal ou d'un quasicristal sont situés alors à l'intérieur des polygones du pavage.

Cette modélisation est équivalente à la précédente. L'ensemble des centres de gravité des polygones d'un pavage de type fini est un ensemble de Delone de type fini. De même, il est possible de définir un pavage à partir d'un ensemble de Delone  $X$ . L'ensemble des *cellules de Voronoï* de chaque point de  $X$  définit un pavage de l'espace. La cellule de Voronoï d'un point  $x$  de  $X$  étant l'ensemble des points  $y$  de l'espace tels que la distance

---

<sup>1</sup>ou ensemble de Delaunay en référence au mathématicien russe Boris Nikolaevich Delone (Delaunay). Son grand-père nommé Deloney était un mercenaire irlandais enrôlé dans l'armée Napoléonienne et surnommé Delaunay par les français.

FIG. 2 – Pavage de Conway apériodique avec un unique pavé

de  $y$  à  $x$  soit plus petite que la distance de  $y$  aux autres points de  $X$ .

La découverte de l'équipe de D. Shechtman montre, pour la première fois, l'existence dans la nature de structures spatiales qui ne sont pas construites à partir d'une maille élémentaire répétée périodiquement. Les pavages ou les ensembles de Delone associés sont alors dits *apériodiques*.

Il est important de noter que des structures temporelles apériodiques avaient été observées depuis longtemps (cinq siècles avant JC) par les babyloniens lors de l'observation des mois lunaires. Il est aussi intéressant de remarquer que de telles structures spatiales avaient été imaginées bien avant. Il semble que A. Dürer en 1525 dans "Underweysung der Messung" [Dü] fut le premier à inventer un pavage qui n'est pas stable par translation. Ce pavage admet une symétrie d'ordre 5 et est réalisé à partir d'un pentagone régulier et d'un losange fin.

Dans les années 60, H. Wang du Bell Laboratory a analysé une certaine classe de propositions logiques. Afin d'étudier si ces propositions sont décidables, Wang se ramena au *jeu du domino* [Wa]. Ce jeu consiste à partir d'une famille finie de carrés dans le plan euclidien dont chaque bord est décoré par une certaine couleur (les quatre bords n'étant pas nécessairement de la même couleur), de recouvrir le plan avec des copies par des translations des éléments de cette famille de sorte que deux bords de couleurs différentes ne puissent se rencontrer. Son étudiant R. Berger [Be] publia dans sa thèse en 1967, un exemple avec une famille de 20 426 carrés pouvant paver le plan mais les pavages obtenus ne sont pas stables par translation. Grâce à cet exemple, R. Berger put conclure qu'il n'existe pas d'algorithme pour déterminer si une famille de pavés peut paver le plan.

Le modèle de R. Berger a été, par la suite, considérablement simplifié pour atteindre une dizaine de pavés. D.E. Knuth, H. Läuchli, R. M. Robinson, R. Ammann ont donné d'autres exemples de familles de pavés de sorte que tous les pavages construits avec ces pavés ne sont pas stables par translation. En 1977, R. Penrose donna un exemple avec seulement 2 polygones qui peuvent paver le plan uniquement de façon apériodique avec des copies isométriques. Chaque pavage créé ainsi ne possède qu'un nombre fini d'orientations différentes de ces polygones (voir figure 1.1.1 p.14). En fait, la configura-

tion d'atomes découverte par Shechtman est une version en dimension 3 du pavage de Penrose [LS]. Dans le même esprit, J. Conway [Co] a construit un pavé dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  pouvant paver cet espace mais pas de manière périodique (voir figure 2). Cet exemple est construit à partir d'un biprisme dont la base est un losange tel que ses angles internes sont irrationnels. Contrairement à la dimension 3, il n'est évidemment pas possible de paver la droite réelle de façon non périodique avec un unique type d'intervalle (à translation près). En dimension 2, ce problème est toujours ouvert : on ne sait s'il existe un polygone du plan euclidien qui puisse paver le plan uniquement de façon non périodique.

La construction de pavage apériodique trouve naturellement une extension dans le cas de la géométrie hyperbolique. Citons notamment R. Penrose [P], G. Margulis et S. Mozes [MM], [Mz], qui ont construit des familles de pavages du demi plan hyperbolique et d'autres espaces symétriques, non stables par un sous-groupe d'isométries discret co-compact.

## 0.2 Espace de pavages

Nous nous intéresserons aux pavages d'une surface de Riemann  $X$  munie d'une métrique Riemannienne, non compacte et simplement connexe, construits à partir d'un nombre fini de types de polygones et dont les pavés se rencontrent face contre face (c'est-à-dire chaque sommet d'un pavé correspond au sommet d'un autre pavé). L'idée fondamentale que nous allons suivre est qu'un tel pavage code un système dynamique. Ce système est une action continue d'un groupe  $G$  d'isométries de  $X$  sur un espace métrique compact dont les éléments sont des pavages. La topologie sur l'ensemble des pavages de  $X$  est définie de sorte que les propriétés combinatoires du pavage soient reliées avec les propriétés de cette action.

L'image d'un pavage par une isométrie est encore un pavage fait avec les mêmes pavés, par conséquent, le groupe des isométries de  $X$  agit sur l'ensemble des pavages de  $X$ . Une topologie, plus fine que celle induite par la métrique de  $X$ , donne à l'ensemble des pavages de  $X$  une structure d'espace compact métrisable rendant cette action continue (voir chapitre 2). L'étude du comportement global de cette action dans cet espace compact est, comme nous allons le voir, très riche. L'ensemble des pavages construits avec les pavés de l'exemple de R. Berger [Be] constitue notamment, un exemple d'une action libre sur un espace compact pour le groupe des translations du plan. Pour cette raison, nous nous restreindrons à un sous-groupe de Lie  $G$  des isométries de  $X$  et nous nous intéresserons à son action sur les plus petits ensembles (pour l'inclusion) fermés invariants pour cette action. Ces ensembles fermés seront dits *minimaux*. Par une conséquence directe du lemme de Zorn, de tels ensembles existent toujours pour tout groupe  $G$ . Un exemple simple d'ensemble minimal est donné par un réseau co-compact  $\Gamma$  de  $X$ . Il existe un pavage associé à  $\Gamma$  dont les pavés sont les copies par des éléments de  $\Gamma$  du domaine fondamental de  $\Gamma$ . L'orbite de ce pavage par l'action du groupe des isométries de  $X$  est alors homéomorphe au quotient du groupe des isométries de  $X$  par  $\Gamma$  et est un ensemble fermé minimal.

Dans le cas où l'action du groupe  $G$  est libre, un ensemble fermé minimal contient plusieurs orbites. Les pavages appartenant à ce fermé sont alors apériodiques, c'est à dire non stable par un réseau co-compact et vérifient un critère combinatoire particulier appelé "répétitivité" (voir définition p. 26). La construction de ces pavages, comme celle de fermés minimaux munis d'une action libre, n'est pas du tout évidente. Le pavage de Penrose en est un exemple pour l'action du groupe des translations du plan  $\mathbb{R}^2$ . Cet exemple n'est pas unique, nous expliciterons dans le chapitre 1 et dans le dernier chapitre, certaines constructions de pavages euclidiens ou hyperboliques pour obtenir une action libre de  $G$  sur un ensemble fermé minimal.

Dans ce cas, l'action de  $G$  permet de paramétriser localement l'ensemble minimal  $M$  et ainsi de donner une structure à cet ensemble compact. L'espace  $M$  est partitionné en orbites pour l'action où chaque orbite, que nous appellerons *feuille*, a une structure de surface non compacte. De plus, il existe un espace topologique transverse aux orbites. Le compact  $M$  hérite alors d'une structure de lamination. Cette structure d'espace est une généralisation de la notion de feuilletage. Localement, cet espace est le produit d'un ouvert de  $G$  avec un espace topologique totalement discontinu comme, par exemple, un ensemble de Cantor. En fait, comme nous le verrons, les laminations issues des pavages possèdent une structure encore plus particulière appelée  $G$ -solénoïde [BG].

Comme l'action du groupe  $G$  sur  $M$  est minimale et libre, toutes les feuilles sont denses et homéomorphes à  $G$ . La topologie ne nous permet pas de distinguer ces feuilles. Par contre, il est possible de caractériser le comportement statistique de ces feuilles qui, *a priori*, est différent d'une feuille à l'autre.

Dans [BG] R. Benedetti et J-M. Gambaudo caractérisent le comportement statistique des feuilles dans le cas d'un pavage du plan euclidien avec une action de  $\mathbb{R}^2$ . Comme nous allons le voir, ces techniques ne sont pas transposables au cas hyperbolique. Dans le cas euclidien, les auteurs montrent que les mesures invariantes pour l'action du groupe des translations  $\mathbb{R}^2$  sont en bijection avec les mesures de l'espace transverse qui sont invariantes pour l'action de l'holonomie. Ceci n'a pas de sens dans le cas hyperbolique : il n'est pas possible de définir une mesure transverse invariante car le nombre de pavés contenus dans une boule de rayon  $r$  augmente exponentiellement avec  $r$ .

Si  $G$  désigne le groupe des transformations affines de  $\mathbb{H}^2$ , l'action de  $G$  sur un  $G$ -solénoïde admet une mesure invariante car le groupe  $G$  est moyennable. Nous prouvons alors le résultat suivant :

**Résultat 1** *Une mesure finie sur un  $G$ -solénoïde est une mesure invariante pour l'action de  $G$  si et seulement si c'est une mesure harmonique.*

La mesure d'un borélien dans la lamination, pour une mesure harmonique ergodique, correspond au temps moyen de passage dans ce borélien d'un chemin aléatoire le long d'une feuille (le chemin est choisi avec une probabilité 1 pour une certaine mesure que nous expliciterons).

Il est alors possible de donner une caractérisation combinatoire des mesures invariantes pour l'action de  $G$  :

**Résultat 2** *Il existe une suite d'applications linéaires  $(A_n)_n$  et une suite de cônes vectoriels  $C_n$  de dimension finie, tels que  $A_n(C_{n+1}) \subset C_n$  pour tout  $n$ . L'espace des mesures invariantes pour l'action de  $G$  sur un  $G$ -solénoïde est isomorphe à la limite projective  $\varprojlim(C_n, A_n)$ .*

En donnant une construction explicite de pavages de  $\mathbb{H}^2$ , nous prouvons le résultat suivant :

**Résultat 3** *Pour tout entier  $r \geq 1$ , il existe un  $G$ -solénoïde admettant exactement  $r$  mesures de probabilité invariantes et ergodiques pour l'action de  $G$ .*

Ce dernier résultat est à comparer avec un résultat de B. Deroin et V. Kleptsyn [DK], qui affirme qu'un sous ensemble minimal d'un feuilletage transversalement conforme d'une variété compacte admet soit une mesure transverse invariante, soit une unique mesure harmonique.

Cette thèse est organisée de la façon suivante : le chapitre 1 est consacré à des exemples de construction de pavages aperiodiques euclidiens et hyperboliques. Dans le chapitre suivant, nous explicitons comment associer un système dynamique à un pavage. Nous rappelons dans le chapitre 3, des définitions de base concernant la structure de  $G$ -solénoïde et sa description en termes de limite projective de surfaces branchées. Le chapitre 4 concerne les preuves des résultats 1 et 2. Le dernier chapitre est consacré à la construction d'exemples démontrant le résultat 3.

# Chapitre 1

## Quelques constructions de pavages

Un *pavage* d'une variété Riemannienne orientée  $M$  est une collection dénombrable  $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$  d'ensembles compacts d'intérieurs non vides  $t_i$  appelés *pavés* tels que leur union soit l'espace  $M$  tout entier. Les pavés se rencontrent sur leur bord et les intérieurs des pavés sont deux à deux disjoints.

Un *patch* est une sous famille finie de pavés de  $T$ . Si  $\mathbf{G}$  désigne un groupe d'isométries préservant l'orientation de  $M$ , nous dirons que deux patches  $P_1$  et  $P_2$  de  $T$  sont  *$\mathbf{G}$ -équivalents* s'ils sont image l'un de l'autre par une isométrie appartenant à  $\mathbf{G}$ .

Un pavage  $T$  est dit de  *$\mathbf{G}$ -type fini* si :

- il existe une famille finie de pavés  $\{p_1, \dots, p_n\}$  (chaque représentant étant fixé) dénommés *proto-pavés* de sorte que chaque  $t_i$  soit l'image de l'un de ces proto-pavés par un élément de  $\mathbf{G}$ .
- Pour tout réel  $R$ , il n'existe qu'un nombre fini de classes de  $\mathbf{G}$ -équivalence parmi les patches de diamètre inférieur à  $R$ .

Un exemple simple de pavage peut être construit à partir d'un sous-groupe  $\Gamma$  discret co-compact d'isométries de  $M$ . La collection  $T_\Gamma = \{\gamma(F), \gamma \in \Gamma\}$  où  $F$  désigne le domaine fondamental de  $\Gamma$ , est un pavage de  $M$  de  $\Gamma$ -type fini.

L'image d'un pavage de  $\mathbf{G}$ -type fini par une isométrie appartenant à  $\mathbf{G}$  est encore un pavage de  $\mathbf{G}$ -type fini réalisé avec les mêmes proto-pavés. Dans l'exemple précédent, l'image du pavage  $T_\Gamma$  par un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  est encore le pavage  $T_\Gamma$ . Dans ce chapitre nous construirons des pavages de type fini, différents des pavages du type  $T_\Gamma$ . Ces pavages ne seront pas stables par un groupe co-compact d'isométries : ils seront appelés *apériodiques*. Plus précisément, nous nous intéresserons à la construction de solutions du problème de Wang.

Ce problème, énoncé dans les années 60 dans un contexte différent (voir l'introduction), est le suivant : pour un sous groupe  $\mathbf{G}$  d'isométries d'une variété Riemannienne  $M$  donnée, existe-t-il une famille finie de proto-pavés telle que tous les pavages de  $\mathbf{G}$ -type fini construits avec ces proto-pavés sont apériodiques ?

Cette question a essentiellement été traitée dans les cas du plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , muni de sa métrique euclidienne standard et du demi-plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$  de sa métrique standard  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . En 1967, R. Berger [**Be**] a donné un premier exemple donnant une réponse affirmative au problème de Wang dans  $\mathbb{R}^2$  pour le groupe

des translations du plan. Plus tard, Penrose [P] trouva aussi un exemple avec une famille de dix pavés (deux pavés avec chacun cinq orientations différentes). Nous expliciterons la construction de R. Penrose dans ce chapitre.

Penrose [P] a donné également un exemple de pavé qui ne peut paver une surface compacte mais qui pave le demi-plan hyperbolique. Ce pavage n'est donc pas stable pour un sous groupe co-compact d'isométries, il est par conséquent apériodique. La preuve de Penrose est essentiellement homologique. J. Block et S. Weinberger dans [BW] et S. Mozes et G. Margulis dans [MM] ont généralisé ce résultat en reprenant les arguments homologiques de Penrose. Dans [Mz], S. Mozes construit une famille finie de pavés ne pouvant engendrer que des pavages apériodiques d'un groupe de Lie semi-simple différent de  $SL_2(\mathbb{R})$ .

## 1.1 Pavages euclidiens

Dans le cas euclidien, nous traiterons un cas plus particulier que celui des pavages apériodiques. Nous nous intéresserons aux pavages qui ne sont préservés par aucune translation de l'espace euclidien. De tels pavages seront dits *non périodique*. Nous donnons ici quelques exemples de méthodes de construction de pavages permettant la résolution du problème de Wang non périodique c'est-à-dire : trouver une famille de proto-pavés telle que tout pavage de  $\mathbb{R}^2$  type fini construit avec ces proto-pavés, soit non périodique. Nous illustrerons ces méthodes à travers l'exemple célèbre du pavage de Penrose. Nous sommes loin de donner une liste exhaustive des méthodes de construction de pavages non périodiques. Le lecteur trouvera dans [Se] pour d'autres méthodes de construction.

### 1.1.1 Méthode de substitution

Cette méthode consiste à prendre une famille finie de polygones  $\{p_1, \dots, p_n\}$  contenant l'origine en leur intérieur. Ces polygones vérifient de plus la propriété suivante : il existe une certaine constante  $\lambda > 1$  de sorte que chaque pavé  $p_i$  dilaté par un facteur  $\lambda$  est l'union de copies par translations des pavés  $p_j$ , les copies ne s'intersectant que sur leur bord. Bien évidemment ce genre de propriété n'est pas vérifiée par n'importe quelle famille de pavés. En itérant le processus, on construit alors une union de polygones qui recouvrent de plus en plus l'espace et qui, à la limite, recouvre le plan et par conséquent constitue un pavage (pour plus de détails voir [GrS]). Ce processus s'appelle *substitution*. Il existe de nombreux exemples de pavages non périodiques créés à partir d'une substitution. Le processus de substitution intervient aussi en théorie des nombres, en particulier avec les nombres de Pisot (voir [BFMS]).

Le pavage de Penrose a deux pavés standards : le cerf-volant  $C$  et la flèche  $F$  ; ce sont des quadrilatères obtenus par réunion de deux triangles isocèles égaux. Le premier,  $C_1$ , a des côtés de longueur 1,  $\tau$  et  $\tau$ , le deuxième  $F_1$  de côtés 1, 1 et  $\tau$  où  $\tau$  est le nombre d'or vérifiant la relation :  $\tau^2 = \tau + 1$  de sorte que leurs angles sont des multiples entiers de  $\frac{\pi}{5}$ . Le processus de construction de Penrose consiste à remplacer de façon itérative

FIG. 1.2 – Substitution du pavage de R. Penrose avec les pavés  $C$  et  $F$

chaque cerf-volant  $C$  par un cerf-volant dilaté  $\tau C$  puis  $\tau C$  par deux cerf-volants  $C$  plus deux flèches  $F$ . De même chaque flèche  $F$  est remplacée par son dilaté  $\tau F$  lui même remplacé par un cerf-volant  $C$  plus deux flèches  $F$  (voir la figure 1.2)<sup>1</sup>.

En itérant le processus, on arrive à la limite à recouvrir tout le plan. Le pavage obtenu sera alors périodique de période quatre pour la substitution car à partir d'un proto-pavé ( $C$  ou  $F$ ), en appliquant quatre fois le processus de substitution, on obtient un patch contenant le proto-pavé initial. Les pavages obtenus par ce processus sont appelés alors *pavages de Penrose*. Ce processus algorithmique, facilement programmable, est utilisé pour dessiner la figure 1.1. Il existe d'autres versions de ce pavage notamment avec des polygones convexes : des losanges fins et épais (figure 1.1.1). Pour obtenir ce pavage avec des losanges, il suffit de décomposer chaque pavé en réunion de deux triangles isocèles égaux  $C_1$  ou  $F_1$ . L'union de deux triangles de type  $C_1$  ainsi obtenus, le long de leur côté de longueur 1 donne un losange fin et l'union des triangles adjacents de type

---

<sup>1</sup>Ce processus n'est pas exactement un processus de substitution comme nous l'avons défini car un pavé dilaté n'est pas l'union de translats des pavés  $C$  et  $F$ . Un pavé dilaté est juste recouvert par des copies de  $C$  et de  $F$  ne s'intersectant que sur leur bords. Cependant, en décomposant chaque pavé en triangles, il est possible de définir une substitution correcte à partir de cette famille de triangles [Se]

FIG. 1.3 – Pavage de Penrose, constitué de losanges

$F_1$  avec deux triangles adjacents de type  $C_1$  donne un losange plus épais. Le pavage de Penrose ainsi décomposé est un pavage réalisé avec deux types (aux isométries de  $\mathbb{R}^2$  près) de losanges. Ces losanges apparaissent chacun avec cinq orientations différentes. Réciproquement, il est possible, à partir d'un pavage de Penrose construit avec des losanges, en décomposant puis en recomposant les pavés de reconstruire un pavage de Penrose avec les polygones  $C$  et  $F$ .

La méthode de construction par substitution implique des propriétés remarquables pour le pavage obtenu. Par exemple, chaque pavé du pavage de Penrose, c'est-à-dire chaque flèche et chaque cerf-volant apparaît dans le pavage avec un nombre fini d'orientations différentes. Ceci vient du fait que les angles des pavés sont rationnellement liés avec  $\pi$ . Un pavage de Penrose est défini avec 10 pavés différents à translation près.

Ensuite, comme le dilaté par  $\tau$  d'une flèche ou d'un cerf-volant peut être décomposé en (au moins une) flèche et en (au moins un) cerf-volant, chaque motif fini du pavage de Penrose va se retrouver dans n'importe quel autre motif fini suffisamment grand. En fait, chaque motif fini se retrouve une infinité de fois. Il est possible aussi de connaître la densité relative  $x$  de flèches et de cerf-volants dans un pavage de Penrose. Itérons le processus de substitution un certain nombre de fois. Nous obtenons alors  $c$  cerf-volants et  $f$  flèches. Le rapport entre les nombres de cerf-volants et le nombre des flèches est égal à  $\frac{c}{f}$  et est proche de  $x$ . D'après la règle de substitution, à la limite, la densité  $x$  doit vérifier la relation  $x = \frac{1+2x}{1+x}$ . Ce nombre est donc  $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$ , le nombre d'or. Remarquons que cette densité est irrationnelle, ceci est impossible pour un pavage périodique.

