# Quelques remarques sur les super-algèbres de Lie libres

J. Désarménien [1] , G. Duchamp [2] , D. Krob [3] , G. Melançon [4]

## Résumé

Nous nous intéressons ici aux bases combinatoires des super-algèbres de Lie libres. Nous étendons le théorème d'élimination de Lazard à ce cadre. Nous étudions aussi plus en détails les cas des bases de Lyndon et de Hall.

## Some remarks on free Lie super-algebras

## Abstract

We are interested here in studying combinatorial bases of free Lie super-algebras. We extend Lazard's elimination theorem to this framework. We also study in details the cases of Lyndon and Hall bases.

[1] Institut Gaspard Monge – Université de Marne La Vallée – 93166 Noisy-Le-Grand Cedex
[2] Laboratoire d'Informatique de Rouen – Université de Rouen – 76130 Mont Saint-Aignan
[3] Institut Blaise Pascal (LITP) – Université Paris 6 – 2, place Jussieu – 75251 Paris Cedex 05
[4] Laboratoire Bordelais de Recherche en Informatique – Université de Bordeaux I – 351, cours de la Libération – 33405 Talence Cedex

# Abridged english version

One calls often *Lie super-algebra* every $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graded algebra $\mathcal{G}$ equipped with a non-associative bracket satisfying the two identities

$$[x,y] + (-1)^{x\,y}\,[y,x] = 0\ ,$$
$$(-1)^{z\,x}\,[x,[y,z]] + (-1)^{x\,y}\,[y,[z,x]] + (-1)^{y\,z}\,[z,[x,y]] = 0$$

for every homogeneous elements $x, y, z$ of homogeneity still denoted here $x, y, z$ (see [10]). In fact, these algebras can be considered as particular cases of a more general class of algebras – that we will still call here Lie super-algebras – where the torsion of the classical Lie identities is made with the help of a bicharacter (see [8]).

The free structures naturally associated to these Lie super-algebras have already been studied in the case of the classical bicharacter $(-1)^{xy}$ (see [1] for more details). In particular, several authors have independently constructed bases for free Lie super-algebras. For instance, Lyndon bases were for instance obtained by Shtern and Mikhalev (see [5, 11] or [1] Chap. 2) and Hall bases are due to Melançon (see [4] pp. 31-32 or [9] p. 103).

This short note is devoted to give a new lighting on some aspects of the theory of free Lie super-algebras. We begin by showing that every bicharacter can be written as a product of simple bicharacters that are explicitely described. We also precise the bicharacters for which one can equip the associated free Lie super-algebras of natural structures of modules on the symmetric or linear group. Finally we study the different classical bases of free Lie super-algebras. We give first a supersymmetric version of Lazard's elimination theorem. It allows us to generalize the concept of Lazard-Viennot base by proving the following result that explains the structure of all classical bases of free Lie super-algebras.

**Theorem.** Let $M$ be a monoid, let $A$ be a $M$-graded alphabet, let $\chi$ be a bicharacter $M$, let $\mathcal{B}$ be a Lazard-Viennot family and let $\mathcal{B}^-$ be the set of negative elements of $\mathcal{B}$. Then the family $\{\ \pi_\chi(b),\ b \in B\ \} \cup \{\ [\pi_\chi(b), \pi_\chi(b)],\ b \in B^-\ \}$ is a basis of $L_\chi^\gamma(A)$.

The end of our note is then devoted to a more precise study of the special cases of Lyndon and Hall bases. We especially present a new argument for proving that the Lyndon base is really a base of $L_\chi^\gamma(A)$, using a supersymmetric version of the cyclotomic identity. We also show how to adapt the rewriting technique of Melançon (cf [4]) for describing the decomposition of an arbitrary super-Lie element of $L_\chi^\gamma(A)$ on a Hall base.

