Discipline

Combinatoire/*Combinatorics*

Adresses des auteurs

• G. Duchamp : Laboratoire d'Informatique de Rouen – Université de Rouen – Faculté des Sciences – 76134 Mont Saint-Aignan Cedex

• D. Krob, B. Leclerc : Laboratoire d'Informatique Théorique et de Programmation – Université Paris 7 – 2, place Jussieu – 75251 Paris Cedex 05

• J.Y. Thibon : Institut Gaspard Monge – Université de Marne-la-Vallée – 2, Rue de la Butte-Verte – 93166 Noisy-le-Grand Cedex

Correspondance et envoi des épreuves

• Daniel Krob – LITP – Université Paris 7 – 2, place Jussieu – 75251 Paris Cedex 05

Déformations de projecteurs de Lie

Gérard DUCHAMP, Daniel KROB,
Bernard LECLERC et Jean-Yves THIBON

Résumé — La théorie des fonctions symétriques non commutatives permet d'obtenir des déformations naturelles de projecteurs de Lie classiques. Nous présentons en particulier une famille à un paramètre d'idempotents de Lie qui interpole entre les idempotents de Dynkin, de Solomon et de Klyachko et nous construisons une autre déformation de l'idempotent de Klyachko.

Deformations of Lie projectors

Abstract — The theory of noncommutative symmetric functions leads to natural deformations of classical Lie projectors. We present in particular a one-parameter family of Lie idempotents interpolating between Dynkin's, Solomon's and Klyachko's idempotents, and we construct another deformation of Klyachko's idempotent.

Abridged english version — Let K be a field of characteristic 0. An element $\eta \in K\mathfrak{S}_n$ of the group algebra of the symmetric group is said to be a *Lie element* if it is a Lie polynomial in the usual identification between permutations and standard words. An idempotent Lie element is called a *Lie idempotent* (see *e.g.* [1][11]). For example, the three elements defined by

$$\theta_n = \frac{1}{n}\,[[\cdots[1,2],3],\cdots],n] \;\in\; \mathbb{Q}\,\mathfrak{S}_n\;,\quad \phi_n = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{d(\sigma)} \binom{n-1}{d(\sigma)}^{-1} \sigma \qquad (1)$$

where $d(\sigma)$ is the cardinal of the *descent set* $\mathrm{Des}\,(\sigma) = \{i \mid \sigma(i) > \sigma(i+1)\}$ of σ, and

$$\kappa_n(\zeta) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \zeta^{\mathrm{maj}\,\sigma}\,\sigma \qquad (2)$$

where ζ is a primitive nth root of unity, and $\mathrm{maj}\,\sigma = \sum_{i\in\mathrm{Des}\,(\sigma)} i$ is the major index of σ, are Lie idempotents. The first one appears in [2], [14] and [15], and will be called for short *Dynkin's idempotent.* The second one ϕ_n, introduced in [12] will be called *Solomon's idempotent* and the third one *Klyachko's idempotent* (*cf.* [7]).

These idempotents are all elements of the *descent algebra* of the symmetric group, introduced in [13] (for any Coxeter group). We recall that the linear subspace of $\mathbb{Q}\,\mathfrak{S}_n$ spanned by the elements D_C, defined for $C \subseteq [1, n-1]$ by

$$D_C = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\,\mathrm{Des}\,(\sigma)=C} \sigma$$

is a subalgebra of $\mathbb{Q}\,\mathfrak{S}_n$, denoted by Σ_n and called the descent (or Solomon's) algebra of $\mathfrak{S}_n$.

The aim of this Note is to produce various deformations of the above Lie idempotents, by means of the theory of *noncommutative symmetric functions*, developed in [4] and based on the theory of quasi-determinants [5][6][8]. The first one is a one-parameter family of Lie idempotents, interpolating between θ_n, ϕ_n and $\kappa_n(\zeta)$.

Theorem 1 *Let $\varphi_n(q)$ be the element of $\Sigma_n \otimes K(q)$ defined by*

$$\varphi_n(q) = \frac{1}{n}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{d(\sigma)} \begin{bmatrix} n-1 \\ d(\sigma)\end{bmatrix}_q^{-1} q^{\mathrm{maj}\,\sigma - \binom{d(\sigma)+1}{2}}\;\sigma \;\;.$$

Then, $\varphi_n(q)$ is a Lie idempotent. Moreover, $\varphi_n(1) = \phi_n$, $\varphi_n(0) = \theta_n$ and for ζ a primitive nth root of unity, $\varphi_n(\zeta) = \kappa_n(\zeta)$.