Il est possible de modifier légèrement les pavés  $C$  et  $F$  (voir figure 1.4) de sorte que les seuls assemblages possibles avec ces pavés soient des assemblages que l'on trouve

FIG. 1.5 – Règle de substitution du pavage pinwheel.

FIG. 1.6 – Pavage pinwheel

1. *uniformément discret*, c'est-à-dire il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $y, y' \in Y$ ,  $\|y - y'\| > r$ , et
2. *relativement dense* : il existe un réel  $R > 0$  tel que toute boule de rayon  $R$  du plan contient un élément de  $Y$ .

Un *patch* d'un ensemble de Delone est une collection finie de points de cet ensemble. Un ensemble de Delone  $Y$  est dit de  $\mathbb{R}^2$ -type fini, si pour tout réel  $K > 0$ , il n'existe, à translation près, qu'un nombre fini de patches de  $Y$  de diamètre inférieur à  $K$ .

Il est possible de construire à partir d'un ensemble de Delone  $Y$  de  $\mathbb{R}^2$ -type fini un pavage du plan de  $\mathbb{R}^2$ -type fini construit avec des polygones. Pour tout point  $y \in Y$ , considérons la *cellule de Voronoï* du point  $y$  qui est l'ensemble

$$t_y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| \leq \|x - y'\| \text{ pour tout } y' \in Y\}.$$

Comme l'ensemble  $Y$  est discret, la cellule  $t_y$  est un polygone. Ces cellules s'intersectent sur leur bords et se rencontrent face contre face (chaque sommet d'une cellule est le sommet d'une autre cellule). L'ensemble  $Y$  étant relativement dense, l'union des cellules est le plan tout entier. La collection des cellules de Voronoï  $\{t_y \mid y \in Y\}$  est par conséquent, un pavage de  $\mathbb{R}^2$ . Ce pavage est de  $\mathbb{R}^2$ -type fini puisque  $Y$  est de  $\mathbb{R}^2$ -type fini.

Nous exposons ici les principes de la construction d'un ensemble de Delone par coupée-projection dans le cas de la dimension 2, ceci est aisément transposable en toute dimension.

Considérons un réseau co-compact  $Z$  de  $\mathbb{R}^n$  pour un certain entier  $n > 2$ . Le réseau  $Z$  est un  $\mathbb{Z}$ -module de rang  $n$  engendré par une famille finie de vecteurs  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

$P^\perp$  $P$  $Z$ 

FIG. 1.7 – méthode coupée-projection

**Proposition 1.1.1** *L'ensemble des points  $\Pi(X)$  est un ensemble de Delone de  $\mathbb{R}^2$ -type fini.*

*Preuve :* Le rang de  $Z$  est strictement supérieur à la dimension de  $P^\perp$  et  $\Pi_{/X}^\perp$  est injectif, il existe donc un sous-espace vectoriel  $V$  de  $P^\perp$  tel que  $\Pi^\perp(Z) \cap V$  est dense dans  $V$ . L'ensemble  $X$  n'est par conséquent, pas réduit à un point et pour tout point  $x$  de  $P^\perp$  il existe  $z_x \in Z$  tel que  $\|\Pi^\perp(z_x - x)\| < R_0/2$ . Par compacité,  $\|\Pi(z_x - x)\|$  est uniformément borné pour tous les  $x \in P^\perp$  tels que  $\|x\| \leq R_0/2$ . Comme  $Z$  est relativement dense dans  $\mathbb{R}^n$  et par la propriété précédente,  $\Pi(X)$  est relativement dense. Le réseau  $Z$  est finiment engendré. Pour tout réel  $R > 0$  il n'existe par conséquent qu'un nombre fini de vecteurs de la forme  $\Pi(x - x')$  avec  $x$  et  $x' \in X$  et  $\|x - x'\| \leq R$ . La préimage dans  $X$  d'une boule de rayon  $R$  dans  $P$  par la projection  $\Pi$  est donc un ensemble fini de points. L'ensemble  $\Pi(X)$  est donc un ensemble discret de points et, de plus, pour toute boule  $B_R$  de  $P$  de rayon  $R$ , il n'existe à translation près, qu'un nombre fini de collections de points de la forme  $B_R \cap \Pi(X)$ .  $\square$

**Proposition 1.1.2** *L'ensemble de Delone  $\Pi(X)$  n'est stable pour aucune translation non triviale de  $P$*

*Preuve :* La projection  $\Pi$  de  $X$  sur  $P$  est injective car  $P^\perp \cap X = \{0\}$ . Ainsi, l'ensemble  $\Pi(X)$  est stable par une translation si et seulement si l'ensemble  $X$  est stable par une translation  $\vec{t}$ . Cette translation  $\vec{t}$  appartient alors au réseau  $Z$ , mais  $\vec{t}$  ne peut pas envoyer l'ensemble  $X$  sur lui même.  $\square$

Le pavage de Penrose peut être obtenu à partir de cette méthode grâce à un réseau  $Z$  de  $\mathbb{R}^4$  [KD].

La construction "coupée-projection" peut aussi être vue comme un codage des temps de retour d'un flot dans un tore sur un espace transverse au flot. Plus précisément, sur le tore  $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/Z$  de dimension  $n$ , le groupe  $P$ , considéré comme groupe de translation, agit sur les classes par translation. Si  $v$  est un élément de  $\mathbb{R}^n$  et  $[v]$  désigne l'ensemble des éléments  $v + Z$ , un élément  $p$  de  $P$  agit de la manière suivante :  $p.[v] = [p + v]$ . Notons  $Pr$  l'application passage au quotient  $Pr : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/Z$ ,  $K$  la boule de  $P^\perp$  centrée à l'origine et de rayon  $R_0/2$  et  $\phi$  l'application  $P \rightarrow \mathbb{T}^n$  définie par  $\phi(p) = [p+0]$ . L'ensemble  $Pr(K)$  est alors un ensemble transverse à l'action de  $P$  sur  $\mathbb{T}^n$  et l'ensemble de points  $\Pi(X)$  est l'ensemble  $\phi^{-1}(Pr(K))$  : l'ensemble des points de retour de l'orbite de  $[0]$  sur la transversale  $Pr(K)$ .

Dans le cas où le sous  $\mathbb{Z}$ -module  $\Pi^\perp(Z)$  est dense dans  $P^\perp$ , l'action de  $P$  sur le tore  $\mathbb{T}^n$  est alors minimale (toutes les orbites sont denses). La mesure de Lebesgue est l'unique mesure invariante pour l'action de  $P$ . Par le théorème ergodique nous en déduisons que pour tous compacts  $C$  inclus dans  $K$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\phi(A_n) \cap Pr(C)}{n^2} = Vol(C),$$

où  $A_n$  désigne le cube inclus dans  $P$ , centré en l'origine et dont la longueur des côtés vaut  $n$  et  $Vol$  désigne le volume euclidien dans  $P^\perp$ . Les points de  $\phi(P) \cap Pr(K)$  sont uniformément distribués sur  $Pr(K)$ .

De plus, comme l'action du flot de  $P$  sur le tore est minimale et que le tore est compact, toute collection finie de points de l'ensemble de Delone de  $P$ , va se répéter une infinité de fois et la distance entre deux copies d'une même collection est uniformément bornée. L'ensemble de Delone sur  $P$  est donc répétitif (voir chapitre 2).

## 1.2 Pavages hyperboliques

Le problème de Wang peut aussi se poser dans le cas de la géométrie hyperbolique. Il s'agit de construire une famille finie de pavés qui peuvent paver le demi-plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  mais uniquement de façon aperiodique. R. Penrose [P], S. Mozes [Mz], G. Margulis [MM], J. Block et S. Weinberger [BW] notamment ont répondu par l'affirmative à cette question. Citons également C. Goodman-Strauss qui, dans [GS], a construit une famille finie de proto-pavés de sorte que tout pavage de  $\mathbb{H}^2$  construit avec ces proto-pavés n'est stable pour aucune isométrie de  $\mathbb{H}^2$ . Nous appellerons dans la suite un pavage *non périodique* de  $\mathbb{H}^2$ , un pavage qui n'est stable pour aucune isométrie de  $\mathbb{H}^2$ .

### 1.2.1 Construction de Penrose

Penrose considère le pavé  $P$  représenté par la figure 1.8. Ce pavé est muni des règles d'assemblage suivantes : le côté  $AB$  ne peut que rencontrer que les côtés  $ED$  ou  $DC$ . Le côté  $AE$  (resp.  $BC$ ) ne peut que rencontrer que le côté  $BC$  (resp.  $AE$ ).

FIG. 1.9 – Le pavage de R. Penrose hyperbolique

### 1.2.2 Construction de G. Margulis et S. Mozes

Dans le cas du demi-plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , G. Margulis et S. Mozes [MM] ont donné des exemples de familles de pavés ne pouvant paver le demi-plan hyperbolique que de manière apériodique. Les auteurs utilisent, comme R. Penrose, un argument homologique afin de construire une famille de pavés qui ne peut recouvrir une surface compacte. L'argument est basé sur un corollaire bien connu de la formule de Gauss-Bonnet qui indique que l'aire d'une surface compact quotient de  $\mathbb{H}^2$  est un multiple entier de  $\pi$ .

Les auteurs de [MM] considèrent pour un réel  $a$  le polygone convexe  $P_a$  dont les sommets  $A_p$  ont pour affixe  $(p-1)/2 + ai$  pour  $1 \leq p \leq 3$  et le sommet  $A_5$  d'affixe  $2i$ . Le polygone  $P_a$  est une version du pavé (1.8) de R. Penrose. Pour les applications affines suivantes :

$$R : z \mapsto 2z \text{ et } S_a : z \mapsto z + a,$$

la collection de pavés  $\mathcal{T} = \{R^k \circ S_a^n P_a \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$  définit alors un pavage de  $\mathbb{H}^2$ .

Comme les angles du polygone  $P_a$  varient continûment avec le paramètre  $a$ , l'aire de  $P_a$  varie dépend continûment de  $a$  et il existe une famille de paramètres  $a$  (complémentaire d'une partie dénombrable), pour laquelle l'aire du polygone  $P_a$  n'est pas rationnellement liée avec  $\pi$ . Le polygone  $P_a$  ne peut donc pas paver une surface compacte et donc tout pavage construit avec le pavé  $P_a$  est apériodique. Les auteurs remarquent de plus que pour un paramètre  $a$  suffisamment petit, les seuls assemblages possibles entre copies du pavé  $P_a$  se font suivant les règles d'assemblage du pavage de R. Penrose. Ainsi pour  $a$  suffisamment petit, les seuls pavages possibles avec le pavé  $P_a$  sont apériodiques.

### 1.2.3 Construction de Mozes pour un espace symétrique

Dans [Mz] S. Mozes s'est intéressé au problème de Wang dans le cas où l'espace à paver est un espace symétrique,  $X = G/K$  avec  $G$  un groupe de Lie semi-simple sans facteur compact, différent de  $SL_2(\mathbb{R})$  et  $K \in G$  un sous groupe maximal compact.

Il construit une famille finie de pavés, grâce à deux réseaux  $\Gamma$  et  $\Lambda \subset G$  co-compacts, sans torsion et tels que pour tout  $g \in G$ ,  $g\Gamma g^{-1}$  et  $\Lambda$  sont non commensurables ( $g\Gamma g^{-1} \cap \Lambda$  n'est pas d'indice fini dans  $\Lambda$ ). Des systèmes de générateurs de ces groupes sont fixés. Mozes considère le pavage  $T_\Gamma = \{\gamma(F), \gamma \in \Gamma\}$  où  $F$  désigne le domaine fondamental de  $\Gamma$ . Chaque pavé est ensuite décoré de sorte que tous les pavages effectués avec ces pavés sont isomorphes au graphe de Cayley du groupe  $\Lambda$ . Dès lors, si un pavage  $T$  construit avec ces pavés est stable pour un réseau co-compact  $\Gamma'$ , nécessairement ce réseau est un sous groupe d'indice fini  $\Gamma' \subset \Gamma$ . Le pavage  $T$  induit, via le recouvrement  $\pi : X \rightarrow \Gamma' \backslash X = M$ , un pavage sur  $M$ . Dès lors,  $\pi_1(M) = \Gamma'$  agit sur  $\Lambda$ , ceci définit un morphisme injectif de  $\Gamma'$  dans  $\Lambda$  dont l'image est d'indice fini. Par le théorème de rigidité de Mostow, il existe  $g \in G$  tel que  $g\Gamma'g^{-1}$  soit d'indice fini dans  $\Lambda$ , ce qui constitue une contradiction avec les hypothèses initiales.

Les pavages obtenus par S. Mozes sont alors apériodiques. Dans le cas où  $G$  est un groupe de Lie simple non compact et de rang supérieur à 2, il est possible d'avoir un

meilleur résultat : les pavages obtenus sont non périodiques. Ceci résulte des théorèmes de rigidité de P. Pansu et B. Kleiner et B. Leeb.



# Chapitre 2

## Pavages : topologie et systèmes dynamiques

Pour comprendre la combinatoire d'un pavage du plan euclidien ou de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , nous allons lui associer, par une technique classique, un ensemble de pavages que nous pouvons étudier d'un point de vue géométrique et dynamique. Nous donnerons à cet ensemble une topologie reflétant la combinatoire des pavages. Par l'étude de l'action naturelle du groupe des isométries de la surface sur cet espace, nous dégagerons alors des notions fondamentales permettant de caractériser les pavages.

Dans la suite nous désignerons par  $N$  le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  ou l'espace  $\mathbb{H}^2$  identifié avec le demi-plan supérieur  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$  muni de la métrique  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . Fixons un point  $O$  dans  $N$  que nous appellerons *origine*. Le groupe des isométries de  $N$  qui préservent l'orientation, noté  $Isom^+(N)$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts a alors une structure de groupe de Lie. Cette topologie est métrisable par une métrique invariante par multiplication à gauche. Nous ne considérerons pas toujours toutes les isométries de  $N$ , nous nous restreindrons à un sous-groupe de Lie qui agit librement et transitivement sur  $N$ . Par exemple, dans le cas où  $N$  désigne le plan euclidien, nous considérerons le groupe des translations et le groupe des *transformations affines*  $\{z \mapsto az + b, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$  pour  $N = \mathbb{H}^2$ .

### 2.1 Topologie et action de groupe

Nous appellerons un pavage de  $N$  une famille dénombrable  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  d'ensembles non vides, compacts  $t_i$  appelés *pavés* (chaque pavé étant homéomorphe à la boule unité) tels que l'union des pavés est la surface entière  $N$ , les pavés se rencontrent sur leur bords et l'intérieur des pavés sont deux à deux disjoints.

Nous nous intéressons au cas où il existe une famille finie de pavés  $\{p_1, \dots, p_n\}$  (chaque représentant étant fixé) appelés *proto-pavés* de sorte que chaque  $t_i$  soit l'image de l'un de ces proto-pavés par une isométrie de  $N$  préservant l'orientation. Un exemple simple d'un tel pavage est donné par un réseau co-compact  $G$  des isométries de  $N$ . La collection  $\{\gamma(F), \gamma \in G\}$  où  $F$  désigne le domaine fondamental de  $G$ , est alors un pavage de  $N$ . Un autre exemple, construit d'une autre façon, est le pavage de Penrose

du plan euclidien (figure 1.1.1 p.14). Pour ce pavage, il existe à translation près, 10 types différents de pavés. Le pavage pinwheel (figure 1.6 p. 16) possède quant à lui une infinité de types différents de pavés, aux translations du plan près, cependant, si l'on considère le groupe des rotations et des translations du plan, il n'y a que 2 proto-pavés aux isométries de  $\mathbb{R}^2$  près. Afin de différencier les deux derniers exemples, pour  $\mathbf{G}$  un sous groupe de Lie des isométries préservant l'orientation de  $N$ , nous introduisons la définition suivante. Un *patch* est une collection finie de pavés d'un pavage.

**Définition 2.1.1** *Un pavage  $T$  est dit de  $\mathbf{G}$ -type fini si pour tout rayon  $R > 0$ , il n'existe qu'un nombre fini de patches de diamètre inférieur à  $R$  aux transformations  $g \in \mathbf{G}$  près.*

Pour un nombre fixé de types de polygones, il n'existe qu'un nombre fini de possibilités pour recouvrir une boule de  $N$  avec des copies de ces polygones se rencontrant le long de leur bords, face contre face c'est à dire chaque sommet d'un polygone coïncide avec le sommet d'un autre polygone. Dès lors, un pavage dont les pavés sont des polygones se rencontrant face contre face est un pavage de type fini pour un certain groupe  $\mathbf{G}$ . Ainsi le pavage de Penrose est un pavage de  $\mathbb{R}^2$ -type fini, où  $\mathbb{R}^2$  désigne le groupe des translations du plan et le pavage pinwheel est de  $Isom^+(\mathbb{R}^2)$  type fini. Le pavage de R. Penrose hyperbolique (figure 1.9 p.19) est quant à lui de  $\mathcal{P}$ -type fini où  $\mathcal{P}$  désigne le groupe des transformations affines  $\{z \mapsto az + b, a > 0, b \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{H}^2$ .

Considérons à présent un pavage  $T$  de  $\mathbf{G}$ -type fini avec  $\mathbf{G}$  un groupe de Lie d'isométries de  $N$  qui agit transitivement sur  $N$ . Pour une isométrie  $g$  de  $\mathbf{G}$ , l'image de  $T$  par  $g^{-1}$  est  $g^{-1}(T) = \{g^{-1}(t_1), g^{-1}(t_2), \dots\}$  et est encore un pavage de  $N$  de  $\mathbf{G}$ -type fini. Notons par  $T.\mathbf{G}$  l'ensemble des pavages qui sont l'image de  $T$  par un élément de  $\mathbf{G}$ . Le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur cet ensemble par l'action à droite<sup>1</sup> définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \times T.\mathbf{G} &\longrightarrow T.\mathbf{G} \\ (p, T') &\longrightarrow T'.p = p^{-1}(T'). \end{aligned}$$

Nous munissons  $T.\mathbf{G}$  d'une topologie métrisable plus fine que celle induite par la topologie de l'espace ambiant. Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux pavages de  $T.\mathbf{G}$ , et soit

$$A = \{\epsilon \in [0, 1] \mid \exists g \in B_\epsilon(Id) \subset \mathbf{G} \text{ tel que } (T_1.g) \cap B_{1/\epsilon}(O) = T_2 \cap B_{1/\epsilon}(O)\},$$

où  $B_{1/\epsilon}$  désigne la boule de  $N$  centrée en l'origine  $O$  de rayon  $1/\epsilon$  et  $B_\epsilon(Id)$  désigne la boule de  $\mathbf{G}$  des éléments qui sont  $\epsilon$ -proche de l'identité  $Id$ .

Posons alors

$$\begin{aligned} \delta(T_1, T_2) &= \inf A \text{ si } A \neq \emptyset \\ \delta(T_1, T_2) &= 1 \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\delta$  définit ainsi une métrique sur  $T.\mathbf{G}$ . Pour cette topologie, une base de voisinage est définie de la manière suivante : deux pavages  $T_1$  et  $T_2$  sont

<sup>1</sup>Il est aussi possible de définir cette action par une action à gauche. Afin de simplifier les formules du chapitre 4, nous choisissons l'action à droite.

proches, si par une isométrie proche de l'identité de  $\mathbf{G}$ , ils coïncident sur une grande boule centrée en l'origine. Pour cette métrique l'espace  $T.\mathbf{G}$  est borné et l'action de  $\mathbf{G}$  est continue.

Nous appelons *enveloppe continue* de  $T$  le complété métrique de  $(T.\mathbf{G}, \delta)$  et nous notons  $\Omega(T)$  l'espace métrique obtenu. Il est important de remarquer que cet espace est un ensemble de pavages de  $\mathbf{G}$ -type fini. En effet, pour une suite de Cauchy  $(T_n)_n$  de  $T.\mathbf{G}$ , pour  $\epsilon > 0$  et pour un certain entier  $n(\epsilon)$ , tous les pavages  $T_n$  pour  $n \geq n(\epsilon)$  vont coïncider sur une grande boule centrée en l'origine  $B_{1/\epsilon}(O)$ . A la limite, quand  $\epsilon$  tend vers 0, ceci définit un pavage de  $N$ .

la métrique sur  $\Omega(T)$  obtenue par complétion s'exprime de la même façon que la métrique  $\delta$ . Par un abus de notation, nous noterons également cette métrique  $\delta$ . L'enveloppe est un espace compact. En effet, pour une suite  $(T_n)_n \subset \Omega(T)$  et pour un entier  $p$ , comme il n'existe qu'un nombre fini de patch de diamètre inférieur à  $2^p$ , aux isométries de  $\mathbf{G}$  près. Il existe une sous suite de pavages  $(T_n(p))_n(p)$  qui coïncident sur la boule de  $N$  de rayon  $2^p$  centrée en l'origine  $B_{2^p}(O)$ . Par un processus classique d'extraction diagonale, nous construisons une sous suite de pavages coïncidant sur des boules de rayon de plus en plus grand. Cette sous suite converge donc vers un pavage de  $N$  et le pavage obtenu à la limite possède les mêmes patchs que ceux des pavages  $(T_n)$ .