# 1 Préliminaires

## 1.1 Bicaractères

Soit $K$ un anneau et soit $M$ un monoïde commutatif de type fini. On appelle alors *bicaractère* sur $M$ à valeurs dans $K$ (cf [8]) toute application $\chi$ de $M \times M$ dans $K$ qui vérifie les conditions suivantes

$$\forall\ x,y,z \in M,\ \ \chi(x+y,z) = \chi(x,z)\,\chi(y,z),\ \ \chi(x,y+z) = \chi(x,y)\,\chi(x,z) \quad (2.1)\,,$$
$$\forall\ x,y \in M,\ \ \chi(x,y)\,\chi(y,x) = 1 \quad (2.2)\,,\ \ \forall\ x \in M,\ \ \chi(x,x) \in \{-1,1\} \quad (2.3)\,.$$

Un bicaractère $\chi$ sera dit *alterné* si l'on a $\chi(x,x) = 1$ pour tout $x \in M$. De même, un bicaractère sera dit *symétrique* s'il est de la forme $(-1)^\Sigma$ où $\Sigma$ est une application bilinéaire symétrique de $M \times M$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On dira enfin qu'un bicaractère est *élémentaire* s'il s'agit d'un bicaractère alterné de la forme $a^\Lambda$ où $a$ est un élément de $K$ et où $\Lambda$ est une application bilinéaire alternée de $M \times M$ dans $\mathbb{Z}$.

### 1.2 Super-algèbres de Lie libres

On suppose maintenant que $K$ est un anneau dans lequel $1/2$ et $1/3$ existent. [5] Soit $M$ un monoïde commutatif de type fini, soit $A = (A_m)_{m \in M}$ un alphabet $M$-gradué, c'est-à-dire muni d'une fonction de poids $\gamma$ de $A$ dans $M$ (cf [1]) et soit $\chi$ un bicaractère sur $M$. On note alors $L_\chi^\gamma(A)$ la *super-$K$-algèbre de Lie libre* construite sur $A$. Rappelons qu'il s'agit de l'algèbre $M$-graduée définie comme le quotient de la $K$-algèbre du magma libre $Mg(A)$ sur $A$ par les relations

$$\chi(z,x)\,[x,[y,z]] + \chi(x,y)\,[y,[z,x]] + \chi(y,z)\,[z,[x,y]] = 0 \ ,$$
$$[x,y] + \chi(x,y)\,[y,x] = 0 \ ,$$

où $x, y, z$ sont des éléments homogènes [6] de $K[Mg(A)]$. On désigne par $ad$ la dérivation intérieure de $L_\chi^\gamma(A)$ définie par $ad\,w\,.\,z = \ [\,a_1, [\,a_2, [\,\ldots\,, [\,a_n, z\,]\,\ldots]]]$ pour tout $w = a_1 \ldots a_n \in A^*$ et tout $z$ de $L_\chi^\gamma(A)$. Notons $A^+ = \{\, a \in A,\ \chi(a,a) = +1 \,\}$ et $A^- = \{\, a \in A,\ \chi(a,a) = -1 \,\}$. On définit alors un morphisme de monoïdes $\epsilon$ de $A^*$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ en posant $\epsilon(a) = 0$ si $a \in A^+$ et $\epsilon(a) = 1$ si $a \in A^-$. Un mot $w \in A^*$ est alors dit *positif* (resp. *négatif*) si $\epsilon(w)$ est égal à 0 (resp. 1). On définit de manière similaire les éléments positifs et négatifs de $Mg(A)$ dont les ensembles seront notés $Mg(A)^+$ et $Mg(A)^-$.

### 1.3 Familles de Lazard-Viennot

Une *base de Lazard-Viennot* de l'algèbre de Lie libre $L(A)$ sur un alphabet $A$ est une base que l'on peut obtenir par application itérée du procédé d'élimination de Lazard, effectué lettre à lettre (cf [12] pour plus de détails). Il s'agit en fait essentiellement de la donnée d'une partie $B$ du magma libre $Mg(A)$ qu'on appelera alors *famille de Lazard-Viennot*. Si $\pi$ et $\delta$ désignent les applications canoniques de $Mg(A)$ dans $L(A)$ et dans $A^*$ consistant respectivement à remplacer les parenthèses par des crochets et à déparenthéser, la base de Lazard-Viennot associée à $B$ est alors à proprement parler la famille $(\pi(b))_{b \in B}$ de $L(A)$. Dans ce cas, $(\delta(b))_{b \in B}$ est une factorisation complète de $A^*$. Signalons enfin que $\pi_\chi$ désignera par la suite l'application canonique de $Mg(A)$ dans $L_\chi^\gamma(A)$ qui consiste aussi à remplacer les parenthèses par des crochets.

## 2 Structure des bicaractères

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant dont la preuve est laissée au lecteur et qui donne une décomposition (non unique) de tout bicaractère.