A composition $I = (i_1, \ldots, i_r)$ is represented by a *ribbon diagram* $\mathcal{D}_I$, which is a skew Young diagram of ribbon shape, whose k-th row (read from the top) has i_k cells. To a subset C of $[1, n-1]$, one associates a composition $I = I(C)$ of n, defined by the requirement that $C = \{i_1, i_1+i_2, \ldots, i_1+\cdots+i_{r-1}\}$ (and conversely to a composition I one associates the subset $C = C(I)$). The composition $I(C)$ admits a unique *hook decomposition* of the form $I(C) = E_1 \triangleright E_2 \triangleright \ldots \triangleright E_s$, where $H \triangleright K = (h_1, \ldots, h_r + k_1, k_2, \ldots, k_s)$, and all the E_i are *hooks* $(1^x, y)$. The hook decomposition of $I(C)$ is the sequence $DE(C) = (E_1, \ldots, E_s)$ and one sets $E(C) = (\ell(E_1), \ldots, \ell(E_s))$, where $\ell(E_i)$ denotes the length of the composition E_i.

One associates then to a subset C of $[1, n-1]$ a polynomial $PE_C(t)$ by the following device. First, one reads the diagram $\mathcal{D}_I$ of $I(C)$ from top to bottom and left to right, writing a cross in the first cell of $\mathcal{D}_I$ and in the first two cells of each hook that appears in the hook decomposition of I. Then, one reads the diagram a second time, numbering each cell from 0 to $n-1$, but without writing into marked cells. One obtains in this way a sequence $(e_1, \ldots, e_m)$ of integers, numbering the unmarked cells of the ribbon. The polynomial $PE_C(t)$ is then the product of the factors $(q^{e_j} - t)$ or $(1 - q^{e_j}t)$, according to whether the cell numbered e_j is in the column part (bottom corner included) or in the row part of its hook.

Define the major index $\operatorname{maj} I$ of a composition to be the sum of the elements of the set $C(I)$, *i.e.* the major index of any permutation having C as descent set.

Theorem 2 *Let $K_n(t,q)$ be the element of $\Sigma_n \otimes K[t,q]$ defined by*

$$K_n(t,q) = \sum_{C \subseteq [n-1]} q^{\operatorname{maj} E(C)} \, (1-t)^{\ell(E(C))} \, (q-t)^{\ell(E(C))-1} \, PE_C(t,q) \; D_C \ .$$

Then, if ζ is a primitive nth root of unity,

$$\kappa_n(t,\zeta) = \frac{1}{n(1-t^n)} K_n(t,\zeta)$$

is a Lie idempotent, which reduces to Klyachko's idempotent for $t = 0$.

1. Introduction — Soit K un corps de caractéristique 0. Un élément $\eta \in K\mathfrak{S}_n$ de l'algèbre du groupe symétrique est appelé *élément de Lie* s'il est un polynôme de Lie sur l'alphabet $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans l'identification usuelle entre permutations et mots standards. Un *idempotent de Lie* est un élément de Lie qui est idempotent (*cf.* [1][11]). Si V est un K-espace vectoriel, on note $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} T^n(V)$ son algèbre tensorielle et $L(V) = \bigoplus_{n \geq 0} L^n(V)$ l'algèbre de Lie engendrée par les éléments de V dans $T(V)$. A tout idempotent de Lie $\eta \in K\mathfrak{S}_n$ correspond alors un projecteur $p_\eta : T^n(V) \longrightarrow L^n(V)$ où $p_\eta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\,\eta$, l'action à droite de $K\mathfrak{S}_n$ sur $T^n(V)$ étant définie par $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)\,\sigma = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(n)}$ pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Par exemple,

$$\theta_n = \frac{1}{n} \, [[\cdots[1,2],3],\cdots],n] \ \in \mathbb{Q}\,\mathfrak{S}_n \tag{1}$$

est un élément de Lie, et il est classique qu'un tenseur $\mathbf{t} \in T^n(V)$ est un polynôme de Lie en les éléments de V si et seulement si $\mathbf{t}\theta_n = \mathbf{t}$ (*cf.* [2], [14], [15]). Ceci revient à dire que θ_n est un idempotent de Lie. Cet élément est parfois appelé *idempotent de Dynkin*.