L'enveloppe contient l'ensemble  $T.\mathbf{G}$  mais il peut aussi contenir d'autres pavages. Tous les pavages  $T'$  de  $\Omega(T)$  sont obtenus avec les mêmes proto-pavés et chaque patch de  $T'$  est une copie, à une isométrie de  $\mathbf{G}$  près, d'un patch de  $T$ .

Considérons le pavage qui est de la forme  $\{\gamma(F), \gamma \in G\}$  pour un certain réseau co-compact  $G$  et  $F$  un domaine fondamental de  $G$ . L'enveloppe  $\Omega(T)$  est alors l'espace quotient  $N/G$ . Les seuls pavages de son enveloppe sont ceux qui sont les translatés de ce pavage. Ce n'est pas le cas pour tous les pavages de  $\mathbf{G}$ -type finis. Par exemple, considérons le pavage du plan euclidien réalisé avec des carrés unités. Remplaçons alors quatre carrés se rencontrant en un point, par un carré dont la longueur des côtés est 2. Le pavage obtenu est de  $\mathbb{R}^2$ -type fini, il n'est stable par aucune translation de  $\mathbb{R}^2$  et son enveloppe contient le pavage original avec des carrés unités.

L'image d'un pavage de  $\Omega(T)$  par un élément de  $\mathbf{G}$  est encore un pavage de  $\Omega(T)$ . Le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur  $\Omega(T)$  par une action à droite et le système dynamique  $(\Omega(T), \mathbf{G})$  est par construction *topologiquement transitif*, c'est-à-dire admet une orbite dense (celle de  $T$ ).

Une manière équivalente de procéder est de fixer une famille de proto-pavés  $\{p_1, \dots, p_n\}$  et de considérer l'ensemble des pavages de  $N$  de  $\mathbf{G}$ -type fini dont les pavés sont des images par une isométrie de  $\mathbf{G}$  d'un pavé de cette famille. Nous supposons que cet ensemble n'est pas vide. La métrique  $\delta$  définie comme précédemment, donne aussi une métrique sur cet ensemble et par le même argument que précédemment, l'ensemble de tous ces pavages est alors un espace métrique compact. Le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur ce compact et l'enveloppe continue du pavage  $T$  est alors la fermeture de son orbite sous l'action de  $\mathbf{G}$ .

L'enveloppe continue de  $T$  est donc un compact invariant par l'action de  $\mathbf{G}$ . Par une conséquence directe du lemme de Zorn, il existe un sous ensemble fermé invariant

pour l'action de  $\mathbf{G}$  qui n'admet pas de sous-ensemble non vide, fermé et invariant pour l'action. Nous appellerons un tel ensemble, un ensemble *minimal*. Un ensemble minimal est alors une union d'orbites par l'action de  $\mathbf{G}$  et toutes ses orbites sont denses dans ce compact. Le théorème suivant donne une caractérisation combinatoire des pavages dont l'enveloppe continue est un ensemble minimal (voir par exemple [KP]). Pour cela, introduisons tout d'abord la définition suivante :

**Définition 2.1.2** *Un pavage  $T$  de  $\mathbf{G}$ -type fini est répétitif si pour tout patch  $p$  de  $T$ , il existe un rayon  $R(p) > 0$  tel que toute boule de rayon  $R(p)$  dans  $N$  intersecte  $T$  sur un patch qui contient un patch de la forme  $g^{-1}(p)$  pour un certain  $g \in \mathbf{G}$ .*

Cette condition stipule que chaque patch a une infinité de copies dans le pavage selon toutes les directions (à une distance  $R(p)$  près) et les distances entre les copies les plus proches sont bornées.

**Théorème 2.1.3 (voir par exemple [KP])** *Le système dynamique  $(\Omega(T), \mathbf{G})$  est minimal (toutes ses orbites sont denses) si et seulement si  $T$  est répétitif.*

Le pavage qui est de la forme  $\{\gamma(F), \gamma \in G\}$  pour un certain réseau co-compact  $G$  et  $F$  un domaine fondamental de  $G$  vérifie évidemment le critère de répétitivité. Le pavage de Penrose dans  $\mathbb{R}^2$  est un exemple de pavage qui n'est stable par aucune translation et qui est répétitif.

Nous dirons qu'un pavage  $T$  de  $\mathbf{G}$ -type fini est *non périodique* si pour tout  $g \in \mathbf{G}$ ,  $g \neq Id$ ,  $T.g$  est différent de  $T$ . Nous dirons qu'un pavage de  $\mathbf{G}$ -type fini est *apériodique* si son stabilisateur sous l'action de  $\mathbf{G}$  n'est pas un sous réseau co-compact de  $N$ . Il est possible de montrer (voir [KP] par exemple) que si un pavage est apériodique et répétitif, alors son enveloppe n'est pas restreinte aux translatés par  $\mathbf{G}$  de ce pavage et tous les pavages contenus dans son enveloppe sont apériodiques. Il existe des familles de proto-pavés telles que chaque pavage construit avec ces proto-pavés sont non périodiques.

Le pavage de Penrose (voir figure 1.1) dans le plan euclidien est un exemple de pavage de  $\mathbb{R}^2$ -type fini répétitif et dont tous les pavages de l'enveloppe sont non périodiques. Cet exemple donne donc un exemple d'une action minimale et libre du groupe des translations  $\mathbb{R}^2$  sur un espace compact. Le pavage pinwheel (figure 1.6 p. 16) qui est de  $Isom^+(\mathbb{R}^2)$ -type fini, fournit un exemple d'une action minimale du groupe  $Isom^+(\mathbb{R}^2)$ , cependant cette action n'est pas libre car il existe un élément dans son enveloppe admettant une symétrie d'ordre 2. Nous avons vu dans le chapitre précédent des exemples de familles de proto-pavés dont tous les pavages obtenus avec ces pavés sont de  $\mathbf{G}$ -type fini (pour un certain groupe  $\mathbf{G}$ ) et non périodiques. Citons notamment Berger et Penrose qui ont donné des exemples de telles familles de proto-pavés pour le cas  $N = \mathbb{R}^2$  et Goodman-Strauss dans le cas du  $N = \mathbb{H}^2$  avec le groupe affine (voir le chapitre 1). Les ensembles minimaux dans l'ensemble de ces pavages, sont alors des enveloppes continues de pavages répétitifs et non périodiques. Nous dirons qu'un pavage est *totalelement non périodique* si tout pavage  $T'$  dans son enveloppe est non périodique. Nous donnerons dans le dernier chapitre des exemples explicites de pavages de  $\mathcal{P}$ -type fini totalelement non périodiques et répétitifs. Ce cas sera l'exemple typique que nous

étudierons car le système dynamique  $(\Omega(T), \mathbf{G})$  associé est un système où toutes les orbites sont denses et où l'action est libre (toutes les orbites sont homéomorphes à  $\mathbf{G}$ ). Cette classe de systèmes dynamiques est très riche. Une façon de comparer ces systèmes est d'étudier les comportements statistiques de leurs orbites, de connaître le nombre moyen de passage d'une orbite à travers un borélien.

## 2.2 Structure de $\Omega(T)$

Afin de simplifier cette présentation, nous supposons dans la suite que  $\mathbf{G}$  désigne un sous groupe de Lie de  $Isom^+(N)$  et que ce sous-groupe agit librement et transitivement sur  $N$ . Nous nous intéresserons à l'enveloppe continue d'un pavage de  $\mathbf{G}$ -type fini totalement non périodique. Le groupe  $\mathbf{G}$  agit de manière libre sur cet espace et grâce à cette propriété, nous pourrions paramétriser localement l'enveloppe.

Considérons  $T$  un pavage de  $\mathbf{G}$ -type fini de la surface  $N$  où  $\mathbf{G}$  est un sous-groupe de Lie qui agit librement et transitivement sur  $N$ . Nous supposons de plus que  $T$  est totalement non périodique. Le pavage  $T$  est construit à partir d'un ensemble de proto-pavés  $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ . Pour chaque proto-pavé  $p_i$ , fixons un point  $y_i$  dans son intérieur. C'est ce que nous appellerons une *décoration* de  $p_i$ . Ainsi pour un pavage  $T' = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$  de  $\mathbf{G}$ -type fini construit avec les proto-pavés  $\{p_1, \dots, p_n\}$ , cette décoration, par translation des éléments de  $\mathbf{G}$ , munit  $T'$  d'une collection de points  $\{x_{t_1}, \dots, x_{t_n}, \dots\}$ , où chaque point  $x_{t_i}$  est à l'intérieur du pavé  $t_i$ .

Soit  $\Omega_{\text{punc}}(T) = \{T' \in \Omega(T) \mid \text{un des } x_t \text{ de } T' \text{ coïncide avec l'origine } 0\}$ . Observons tout d'abord quelques propriétés de cet ensemble :

- $\Omega_{\text{punc}}(T)$  est fermé ;
- pour tout élément  $T'$  de  $\Omega(T)$ , il existe  $g \in \mathbf{G}$  de sorte que  $T'.g \in \Omega_{\text{punc}}(T)$  ;
- il existe un  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $g \in \mathbf{G}$   $\epsilon$ -proche de l'identité et pour tout  $T' \in \Omega_{\text{punc}}(T)$ ,  $T'.g \notin \Omega_{\text{punc}}(T)$ .

Pour ces raisons, cet ensemble est appelé la *transversale canonique* associée à  $T$ .

**Proposition 2.2.1** ([MRW])  $\Omega_{\text{punc}}(T)$  est compact et complètement discontinu. De plus, si  $T$  vérifie la condition de répétitivité alors  $\Omega_{\text{punc}}(T)$  est un ensemble de Cantor.

*Preuve* : Considérons  $T'$  un pavage de  $\Omega_{\text{punc}}(T)$  et  $P$  un patch de  $T'$  contenant  $O$ . Soit

$$U(T', P) = \{T'' \in \Omega_{\text{punc}}(T) \mid T'' \text{ coïncide avec } T' \text{ sur } P\},$$

$U(T', P)$  est, par définition de la topologie induite sur  $\Omega_{\text{punc}}(T)$ , un voisinage fermé de  $T'$  dans  $\Omega_{\text{punc}}(T)$ . Plus le patch  $P$  est grand, plus le voisinage  $U(T', P)$  est petit pour la métrique  $\delta$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de patches de la taille de  $P$ , l'ensemble  $\Omega_{\text{punc}}(T)$  est une réunion finie d'ensembles disjoints de la forme  $U(T', P)$ . Les ensembles  $U(T', P)$  sont donc des ensembles ouverts et fermés (nous appellerons ces ensembles des *clopen*). Comme le diamètre des clopen  $U(T', P)$  peut être choisi arbitrairement petit, l'ensemble  $\Omega_{\text{punc}}(T)$  est complètement discontinu. Avec les hypothèses de répétitivité et de non-périodicité, nous vérifions qu'il n'y a pas d'élément isolé.  $\square$

Considérons à présent une partition de  $\Omega_{\text{punc}}(T)$  par des clopen  $C_i$  et  $V_i$  un ouvert borné de  $\mathbf{G}$  contenant l'identité. Définissons alors l'application  $h_i : V_i \times C_i \rightarrow \Omega_T$  telle que  $h_i(g, T') = T'.g$ , pour  $T \in C_i$  et  $x \in V_i$ .

Cette application est continue et pour  $C_i$  de diamètre suffisamment petit, l'application  $h_i$  est injective (l'action de  $\mathbf{G}$  est libre). Ainsi  $h_i$  définit un homéomorphisme sur son image, que nous noterons  $U_i$ . La donnée  $(h_i, U_i)$  d'un tel homéomorphisme et de son ensemble image est alors une *carte*. Les  $U_i$  forment un recouvrement de  $\Omega(T)$ . Un tel recouvrement sera appelé *atlas*. Dans la cas où  $C_i$  est un ensemble de la forme  $U(T, P)$  avec  $P$  un patch de  $T$ , il est possible de prendre pour  $V_i$  l'intérieur du patch  $P$ . Remarquons que l'action de  $\mathbf{G}$  sur l'enveloppe restreinte à  $U_i$  s'exprime lors de l'identification de  $U_i$  avec  $V_i \times C_i$  de la façon suivante  $(z, c).g = (z.g, c)$  où  $z.g$  désigne la multiplication de  $z$  avec  $g$ .

Soit  $T_a$  appartenant à l'intersection  $U_i \cap U_j$  de deux ouverts du recouvrement,  $T_a = h_i(g_1, T_1) = h_j(g_2, T_2)$  avec  $T_1, T_2 \in \Omega_{\text{punc}}(T)$  et  $g_1 \in V_1, g_2 \in V_2$ . Quitte à considérer des sous ensembles de  $U_i$  et  $U_j$ , nous pouvons supposer que le clopen  $C_i$  (resp.  $C_j$ ) est de la forme  $U(T_1, P_1)$  (resp.  $U(T_2, P_2)$ ) avec  $P_1$  (resp.  $P_2$ ) un patch de  $T$ . Nous avons donc  $T_1 = T_2.g_2g_1^{-1}$ . L'origine dans le pavage  $T_a$  est contenu dans une copie du patch  $P_1$  et dans une copie du patch  $P_2$ .

Soit  $T_b$  un pavage de  $\Omega(T)$  qui coïncide en l'origine avec  $T_a$  sur l'union des copies des patches  $P_a$  et  $P_b$ . Il est clair que  $T_b \in U_i \cap U_j$ , par conséquent  $T_b = h_i(g'_1, T'_1) = h_j(g'_2, T'_2)$  avec  $T'_1 \in U(T_1, P_1), T'_2 \in U(T_2, P_2), g'_1 \in V_1$  et  $g'_2 \in V_2$ . Nous avons alors  $T'_2.g_2g_1^{-1} \in U(T_1, P_1)$  et comme l'action de  $\mathbf{G}$  est libre,  $T'_2.g_2g_1^{-1} = T'_2.g'_2g_1^{-1} = T'_1$ . Quitte à considérer des sous ensembles des ouverts  $U_i$  et  $U_j$ , l'isométrie  $g_2g_1^{-1}$  est indépendante de  $T'$ .

Dès lors, les changements de cartes, sur leur domaine de définition s'écrivent<sup>2</sup> :

$$h_i^{-1} \circ h_j(g_1, T_1) = (g_2, T_2) = (g_{i,j}.g_1, T_1.g_{i,j}).$$

Pour un élément  $g \in \mathbf{G}$  suffisamment petit, l'application  $T \mapsto T.g$  définit alors sur des sous ensembles de  $V_i \times C_i$ , une application continue. Cette application préserve chaque ensemble de la forme  $V_i \times \{c\}$  et agit sur ces sous ensembles par la multiplication à droite.

Cette paramétrisation locale de l'enveloppe et les changements de cartes donnent une structure de lamination particulière appelée  *$\mathbf{G}$ -solénoïde* que nous exposerons dans le chapitre suivant.

---

<sup>2</sup> avec la convention d'une action du groupe  $\mathbf{G}$  à gauche, les changements de cartes sont de la forme  $(g_1.g_{i,j}, g_{i,j}.T_1)$ .

# Chapitre 3

## G-solénoïdes, surfaces branchées et limites inverses

Dans ce chapitre nous donnerons des définitions de bases d'une structure laminée particulière : la structure de  $\mathbf{G}$ -solénoïde. L'enveloppe continue d'un pavage totalement non périodique possède une telle structure [BG]. Un tel espace peut aussi être vu comme une limite projective de surfaces branchées. La section 2 concernera ces surfaces branchées [W] et la dernière section fera le lien entre surfaces branchées et  $\mathbf{G}$ -solénoïdes.

Dans tout ce chapitre nous noterons  $N$  le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$  muni de sa métrique usuelle ou l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  muni lui aussi de sa métrique usuelle. Nous noterons  $\mathbf{G}$  un sous groupe de Lie des isométries préservant l'orientation de  $N$ , qui agit transitivement et librement sur  $N$ .

### 3.1 Une définition de $\mathbf{G}$ -solénoïde

Soit  $M$  un espace métrique compact recouvert par des ouverts  $U_i$  (que nous appellerons les *boîtes*) munis d'homéomorphismes  $h_i$  de  $U_i$  sur  $V_i \times C_i$  où  $V_i$  est un ouvert borné de  $\mathbf{G}$  et  $C_i$  est un clopen d'un espace métrique totalement discontinu.

Nous dirons que ces ouverts définissent un *atlas* d'une structure de  $\mathbf{G}$ -solénoïde sur  $M$  si les *changements de cartes*  $h_{i,j} = h_i \circ h_j^{-1}$ , sur leur domaine de définition, sont de la forme :

$$h_{i,j}(g, c) = (g_{i,j} \cdot g, \tau_{i,j}(c)),$$

où  $\tau_{i,j}$  est une application continue indépendante de  $g$ ,  $g_{i,j}$  est un élément de  $\mathbf{G}$  indépendant de  $g$  et de  $c$  et  $g_{i,j} \cdot g$  désigne la multiplication des deux éléments  $g$  et  $g_{i,j}$ . Deux atlas sont *équivalents* si leur réunion est un atlas. Un *atlas maximal* est un atlas qui contient tous les atlas d'une même classe d'équivalence.

Un espace compact  $M$  muni d'une classe d'équivalence d'atlas  $\mathcal{F}$  est appelé  $\mathbf{G}$ -solénoïde. Les changements de cartes particuliers d'une telle structure impliquent des notions remarquables :

notion de *feuilles*. Appelons *plaque* un ensemble de la forme  $h_i^{-1}(V_i \times \{c\})$ . Les changements de cartes envoient des plaques sur des plaques, cette notion est donc

définie indépendamment des cartes. Une *feuille* est le plus petit sous ensemble connexe qui contient toutes les plaques qu'il intersecte. L'espace total  $M$  est laminé par ces feuilles. Chaque feuille est une surface différentiable orientable.

Tout point de  $M$  admet localement une *verticale*. C'est un ensemble de la forme  $h_i^{-1}(\{g\} \times C_i)$ . Les changements de cartes envoient des verticales sur des verticales, ainsi cette notion est bien définie (indépendamment des cartes).

Les changements de cartes le long des plaques sont des multiplications à gauche, il est possible de faire agir sur  $M$  un élément de  $\mathbf{G}$ , proche de l'identité, par multiplication à droite le long des feuilles. Nous dirons que  $M$  est un  $\mathbf{G}$ -solénoïde si  $M$  a une structure de  $\mathbf{G}$ -lamination dont chaque feuille est difféomorphe à  $\mathbf{G}$  (isomorphe à  $N$ ) et l'action des petits éléments de  $\mathbf{G}$  sur  $M$  s'étend en une action à droite globale de  $\mathbf{G}$  sur  $M$ . Nous munissons alors chaque feuille de la métrique classique de  $N$ .

Dans ce cas, l'action de  $\mathbf{G}$  est libre et les orbites sont les feuilles de  $M$ . Cette action préserve aussi les verticales, il en résulte que si une orbite (ou une feuille) intersecte deux verticales  $V$  et  $V'$  aux points  $v$  et  $v.g$  pour un certain  $g \in \mathbf{G}$ , alors pour tout point  $w$  de  $V$  suffisamment proche de  $v$ , le point  $w.g$  appartient aussi à  $V'$ . Par un abus de langage nous dirons que les "temps"<sup>1</sup> de retour sur les verticales sont localement constants.

Un exemple classique de  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde est la suspension d'une action libre du groupe  $\mathbb{Z}^2$  sur un ensemble de Cantor. Un tel exemple peut être construit en considérant l'action produit de 2 odomètre sur l'espace produit  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \times \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ .

Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, l'enveloppe continue d'un pavage  $T$  de  $\mathbf{G}$ -type fini totalement non périodique a une structure de  $\mathbf{G}$ -solénoïde. L'action de  $\mathbf{G}$  sur  $\Omega(T)$  est un prolongement de l'action des petits éléments de  $\mathbf{G}$  par multiplication à droite.

Il est important de remarquer que dans ce cas précis et contrairement au cas de l'action précédente par odomètres, l'action est *expansive* : pour tout  $\epsilon > 0$  suffisamment petit, le  $\epsilon$ -voisinage d'une orbite n'est pas stable par l'action de  $\mathbf{G}$ . En effet, considérons deux éléments  $T_1$  et  $T_2$  de  $\Omega_{punc}(T)$  à une distance  $\epsilon$  l'un de l'autre,  $\epsilon$  est suffisamment petit de sorte que  $T_1$  et  $T_2$  coïncident sur une boule  $B$  centrée en l'origine. Si pour tout  $g$  dans une boule  $B_{\mathbf{G}}$  incluse dans  $\mathbf{G}$  et centrée en l'identité,  $T_1.g$  et  $T_2.g$  restent  $\epsilon$ -proches alors  $T_1$  et  $T_2$  coïncident sur  $(B_{\mathbf{G}})^{-1}(B)$ . Ainsi si deux pavages restent  $\epsilon$ -proche lorsque l'on translate par l'action, ces pavages sont identiques.