**THEOREME 2.1 :** Tout bicaractère est le produit d'un bicaractère alterné par un bicaractère symétrique.

[5] Cette restriction est préférable pour éviter des phénomènes de torsion.

[6] Dans les deux identités précédentes, comme dans la suite de cette note, nous identifions un élément homogène et son poids dans les écritures de bicaractères.

La considération de la décomposition en facteurs primaires du sous-groupe de type fini de $K-\{0\}$ engendré par les valeurs de $\chi$ permet de montrer que tout bicaractère alterné est produit de bicaractères élémentaires. En fait, tout bicaractère alterné $\chi$ peut se construire comme suit. On se donne d'abord une congruence $\equiv$ sur $M$ telle que $G = M/\equiv$ soit un groupe qu'on peut donc décomposer comme une somme directe de sous-groupes cycliques $(G_i)_{i\in I}$ où $I$ est un ensemble totalement ordonné. Pour tout $i \in I$, soit $e_i$ un générateur distingué de $G_i$ d'ordre $m_i \in \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ et pour tout $i < j$, soit $a_{i,j}$ un élément de $K-\{0\}$ d'ordre divisant $pgcd(m_i, m_j)$. On peut définir une application $\mathbb{Z}$-linéaire $c$ de $G\otimes G$ dans $K-\{0\}$ en posant $c(g) = 0$ pour tout $g \in G_i \otimes G_i$ et $c(me_i \otimes ne_j) = a_{i,j}^{mn}$ ou $a_{i,j}^{-mn}$ suivant que $i < j$ ou $i > j$. On obtient alors un bicaractère alterné par composition de $c$ et de la projection naturelle de $M\times M$ dans le $\mathbb{Z}$-module $G\otimes G$.

# 3 Actions des groupes linéaires et symétriques

Dans ce paragraphe, $K$ sera un corps. Pour tout $n$, $J_n$ désignera la matrice d'ordre $n\times n$ dont toutes les entrées sont égales à 1. Nous associerons à tout bicaractère symétrique $(-1)^\Sigma$ la matrice $M(\Sigma)$ d'ordre $A \times A$ dont l'entrée générique est $\Sigma(\gamma(a), \gamma(b))$ pour tout $a, b \in A$. Nous allons considérer maintenant la super-algèbre de Lie libre $L_\chi^\gamma(A)$ plongée dans $K < A >$ – le crochet s'interprétant comme $[x, y] = xy - \chi(x, y)\, yx$ pour $x, y$ homogènes – et étudier la stabilité de $L_\chi^\gamma(A)$ sous les actions naturelles des groupes symétrique $S(A)$ et linéaire $GL(A)$ sur $K<A>$.

**THEOREME 3.1 :** Une super-algèbre de Lie libre $L_\chi^\gamma(A)$ peut être munie d'une structure naturelle de $S(A)$-module ssi $\chi$ est un bicaractère symétrique $(-1)^\Sigma$ où $M(\Sigma)$ est égale à $I_n$, $-I_n$, $J_n$ ou $I_n - J_n$.

**Note :** Les cas $I_n$ et $J_n$ correspondent au bicaractère trivial et au bicaractère $(-1)^{|x|\,|y|}$.

**COROLLAIRE 3.2 :** Une super-algèbre de Lie libre $L_\chi^\gamma(A)$ peut être munie d'une structure naturelle de $GL_K(A)$-module ssi $\chi$ est un bicaractère symétrique $(-1)^\Sigma$ où $M(\Sigma)$ est égale à $I_n$, $-I_n$ ou $J_n$.

# 4 Bases de Lazard-Viennot

## 4.1 Le théorème d'élimination

Nous pouvons énoncer le résultat suivant qui généralise le théorème d'élimination de Lazard au cas des super-algèbres de Lie libres. Sa preuve se fait, mutatis mutandis, de la même façon que dans le cas classique.