Un autre idempotent de Lie, introduit par L. Solomon (*cf.* [12]), est donné par la formule

$$\phi_n = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{d(\sigma)} \binom{n-1}{d(\sigma)}^{-1} \sigma \tag{2}$$

où $d(\sigma) = |\mathrm{Des}\,(\sigma)|$ avec $\mathrm{Des}\,(\sigma) = \{\, i \in [1, n-1] \,|\, \sigma(i) > \sigma(i+1) \,\}$ est le nombre de descentes de σ. Cet idempotent intervient dans le calcul des projecteurs associés à la décomposition $T(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}) \oplus J$ de l'algèbre tensorielle d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, J étant l'idéal engendré par les tenseurs $u \otimes v - v \otimes u - [u,v]$ $(u, v \in \mathfrak{g})$. De manière équivalente (*cf.* [10]), l'algèbre associative libre $K\langle\, A \,\rangle$ sur un alphabet A admet la décomposition canonique $K\langle\, A \,\rangle = \bigoplus_{k \geq 0} U_k$ où U_k est le sous-espace engendré par les produits symétrisés de k polynômes de Lie, et ϕ_n est alors le projecteur de $K_n\langle\, A \,\rangle$ sur la composante homogène $L^n(A)$ de l'algèbre de Lie libre $L(A) = U_1$.

Enfin, on doit à A. Klyachko (*cf.* [7]) la découverte d'un troisième idempotent, défini par

$$\kappa_n(\zeta) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \zeta^{\operatorname{maj} \sigma} \, \sigma \tag{3}$$

où ζ est une racine n-ième primitive de l'unité, et $\mathrm{maj}\,\sigma = \sum_{i\in \mathrm{Des}\,(\sigma)} i$ est l'indice majeur de σ. Cet idempotent permet de construire une transformation naturelle entre le foncteur L^n déjà mentionné et le foncteur C_n défini par $C_n(V) = T^n(V) \otimes_{K\Gamma} K_\zeta$, où Γ est le sous groupe de $\mathfrak{S}_n$ engendré par le cycle $\gamma = (1\,2\ldots n)$, et K_ζ le $K\Gamma$-bimodule de dimension 1 défini par $\gamma \cdot 1 = \zeta^{-1}$, $1 \cdot \gamma = \zeta$ (on suppose ici seulement que K est un anneau contenant $1/n$ et ζ).

L'*algèbre des descentes* du groupe symétrique joue un rôle important dans l'étude des idempotents de Lie. Elle contient en particulier les idempotents de Dynkin, de Solomon et de Klyachko. Rappelons que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}\,\mathfrak{S}_n$ engendré par les éléments D_C, définis pour toute partie $C \subset [1, n-1]$ par

$$D_C = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\, \mathrm{Des}\,(\sigma)=C} \sigma$$

est une sous-algèbre de $\mathbb{Q}\,\mathfrak{S}_n$, notée Σ_n et appelée *algèbre des descentes*. Elle a été introduite par Solomon dans le cadre général des groupes de Coxeter (*cf.* [13]). On trouvera aussi dans [9] une généralisation de cette construction.

L'objet de cette Note est de produire diverses déformation des idempotents précédents, au moyen de la théorie des *fonctions symétriques non commutatives*, développée dans [4] et basée sur la notion de quasi-déterminant [5][6][8].