Nous dirons que le  $\mathbf{G}$ -solénoïde est *minimal* si toutes ses feuilles sont denses. Dans ce cas, la verticale en chaque point dans chaque boîte est un ensemble de Cantor. Pour un pavage  $T$  répétitif et totalement non périodique, l'action de  $\mathbf{G}$  est minimale, l'enveloppe de  $T$  est donc un  $\mathbf{G}$ -solénoïde minimal.

Réciproquement, il est possible d'associer à un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  muni d'une action de  $\mathbf{G}$ , un pavage de  $\mathbf{G}$ . Fixons une collection finie de verticales  $V_i$  sur  $M$ . L'ensemble  $(\bigcup_i V_i) \cap L$ , intersection de ces verticales avec une feuille  $L$ , est un ensemble de Delone  $X$  de points sur la surface  $L$  ( $[\mathbf{B}\mathbf{G}]$ ). Pour chaque point  $x \in X$ , nous construisons la cellule

<sup>1</sup>Ici le "temps" n'est pas unidimensionnel, il est un élément du groupe  $\mathbf{G}$ .

de Voronoï associée  $t_x = \{y \in N \mid d(x, y) \leq d(x', y) \text{ pour tout } x' \in X\}$ . Nous obtenons alors un pavage  $T = \{t_x \mid x \in X\}$  de  $\mathbf{G}$ -type fini sur  $\mathbf{G}$ . L'ensemble  $X$  étant discret, chaque cellule  $t_x$  est un polygone et les cellules se rencontrent face contre face. Si la  $\mathbf{G}$ -action sur  $M$  est expansive et pour un choix générique de verticales avec des diamètres suffisamment petits, ce pavage est non périodique. Si de plus  $M$  est minimal, le pavage est répétitif. Son enveloppe  $\Omega(T)$  a alors une structure de  $\mathbf{G}$ -solénoïde expansif et les systèmes dynamiques  $(M, \mathbf{G})$  et  $(\Omega(T), \mathbf{G})$  sont topologiquement conjugués ([BG]). En particulier,  $\Omega(T)$  ne dépend pas de la feuille  $L$  choisie.

## 3.2 Surfaces branchées

Dans cette section nous introduisons la notion de surface branchée qui nous sera utile pour l'étude des  $\mathbf{G}$ -solénoïdes. Cette notion est une généralisation aux dimensions supérieures des *réseaux ferroviaires*. Nous n'utiliserons pas cette notion dans toute sa généralité, mais nous nous limiterons à un type particulier qui concerne notre travail. Le lecteur pourra trouver dans [W] des définitions générales de ces structures.

### 3.2.1 Modèle local

Pour  $r > 0$  et un point  $x$  de  $N$ , notons  $B_r(x)$  la boule incluse dans  $N$  centrée en  $x$  et de rayon  $r$ . Considérons une famille  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_n\}$  de cônes ouverts polygonaux centré en  $x$ .

Nous dirons qu'un sous ensemble  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{C}$  est une *décomposition polygonale* de  $B_r(x)$  si les cônes de  $\mathcal{I}$  sont deux à deux disjoints et l'union de leur fermeture recouvre  $B(x, r)$  :  $\bigcup_{C \in \mathcal{I}} \overline{C} = B_r(x)$ . Nous supposons dans la suite que chaque élément de  $\mathcal{C}$  appartient à une décomposition polygonale de  $B_r(x)$ .

Pour un entier  $p \geq 1$ , nous allons définir une  $\mathbf{G}$ -boule de type  $p$ . Soient  $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p$ ,  $p$  décompositions polygonales de  $B_r(x)$ . Considérons sur l'ensemble  $\bigsqcup_{i=1}^p B_r(x)$  la relation d'équivalence  $\sim$  engendrée par la relation :  $(y, i) \equiv (y', j)$  si  $y = y'$  et il existe  $C_k \in \mathcal{I}_i \cap \mathcal{I}_j$  tel que  $y \in \overline{C}_k$ .

La  $\mathbf{G}$ -boule de type  $p$  centrée en  $x$  de rayon  $r$ , notée  $B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$  est l'ensemble  $\bigsqcup_{i=1}^p B_r(x) / \sim$  muni de la topologie quotient. Nous appellerons dans la suite  $\mathbf{G}$ -boule une  $\mathbf{G}$ -boule de type  $p$  centrée en  $x$  de rayon  $r$  pour un certain entier  $p$ , un certain point  $x$  et un réel  $r$ .

Notons  $\pi_1$  la projection naturelle  $\pi_1 : \bigsqcup_{i=1}^p B_r(x) \rightarrow \bigsqcup_{i=1}^p B_r(x) / \sim$  et  $\pi_2$  la projection  $\pi_2 : \bigsqcup_{i=1}^p B_r(x) / \sim \rightarrow B_r(x)$ .

Nous appelons  $\mathbf{G}$ -feuille dans la  $\mathbf{G}$ -boule  $B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$  l'image de  $B_r(x)$  par une section continue de  $\pi_2$ . Le *lieu singulier* de la  $\mathbf{G}$ -boule de type  $p$   $B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$  est l'ensemble des points appartenant à des ensembles de la forme  $\pi_2^{-1}(\overline{C}_i \cap \overline{C}_j \cap \overline{C}_k)$  où  $C_i, C_j, C_k$  sont deux à deux distincts,  $C_i$  et  $C_j$  appartenant à la même décomposition polygonale  $\mathcal{I}_m$  et  $C_i$  et  $C_k$  appartenant à une autre décomposition polygonale  $\mathcal{I}_n$ .

Le point  $\pi_2^{-1}(x)$  appartient naturellement au lieu singulier de  $B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$ . Le lieu singulier d'une  $\mathbf{G}$ -boule est le lieu de "branchement" des copies de  $B_r(x)$  dans

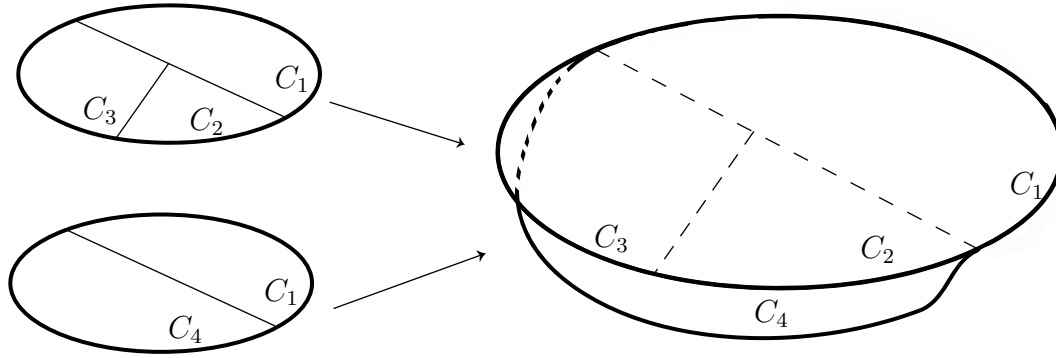


FIG. 3.1 – Recollement de deux disques

$\bigsqcup_{i=1}^p B_r(x)$  pour la relation  $\sim$ . C'est aussi l'ensemble des points de  $y \in B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$  tel que l'ensemble  $\pi_2^{-1}(\pi_2(y))$  contient moins de  $p - 1$  éléments.

Nous dirons qu'une courbe dans  $B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$  est lisse si elle reste dans une  $\mathbf{G}$ -feuille et sa projection dans  $B_r(x)$  est lisse. Ceci confère à  $B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p)$  une structure lisse  $[\mathbf{W}]$ .

Il est aisé de vérifier que pour  $y$  appartenant à une  $\mathbf{G}$ -boule, il existe un voisinage de  $y$  qui est une  $\mathbf{G}$ -boule centrée en  $y$  et un certain type  $q \in \{1, \dots, p\}$ . Un point en dehors du lieu singulier, admet comme voisinage une  $\mathbf{G}$ -boule de type 1, c'est à dire homéomorphe à  $B_r(y)$ . Ainsi en dehors du lieu singulier, il existe une action locale à droite de  $\mathbf{G}$ .

Une application  $\tau : B(x, r, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_p) \rightarrow B(y, r', \mathcal{I}'_1, \dots, \mathcal{I}'_{p_1})$  est une  $\mathbf{G}$ -submersion locale si :

- l'application  $\tau$  est surjective et preserve la structure lisse ;
- l'application  $\tau$  envoie les lieux singuliers sur les lieux singuliers et les  $\mathbf{G}$ -feuilles sur des  $\mathbf{G}$ -feuilles ;
- il existe  $g$  dans  $\mathbf{G}$  tel que  $\tau$  se projette en la translation à gauche par  $g$  sur  $B_r(x)$ , c'est-à-dire  $\pi_2 \circ \tau(\cdot) = g \cdot \pi_2(\cdot)$ .

Une  $\mathbf{G}$ -submersion locale qui est injective est appelée  $\mathbf{G}$ -isométrie locale. Dans ce cas, les deux  $\mathbf{G}$ -boules ont le même rayon et l'application inverse de  $\tau$  est aussi une  $\mathbf{G}$ -isométrie locale.

### 3.2.2 Modèle global

Soit un espace métrique compact  $B$  recouvert par des ensembles ouverts  $U_i$ , appelés *ouverts distingués*, munis d'homéomorphismes, appelés *cartes*,  $h_i : U_i \rightarrow V_i$  où  $V_i$  est un ensemble ouvert dans une  $\mathbf{G}$ -boule. Ces ensembles ouverts et ces homéomorphismes définissent un atlas de structure de  $\mathbf{G}$ -surface branchée si les applications de transitions  $h_{i,j} = h_j \circ h_i^{-1}$  vérifient la propriété suivante.

Pour chaque point  $y$  de  $h_i(U_i \cap U_j)$ , il existe un voisinage  $V_y$  de  $y$  qui est une  $\mathbf{G}$ -boule contenue dans  $h_i(U_i \cap U_j)$  et il existe un voisinage  $V_{h_{i,j}(y)}$  de  $h_{i,j}(y)$  qui est une  $\mathbf{G}$ -boule

contenue dans  $h_j(U_i \cap U_j)$  de sorte que la restriction de  $h_{i,j}$  à  $V_y$  est une  $\mathbf{G}$ -isométrie locale de  $V_y$  sur  $V_{h_{i,j}(y)}$ .

Nous dirons que deux atlas sont *équivalents* si leur union est à nouveau un atlas de structure de  $\mathbf{G}$ -surface branchée. Une  *$\mathbf{G}$ -surface branchée* est la donnée d'un espace métrique compact  $B$  muni d'une classe d'équivalence d'atlas de structure de  $\mathbf{G}$ -surface branchée. Nous dirons qu'un point  $x$  de  $B$  est un *point singulier* si dans un ouvert distingué  $U_i$ , ce point est envoyé par  $h_i$  sur un point du lieu singulier d'une  $\mathbf{G}$ -boule. Les changements de cartes envoient les lieux singuliers sur des lieux singuliers, cette notion est donc bien définie sur  $B$ . Nous noterons  $Sing(B)$  l'ensemble des points singuliers de  $B$ .

La structure lisse des ouverts distingués de  $B$  lui confère une structure lisse. De plus, en dehors des points singuliers,  $\mathbf{G}$  agit localement dans les ouverts distingués par la multiplication à droite. Cette action passe par les changements de carte. La surface branchée  $B$  possède donc une action locale de  $\mathbf{G}$  en dehors des points singuliers.

Deux tores tangents le long d'une courbe est un exemple simple de  $\mathbb{R}^2$ -surface branchée. En général, les surfaces branchées sont beaucoup plus compliquées que le recollement de surfaces compactes. Les pavages de  $\mathbf{G}$ -type fini fournissent des exemples de  $\mathbf{G}$ -surface branchée. Considérons un pavage  $T = \{t_1, t_2, \dots\}$  de  $\mathbf{G}$ -type fini qui recouvre la surface  $N$  avec des copies des proto-pavés  $\{p_1, \dots, p_n\}$ . Ce pavage peut être périodique ou non. Définissons à présent la relation d'équivalence  $\simeq$  sur  $N$  engendrée par la relation :

$$x(\in t_i) \sim y(\in t_j) \iff \text{il existe } g_1, g_2 \in G \text{ et } p_{l_1} \text{ et } p_{l_2} \text{ tels que :} \\ t_i = g_1(p_{l_1}) \text{ et } t_j = g_2(p_{l_2}) \text{ et } g_1^{-1}(x) = g_2^{-1}(y)$$

Cette relation peut se résumer en une relation d'équivalence sur l'union disjointe des proto-pavés où deux points sur des proto-pavés différents sont identifiés si quelque part dans le pavage  $T$  leurs copies se rencontrent. Seuls les points sur les bords des proto-pavés sont identifiés. Il est alors facile de vérifier que l'espace quotient  $N/\simeq$  a une structure de  $\mathbf{G}$ -surface branchée. Lorsque  $N$  est le plan euclidien et  $T$  est le pavage par des carrés unité, l'espace  $N/\simeq$  est alors un tore  $\mathbb{T}^2$ . Si  $T$  est un pavage avec des carrés unités noirs et blanc,  $N/\simeq$  est alors le recollement de deux tores tangents le long de deux courbes. Dans le cas du pavage de Penrose hyperbolique (voir figure 1.9 p. 19) l'identification par la relation  $\simeq$  revient à identifier les bords du proto-pavé comme le montre la figure 3.2.

Les arêtes  $AB$ ,  $ED$  et  $DC$  sont identifiées entre elles et l'arête  $AE$  est identifiée avec l'arête  $BC$ . Cet espace est homéomorphe à la suspension de l'application  $x \mapsto 2x \bmod 1$  sur le cercle  $\mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

La structure différentielle de  $N/\simeq$  apporte plus d'informations que sa simple structure de simplexe. La relation d'équivalence  $\simeq$  identifie des points sur des proto-pavés qui ne se rencontrent pas forcément dans le pavage. Cependant une courbe sur  $N/\simeq$  est lisse si elle se relève localement en une courbe lisse sur  $N$ . On ne peut passer de manière lisse entre deux faces jointes de  $N/\simeq$  que si ces faces se rencontrent sur le pavage.

FIG. 3.2 –

### 3.2.3 Morphismes

Soient  $B_1$  et  $B_2$  deux  $\mathbf{G}$ -surfaces branchées. Une surjection continue  $\tau : B_2 \rightarrow B_1$  est une  $\mathbf{G}$ -*submersion* si pour tout  $y \in B_2$  il existe un voisinage  $V_y$  qui est une  $\mathbf{G}$ -boule (lue à travers les cartes) et un voisinage  $V_{\tau(y)}$  de  $\tau(y)$  qui est une  $\mathbf{G}$ -boule (lue à travers les cartes) de sorte que la restriction de  $\tau$  à  $V_y$  est une  $\mathbf{G}$ -submersion locale de  $V_y$  sur  $V_{\tau(y)}$ . Nous dirons que c'est une  $\mathbf{G}$ -*submersion forte* si  $\tau(V_y)$  est dans une  $\mathbf{G}$ -feuille de  $V_{\tau(y)}$ .

Soit  $B$  une  $\mathbf{G}$ -surface branchée et  $x$  un point de  $B$ . Nous appellerons le *rayon d'injectivité* de  $x$  le supremum des rayons de toutes les  $\mathbf{G}$ -feuilles centrée en  $x$ . Le *rayon d'injectivité* de  $B$ , notée  $\text{inj}(B)$ , est l'infimum sur tous les  $x$  de  $B$  des rayons d'injectivités de  $x$ . Le *rayon de la  $\mathbf{G}$ -action*, notée  $\text{Taille}(B)$ , est l'infimum sur toutes les composantes connexes de  $B \setminus \text{Sing}(B)$  des supremum des rayons des  $\mathbf{G}$ -boules incluses dans les composantes connexes.

De ces différentes notions, nous pouvons en déduire que :

**Lemme 3.2.1** *Si  $\tau : B_2 \rightarrow B_1$  est une  $\mathbf{G}$ -submersion entre deux  $\mathbf{G}$ -surfaces branchées, alors  $\text{inj}(B_2) \geq \text{inj}(B_1)$  et  $\text{Taille}(B_2) \geq \text{Taille}(B_1)$ .*

Il est important de remarquer dans ce cas, qu'en dehors des points singuliers de  $B_2$ , la  $\mathbf{G}$ -action locale par la multiplication à droite commute avec la  $\mathbf{G}$ -submersion  $\tau$  car sur chaque  $\mathbf{G}$ -feuille  $\tau$  agit par translation à gauche d'un élément de  $\mathbf{G}$ .

## 3.3 Des surfaces branchées aux $\mathbf{G}$ -solénoïdes : la limite projective

Nous développons ici quelques propriétés combinatoires des  $\mathbf{G}$ -solénoïdes. Ces propriétés nous permettront de montrer qu'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde est homéomorphe à une limite projective de  $\mathbf{G}$ -surfaces branchées. Grâce à ceci, nous caractériserons, dans le chapitre suivant, les mesures invariantes de l'action du groupe  $\mathbf{G}$  sur un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$ .

### 3.3.1 Limite projective

Pour une famille dénombrable  $(X_n)_{n \geq 1}$  d'espaces topologiques et une famille  $(f_n)_{n \geq 1}$  d'applications continues  $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ , nous rappelons que la *limite projective* est l'ensemble :

$$\varprojlim (X_n, f_n) = \{(x_0, x_1, \dots) \mid x_n \in X_n, f_n(x_{n+1}) = x_n, \text{ pour tout } n\}.$$

C'est un sous-ensemble fermé de  $\prod_{n \geq 1} X_n$ . Si les espaces  $X_n$  sont tous compacts alors  $\prod_{n \geq 1} X_n$  l'est aussi et ainsi  $\varprojlim (X_n, f_n)$  aussi.

**Proposition 3.3.1** *Soient une suite  $(B_n)_{n \geq 1}$  de  $\mathbf{G}$ -surfaces branchées et une suite de  $\mathbf{G}$ -submersions fortes  $\tau_n : B_{n+1} \rightarrow B_n$ , alors la limite projective  $\varprojlim (B_n, \tau_n)$  est munie d'une  $\mathbf{G}$ -action locale.*

*Preuve :* nous savons déjà que chaque  $\mathbf{G}$ -surface branchée  $B_n$  est munie d'une  $\mathbf{G}$ -action locale en dehors des points singuliers. Cette action commute avec les  $\mathbf{G}$ -submersions  $\tau_n$ . Soit à présent un point  $(x_1, x_2, \dots)$  de  $\varprojlim (B_n, \tau_n)$ . Comme les applications  $\tau_n$  sont des  $\mathbf{G}$ -submersions fortes, il existe un rayon  $r > 0$  et une unique suite de  $\mathbf{G}$ -feuilles  $F_n$  dans  $B_n$  centrée en  $x_n$  de rayon  $r$  de sorte que  $\tau_n(F_{n+1}) = F_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Pour  $g \in B_r(0) \subset N \simeq \mathbf{G}$ , définissons alors  $x_n \cdot g = e_n(\pi_2(x_n) \cdot g)$  où  $e_n : B_r(\pi_2(x_n)) \rightarrow B_n$  est le plongement isométrique définissant  $F_n$ . Comme les  $\mathbf{G}$ -submersions commutent avec la multiplication à droite, la relation  $\tau_n(x_{n+1} \cdot g) = x_n \cdot g$  est vérifiée.  $\square$

### 3.3.2 Construction de limite projective

Une *décomposition en boîtes* d'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est une collection finie de boîtes  $\{\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n\}$  de sorte que les boîtes soient deux à deux disjointes et l'union de la fermeture de ces boîtes soit le solénoïde tout entier. Nous dirons qu'une boîte  $\mathbf{B}$  est *polygonale*, si à travers une carte,  $\mathbf{B}$  est de la forme  $V_i \times C_i$  où  $C_i$  est un espace métrique totalement discontinu et  $V_i$  est un polygone convexe de  $N$ . Comme le changement de cartes le long des feuilles est une isométrie de  $N$ , cette notion ne dépend pas de la carte choisie.

Bien évidemment l'intersection de deux boîtes polygonales est une boîte polygonale. De cette propriété, nous en déduisons qu'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde admet toujours une décomposition en boîtes qui sont toutes polygonales. Nous appellerons une telle décomposition une *décomposition en boîtes polygonales*.

Pour une boîte polygonale qui, dans une carte, est de la forme  $P \times C_i$  où  $C_i$  est espace totalement discontinu et  $P$  est un polygone de  $N$ , nous appellerons *bord vertical* l'ensemble qui, lu dans la même carte, est  $\partial P \times C_i$  où  $\partial P$  désigne le bord de  $P$ . De même que précédemment du fait de la forme rigide des changement de cartes, cette notion est bien définie (ne dépend pas de la carte choisie).