**THEOREME 4.1 :** Soit $M$ un monoïde commutatif, soit $A$ un alphabet $M$-gradué, soit $\chi$ un bicaractère sur $M$, soit $B$ un sous-alphabet de $A$ et soit $Z = A - B$. Posons $T = \{\ ad\, w \,.\, z,\ w \in B^*,\ z \in Z\ \}$. Comme les éléments de $T$ sont homogènes, $T$ est encore naturellement $M$-graduée par une fonction poids qu'on notera encore $\gamma$. Alors la sous-super-algèbre de $L_\chi^\gamma(A)$ engendrée par $T$ est une super-algèbre de Lie libre ayant $T$ comme famille basique que l'on notera $L_\chi^\gamma(T)$ et qui est aussi un idéal de $L_\chi^\gamma(A)$ sur lequel $L_\chi^\gamma(B)$ opère par dérivations intérieures. De plus $L_\chi^\gamma(A)$ est isomorphe au produit semi-direct $L_\chi^\gamma(B) \bowtie L_\chi^\gamma(T)$.

**Remarque :** Dans le cas du bicaractère $\chi(x,y) = (-1)^{xy}$, le théorème précédent permet de décomposer $L_\chi(A)$ en somme directe de l'algèbre de Lie libre engendrée par $A^+$ et de la super-algèbre de Lie libre engendrée par $T^-$.

La super-$K$-algèbre de Lie libre $L_\chi(a)$ engendrée par une seule lettre $a$ est égale à $Ka$ si $a \in A^+$ et à $Ka \oplus K < a, a >$ si $a \in A^-$ sous les hypothèses faites sur $K$. On déduit maintenant aisément de ce calcul, de la définition des bases de Lazard-Viennot et du théorème d'élimination le résultat suivant.

**THEOREME 4.2 :** Soit $A$ un alphabet $M$-gradué, soit $\chi$ un bicaractère sur $M$, soit $\mathcal{B}$ une famille de Lazard-Viennot et soit $\mathcal{B}^-$ l'ensemble des éléments négatifs de $\mathcal{B}$. Alors la famille $\{ \ \pi_\chi(b), \ b \in B \ \} \cup \{ \ [\pi_\chi(b), \pi_\chi(b)], \ b \in B^- \ \}$ est une base de $L_\chi^\gamma(A)$.

## 4.2 Bases de Lyndon

Supposons maintenant $A$ totalement ordonné par $<$. Notons alors $Ly$ l'ensemble des mots de Lyndon, $Ly^-$ l'ensemble des mots de Lyndon négatifs et $CLy^-$ l'ensemble des carrés de mots de Lyndon négatifs. D'après le théorème 5.2, on peut définir une base de Lyndon $\mathcal{L} = (P_l)_{l \in Ly \cup CLy^-}$ de $L_\chi(A)$ en posant $P_a = a$ pour tout $a \in A$, $P_l = [\,P_f, P_n\,]$ pour tout $l \in Ly$ dont la décomposition standard est $l = f\,n$ et $P_l = [\,P_n, P_n\,]$ pour tout $l = n^2 \in CLy^-$ avec $n \in Ly^-$. Le fait que la famille $\mathcal{L}$ est une base de $L_\chi^\gamma(A)$ avait déjà obtenu dans le cas du bicaractère classique $(-1)^{|x|\,|y|}$ par Shtern par une méthode algorithmique (cf [1, 11]). On peut aussi adapter l'algorithme de Schützenberger (cf [3]) pour prouver que $\mathcal{L}$ est bien une base de $L_\chi^\gamma(A)$. [7]

**Note :** Il est facile de voir que $l$ est le plus petit mot pour l'ordre lexicographique qui apparait dans le support d'un élément $P_l$ de la base $\mathcal{L}$ de $L_\chi^\gamma(A)$. Il en résulte que les mots minimaux des supports des éléments de $L_\chi^\gamma(A)$ sont exactement les mots de $Ly \cup CLy^-$.

Nous allons maintenant présenter une autre méthode pour prouver que $\mathcal{L}$ est une base de $L_\chi^\gamma(A)$. La remarque précédente montre qu'il suffit en fait de voir que $\mathcal{L}$ est une famille génératrice de $L_\chi^\gamma(A)$. Pour cela, montrons d'abord le lemme suivant qui donne une version supersymétrique de l'identité cyclotomique.