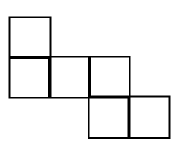
L'algèbre **Sym** des fonctions symétriques non commutatives est par définition la $\mathbb{Q}$-algèbre associative libre engendrée par un ensemble infini d'*indéterminées non commutatives* $S_1, S_2, \ldots$ (que l'on considère comme les fonctions symétriques complètes d'un alphabet virtuel A), graduée par le *poids* $w(S_n) = n$. Sa composante homogène de poids n, notée $\mathbf{Sym}_n$ est donc de dimension 2^{n-1}. On définit alors les les sommes de puissances non commutatives de première espèce Ψ_n par la relation

$$\frac{d}{dt}\,\sigma(A;t) = \sigma(A;t)\,\psi(A;t)$$

où $\sigma(A;t) = \sum_{n\geq 0} S_n\, t^n$ et $\psi(A;t) = \sum_{k\geq 1} \Psi_k\, t^{k-1}$. On munit **Sym** du coproduit Δ qui rend primitifs les éléments Ψ_n. L'algèbre de Lie libre $L(\Psi_1, \Psi_2, \ldots)$ est alors l'algèbre de Lie des éléments primitifs de **Sym**.

La dimension de la composante homogène de degré n de **Sym** étant $2^{n-1} = \dim \Sigma_n$, on peut définir un isomorphisme (d'espaces vectoriels) α de **Sym** dans la somme directe $\Sigma = \oplus_{n\geq 0} \Sigma_n$. Posons $S^I = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_r}$ et $C(I) = \{i_1, i_1 + i_2, \ldots, i_i + \cdots + i_{r-1}\} \subset [1, n-1]$ pour toute composition $I = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ d'un entier n. On définit alors α par $\alpha(S^I) = D_{\subseteq C(I)}$ où $D_{\subseteq C}$ désigne la somme des permutations dont l'ensemble des descentes est contenu dans C.

Inversement, on associe à chaque partie $C \subset [1, n-1]$ une composition $I(C) = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$ de n définie par la condition $C = \{\, i_1,\ i_1 + i_2,\ i_1 + \ldots + i_{r-1} \,\}$. On peut représenter la composition $I(C)$ par son *diagramme* qui est le diagramme de Young ruban dont les longueurs des lignes sont les parts de $I(C)$. Par exemple, pour $C = \{\,1, 4\,\}$ et $n = 6$, on a $I(C) = (1, 3, 2)$ qui est représentée par le diagramme suivant :



Si $I = (i_1, \ldots, i_r)$ et $J = (j_1, \ldots, j_s)$ sont deux compositions, on note $I \triangleright J$ la composition définie par $I \triangleright J = (i_1, \ldots, i_{r-1}, i_r + j_1, j_2, \ldots, j_s)$, dont le diagramme s'obtient par concaténation du diagramme de J à la dernière ligne de celui de I.

2. Une famille à un paramètre d'idempotents de Lie — Un élément e d'une K-algèbre est dit *quasi-idempotent* si $e^2 = k\,e$ avec $k \in K$. Nous aurons besoin de la caractérisation suivante des quasi-idempotents de Lie de Σ_n, établie dans [4].

Proposition 1 *Soit π un élément de l'algèbre des descentes. Alors π est un quasi-idempotent de Lie ssi $\alpha^{-1}(\pi)$ est un élément primitif pour Δ. De plus, π est idempotent si et seulement si $\alpha^{-1}(\pi) - \Psi_n/n$ est dans l'ideal de Lie $[L(\Psi), L(\Psi)]$.*

Théorème 1 *Soit q une indéterminée. Alors, l'élément $\varphi_n(q)$ de $\Sigma_n \otimes K(q)$ défini par*

$$\varphi_n(q) = \frac{1}{n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{d(\sigma)} \begin{bmatrix} n-1 \\ d(\sigma) \end{bmatrix}_q^{-1} q^{\operatorname{maj}\sigma - \binom{d(\sigma)+1}{2}} \sigma$$

est un idempotent de Lie. De plus, $\varphi_n(0) = \theta_n$, $\varphi_n(1) = \phi_n$ et pour une racine primitive n-ième de l'unité ζ, $\varphi_n(\zeta) = \kappa_n(\zeta)$.

En effet, on peut montrer que $\alpha^{-1}(\varphi_n(q)) = \frac{1-q^n}{n} \Psi_n\left(\frac{A}{1-q}\right)$ où $\Psi_n(\frac{A}{1-q})$ est la n-ième somme de puissances de première espèce de l'alphabet $\frac{A}{1-q}$ (*cf.* [4]). Ce dernier élément étant primitif pour Δ, le résultat découle de la proposition 1.