**Définition 3.3.2** Soient  $\mathbf{B}_1$  et  $\mathbf{B}_2$  deux décompositions en boîtes polygonales du  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$ . Nous dirons que  $\mathbf{B}_2$  est bien emboîtée dans  $\mathbf{B}_1$  si :

- Pour chaque point  $x$  appartenant à une boîte  $B_1$  de  $\mathbf{B}_1$  et à une boîte  $B_2$  de  $\mathbf{B}_2$ , la verticale de  $x$  dans  $B_2$  est contenue dans la verticale de  $x$  dans  $B_1$ .
- Les bords des boîtes de  $\mathbf{B}_2$  sont incluses dans les bords des boîtes de  $\mathbf{B}_1$ .
- Pour chaque boîte  $B_2$  de  $\mathbf{B}_2$ , il existe une boîte  $B_1$  de  $\mathbf{B}_1$  telle que  $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$  et le bord vertical de  $B_1$  n'intersecte pas le bord vertical de  $B_2$ .
- Si une verticale  $V$  dans le bord vertical d'une boîte de  $\mathbf{B}_1$  contient un point  $x$  appartenant au bord vertical d'une boîte de  $\mathbf{B}_2$ , alors la verticale de  $x$  (associée à la boîte de  $\mathbf{B}_2$ ) est incluse dans  $V$ .

Nous appellerons *système de tours* du solénoïde  $M$  une suite de décomposition en boîtes polygonales  $(\mathbf{B}_n)_{n \geq 1}$  telle que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mathbf{B}_{n+1}$  est bien emboîtée dans  $\mathbf{B}_n$ . Le nom d'une telle suite a été choisie en référence aux constructions d'une suite de tours et des diagrammes de Bratteli dans l'étude des  $\mathbb{Z}$ -action sur un ensemble de Cantor (voir [GPS]). La dernière condition dans la définition a été souvent introduite de diverses manières. Ainsi les personnes qui se sont intéressées aux pavages générés par substitution ont appelé cette condition "forcing the border" [KP] et R.F. Williams dans l'étude des attracteurs de Williams l'a nommé "flattening condition" [W].

Dans [BG], les auteurs prouvent que tout  $\mathbf{G}$ -solénoïde admet un système de tours.

Fixons à présent une décomposition en boîtes polygonales  $\mathbf{B}_1$  de  $M$ . Soit la relation d'équivalence  $\simeq$  engendrée par la relation qui identifie des points qui appartiennent à la fermeture de la même boîte polygonale et ont la même verticale. L'espace quotient  $\mathcal{B}_1 = M / \simeq$  muni de la topologie quotient, a alors naturellement une structure de  $\mathbf{G}$ -surface branchée. Notons  $p_1 : M \rightarrow \mathcal{B}_1$  la projection standard ; les points singuliers sont les points tels que leurs pré-images par  $p_1$  soient dans l'intersection des bords des boîtes de  $\mathbf{B}_1$ . En dehors des points singuliers de  $\mathcal{B}_1$ , l'application envoie la  $\mathbf{G}$ -action locale sur la  $\mathbf{G}$ -action locale de  $\mathcal{B}_1$ .

Pour  $\mathbf{B}_2$ , une autre décomposition en boîtes polygonales de  $M$  bien emboîtée dans  $\mathbf{B}_1$ , l'espace quotient  $\mathcal{B}_2 = M / \simeq$  avec  $\simeq$  la relation d'équivalence associée à la décomposition en boîtes  $\mathbf{B}_2$  a aussi une structure de  $\mathbf{G}$ -surface branchée, mais chaque verticale d'un point dans la fermeture d'une boîte de  $\mathbf{B}_2$  est dans une unique verticale d'une boîte de  $\mathbf{B}_1$ . Ceci permet de définir une application  $\tau : \mathcal{B}_2 \rightarrow \mathcal{B}_1$ . Cette application est naturellement une  $\mathbf{G}$ -submersion et en notant  $p_2 : M \rightarrow \mathcal{B}_2$  la projection standard, nous avons la relation  $\tau \circ p_2 = p_1$ . De plus comme les décompositions en boîtes  $\mathbf{B}_2$  et  $\mathbf{B}_1$  vérifient la dernière condition de la Définition 3.3.2, chaque verticale dans le bord d'une boîte de  $\mathbf{B}_1$  contient entièrement les verticales des bords des boîtes de  $\mathbf{B}_2$  qui l'intersectent. L'application  $\tau$  envoie donc un petit voisinage d'un point singulier de  $\mathcal{B}_2$  sur une  $\mathbf{G}$ -feuille de  $\mathcal{B}_1$ . L'application  $\tau$  est donc une  $\mathbf{G}$ -submersion forte.

Ainsi un système de tours  $(\mathbf{B}_n)_n$  induit une suite de  $\mathbf{G}$ -surfaces branchées  $\mathcal{B}_n$ , une suite de  $\mathbf{G}$ -submersions fortes  $\tau_n : \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \mathcal{B}_n$ . De plus comme, pour tout  $n \geq 1$ , chaque composante connexe de  $\mathcal{B}_{n+1} \setminus \text{Sing}(\mathcal{B}_{n+1})$  contient plusieurs copies isométriques des composantes connexes de  $\mathcal{B}_n \setminus \text{Sing}(\mathcal{B}_n)$ , nous en déduisons que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{inj}(\mathcal{B}_n) = +\infty$

et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Taille}(\mathcal{B}_n) = +\infty$ . L'ensemble des décompositions en boîtes  $\mathbf{B}_n$  engendrent donc la topologie de  $M$ . L'application  $p : M \rightarrow \varprojlim(\mathcal{B}_n, \tau_n)$  définie par

$$p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x), \dots),$$

est alors naturellement un homéomorphisme. Chaque application  $p_i$  envoie la  $\mathbf{G}$ -action locale sur la  $\mathbf{G}$ -action locale de la  $\mathbf{G}$ -surface branchée  $\mathcal{B}_i$  et  $\mathbf{G}$  agit globalement sur  $M$  et sur  $\varprojlim(\mathcal{B}_n, \tau_n)$ . Il en résulte que l'application  $p$  conjugue les systèmes dynamiques  $(M, \mathbf{G})$  et  $(\varprojlim(\mathcal{B}_n, \tau_n), \mathbf{G})$ .

Nous avons alors le théorème suivant :

**Théorème 3.3.3** [BG] *Soit  $M$  un  $\mathbf{G}$ -solénoïde :*

1. *Il existe une suite  $\mathcal{B}_n$  de  $\mathbf{G}$ -surface branchée et une suite de  $\mathbf{G}$ -submersions fortes  $\tau_n : \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \mathcal{B}_n$  telles que  $M$  est homéomorphe à la limite projective  $\varprojlim(\mathcal{B}_n, \tau_n)$  ;*
2. *le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur  $\varprojlim(\mathcal{B}_n, \tau_n)$  et l'homéomorphisme réalise une conjugaison entre les systèmes dynamiques  $(M, \mathbf{G})$  et  $(\varprojlim(\mathcal{B}_n, \tau_n), \mathbf{G})$  ;*
3.  *$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{inj}(\mathcal{B}_n) = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Taille}(\mathcal{B}_n) = +\infty$  ;*
4. *si  $M$  admet une feuille dense, alors toutes les  $\mathbf{G}$ -surfaces branchées  $\mathcal{B}_n$  sont connexes.*

La preuve du dernier point est facilement vérifiable.



# Chapitre 4

## Mesures et courants

Dans ce chapitre nous nous intéresserons aux mesures *invariantes* pour l'action de  $\mathbf{G}$  sur un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$ . De manière générale si le groupe  $\mathbf{G}$  agit sur un espace topologique  $X$ , une mesure  $m$  sur la tribu borélienne de  $X$  est dite *invariante* si pour tout  $g \in \mathbf{G}$  et pour tout borélien  $B$  de  $X$ ,  $m(B.g) = m(B)$ .

Par exemple le groupe  $\mathbb{R}^2$  des translations agit sur le plan de manière transitive et libre. Ce groupe est donc isomorphe au plan. La mesure de Lebesgue du plan est l'unique mesure, à un facteur multiplicatif près, invariante pour cette action. Cette mesure est alors la mesure de Haar sur ce groupe qui est invariante par multiplication à droite et à gauche.

Le groupe  $\mathcal{P}$  des transformations affines agit transitivement et librement sur le demi-plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . Ce groupe non commutatif est isomorphe au groupe des matrices triangulaires supérieures  $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}$ . Remarquons que le groupe  $\mathcal{P}$  admet une mesure de Haar invariante pour la multiplication à gauche  $\lambda_r = \frac{dad b}{a^2}$  qui est différente de la mesure de Haar invariante pour la multiplication à droite  $\lambda_d = \frac{dad b}{a}$ . Le groupe est alors dit *non unimodulaire*.

Dans les deux cas, ces deux groupes sont des extensions de groupes abéliens, ils sont donc *moyennables*, c'est-à-dire chaque action continue de ces groupes sur un espace compact  $X$  admet une mesure invariante finie [Zi]. Ainsi, chaque  $\mathbf{G}$ -solénoïde admet une mesure invariante pour l'action de  $\mathbf{G}$ . Nous caractériserons dans ce chapitre ces mesures en utilisant la notion de courant que nous rappellerons dans les premières sections. Nous invitons le lecteur à lire [Gh] pour avoir une introduction dans le contexte plus général des laminations. Ces notions, issues de la géométrie différentielle, sont, dans le cas de  $\mathbf{G}$ -solénoïdes, directement reliées avec la dynamique de l'action de  $\mathbf{G}$ . Si le  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est l'enveloppe continue d'un pavage, ces notions sont reliées avec la combinatoire du pavage. Nous verrons aussi apparaître ici, une différence fondamentale entre le cas euclidien et le cas hyperbolique. La caractérisation des mesures invariantes pour l'action du groupe  $\mathbb{R}^2$  diffère de celle des mesures invariantes pour l'action du groupe  $\mathcal{P}$  car celui-ci est non unimodulaire. Il sera nécessaire d'introduire, dans le cas hyperbolique, la notion de mesure harmonique.

## 4.1 Cycles feuilletés

Considérons sur un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  un atlas maximal  $\mathcal{F}$  muni de cartes  $h_i : U_i \rightarrow V_i \times C_i$  où  $V_i$  est un ouvert de  $\mathbf{G} \simeq N$  et  $C_i$  est un espace topologique totalement discontinu. Rappelons de nouveau que les changements de cartes  $h_{i,j} = h_j \circ h_i^{-1}$ , dans leur domaine de définition sont de la forme :

$$h_{i,j}(g, c) = (g_{i,j} \cdot g, \gamma_{i,j}(c)),$$

avec  $\gamma_{i,j}$  une application continue indépendante de  $g$ ,  $g_{i,j}$  un élément de  $\mathbf{G}$  indépendant de  $g$  et de  $c$  et  $g_{i,j} \cdot g$  désigne la multiplication des deux éléments  $g$  et  $g_{i,j}$ .

L'atlas sur  $M$  induit sur chaque feuille une structure de variété et nous pouvons donc introduire la notion de formes différentielles sur  $M$ . Dans une boîte, de la forme  $V_i \times C_i$ , nous appellerons *k-forme différentielle* une famille de  $k$ -formes différentielles réelles (de classe  $\mathcal{C}^\infty$ ) dans les plaques  $V_i \times \{c\}$  et qui dépendent continûment du paramètre  $c$  (pour la topologie  $\mathcal{C}^\infty$ ). Une  $k$ -forme différentielle sur le  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est donnée par une collection de  $k$ -formes différentielles dans les boîtes d'un atlas, qui s'envoient les unes sur les autres par les changements de cartes. Nous notons  $A^k(M)$  l'espace des  $k$ -formes différentielles sur  $M$  ( $k = 0, 1$  ou  $2$ ) ; c'est un espace vectoriel topologique. L'opérateur de différentiation le long des feuilles définit un opérateur  $d : A^k(M) \rightarrow A^{k+1}(M)$ . L'ensemble image de cet opérateur est l'ensemble des  $k+1$ -formes exactes. De manière générale, il est possible d'étendre la plupart des notions relatives à la géométrie différentielle des surfaces de Riemann. Chaque objet est lisse le long des feuilles et dépend continûment de l'espace transverse. Par exemple nous dirons qu'une 2-forme est (strictement) *positive* si elle est (strictement) positive en restriction aux feuilles.

**Définition 4.1.1** *Un cycle feuilleté pour le  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est un opérateur linéaire continu  $C : A^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$  qui est strictement positif sur les formes strictement positives et nul sur les formes exactes.*

Cette dernière notion a été introduite par D. Sullivan [S]. Son existence n'est pas toujours assurée. Ainsi :

**Proposition 4.1.2** *Un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde admet un cycle feuilleté. Un  $\mathcal{P}$ -solénoïde n'admet pas de cycle feuilleté.*

Nous prouverons un peu plus loin cette proposition.

Un résultat important stipule que les cycles feuilletés correspondent en fait aux mesures transverses invariantes.

### 4.1.1 Mesures invariantes et mesures transverses

**Définition 4.1.3** *Une mesure finie transverse invariante sur un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est la donnée d'une mesure finie  $\mu_i$  sur chaque espace transverse  $C_i$  telle que pour tout*

borélien  $B$  de  $C_i$ , contenu dans un domaine de définition d'une application de transition  $\gamma_{i,j}$ , on ait :

$$\mu_i(B) = \mu_j(\gamma_{i,j}(B)).$$

Il est important de remarquer qu'une mesure transverse invariante, pour un atlas donné, fournit une autre mesure transverse invariante pour tout atlas équivalent. Ainsi nous pouvons donc parler de mesure transverse invariante  $\mu^t$  d'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde, associée à un atlas maximal.

A partir d'une mesure transverse invariante  $\mu^t$ , il est possible de lui associer naturellement un cycle feuilleté. Soit  $\omega$  une 2-forme sur  $M$  dont le support est inclus dans une boîte  $U_i$  de sorte que nous puissions considérer  $\omega$  comme une 2-forme sur  $V_i \times C_i$ . En intégrant sur les plaques  $V_i \times \{c\}$  par rapport à la forme volume standard sur  $N$ , nous obtenons une fonction continue sur  $C_i$  que nous pouvons de nouveau intégrer par rapport à la mesure  $\mu_i$  pour obtenir un réel  $C_{\mu^t}(\omega)$ . Lorsque le support de  $\omega$  n'est pas inclus dans une boîte, nous décomposons  $\omega$  sous la forme  $\sum_i C_{\mu^t}(\phi_i \omega)$  où la collection  $\{\phi_i\}_i$  forme une partition de l'unité (lisse dans les feuilles) associée au recouvrement de  $M$  par les boîtes  $U_i$ . Ceci définit un opérateur linéaire  $C_{\mu^t} : A^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$  qui grâce aux propriétés d'invariance, ne dépend pas des choix de l'atlas et de la partition de l'unité et définit un cycle feuilleté. Dès lors une mesure transverse invariante donne un cycle feuilleté. Ce cycle est appelé *courant de Ruelle-Sullivan* associé à la mesure transverse  $\mu^t$ . La réciproque est également vraie : pour tout cycle feuilleté il existe une mesure transverse invariante qui lui est associée [S] ; ainsi ces deux points de vue sont équivalents.

Nous sommes en mesure à présent de démontrer la proposition 4.1.2.

*Preuve de la Proposition 4.1.2* : supposons tout d'abord que le groupe  $\mathbf{G}$  est le groupe des translations du plan  $\mathbb{R}^2$ . L'action du groupe  $\mathbb{R}^2$  sur le compact  $M$  admet une mesure invariante  $\mu$  et une mesure de Haar  $\lambda$  invariante pour la multiplication à gauche et à droite. Définissons à présent une mesure transverse invariante. Soit  $B$  un borélien contenu dans un espace transverse  $C_i$

$$\mu_i^t(B) = \frac{\mu(h_i^{-1}(V_i \times B))}{\lambda(V_i)}.$$

Comme dans les boîtes l'action de  $\mathbb{R}^2$  se fait le long des feuilles et par l'unicité, à une constante près, de la mesure de Haar, cette définition ne dépend ni de la boîte choisie, ni de l'ouvert  $V_i$ . L'invariance de  $\lambda$  pour la multiplication à gauche, implique l'invariance de  $\mu_i^t$  par les changements de cartes.

Dans le cas où le groupe  $\mathbf{G}$  est le groupe des transformations affines  $\mathcal{P} = \{z \mapsto az + b \mid a > 0, b \in \mathbb{R}\}$  de  $\mathbb{H}^2$ , la mesure invariante à gauche n'est pas la mesure invariante à droite. La construction établie précédemment pour le groupe  $\mathbb{R}^2$  n'est plus valide car elle n'est plus licite dans l'intersection des cartes.

Supposons qu'un  $\mathcal{P}$ -solénoïde  $M$  admette une mesure transverse invariante finie  $\mu^t$ . Notons  $\lambda_g$  une mesure de Haar sur  $\mathcal{P}$  invariante par la multiplication à gauche. Nous

pouvons alors définir une mesure globale sur  $M$  de la manière suivante. Dans une boîte  $U_i \times C_i$ , considérons la mesure produit  $\lambda_g \otimes \mu^t$ . Grâce aux propriétés d'invariance des mesures  $\mu^t$  et  $\lambda_g$ , cette mesure est bien définie : la définition passe sur les intersections des boîtes. Quitte à multiplier par un scalaire, nous pouvons supposer que cette mesure  $\mu$  est une mesure de probabilité sur  $M$ .

Le groupe  $\mathcal{P}$  agit par une action à droite sur  $M$ , ainsi à tout élément  $g$  de  $\mathcal{P}$  correspond un homéomorphisme de  $M$  que nous notons  $\tau_g$ . Soit  $B \simeq U \times C$  une boîte de  $M$  et  $g$  un élément de  $\mathcal{P}$ . L'action de  $\mathcal{P}$  sur les verticales a des temps de retour localement constant, nous pouvons alors décomposer  $B$  en boîtes disjointes  $b_i \simeq U \times C_i$  où  $C_i$  est un clopen de  $C$ , de sorte que  $b_i$  et  $\tau_{g'}(b_i)$  soient dans la même boîte  $D_i \simeq V_i \times C_i$  pour tout  $g'$  dans un voisinage de  $g$ . Considérons à présent une fonction continue  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  à support inclus dans  $B$  et notons  $\tau_g * \mu$  la mesure de probabilité  $\mu$  transportée par  $\tau_g$ . Nous avons alors

$$\int f d\tau_g * \mu = \sum_i \int_{b_i} f d\tau_g * \mu.$$

Dans chaque boîte  $D_i$ ,  $\int_{b_i} f d\tau_g * \mu = \int_{D_i} f(\tau_g^{-1}(x)) \lambda_g \otimes \mu^t$ . Pour un point  $(z, c) \in U \times C_i$ , nous avons  $\tau_g^{-1}((z, c)) = (z.g^{-1}, c)$  où pour  $z = (x, y)$  dans  $\mathbb{H}^2$  et  $g^{-1}$  est la transformation  $z \mapsto az + b$ , ainsi le point  $z.g^{-1} = (x + by, ay)$ . Par conséquent, nous obtenons  $\int_{b_i} f d\tau_g * \mu = a \int_{b_i} f d\mu$  et

$$\int f d\tau_g * \mu = a \int f d\mu. \quad (\#)$$

Quitte à prendre une partition de l'unité associée aux boîtes d'un atlas, il est alors possible de prouver l'égalité (#) pour n'importe quelle fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Ainsi la mesure  $\tau_g * \mu$  est la mesure  $a\mu$ . Ceci est impossible car  $\mu$  est une mesure de probabilité.  $\square$

Dans le cas où  $\mathbf{G}$  est le groupe  $\mathbb{R}^2$ , nous avons vu qu'une mesure invariante pour l'action de  $\mathbb{R}^2$  sur un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde fournit une mesure transverse invariante. La réciproque est vraie aussi : pour toute mesure transverse invariante, il existe une mesure invariante associée. Fixons tout d'abord un atlas d'un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde  $M$  possédant une mesure transverse invariante  $\mu^t$ . Dans une boîte homéomorphe à  $V_i \times C_i$ , définissons la mesure d'un borélien  $B$  qui lu dans la carte est de la forme  $W_i \times C'_i$  avec  $W_i$  un borélien de  $V_i$  et  $C'_i$  un borélien de  $C_i$ , par :

$$\mu(B) = \mu^t(C'_i) \lambda(V_i)$$

où  $\lambda$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^2$ . Les propriétés d'invariance des mesures considérées permettent de dire que cette valeur est bien définie dans l'intersection des boîtes. Par extension, ceci permet de définir une mesure sur le  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde  $M$ . Là encore, les propriétés d'invariance des mesures rendent cette mesure invariante pour l'action de  $\mathbb{R}^2$ . De façon plus générale, on peut définir un  $\mathbb{G}$ -solénoïde pour un groupe de Lie  $\mathbb{G}$  connexe, c'est-à-dire une lamination dont les changements de cartes le long des plaques sont des multiplications à gauche par un élément du groupe. Lorsque ce groupe

est unimodulaire (la mesure invariante par multiplication à droite et la même que celle invariante par multiplication à gauche), les trois notions précédentes sont équivalentes.