**LEMME 4.3 :** Soit $l(\alpha)$ le nombre de mots de $Ly \cup CLy^-$ de multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^{(A)}$. Alors, si $(T_a)_{a \in A}$ est une famille d'indéterminées commutatives, on a

$$\frac{1}{1 - \sum_{a \in A} T_a} = \prod_{\alpha > 0} \frac{1}{(1 - T^\alpha)^{l(\alpha)}} \ \prod_{\alpha < 0} (1 + T^\alpha)^{l(\alpha)} \ .$$

**Preuve :** Il suffit d'écrire la factorisation complète de $A^*$ formée par les mots de Lyndon usuels de $Ly$, puis de remplacer $l^*$ par $(l^2)^*\,(1+l)$ pour tout mot $l \in Ly^-$. L'identité supercyclotomique n'est autre que l'image commutative de l'identité ainsi obtenue. ■

[7] Il suffit pour cela d'étendre l'ordre considéré par Lothaire (cf [3] p. 78) aux couples $(n,n) \in Ly^- \times Ly^-$, $(m, n^2) \in Ly \times CLy^-$ avec $m < n$ et $(n^2, m) \in CLy^- \times Ly$ avec $n < m$.

Nous pouvons maintenant prouver que $\mathcal{L}$ est bien une partie génératrice de $L_\chi^\gamma(A)$. Notons $d(\alpha)$ la dimension de la composante multihomogène de degré $\alpha \in \mathbb{N}^{(A)}$ de $L_\chi^\gamma(A)$. La liberté de la famille $\mathcal{L}$ montre que l'on a $l(\alpha) \leq s(\alpha)$ pour tout multidegré $\alpha$. Supposons que l'on ait $l(\alpha) < d(\alpha)$ pour au moins un multidegré. On pourrait alors écrire

$$\prod_{\alpha>0} \frac{1}{(1-T^\alpha)^{l(\alpha)}} \prod_{\alpha<0} (1+T^\alpha)^{l(\alpha)} < \prod_{\alpha>0} \frac{1}{(1-T^\alpha)^{d(\alpha)}} \prod_{\alpha<0} (1+T^\alpha)^{d(\alpha)} .$$

Or les deux membres de cette inégalité sont égaux à $1/(1-\sum_{a\in A} T_a)$ d'après respectivement le lemme 4.3 et le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour les super-algèbres de Lie (cf [1, 10] par exemple). Il en résulte une contradiction qui montre donc que $l(\alpha) = d(\alpha)$ pour tout multidegré $\alpha$ et établit ainsi le fait que $\mathcal{L}$ est une partie génératrice de $L_\chi^\gamma(A)$.

**Note :** Les dimensions $l(\alpha)$ intervenant dans l'identité super-cyclotomique ne dépendent pas de $\chi$ et peuvent être calculées à l'aide de formules de Witt adaptées (cf [1]) qui sont en fait équivalentes à la donnée des caractères des représentations naturelles du groupe symétrique dans les algèbres correspondantes (cf [7] pour plus de détails).

## 4.3 Bases de Hall

Une partie $\mathcal{H}$ de $Mg(A)$ sera appelée une *famille de Hall* pour $L_\chi^\gamma(A)$ si elle est obtenue à partir d'une famille de Hall ordinaire $H$ (cf [4, 9, 12]) en lui adjoignant les carrés dans $Mg(A)$ de ses éléments négatifs et en étendant l'ordre total existant sur $H$ à $\mathcal{H}$ de sorte que $(h,h)$ devienne le prédécesseur immédiat de $h$ pour tout $h \in H^-$ où $H^- = H \cap Mg(A)^-$. On appelera alors *base de Hall* toute base de $L_\chi^\gamma(A)$ qui est l'image par $\pi_\chi$ d'une famille de Hall, ce qui a bien un sens d'après le théorème 5.2. On peut facilement montrer que les bases de Hall coïncident avec les bases de Lazard-Viennot de $L_\chi^\gamma(A)$ à l'aide du résultat usuel similaire (cf prop. 1.2 de [12] ou prop. IV.3.1 de [9]).