Les spécialisations $q = \pm\infty$ ont également un sens. En effet,

$$\varphi_n(1/q) = \omega_n \, \varphi_n(q) \, \omega_n \ , \quad \varphi_n(q) \, \omega_n = (-1)^{n-1} \, \varphi_n(q) \ ,$$

où ω_n désigne la permutation $\omega_n = (\ n \ n-1 \ \ldots \ 1\ )$ de $\mathfrak{S}_n$. On en déduit les valeurs limites

$$\lim_{q \to +\infty} \varphi_n(q) = \lim_{q \to -\infty} \varphi_n(q) = \omega_n \, \theta_n \, \omega_n = (-1)^{n-1} \, \omega_n \, \theta_n \ .$$

On peut aussi donner la décomposition explicite de $\varphi_n(q)$ sur la base de $L_{1^n}(1, 2, \ldots, n)$ formée des alternants $[1, [\sigma(2), [\ldots, [\sigma(n-1), \sigma(n)], \ldots]]]$ où σ décrit le sous groupe $\mathfrak{S}_{[2,n]}$ constitué des permutations de $[1, n]$ fixant 1.

Proposition 2 *Identifions $\mathfrak{S}_{n-1}$ au sous-groupe $\mathfrak{S}_{[2,n]}$ de $\mathfrak{S}_n$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a $\varphi_n(q) = \eta_{n-1}(q) \, \theta_n$, où $\eta_{n-1}(q)$ est l'élément de $\Sigma_{n-1} \otimes K(q)$ défini par*

$$\eta_{n-1}(q) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}} (-1)^{d(\tau)} \begin{bmatrix} n-1 \\ d(\tau) \end{bmatrix}_q^{-1} q^{\operatorname{maj}\tau - \binom{d(\tau)+1}{2}} \tau \ .$$

3. Un t-analogue de l'idempotent de Klyachko — La considération de certaines familles à deux paramètres de fonctions symétriques non commutatives (les fonctions de l'alphabet $\frac{1-t}{1-q}A$), naturelles dans le cas commutatif, conduit à une autre déformation de l'idempotent de Klyachko. Pour la décrire, nous aurons besoin des constructions suivantes.

On peut décomposer de manière unique la composition $I(C)$ associée à une partie $C \subset [1, n]$ sous la forme $I(C) = E_1 \triangleright E_2 \triangleright \ \ldots \ \triangleright E_s$ où chaque $E_i = (1^x \, y)$ est une composition équerre (qui code donc la partie $[1, x]$ de $[1, x+y]$). La *décomposition en équerres de C* est la suite $DE(C) = (E_1, E_2, \ldots, E_s)$. On associe alors à C la composition notée $E(C) = (\ell(E_1), \ell(E_2), \ldots, \ell(E_s))$ obtenue en prenant les longueurs de toutes les équerres de $DE(C)$. Par exemple, avec $C = \{3, 4, 5, 9\}$ et $n = 11$ on a $I(C) = (3, 1, 1, 4, 2)$ puis $DE(C) = (2, 1^3 \, 3, 1^1 \, 2)$ et $E(C) = (2, 6, 3)$. On associera enfin à chaque partie $C \subset [1, n-1]$ un polynôme $PE_C(t, q)$ construit comme suit : parcourant le diagramme ruban $\mathcal{D}_I$ associé à $I(C)$ de gauche à droite, on met une croix dans la première case de $\mathcal{D}_I$ et dans les deux premières cases de chaque équerre (en commençant par la deuxième) de la décomposition en équerres de C; ensuite, parcourant à nouveau $\mathcal{D}_I$ de gauche à droite, on numérote les cases de $\mathcal{D}_I$ de 0 à $n-1$, sans écrire dans une case déjà marquée par une croix. On obtient de cette manière une suite $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ d'entiers positifs de $[1, n-1]$

qui numérotent les cases non marquées de $\mathcal{D}_I$. Le polynôme $PE_C(t,q)$ est alors le produit des facteurs $q^{e_j} - t$ ou $1 - q^{e_j}\, t$ selon que l'entier e_j se trouve dans la colonne ou la ligne d'une équerre intervenant dans $DE(C)$ (la case du coin d'une équerre étant considérée comme faisant partie de la colonne de l'équerre). Sur l'exemple considéré, avec $I(C) = (3,1,1,4,2)$. on obtient le polynôme

$$PE_{\{3,4,5,9\}}(t,q) = (1-q\,t)\,(q^4-t)\,(q^5-t)\,(1-q^6\,t)\,(1-q^7\,t)\,(1-q^{10}\,t)\ .$$