En définitive, pour un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde, les points de vue de mesure invariante pour l'action de  $\mathbb{R}^2$ , mesure transverse invariante et de cycle feuilleté, sont tous les trois équivalents. Les auteurs de [BBG], utilisent ce principe pour caractériser les mesures invariantes de l'action de  $\mathbb{R}^2$  sur un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde. Dans le cas d'un  $\mathcal{P}$ -solénoïde cette approche n'est plus possible.

**Remarque 1** *La non existence d'un cycle feuilleté est équivalente à l'existence d'une 2-forme exacte strictement positive sur chaque  $\mathcal{P}$ -solénoïde (voir [S]).*

**Remarque 2** *Cette non existence nous donne de plus une information sur le comportement géométrique des feuilles. Suivant les travaux de J. Plante [Pl], chaque feuille d'un  $\mathcal{P}$ -solénoïde a une croissance exponentielle.*

Afin de comprendre la statistique des feuilles, nous allons utiliser une notion plus générale que les cycles feuilletés : celle des courants harmoniques. Cette notion a été introduite par L. Garnett dans [Ga].

## 4.2 Courants harmoniques

### 4.2.1 Courants harmoniques et mesures harmoniques

Chaque feuille d'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est difféomorphe à  $N$ . Nous pouvons dès lors, munir chaque feuille de la métrique standard de  $N$ . L'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta$  défini le long des feuilles, induit un opérateur  $\Delta : A^0(M) \rightarrow A^2(M)$  et son image ( $Im\Delta$ ) est contenu dans l'espace des formes exactes. Un *courant harmonique* est une forme linéaire continue  $A^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$  strictement positif sur les formes strictement positives et nul sur  $Im\Delta$ . Un cycle feuilleté est donc un courant harmonique mais contrairement à lui :

**Proposition 4.2.1** ([Ga]) *Toute lamination et en particulier tout  $\mathcal{P}$ -solénoïde possède au moins un courant harmonique.*

*Preuve :* La preuve est basée sur le théorème de Hahn-Banach et est valable pour toute lamination, nous nous limiterons au cas d'un  $\mathcal{P}$ -solénoïde  $M$ . Il nous faut montrer que le cône ouvert des formes strictement positives n'intersecte pas la fermeture de l'espace vectoriel  $Im\Delta$ . Pour cela il suffit de montrer que pour toute fonction continue  $u$  sur  $M$  lisse le long des feuilles,  $\delta u$  est négatif ou nul en un certain point. Puisque  $M$  est compact, la fonction  $u$  atteint son maximum en un point  $x$  de  $M$ . La restriction de  $u$  à la feuille passant par  $x$  atteint aussi son maximum en  $x$  et  $\Delta u$  en  $x$  est donc négatif ou nul.  $\square$

Comme dans le cas des cycles feuilletés, il est possible d'associer à un courant harmonique  $I$  une mesure finie positive sur un  $\mathcal{P}$ -solénoïde. Fixons tout d'abord une

métrique hermitienne sur le fibré tangent au solénoïde  $M$ . Ceci définit une 2-forme différentielle le long des feuilles et permet donc d'identifier  $A^2(M)$  avec l'espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ . Grâce à la positivité du courant  $I$ , celui-ci peut s'étendre en une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions et définit alors une mesure positive finie sur  $M$ . Les mesures  $\mu$  obtenues de cette manière s'appellent *mesures harmoniques* et sont caractérisées par la propriété suivante. Pour toute fonction continue bornée  $f$  sur  $M$ , lisse le long des feuilles, l'intégrale  $\int \Delta f d\mu$  est nulle, où  $\Delta$  désigne le laplacien le long des feuilles.

L. Garnett [Ga] donne une description de la structure locale de ces mesures. Dans une boîte  $U_i \simeq V_i \times C_i$ , la restriction d'une mesure harmonique  $\mu$  sur  $U_i$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$d\mu(x, c) = d\mu_c(x) d\nu^t(c),$$

où  $\nu^t$  est la mesure obtenue par la projection de  $\mu$  sur  $C$  et les mesures  $\mu_c$  pour  $\nu^t$ -presque tout point de  $c$  de  $C_i$  sont des mesures sur les plaques  $V_i \times \{c\}$ . Pour une fonction  $f$  définie sur  $U_i$ , l'intégrale de  $f$  par rapport aux mesures  $\mu_c$ ,  $\int f(x, c) d\mu_c(x)$  dépend mesurablement de  $c$  et

$$\int f d\mu = \int \int f(x, c) d\mu_c(x) d\nu^t(c).$$

Pour  $\nu^t$ -presque tout point  $c$  de  $C_i$ , les mesures  $\mu_c$  sont des mesures harmoniques sur l'ouvert  $V_i$ . Dès lors, il existe une fonction  $f_i : V_i \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$  qui est définie pour  $\nu^t$  presque tout  $c$ , dépendant mesurablement de  $c$  et harmonique sur toute la plaque  $V_i \times \{c\}$  de sorte que chaque mesure  $\mu_c$  est de la forme  $f_i(z, c) dz$  où  $dz$  désigne la mesure issue de la métrique Riemannienne de  $N$ .

**Remarque 3** *Lors de l'identification de  $\mathbf{G}$  avec  $N$ , la mesure  $dz$  induit une mesure invariante pour la multiplication à gauche dans le groupe  $\mathbf{G}$ .*

Cette décomposition locale d'une mesure harmonique n'est malheureusement pas unique. Pour deux décompositions  $\nu_i, f_i$  et  $\nu'_i, f'_i$  définissant la même mesure, il existe une application mesurable  $\delta_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  définie  $\nu'_i$ -presque partout, telle que  $\nu_i = \delta_i(c)^{-1} \nu'_i$  et  $f_i(z, c) = \delta_i(c) f'_i(z, c)$ .

Ainsi les fonctions harmoniques  $f_i(z, c)$  définies sur les plaques sont compatibles sur leurs intersections à une constante multiplicative près. Comme dans le cas d'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde, les feuilles sont toutes simplement connexes, il est possible d'étendre chaque fonction harmonique  $f_i(z, c)$  définie sur une plaque en une fonction harmonique positive sur toute la feuille contenant cette plaque.

**Remarque 4** *Pour un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde, les feuilles sont toutes difféomorphes au plan. Les fonctions harmoniques que l'on obtient sont alors toutes positives et définies sur tout le plan, ce sont donc des fonctions constantes. Une mesure harmonique sur un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde se désintègre donc localement en le produit d'une mesure  $\mu_i$  sur  $C_i$  avec la mesure de Lebesgue sur le plan. La mesure  $\mu_i$  est alors une mesure transverse invariante.*

## 4.2.2 Mesures harmoniques et théorème ergodique

Nous allons à présent donner une caractérisation des mesures harmoniques qui permet une étude ergodique des feuilles des solénoïdes.

Soient  $x \in M$  un point du  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  et  $\Gamma_x$  l'ensemble

$$\{\gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow L_x \text{ continue} \mid \gamma(0) = x, \gamma(\mathbb{R}^+) \subset L_x\},$$

où  $L_x$  désigne la feuille passant par  $x$ . L'ensemble  $\Gamma_x$  est l'ensemble des chemins continus de  $M$  ayant pour origine le point  $x$ . Nous munissons cet ensemble de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts. Sur l'ensemble des boréliens, il existe une mesure de probabilité naturelle  $w_x$  appelée *mesure de Wiener*. Cette mesure est définie de sorte que le mouvement  $\Gamma_x \times \mathbb{R}^+ : (\gamma, t) \mapsto \gamma(t) \in L_x$  soit un mouvement brownien. L'ensemble  $\Gamma = \bigsqcup_{x \in M} \Gamma_x$  est l'ensemble des chemins continus de  $M$  strictement inclus dans les feuilles. Nous munissons à nouveau cet espace de la topologie de la convergence uniforme. Si  $\mu$  est une mesure finie sur  $M$ , alors  $\bar{\mu} = w_x \otimes \mu(x)$  est une mesure finie sur  $\Gamma$ . Pour un borélien  $B$  de  $\Gamma$ , nous avons alors :

$$\bar{\mu}(B) = \int_M w_x(B \cap \Gamma_x) d\mu.$$

Le semi-groupe  $\mathbb{R}^+$  agit sur cet espace  $\Gamma$  par translation dans le temps : pour  $\tau > 0$  et  $\gamma \in \Gamma$  définissons le semi-groupe de transformations  $S_\tau$  par  $S_\tau(\gamma)(s) = \gamma(s + \tau)$ . Par un calcul direct, il est possible de vérifier que les transformations  $S_\tau$  préservent  $\bar{\mu}$  si et seulement si  $\mu$  est une mesure harmonique<sup>1</sup>. Pour une mesure harmonique, nous pouvons alors appliquer le théorème ergodique de Birkhoff.

**Théorème 4.2.2 ([Ga])** *Pour une fonction continue de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  la limite  $l(x, \gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\gamma(i))$  existe pour  $\mu$ -presque tout point  $x$  et  $w_x$ -presque tout chemin  $\gamma$  de  $\Gamma_x$ .*

*Cette limite est constante le long des feuilles de  $M$  et  $l(x, \gamma)$  est constant pour  $w_x$ -presque tout chemin  $\gamma$ . De plus  $\int l(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x)$ .*

Grâce à ce théorème, nous pouvons définir le temps moyen de passage d'un chemin "générique"  $\gamma$  à travers un borélien  $B$  de  $M$ . Cette valeur est la limite  $\lim_{T \rightarrow \infty} 1/T \int_0^T \chi_B(\gamma(t)) dt$  où  $dt$  désigne la mesure de Lebesgue et  $\chi_B$  la fonction indicatrice de  $B$ .

## 4.3 Mesures invariantes et mesures harmoniques

Dans cette section nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 4.3.1** *Une mesure finie sur un  $\mathbf{G}$ -solénoïde  $M$  est harmonique si et seulement si elle est invariante pour l'action du groupe  $\mathbf{G}$  sur  $M$ .*

<sup>1</sup>Cela vient du fait que la mesure de Wiener est construite avec le noyau de la chaleur.

*Preuve* : Nous avons déjà traité le cas où le groupe  $\mathbf{G}$  est le groupe  $\mathbb{R}^2$  dans la remarque 4. Intéressons nous au cas où le groupe  $\mathbf{G}$  est le groupe des transformations affines  $\mathcal{P}$ . Nous utiliserons pour cela le lemme suivant :

**Lemme 4.3.2** *Soit  $H : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction harmonique positive. Si le quotient  $\frac{H(x,y)}{y}$  est uniformément borné, alors  $H(x,y) = \alpha y$  pour un certain réel positif  $\alpha$ .*

*Preuve* : Ceci est une conséquence de la formule de Pick (voir [Dk] par exemple). Une fonction harmonique positive  $H$  est de la forme :  $H(x,y) = \alpha y + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(s-x)^2+y^2} d\sigma(s)$  où  $\sigma$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}$  définie par :

$$\sigma([a, b]) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \int_{x=a}^b H(x, y) dx,$$

avec  $a < b$  et  $dx$  désigne la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . Si le quotient  $\frac{H(x,y)}{y}$  est borné alors la mesure  $\sigma$  est nulle.  $\square$

Soient  $\mu$  une mesure harmonique sur  $M$  et  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue positive à support inclus dans une boîte  $B \simeq U \times C$  de  $M$ . Un élément  $\tau$  de  $\mathcal{P}$  définit un homéomorphisme du solénoïde  $M$ , notons  $\tau * \mu$  la mesure obtenue par le transport de la mesure  $\mu$  par cet homéomorphisme. Définissons alors l'application  $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(\tau) = \int \phi d(\tau * \mu)$ . Fixons à présent un élément  $\tau$  de  $\mathcal{P}$  et un petit réel positif  $\epsilon$ . Comme les temps de retour de l'action de  $\mathcal{P}$  sur les verticales sont localement constant, il est possible de décomposer la boîte  $B$  en une union disjointe de boîtes  $b_i \simeq U \times C_i$  avec  $C_i$  un ensemble ouvert et fermé de  $C$  de diamètre plus petit que  $\epsilon$ ; de sorte que pour chaque  $i$ , les ensembles  $B_i$  et  $b_i \cdot \tau^{-1}$  soient inclus dans une même boîte que dénommerons  $D_i$ . En prenant  $\epsilon$  assez petit, pour tous les éléments  $g$  d'un voisinage de  $\tau$ , les ensembles  $B_i$  et  $b_i \cdot g^{-1}$  sont aussi dans la même boîte  $D_i$ . Ainsi

$$F(\tau) = \sum_i \int_{b_i} \phi d\tau * \mu.$$

Dans chaque boîte  $D_i$ , la mesure  $\mu$  est de la forme  $f_i(z, t) dz dv_i$  avec  $f_i$  une fonction harmonique en la variable  $z$ . Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \int_{b_i} \phi dg * \mu &= \int_{D_i} \phi(z \cdot g^{-1}, t) f_i(z, t) dz dv_i \\ &= \int_{D_i} \phi(z, t) f_i(z \cdot g, t) \frac{dz}{a} dv_i, \end{aligned}$$

où  $g$  est l'application affine définie par  $z \mapsto az + b$ . Nous rappelons ici que pour  $z = (x, y)$  dans  $\mathbb{H}^2$ ,  $z \cdot g = (x + by, ay)$ .

Comme nous avons vu dans la section 4.2, l'application  $f_i(\cdot, t)$  pour un  $t$  fixé, peut être étendue sur tout  $\mathbb{H}^2$  en une fonction harmonique positive. Soit un élément  $z$  dans l'ouvert  $U$ , l'application  $g \mapsto f_i(z \cdot g, t)$  est alors définie sur tout  $\mathcal{P}$ . En identifiant le

groupe de Lie  $\mathcal{P}$  avec  $\mathbb{H}^2$ , par un calcul direct nous vérifions que cette application est une fonction harmonique. Dès lors, l'application bornée  $g \mapsto \int_{b_i} \phi dg * \mu$  est de la forme  $(x, y) \mapsto \frac{H(x, y)}{y}$  avec  $H$  une fonction harmonique positive. Le lemme 4.3.2 nous permet de conclure que la fonction  $F$  est constante.

Pour une fonction continue  $\phi$  sur  $M$ , en prenant une partition de l'unité associée à un recouvrement de  $M$  par des ouverts, nous montrons que la valeur  $\int \phi d(\tau * \mu)$  est indépendante de  $\tau$ . Ceci montre qu'une mesure harmonique sur  $M$  est alors une mesure invariante pour l'action de  $\mathcal{P}$  sur  $M$ .

Réciproquement nous allons maintenant prouver que les mesures invariantes sont des mesures harmoniques. Pour cela nous allons nous intéresser à l'expression locale d'une mesure invariante.

**Lemme 4.3.3** *Si  $m$  est une mesure sur  $M$  invariante pour la  $\mathcal{P}$ -action à droite, alors dans chaque boîte la mesure  $m$  est de la forme  $d\sigma_c d\nu(c)$  où  $\nu$  est une mesure sur l'espace transverse et la famille  $(\sigma_c)_c$  est une famille de mesures de Haar sur le groupe  $\mathcal{P}$ , invariantes par multiplication à droite et dépendant mesurablement de  $c$ .*

*Preuve :* Fixons une boîte  $V \times C$ , nous décomposons la mesure  $m$  dans cette boîte en une mesure transverse  $\nu$  sur  $C$  et un système de mesures  $\sigma_c$  sur  $V \times \{c\}$  pour  $\nu$  presque tout  $c$  de  $C$ . Ainsi, pour une fonction mesurable  $f$  à support inclus dans cette boîte, nous avons :

$$\int f dm = \int_C \int_V f(z, c) d\sigma_c(z) d\nu(c).$$

Fixons à présent un point  $x$  dans la boîte et un voisinage fermé  $K$  de ce point inclus dans la boîte. Soit  $A$  l'ensemble des fonctions mesurables bornées à support dans  $K$ . Si la mesure  $m$  est  $\mathcal{P}$ -invariante, alors pour tout  $f \in A$  et pour tout  $g \in \mathcal{P}$  tel que  $K.g$  soit inclus dans la boîte, nous avons  $\int f(x) - f(x.g) dm(x) = 0$ .

Nous pouvons décomposer  $f = f_1 + f_2$  où  $f_1$  est la restriction de  $f$  aux plaques pour lesquelles  $\int_V f(x) - f(x.g) d\sigma_c > 0$ ; et  $f_2$  est la restriction de  $f$  aux plaques pour lesquelles l'intégrale est négative. Si  $m$  est invariante alors  $\int f_i(x) - f_i(x.g) dm(x) = 0$  et ainsi :

$$\nu\{c \in C \mid \int_V f_i(x) - f_i(x.g) d\sigma_c \neq 0\} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Il en suit que lorsque  $m$  est invariant, pour  $\nu$  presque tout  $c$  dans  $C$ ,  $\int f(x) - f(x.g) d\sigma_c = 0$ . Par conséquent, en identifiant chaque feuille avec le groupe de Lie  $\mathcal{P}$ , pour  $\nu$ -presque tout  $c$ , la mesure  $\sigma_c$  est une mesure de Haar invariante pour la multiplication à droite.  $\square$

Lorsque l'on identifie le groupe  $\mathcal{P}$  avec  $\mathbb{H}^2$ , une mesure invariante pour la multiplication à droite est de la forme  $\frac{\lambda}{y} dx dy = \lambda_d$  pour une certaine constante  $\lambda > 0$ . Ainsi une mesure invariante  $m$  sur  $M$  peut s'écrire dans une boîte  $\lambda_c \frac{dx dy}{y} d\nu(c)$ , où  $c \in C \mapsto \lambda_c \in \mathbb{R}^+$  est une application mesurable définie  $\nu$  presque partout. Rappelons qu'une mesure invariante pour la multiplication à gauche est proportionnelle à la mesure induite par la métrique Riemannienne, c'est-à-dire elle est de la forme  $\frac{\lambda}{y^2} dx dy = \lambda_g$  pour une certaine constante  $\lambda > 0$ . Nous avons donc  $\lambda_d = y \cdot \lambda_g$  et comme l'application  $(x, y) \in$

$\mathbb{H}^2 \mapsto y \in \mathbb{R}^+$  est harmonique, une mesure  $m$  sur  $M$  invariante pour l'action de  $\mathcal{P}$  est harmonique. Ceci conclut la preuve du Théorème 4.3.1.  $\square$

### 4.3.1 Combinatoire des mesures invariantes

Dans cette partie, nous nous intéresserons uniquement au cas où  $M$  est un  $\mathcal{P}$ -solénoïde. Nous chercherons à caractériser les mesures invariantes pour l'action de  $\mathcal{P}$ . Les mesures invariantes pour l'action de  $\mathbb{R}^2$  sur un  $\mathbb{R}^2$ -solénoïde ont déjà été caractérisées dans l'article [BG].

Comme nous l'avons déjà vu, la décomposition locale d'une mesure invariante  $m$  n'est pas unique. Considérons une boîte  $B$  de  $M$  homéomorphe à  $V \times C$ , si  $\frac{\lambda_c}{y} dx dy d\nu(c)$  et  $\frac{\lambda'_c}{y} dx dy d\nu'(c)$  sont deux décompositions d'une même mesure invariante  $m$  sur  $M$ , les mesures  $\nu$  et  $\nu'$  sont dans la même classe et par conséquent il existe une fonction mesurable positive définie presque partout  $\delta : C \rightarrow \mathbb{R}_*^+$  telle que  $\nu = \frac{1}{\delta(\cdot)} \nu'$  et  $\lambda_c = \delta(c) \lambda'_c$ .

Une conséquence importante est que la valeur  $\int_C \lambda_c d\nu(c)$  est bien définie dans la boîte  $B$ . Si nous notons  $f$  la fonction  $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = \int_C \lambda_c d\nu(c) \cdot y$ , alors la mesure d'un cylindre  $A \times C$  (avec  $A$  un ensemble mesurable de  $V$ ) de la boîte, est :  $m(A \times C) = \int_A f(x, y) \frac{dx dy}{y^2}$ . Nous utiliserons cette fonction  $f$  pour caractériser les mesures invariantes.

Tout d'abord fixons quelques notations. Pour une surface branchée  $\mathcal{B}$ , notons  $\mathcal{C}_2(\mathcal{B}, \mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie dont la base est constituée des 2-faces de  $\mathcal{B}$ . Soit  $\mathcal{C}_2(\mathcal{B}, \mathbb{R})^+$  le cône des vecteurs de  $\mathcal{C}_2(\mathcal{B}, \mathbb{R})$  à coefficients positifs et soit  $\mathbf{P}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$  l'intersection de  $\mathcal{C}_2(\mathcal{B}, \mathbb{R})^+$  avec la sphère unité centrée en l'origine pour la norme  $|(b_1, \dots, b_q)|_1 = \sum_i |b_i|$ . Nous notons  $\mathcal{M}(M)$  l'ensemble des mesures finies de  $M$  invariantes pour l'action de  $\mathcal{P}$ .

Fixons une décomposition en boîte du  $\mathcal{P}$ -solénoïde  $M$ . Pour chaque boîte  $B$  de cette décomposition et pour une mesure invariante  $m$ , nous avons vu que nous pouvons associer un nombre positif  $b = \int_C \lambda_c d\nu(c) > 0$ . L'identification des points appartenant à la même verticale dans une même boîte définit une fibration  $p$  de  $M$  sur une surface branchée  $\mathcal{B}$ . Nous pouvons alors associer à l'intérieur  $F_i$  d'une 2-face de  $\mathcal{B}$ , une boîte  $B_i = p^{-1}(F_i)$  grâce à la fibration et ainsi nous définissons la 2-chaine  $\sum_i b_i \overline{F}_i \in \mathcal{C}_2(\mathcal{B}, \mathbb{R})^+$ . Par conséquent la fibration  $p : M \rightarrow \mathcal{B}$  induit une application linéaire  $p_* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{C}_2(\mathcal{B}, \mathbb{R})^+$ .

Si nous considérons à présent une décomposition en tours  $(\mathbf{B}_n)_n$ , nous obtenons une suite de fibrations  $p_n$  sur des surfaces branchées  $\mathcal{B}_n$  et une suite d'applications  $\pi_n : \mathcal{B}_{n+1} \rightarrow \mathcal{B}_n$  telle que  $p_n = \pi_n \circ p_{n+1}$  et  $M \simeq \lim_{\leftarrow} (\mathcal{B}_n, \pi_n)$ . Ces applications induisent des applications linéaires  $(p_n)_* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+$ .

La relation entre  $(p_n)_*(m)$  et  $(p_{n+1})_*(m)$  peut être décrite de la façon suivante. Nous notons  $B_i^n \simeq F_i^n \times C_i^n$  les boîtes de  $\mathcal{B}_n$ , où l'indice  $i$  désigne une énumération de ces boîtes. Soit  $f_i^n(x, y)$  la fonction  $(x, y) \mapsto \int_{C_i^n} \lambda_{ic}^n d\sigma_i^n(c) \cdot y = b_i^n y$  pour une décomposition

locale de la mesure  $m$ . L'intersection de  $B_i^n$  et  $B_j^{n+1}$  est soit vide, soit une union disjointe de boîtes  $\bigsqcup_l D_{ij}^l$ . Dans le cas non trivial, il existe des applications de changement de cartes  $h_{ij}^l : D_{ij}^l \cap B_i^n \rightarrow B_j^{n+1}$ , avec  $h_{ij}^l(z, c) = (g_{ij}^l \cdot z, \gamma_{ij}(c))$  et  $g_{ij}^l \in \mathcal{P}$ . Ainsi pour un cylindre  $A \times C_i^n$  de  $B_i^n$ , nous avons

$$\begin{aligned} m(A \times C_i^n) &= \sum_j \sum_l m(h_{ij}^l((A \times C_i^n) \cap D_{ij}^l)) \\ &= \sum_j \sum_l \int_{g_{ij}^l(A)} f_j^{n+1}(x, y) \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \sum_j \sum_l \int_A \alpha(g_{ij}^l) b_j^{n+1} \frac{dx dy}{y} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est le morphisme  $\alpha(z \mapsto az + b) = a$ ;

$$= \sum_j \sum_l \alpha(g_{ij}^l) \int_A f_j^{n+1}(x, y) \frac{dx dy}{y^2}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout  $A \subset V_i^n$ , nous obtenons la relation :

$$b_i^n = \sum_j \sum_l \alpha(g_{ij}^l) b_j^{n+1} = \sum_j b_j^{n+1} \sum_l \alpha(g_{ij}^l).$$

Notons  $p(n)$  la dimension de  $\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})$  et  $A_n$  la  $p(n) \times p(n+1)$ -matrice dont les coefficients sont positifs et donnés par  $a_{i,j}^n = \sum_l \alpha(g_{ij}^l)$  lorsque  $B_i^n$  et  $B_j^{n+1}$  s'intersectent et 0 sinon. Nous avons la relation  $(p_n)_*(m) = A_n((p_{n+1})_*(m))$  et ainsi la suite  $((p_n)_*(m))_n$  est un élément de  $\varprojlim(\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+, A_n)$ . Grâce à cela nous pouvons étendre les applications  $(p_n)_*$  en une application linéaire

$$p_* : \mathcal{M}(M) \rightarrow \varprojlim(\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+, A_n).$$

Nous vérifions facilement que l'application  $p_*$  envoie l'ensemble des mesures de probabilité invariantes sur l'ensemble  $\varprojlim(\mathbf{P}(\mathcal{B}_n, \mathbb{R}), A_n)$ .

En fait l'application  $p_*$  est un isomorphisme, nous allons construire maintenant son inverse. Soit  $(v_n)_n$  un élément de  $\varprojlim(\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+, A_n)$ . Considérons à présent une famille de cylindres engendrant la tribu borélienne telle que chaque cylindre  $A$  soit inclus dans une boîte  $B_i^n$  de  $\mathbf{B}_i^n$ ,  $B_i^n \simeq V_i^n \times C_i^n$  et  $A \simeq A_i^n \times C_i^n$  pour un certain sous-ensemble mesurable  $A_i^n$  de  $V_i^n$ . Soit  $m(A)$  la valeur  $\int_{A_i^n} b_i^n \frac{dx dy}{y}$  avec  $v_n = (b_1^n, \dots, b_i^n, \dots, b_{p(n)}^n)$ . Grâce à la relation entre  $v_n$  et  $v_{n+1}$ , la valeur  $m(A)$  est bien définie et peut être étendue en une mesure  $m$  par additivité à toute la tribu borélienne de  $M$ . Par un calcul direct, nous vérifions que  $p_*(m) = (v_n)_n$ . De plus, comme la mesure  $m$  se désintègre localement en produit d'une mesure transverse avec une mesure de la forme  $by \frac{dx dy}{y^2}$  sur les plaques, la mesure  $m$  est harmonique et par conséquent d'après le théorème 4.3.1 invariante pour l'action de  $\mathcal{P}$ .

Nous avons donc démontré le théorème suivant qui est une reformulation explicite du résultat 2 :

**Théorème 4.3.4** Soit  $M$  un  $\mathcal{P}$ -solénoïde homéomorphe à la limite projective de surfaces branchées  $\mathcal{B}_n$ ,  $\varprojlim(\mathcal{B}_n, p_n)$ .

Alors :  $\mathcal{M}(M)$  est homéomorphe à  $\varprojlim(\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+, A_n)$ , où  $A_n$  est une application linéaire envoyant  $\mathbb{R}^{p(n)+}$  sur  $\mathbb{R}^{p(n)+}$  avec  $p(n) = \dim \mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})$ .

La restriction de l'ensemble des mesures de probabilités invariantes est alors homéomorphe à  $\varprojlim(\mathbf{P}(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+, A_n)$ .

Ce dernier théorème nous permet de donner un critère pour borner le nombre de mesures de probabilité invariantes ergodiques.

**Proposition 4.3.5** Si  $M$  est un  $\mathcal{P}$ -solénoïde et  $M$  est homéomorphe à la limite projective de surfaces branchées  $\mathcal{B}_n$ ,  $\lim_{\leftarrow}(\mathcal{B}_n, p_n)$ .

1. Si il existe  $N$  tel que pour tout  $n$  le nombre des faces de  $\mathcal{B}_n$  est borné par  $N$ , alors il y a au plus  $N$  mesures de probabilité invariantes ergodiques.
2. Si de plus  $M$  est minimal et les applications linéaires  $A_n$  sont uniformément bornées, alors il n'existe qu'une unique mesure de probabilité invariante.

La preuve de cette proposition est standard, ses arguments ont déjà été utilisés dans [GM] de façon similaire. Nous présentons ici un schéma de preuve.

*Preuve* : Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R}) = N$ . Considérons à présent  $N$  suites  $(w_j^n)_n \in \prod_n \mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+$  pour  $j \in \{1, \dots, N\}$  avec  $w_j^n = (w_{j,1}^n, \dots, w_{j,i}^n, \dots, w_{j,N}^n)$  et  $w_{j,i}^n = 0$  si  $j \neq i$  et 1 sinon.

Fixons un entier  $n$ , pour tout  $j$  dans  $\{1, \dots, N\}$  et  $m > n$ , soit  $w_j^{nm} = A_n \circ \dots \circ A_{m-1}(w_j^m)$ . Quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que les suites  $(w_j^{nm})_{m>n}$  convergent vers  $w_j \in \mathbf{P}(\mathcal{B}_1, \mathbb{R})$ . Notons  $proj_n$  la projection de l'ensemble produit  $\prod_n \mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})$  sur  $\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})$ , et  $Prob_n = proj_n(Lim_{\leftarrow}(\mathbf{P}(\mathcal{B}_n, \mathbb{R}), A_n))$ . L'ensemble  $Prob_n$  est un ensemble convexe et si nous notons  $H_m$  l'enveloppe convexe de  $\{w_j^{nm} | j = 1, \dots, N\}$ , nous obtenons  $Prob_n = \bigcap_{m>n} A_n \circ \dots \circ A_{m-1}(H_m)$ . Ainsi  $Prob_n$  est l'enveloppe de  $\{w_j | j = 1, \dots, N\}$ . Supposons à présent qu'il existe plus de  $N$  mesures de probabilité ergodiques invariantes, alors pour  $n$  suffisamment grand il y aura plus que  $N$  points extrémaux dans  $Prob_n$ , ce qui est une contradiction.

Pour prouver la deuxième partie de la proposition, nous montrons que  $Prob_n$  est réduit à un unique point. Pour cela définissons la distance hyperbolique entre deux points  $x, y$  de  $\mathbf{P}(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})$ .

$$d_h(x, y) = -\ln \frac{(m+l).(m+r)}{l.r},$$

où  $m$  désigne la longueur euclidienne du segment  $[x, y]$  et  $l, r$  sont les longueurs des composantes connexes de  $S \setminus [x, y]$ ,  $S$  étant le plus grand segment contenant  $[x, y]$  dans  $\mathbf{P}(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})$ . Par un calcul direct, nous vérifions qu'une matrice à coefficients strictement positifs contracte cette distance. La minimalité de  $M$  implique que les matrices  $A_n$  ont toutes leurs coefficients strictement positifs. Puisque ces matrices sont uniformément bornées et définies sur des espaces à dimension bornée, la contraction est uniforme. Dès lors  $Prob_n = \bigcap_{m>n} A_n \circ \dots \circ A_{m-1}(\mathbf{P}(\mathcal{B}_m, \mathbb{R}))$  est réduit à un point.  $\square$

# Chapitre 5

## Exemples

### 5.1 Exemples

Dans cette section nous donnerons des exemples de pavages de  $\mathbb{H}^2$  de  $\mathcal{P}$ -type fini non périodiques et répétitifs. De plus afin d'illustrer les résultats du chapitre précédent, nous donnerons des exemples explicites de pavages construits avec exactement  $r$  mesures de probabilités ergodiques invariantes pour tout entier  $r \geq 1$ . L'idée fondamentale est de décorer le pavage de R. Penrose hyperbolique (figure 1.9 p. 19), le coloriage étant codé par une suite bi-infinie non périodique. Cette suite est choisie de façon à ce que son orbite sous l'action du décalage est uniformément récurrente. En d'autres termes, l'action du décalage sur la fermeture de son orbite par cette action est minimale. Ces résultats peuvent être résumés dans le théorème suivant :

**Théorème 5.1.1** *Pour tout entier  $r \geq 1$ , il existe un pavage de  $\mathcal{P}$ -type fini  $T$  tel que la  $\mathcal{P}$ -action sur  $\Omega(T)$  est libre, minimale et possède exactement  $r$  mesures de probabilité ergodiques invariantes pour la  $\mathcal{P}$ -action.*

Le reste de cette section est dédié à la construction d'exemples démontrant ce théorème.

*Preuve du théorème 5.1.1* : soient un entier  $r \geq 1$  et  $\Sigma$  l'ensemble  $\{1, \dots, r\}$ . Nous associons de manière unique à chaque élément de  $\Sigma$  une couleur. Soit  $P$  le polygone défini dans le chapitre 1 pour construire le pavage de R. Penrose (figure 1.8 p. 19). Considérons les deux transformations affines

$$R : z \mapsto 2z \text{ et } S : z \mapsto z + 1.$$

Le pavage hyperbolique de R. Penrose est alors défini de la manière suivante  $\mathcal{T} = \{R^k \circ S^n P | n, k \in \mathbb{Z}\}$  (voir figure 1.9 p. 19). Pour un élément  $i$  de  $\Sigma$ , notons  $P_i$  le proto-pavé  $P$  colorié dans la couleur  $i$ . Pour une suite  $w = (w_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ , nous associons le pavage  $\mathcal{T}(w)$  de  $\mathcal{P}$ -type fini, construit avec les proto-pavés  $P_i$  et défini par

$$\mathcal{T}(w) = \{R^q \circ S^n(P_{w_q}) | n, q \in \mathbb{Z}\}.$$

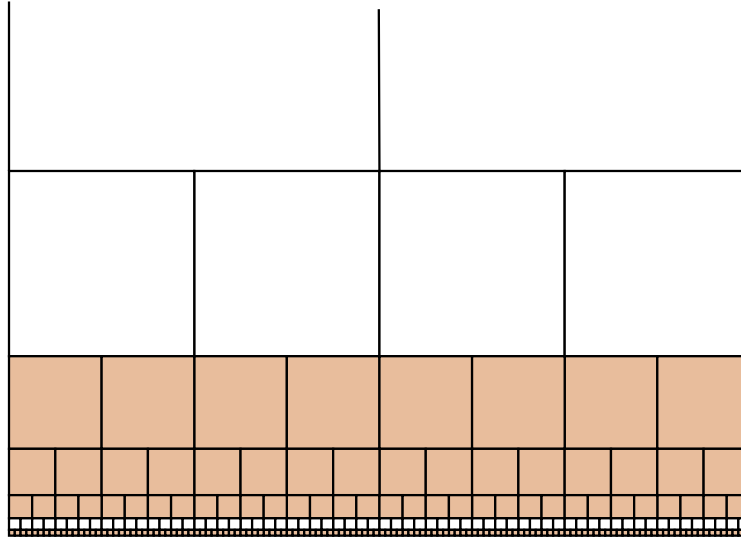


FIG. 5.1 – Pavage de R. Penrose associé à une suite

Ces pavés sont tous isométriques à  $P$  et son stabilisateur est un groupe de la forme  $\{R^{pn} \mid n \in \mathbb{Z}\}$  pour un entier  $p \in \mathbb{Z}$  (voir figure 5.1).

L'ensemble des suites à valeurs dans  $\Sigma$  est l'ensemble produit  $\Sigma^{\mathbb{Z}}$  qui muni, de la topologie produit, est un ensemble de Cantor. Il existe un homéomorphisme naturel  $\sigma$  sur cet espace appelé *décalage*. A une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , le décalage  $\sigma$  associe la suite  $(w'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $w'_n = w_{n+1}$ . Pour la suite  $w$  notons  $X$  la fermeture de son orbite par l'action du décalage :  $X = \overline{\{\sigma^n(w), n \in \mathbb{Z}\}}$ . L'ensemble  $X$  est alors un espace métrique compact stable sous l'action de  $\sigma$ .

Rappelons que  $\mathcal{T}(w).R$  désigne le pavage image de  $\mathcal{T}$  par l'application  $R^{-1}$ . Nous avons alors la relation

$$\mathcal{T}(w).R = \mathcal{T}(\sigma(w)). \quad (5.1)$$

Grâce à cette relation nous en déduisons l'affirmation suivante :

- Affirmation 1**
- Si la suite  $w$  n'est pas périodique pour l'action du décalage  $\sigma$ , alors  $\mathcal{T}(w)$  n'est stable pour aucune transformation affine.
  - Si le système dynamique  $(X, \sigma)$  est minimal, alors  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  est minimal.

Le premier point vient de la relation 5.1 et du fait que le stabilisateur de  $\mathcal{T}(w)$  est un sous groupe de  $\langle R \rangle$ . Le dernier point vient du fait que le système dynamique  $(X, \sigma)$  est minimal si et seulement si tous les mots de la suite  $w$  apparaissent une infinité de fois dans  $w$  à distance bornée. Dans ce cas, le pavage  $\mathcal{T}(w)$  est répétitif et donc  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  est minimal.

La *suspension* d'une action de  $\sigma$  sur  $X$ , est l'espace quotient  $\mathcal{X} = \mathbb{R} \times X / \sigma$  où les points  $(t, x)$  et  $(s, x')$  sont identifiés si  $s - t \in \mathbb{Z}$  et  $x = \sigma^{s-t}(x')$ . L'action naturelle de  $\mathbb{R}$  sur l'espace  $\mathbb{R} \times X$  par translation dans le temps, induit une  $\mathbb{R}$ -action sur la

suspension. La suspension  $\mathbb{R} \times X/\sigma$  a une structure de  $\mathbb{R}$ -solénoïde (voir [BG]), cet espace est localement le produit d'un ouvert d'un intervalle avec un ensemble totalement discontinu.

**Lemme 5.1.2** *Le système dynamique  $(\Omega(\mathcal{T}(w)), \mathcal{P})$  se factorise sur le système dynamique  $(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ .*

*Preuve :* En effet, il existe une application continue naturelle et surjective de  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  sur  $\mathcal{X}$  qui envoie la  $\mathcal{P}$ -action sur la  $\mathbb{R}$ -action. Cette application est définie de la manière suivante. Pour un élément  $g : z \mapsto az + c$  du groupe  $\mathcal{P}$ , définissons  $h(\mathcal{T}(w).g) = [(\log_2(a), w)] \in \mathcal{X}$  où  $[(t, x)]$  désigne la classe de l'élément  $(t, x)$  de  $\mathbb{R} \times X$  pour la relation définie par  $\sigma$ . L'application  $h$  est alors une application continue de  $\mathcal{T}(w). \mathcal{P}$  vers  $\mathcal{X}$ . Cette application est uniformément continue pour la métrique  $\delta$  et par conséquent s'étend par continuité sur toute l'enveloppe  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  de  $\mathcal{T}(w)$ . Pour prouver cela, il suffit de montrer que l'application  $h$  envoie deux pavages qui coïncident sur une grande boule centrée en l'origine, sur deux points proches dans  $\mathcal{X}$ . Pour un mot  $b = w_{i_0} \dots w_{i_0+l}$  de la suite  $w$ , notons  $\mathcal{P}a(b)$  le patch  $\bigcup_{j=0}^l \{R^{-j} \circ S^k(P_{w_{i_0+j}})\}$  pour  $k = 0, \dots, j$  de  $\mathcal{T}(w)$ . Considérons un pavage  $\mathcal{T}(w).g$  avec  $g \in \mathcal{P}$ , l'origine  $O$  dans ce pavage est dans une copie du patch  $\mathcal{P}(b)$  pour un certain mot  $b$  de  $w$ . Par la relation 5.1, l'origine  $O$  est aussi dans le patch  $\mathcal{P}(b)$  dans le pavage  $\mathcal{T}(\sigma^n(w))$ , où  $n$  désigne la partie entière de  $\log_2(a)$ . Le mot  $b$  apparaît donc dans la suite  $v = \sigma^n(w)$  sous la forme  $v_{-n_1} v_{-n_1+1} \dots v_{n_2-1} v_{n_2}$  pour deux entiers positifs  $n_1$  et  $n_2$ . Si  $\mathcal{T}(w).g'$  coïncide avec  $\mathcal{T}(w)$  sur un grand domaine centré en l'origine, une copie du patch  $\mathcal{P}(b)$  dans  $\mathcal{T}(w).g'$  contient l'origine en son intérieur. En notant  $n'$  la partie entière de  $\log_2(a')$  avec  $g : z \mapsto a'z + c'$ , le mot  $b$  correspond aussi aux premiers termes de la suite  $\sigma^{n'}(w)$ . Ainsi  $h(\mathcal{T}(w).g') = [(\log_2(a') - n', \sigma^{n'}(w))]$  est proche de  $h(\mathcal{T}(w).g) = [(\log_2(a) - n, \sigma^n(w))]$ .