Définition 3 *Pour tout $n \geq 0$, on pose*

$$K_n(t,q) = \sum_{C \subset [1,n-1]} q^{\mathrm{maj}\,E(C)}\,(1-t)^{\ell(E(C))}\,(q-t)^{\ell(E(C))-1}\,PE_C(t,q)\ D_C\ .$$

où pour toute composition I, on note $\mathrm{maj}\,I = \sum_{c \in C(I)} c$.

On a en particulier, en posant $[x,y]_t = x\,y - t\,y\,x$,

$$K_n(t,0) = (1-t)\,[[\ldots[[1,2]_t,3]_t,\ldots]_t,n]_t\ ,\ K_n(0,q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{maj}\,\sigma}\,\sigma\ ,$$

$$K_n(t,1) = (1-t)^n \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma\ ,\ K_n(1,q) = 0\ .$$

Théorème 2 *Soit ζ une racine n-ième primitive de l'unité. Alors l'élément*

$$\kappa_n(t,\zeta) = \frac{1}{n\,(1-t^n)}\ K_n(t,\zeta)$$

de Σ_n, est un idempotent de Lie, égal à l'idempotent de Klyachko pour $t=0$.

On peut construire à partir des $\varphi_n(q)$ un système complet d'idempotents orthogonaux $E_\lambda(q)$, qui se réduisent aux idempotents E_λ de Garsia-Reutenauer (*cf.* [3]) pour $q=1$. En particulier, on obtient ainsi des q-analogues des idempotents eulériens. Ces résultats seront détaillés dans une publication ultérieure.

Références

[1] F. Bergeron, N. Bergeron et A.M. Garsia, Idempotents for the free Lie algebra and q-enumeration, in *Invariant theory and tableaux,* D. Stanton *ed.*, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, Vol. 19, Springer, 1988.

[2] E.B. Dynkin, Calculation of the coefficients in the Campbell-Baker-Hausdorff formula, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, (N.S.), 57, 1947, p. 323-326 (En russe).

[3] A. Garsia et C. Reutenauer, A decomposition of Solomon's descent algebra, *Adv. in Math.*, 77, 1989, p. 189-262.

[4] I.M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh et J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions, *Adv. in Math.* (à paraître).

[5] I.M. Gelfand et V.S. Retakh, Determinants of matrices over noncommutative rings, *Funct. Anal. Appl.*, 25, 1991, 91-102.

[6] I.M. Gelfand et V.S. Retakh, A theory of noncommutative determinants and characteristic functions of graphs, *Funct. Anal. Appl.*, 26, 1992, 1-20; Publ. LACIM, UQAM, Montréal, 14, 1-26.

[7] A.A. Klyachko, Lie elements in the tensor algebra, *Sib. Matem. Zhurn.*, 15, 1974, p. 1296-1304. (traduction anglaise : *Sib. Math. J.*, 15, 1975, p. 914-920).

[8] D. Krob et B. Leclerc, Minor identities for quasi-determinants and quantum determinants, Rapport LITP 93.46, Paris, 1993.

[9] P. Moszkowski, Généralisation d'une formule de Solomon relative à l'anneau d'un groupe de Coxeter, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Série I, t. 309, p. 539-541.

[10] C. Reutenauer, Theorem of Poincaré-Birkhoff-Witt, logarithm and representations of the symmetric group whose orders are the Stirling numbers, *Springer Lect. Notes in Maths.*, 1234, 1986, p. 267-284.

[11] C. Reutenauer, *Free Lie algebras*, Oxford, 1993.

[12] L. Solomon, On the Poincaré-Birkhoff-Witt theorem, *J. Comb. Th.*, 4, 1968, p.363-375.

[13] L. Solomon, A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group, *J. Algebra*, 41, 1976, p. 255-268.

[14] W. Specht, Die linearen Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, *Math. Zeit.*, 51, 1948, p. 367-376.

[15] F. Wever, Über Invarianten in Lieschen Ringen, *Math. Annalen*, 120, 1949, p. 563-5809.