Il en résulte qu'il est possible d'étendre  $h$  en une application de  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  sur  $\mathcal{X}$  que nous noterons aussi  $h$ . Il est facile de vérifier que chaque fibre de  $h$  est stable par l'action du groupe  $\mathcal{N} = \{z \mapsto z + t, t \in \mathbb{R}\}$ . De plus comme  $\mathcal{P}$  est une extension du groupe  $\mathcal{N}$  et du groupe  $\{z \mapsto az, a > 0\}$ , l'action de  $\mathcal{P}$  sur  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  préserve les fibres. Cette  $\mathcal{P}$ -action induit alors par  $h$  une  $\mathcal{P}$ -action sur la suspension  $\mathcal{X}$  et  $h$  définit une semi-conjugaison pour cette action. Le groupe  $\mathcal{N}$  agit trivialement sur  $\mathcal{X}$ . Les mesures invariantes pour la  $\mathcal{P}$ -action sur  $\mathcal{X}$  sont des mesures invariantes pour l'action de  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Lemme 5.1.3** *Chaque mesure invariante pour l'action de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathcal{X}$  est de la forme  $h_*\mu$ , où  $\mu$  est une mesure sur  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  invariante pour l'action de  $\mathcal{P}$ .*

*Preuve :* pour prouver cela, nous allons utiliser une mesure sur  $\mathcal{P}$  de Haar invariante pour la multiplication à droite que nous notons  $\lambda$  et une suite de Følner (voir [Pa]) notée  $(A_n)_n$ . Soit  $\mu$  une mesure de probabilité ergodique et invariante pour la  $\mathcal{P}$ -action sur  $\mathcal{X}$ . Par le théorème ergodique, il existe un point  $x$  dans la suspension tel que la suite de mesures de probabilités  $\mu_n = \frac{1}{\lambda(A_n)} \int_{A_n} \delta_{g,x} d\lambda(g)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini, vers la mesure  $\mu$ . Soit  $y$  un point de  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  tel que  $h(y) = x$ . Quitte à prendre une sous-suite, la suite  $(\nu_n)$  de mesures de probabilité sur  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  définie par

$\nu_n = \frac{1}{\lambda(A_n)} \int_{A_n} \delta_{g.y} d\lambda(g)$ , converge vers une mesure de probabilité  $\nu$  invariante par l'action de  $\mathcal{P}$ . Comme  $h * \nu_n = \mu_n$ , nous avons  $h * \nu = \mu$ .  $\square$

Il est important de noter que par convexité, la semi-conjugaison  $h$  envoie les mesures ergodiques sur les mesures ergodiques.

Pour donner des exemples de pavages dont l'enveloppe possède exactement  $r$  mesures de probabilités ergodiques invariante pour l'action de  $\mathcal{P}$ , nous utiliserons une suite  $w$  telle que sa suspension possède exactement  $r$  mesures de probabilités ergodiques invariantes pour l'action de  $\mathcal{P}$ , ainsi par le lemme précédent, l'enveloppe  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  possède au moins  $r$  probabilités invariantes. En appliquant la proposition 4.3.5, nous pourrions alors prouver le Théorème 5.1.1.

Nous allons donner à présent un exemple de construction d'une telle suite. Cet exemple est donné par S. Williams dans [SW]. L'auteur généralise un exemple de J. C. Oxtoby [Ox] et définit une suite Toeplitz  $w \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$  pour laquelle l'action de  $\mathbb{R}$  sur sa suspension est minimale et admet  $r$  probabilités ergodiques invariantes.

Nous allons tout d'abord nous occuper du cas  $r \geq 2$ . Considérons la suite  $s_i \equiv i \pmod r \in \Sigma$  pour  $i \in \mathbb{N}$  et la suite  $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$  avec  $p_0 = 3$  et  $p_{i+1} = 3^i \cdot p_i$ . Nous allons définir la suite  $w = (w_q)_{q \in \mathbb{Z}} \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$  par récurrence. La première étape (étape 1) est de définir  $w_q = s_1$  pour tout  $q \equiv 0$  or  $-1 \pmod{3^2}$ . En général pour  $i \in \mathbb{N}$ ,  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , soit  $J(i, k)$  l'ensemble des entiers  $q \in [kp_i, (k+1)p_i)$  pour lequel  $w_q$  n'a pas été encore défini à la fin de l'étape  $i$ . L'étape  $(i+1)$  consiste à poser  $w_q = s_{i+1}$  pour  $q \in J(i, k)$  avec  $k \equiv -1$  or  $0 \pmod{3^i}$ .

Nous allons à présent définir une suite d'atlas de mots pour la suite  $w$ . Soit  $\mathcal{A}_0$  l'ensemble des mots  $\{s_i, i = 1 \dots r\}$  et  $\mathcal{A}_1$  l'ensemble de mots  $\{s_1 s_i^{p_1-2} s_1, i = 1, \dots, r\}$ , où pour deux mots  $a$  et  $b$ ,  $ab$  désigne la concaténation des deux mots et  $a^q$  désigne la concaténation de  $q$  fois le mot  $a$ . Pour tout entier  $q \geq 1$ , nous notons  $p_{q,i}$   $i \in \{1, \dots, r\}$  le mot de  $\mathcal{A}_q$  indexé par  $i$  et par  $q > 1$ ,  $\mathcal{A}_q$  est alors l'ensemble des mots  $\{p_{q-1, s_q} (p_{q-1, i})^{3^{q-1}-2} p_{q-1, s_q}, i = 1, \dots, r\}$ . Pour tout  $q \in \mathbb{N}$  la séquence  $w$  est une suite bi-infinie de mots de  $\mathcal{A}_q$ .

Nous pouvons à présent définir une décomposition en tours de  $\Omega(\mathcal{T}(w))$ . Considérons pour  $q \geq 0$  la collection de patches  $\mathcal{P}a_q = \{\mathcal{P}a(p_{q,i}), \text{ pour } i = 1, \dots, r\}$ . Pour tout  $q$ , le pavage  $\mathcal{T}(w)$  est une union des copies des éléments de  $\mathcal{P}a_q$ , ces copies s'intersectant seulement sur leur bord. Remarquons que tous les patches de  $\mathcal{P}a_q$  ont tous la même taille. A chaque patch, il est possible d'associer une boîte homéomorphe au produit d'un clopen par une copie de ce patch. La famille des boîtes associées aux éléments de  $\mathcal{P}a_q$  forme alors une décomposition en boîtes de  $\Omega(\mathcal{T}(w))$ . Pour une telle décomposition en boîtes, l'identification des points appartenant la même verticale donne une variété branchée  $\mathcal{B}_q$ . Si nous notons  $\sim_q$  la relation d'équivalence engendrée par l'identification des points des bords des patches de  $\mathcal{P}a_q$  qui se rencontrent quelque part dans la pavage  $\mathcal{T}(w)$ , nous obtenons que  $\mathcal{B}_q$  est homéomorphe à  $\bigsqcup_{i=1}^r \mathcal{P}a_{p_{q,i}} / \sim_q$ . Il est direct de vérifier que la décomposition en boîtes associée à  $\mathcal{P}a_{q+1}$  est bien emboîtée dans  $\mathcal{P}a_q$  et par conséquent, il existe des applications  $\pi_q$  telles que :

$$\Omega(\mathcal{T}(w)) \simeq \varprojlim (\mathcal{B}_q, \pi_q).$$

Par la Proposition 4.3.5, l'enveloppe  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  possède au plus  $r$  mesures de probabilités ergodiques invariantes. Grâce au Lemme 5.1.3, nous avons donc démontré le Théorème 5.1.1 pour  $r \geq 2$ .

Pour obtenir un exemple de  $\mathcal{P}$ -solénoïde minimal avec une unique mesure de probabilité  $\mathcal{P}$ -invariante, nous utilisons la même stratégie, mais avec une autre suite  $w$  pour laquelle l'action du décalage est minimal et uniquement ergodique [GJ]. Nous utilisons les mêmes notations que précédemment avec  $r = 2$ . Nous considérons une substitution  $\mathfrak{S}$  sur l'alphabet  $\Sigma = \{1, 2\}$  définie par  $\mathfrak{S}(1) = 112$ ,  $\mathfrak{S}(2) = 122$ . En utilisant l'extension de la substitution sur les mots par concaténation, nous pouvons itérer cette substitution. La suite  $w$  est alors la suite bi-infinie définie par :

$$w = \lim_n \overleftarrow{\mathfrak{S}^n(2)} \cdot \lim_n \overrightarrow{\mathfrak{S}^n(1)},$$

où le point  $.$  est placé entre les coordonnées 0 et  $-1$ .

Soit  $\mathcal{A}_0$  l'ensemble  $\{1, 2\}$  et pour tout entier  $q \geq 1$ , soit  $\mathcal{A}_q$  l'atlas de mots  $\{\mathfrak{S}^{q-1}(1)\mathfrak{S}^{q-1}(i)\mathfrak{S}^{q-1}(2), i = 1, 2\}$  pour la suite  $w$ . La suite  $w$  est une suite bi-infinie de mots de  $\mathcal{A}_q$ . Considérons la collection de patchs  $\mathcal{P}a_q = \{\mathcal{P}a(wo), wo \in \mathcal{A}_q\}$ . Pour tout  $q \geq 0$ , le pavage  $\mathcal{T}(w)$  est une union d'éléments de  $\mathcal{P}a_q$  et la suite de décompositions en boîtes de  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  associées à  $\mathcal{P}a_q$  définit alors une décomposition en tours de l'enveloppe. Cette enveloppe  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  est homéomorphe à  $\varprojlim(\mathcal{B}_q, \pi_q)$  où  $\mathcal{B}_q = \bigsqcup_{wo \in \mathcal{A}_q} \mathcal{P}a(wo) / \sim_q$ .

Par le Théorème 4.3.4 l'espace des mesures invariantes  $\mathcal{M}(\Omega(\mathcal{T}(w)))$  est isomorphe à  $\varprojlim(\mathcal{C}_2(\mathcal{B}_n, \mathbb{R})^+, A_n)$ . Un calcul simple montre que les applications linéaires sont définies par les matrices :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 + 2^{-3^n+1} & 1 \\ 2^{-3^n+2} & 2^{-3^n+1} + 2^{-3^n+2} \end{pmatrix}.$$

La Proposition 4.3.5 nous permet de conclure que l'enveloppe  $\Omega(\mathcal{T}(w))$  admet une unique mesure de probabilité  $\mathcal{P}$ -invariante.  $\square$

## 5.2 Remarques et perspectives

L'étude des  $\mathbf{G}$ -solénoïdes et des pavages est loin d'être complète. Il subsiste encore de nombreuses questions aussi bien géométriques que dynamique qui nécessitent de nombreux résultats fins sur les  $\mathbf{G}$ -solénoïdes.

Par exemple : pour un pavage répétitif  $T$  de  $\mathbb{H}^2$ , chaque patch va se répéter une infinité de fois dans le pavage. L'union des copies de ce patch dans  $T$  va alors s'accumuler sur le bord à l'infini de  $\mathbb{H}^2$ . Les points d'accumulation de cet ensemble forment un ensemble dense sur le bord. Quelle est la répartition statistique de ces points ? Dans le cas où le pavage est construit par les copies du domaine fondamental d'un groupe fuchsien, ces points se répartissent uniformément par rapport à la mesure de Lebesgue sur le bord. Nous pouvons alors conjecturer que cela est identique dans le cas d'un pavage répétitif.

L'étude de l'espace de Teichmüller d'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde apporterait des informations fines sur la géométrie d'un  $\mathbf{G}$ -solénoïde. Des résultats intéressants doivent être possible en particulier pour les  $\mathbb{R}^2$ -solénoïdes fibrant sur le tore.

Du point de vue des systèmes dynamiques, les comportements statistiques des feuilles ne suffisent pas toujours pour différencier des  $\mathbf{G}$ -solénoïdes. Il serait intéressant de caractériser les  $\mathbf{G}$ -solénoïdes dont les  $\mathbf{G}$ -actions sont orbitalement conjuguées. La caractérisation en limite inverse des  $\mathbf{G}$ -solénoïdes pourrait aider à cela.

De manière plus général il semble qu'il est possible d'étendre des résultats obtenus sur des  $\mathbf{G}$ -solénoïdes à des actions de groupe de Lie sur des espaces compacts. Le résultat 1 doit notamment s'étendre pour une certaine classe de groupes de Lie moyennables qui comprend notamment les groupes résolubles. Une action localement libre d'un groupe de Lie  $G$  sur un espace métrique compact, donne une structure de lamination à cet espace. Une mesure invariante pour cette action est une mesure harmonique de cette lamination. Il est alors intéressant de se demander à quelles conditions sur  $G$ , les mesures harmoniques de cette lamination sont des mesures invariantes pour cette action. Une condition suffisante semble être que la *fonction modulaire*  $\phi$  (c'est-à-dire la fonction densité de la mesure de Haar sur  $G$  invariante par multiplication à gauche par rapport à la mesure de Haar sur  $G$  invariante par multiplication à droite), vérifie la propriété suivante : si  $H$  est une fonction harmonique positive sur  $G$  telle que  $H(g) \leq \phi(g)$  pour tout  $g \in G$ , alors  $H$  est proportionnelle à  $\phi$ . Grâce à cette propriété, comme dans la preuve du Théorème 4.3.1, il est possible alors de montrer que pour une mesure harmonique  $\mu$  et pour une fonction continue  $f$  définie sur la lamination, l'application  $g \in G \mapsto \int f dg * \mu$  est constante. Il en résulte qu'une mesure harmonique est invariante pour l'action de  $G$ .

# Table des figures

1	Diagramme de diffraction . . . . .	5
2	Pavage de Conway apériodique avec un unique pavé . . . . .	7
1.1	Pavage de Penrose, constitué de cerfs-volants et de flèches . . . . .	13
1.2	Substitution du pavage de R. Penrose avec les pavés $C$ et $F$ . . . . .	13
1.3	Pavage de Penrose, constitué de losanges . . . . .	14
1.4	Pavés de Penrose modifiés . . . . .	15
1.5	Règle de substitution du pavage pinwheel. . . . .	15
1.6	Pavage pinwheel . . . . .	16
1.7	méthode coupée-projection . . . . .	17
1.8	Le pavé $P$ . . . . .	19
1.9	Le pavage de R. Penrose hyperbolique . . . . .	19
3.1	Recollement de deux disques . . . . .	32
3.2	. . . . .	34
5.1	Pavage de R. Penrose associé à une suite . . . . .	52



# Bibliographie

- [AP] J.E. ANDERSON, I.F. PUTNAM. *Topological invariants for substitution tilings and their associated  $C^*$ -algebras*, Ergod. Th. & Dyn. Syst. **18** (1998), 509-537.
- [BBG] J. BELISSARD, R. BENEDETTI, J.-M. GAMBAUDO. *Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labelling*, à paraître dans Comm. in Math. Phys.
- [BG] R. BENEDETTI, J. M. GAMBAUDO. *On the dynamics of  $\mathbb{G}$ -solenoids. Applications to Delone sets*, Ergod. Th. & Dyn. Syst. **23** (2003), 673-691.
- [Ben1] Y. BENOIST. *pavages du plan*, disponible sur <http://www.dma.ens.fr/~benoist>.
- [Ben2] Y. BENOIST. *Five lectures on lattices in semisimple Lie groups*, disponible sur <http://www.dma.ens.fr/~benoist>.
- [Be] R. BERGER. *The undecidability of the domino problem*, Memoirs Amer. Math. Soc. **66** (1966).
- [BFMS] V. BERTHÉ, S. FERENCZI, C. MAUDUIT, A. SIEGEL. *Substitutions in Dynamic, Arithmetics and Combinatorics*, L.N.M. vol 1794.
- [Bi] L. BIEBERBACH. *Über die bewegungsgruppen der euklidischen räume*, Math. Ann. **70** (1911) 297-336 et **72** (1912) 400-412.
- [BW] J. BLOCK, S. WEINBERGER. *Aperiodic tilings, positive scalar curvature and amenability of spaces*, Jour. of the AMS **5** (1992), 907-918.
- [CoS] J.H. CONWAY, N.J.A. SLOANE. *Sphere packing, Lattices and Groups*, Springer Verlag, New York, (1988).
- [Co] M.I. CORTEZ.  $\mathbb{Z}^d$  *Toeplitz tilings*, à paraître dans Ergod. Th. & Dyn. Syst.
- [DK] B. DEROIN, V. KLEPTSYN. *Random conformal dynamical systems*, disponible sur <http://arxiv.org/abs/math/0506204>.
- [Do] W. F. DONOGHUE JR. *Distributions and Fourier transforms*, Academic Press, New-York and London 1969.
- [Dk] M. DUNEAU, A. KATZ. *Quasiperiodic Patterns*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 2688-2691.
- [KD] M. DUNEAU, A. KATZ. *Quasiperiodic patterns*, Phys. Rev. Lett. **54** (1985), 2688-2691.

- [Dü] A. DÜRER. *Underweysung der Messung*, (1525), Présentation et traduction de J. Peiffer, *Géométrie*, Sources du savoir, Seuil,(1995).
- [GM] J.-M. GAMBAUDO, M. MARTENS. *Algebraic topology for minimal Cantor sets*, disponible sur <http://www.dim.uchile.cl/~gambaudo/index.html>.
- [Ga] L. GARNETT. *Foliations, The Ergodic theorem and brownian motion*, Journ. of Funct. Analysis. **51** (1983), 285-311.
- [Gh] É. GHYS. *lamination par surface de Riemann*, Dynamique et géométrie complexes, Panoramas & Synthèse **8** (1999), 49-95.
- [GPS] T. GIORDANO, I. PUTNAM, C.I. SKAU. *Topological equivalence and  $C^*$  crossed products*, J. Reine Angew. Math **469** (1995), 51-111.
- [GJ] R. GJERDE, Ø. JOHANSEN. *Bratteli-Vershik model for Cantor minimal systems : applications to Toeplitz flows.*, Ergod. Th. & Dyn. Syst. **20** (2000), 6187-1710.
- [GS] C. GOODMAN-STRAUSS. *A strongly aperiodic set of tiles in the Hyperbolic plane*, a paraître dans Inventiones Math.
- [GrS] B. GRÜNBAUM, G. SHEPARD. *Tilings and Patterns*, Freeman, New-York (1987).
- [Ha] T. HAHN. *International tables for crystallography*, Reidel (1983).
- [KP] J. KELLENDONK, I.F. PUTNAM. *Tilings,  $C^*$ -algebras and  $K$ -theory*, Directions in Mathematical Quasicrystals, CRM Monograph Series **13** (2000), 177-206, M.P. Baake & R.V. Moody Eds., AMS Providence.
- [LS] D. LEVINE, P.J. STEINHARDT. Phys. Rev. Lett. **53** (1985).
- [Ma] B. MAITTE. *Une brève histoire de quasi-cristaux*, Alliage **39** (1999), 49-57.
- [MM] G. MARGULIS, S. MOZES. *Aperiodic tiling of the hyperbolic plane by convex polygons*, Israel Journ. of Math. **107** (1998), 319-325.
- [Mz] S. MOZES. *Aperiodic tiling*, Invent. Math. **322** (1997), 803-614.
- [MRW] P.S. MUHLY, J.N. RENAULT, D.P. WILLIAMS. *Equivalence and isomorphisme for groupoid  $C^*$  algebra*, J. Operator Th. **17** (1987), 3-22.
- [Ox] J.C. OXTOBY. *Ergodics sets*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 116-136.
- [Pa] A. L.T. PATERSON. *Amenability*, Math. Survey and Monographs **29**, AMS, Providence, RI, (1988). **2** (1979), 32-37.
- [P] R. PENROSE. *Pentaplexity*, Mathematical Intelligencer **2** (1979), 32-37.
- [Pe] S. PETITE. *On invariant measures of finite type tilings*, prépublication I.M.B. n 400.
- [Pl] J.F. PLANTE. *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. of Math. (2)**102** (1975), 327-361.
- [Pu] I. PUTNAM. *The  $C^*$ -algebras associated with minimal homeomorphisms of the Cantor set*, Pacific J. Math. **136** (1989), 329-352.
- [Ra] C. RADIN. *Symetry of tilings of the plane*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1993), 213-217.

- [Ra2] C. RADIN. *Pinwheel tilings of the plane*, Proceedings of the . Amer. Math. Soc. **69** (1993), 213-217.
- [SW] L. SADUN, R. F. WILLIAMS. *Tiling spaces are Cantor set fiber bundles*, Ergod. Th. & Dyn. Syst. **23** (2003), 307-316.
- [SBDC] D. SCHECHTMAN, I. BLECH, D. GRATIAS, J.W. CAHN. *Metallic phase with long range orientational order and no translational symmetry* Phys. Rev. Lett. **53** (1984), 1951-1953.
- [Se] M. SENECHAL. *Quasicrystals and geometry*, Cambridge Univ. Press (1995).
- [Sp] E. H. SPANIER. *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill, New-York (1966).
- [S] D. SULLIVAN. *Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds*, Invent. Math. **36** (1976), 225-255.
- [Th] W.P. THURSTON. *Groups, tilings and finite state automata*, Lecture notes, AMS Colloquium lectures (1990).
- [Wa] H. WANG. *Proving theorems by pattern recognition*, H. Bell System Technical Journal. **40** (1961) 1-42.
- [W] R. F. WILLIAMS. *Expanding attractors*, Publ. IHES, **43** (1974), 169-203.
- [W2] R. F. WILLIAMS. *One-dimensional non wandering sets*, Topology, **6** (1967), 473-487.
- [SW] S. WILLIAMS. *Toeplitz minimal flow which are not uniquely ergodic*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. **67** (1984), 95-107.
- [Zi] R. J. ZIMMER. *Ergodic Theory and Semisimple Groups*, Birkhäuser, Basel ; Boston ; Stuttgart (1984).