Nous allons maintenant expliquer comment se servir des bases de Hall pour calculer dans $L_\chi^\gamma(A)$ avec des méthodes analogues à celles développées pour les algèbres de Lie libres dans [4, 9]. Pour cela, nous allons construire un système de réécriture sur l'ensemble $\mathcal{S}$ formé des suites $s = (h_1, \ldots, h_n)$ où $h_i \in H \subset \mathcal{H}$ pour tout $i$ et telles que $h_i'' \geq h_{i+1}, \ldots, h_n$ pour tout $h_i = (h_i', h_i'')$ non-réduit à une lettre. Pour tout couple $(h_i, h_{i+1})$ d'éléments consécutifs d'une suite $s$ de $\mathcal{S}$ tel que $h_i < h_{i+1}$ et $h_{i+1} \geq h_{i+2}, \ldots, h_n$, on autorise alors $s$ à se réécrire en deux suites $s' = (h_1, \ldots, (h_i, h_{i+1}), \ldots, h_n)$ et $s'' = (h_1, \ldots, h_{i+1}, h_i, \ldots, h_n)$. On peut montrer que les suites $s'$ et $s''$ appartiennent encore à $\mathcal{S}$ (cf prop. 1.4.4 de [4]). Ainsi, à partir d'une suite $s$ de $\mathcal{S}$, on peut engendrer un arbre fini décrivant les réécritures successives possibles issues de $s$ et dont les feuilles sont donc constituées de suites de $\mathcal{S}$ décroissantes.

On augmente maintenant ce système de réécriture d'une nouvelle règle qui ne pourra être appliquée qu'aux suites décroissantes de $\mathcal{S}$ pour donner des suites dont les éléments pourront appartenir à $\mathcal{H}$. Cette nouvelle règle permet de réécrire toute suite $(h_1, \ldots, h_n)$ décroissante de $\mathcal{S}$ en $(h_1, \ldots, (h_i, h_{i+1}), \ldots, h_n)$ lorsque $h_i = h_{i+1} \in H^-$ avec $h_{i+1} > h_{i+2}$ ou $i+1 = n$. Une application itérée de cette règle permet de réécrire $(\ldots, h, \ldots, h, \ldots) \in \mathcal{S}$ où $h \in H^-$ est répété $p$ fois en $(\ldots, (h,h), \ldots, (h,h), \ldots)$ ou $(\ldots, h, (h,h), \ldots, (h,h), \ldots)$ selon la parité de $p$. Une telle suite sera dite *réduite*. On peut alors préciser la décomposition d'un alternant arbitraire sur $\mathcal{H}$.

**PROPOSITION 4.4 :** Pour tout $w = a_1 \cdots a_n \in A^*$, on a la décomposition unique :

$$[a_1, [a_2, [\ldots, [a_{n-1}, a_n] \ldots]]] = \sum_s \alpha_s \, \pi_\chi(s),$$

dans $L_\chi^\gamma(A)$ avec $\alpha_s \in$ et où $s$ parcourt les suites réduites issues de $(a_1, \ldots, a_n)$.

**Note :** Le résultat précédent admet aussi une version monoïdale qui affirme que tout mot $w$ de $A^*$ peut s'écrire de manière unique comme $w = h_1^{p_1} h_2^{p_2} \cdots h_k^{p_k}$ avec $h_i \in \mathcal{H}$, $h_1 > \cdots > h_k$ et où $p_i = 0$ ou 1 si $h_i \in H^-$.

**Remarque :** On peut définir comme dans le cas usuel un coproduit sur $L_\chi^\gamma$ en rendant primitives toutes les lettres (cf [1]). Le transposé de ce coproduit s'interprète alors comme un shuffle signé sur $K \langle A \rangle$. En utilisant ces différentes notions, il est alors aisé d'étendre les résultats classiques concernant les bases duales des bases de Hall au cas des super-algèbres de Lie libres (cf paragraphe 5.2 de [8]).

# References


[1] BAHTURIN Y.A., MIKHALEV A.A., PETROGRADSKY V.M., ZAICEV M.V., *Infinite dimensional Lie superalgebras*, W. De Gruyter, 1992

[2] LANG S., *Algebra*, Addison-Wesley, 1980

[3] LOTHAIRE M., *Combinatorics on words*, Addison-Wesley, 1983

[4] MELANCON G., *Réécritures dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre*, Publications du LACIM, **8**, Montréal, 1991

[5] MIKHALEV A.A., *Free color Lie superalgebras*, Sov. Math. Dokl., **33**, p. 136-139, 1986

[6] MIKHALEV A.A., *Specht-Wever and Freidrichs Criteria for Lie superalgebras*, 19th All-Union Student Conference, Lvov, part 1, p. 184, 1987

[7] MOLEV A.I., TSALENKO L.M., *Representations of the symmetric group in the free Lie (super) algebra and in the space of harmonic polynomials*, Fonct. Anal. Appl., **20**, (2), p. 150-152, 1986

[8] REE R., *On generalized Lie elements*, Can. Journ. Math., p. 493-502, 1960

[9] REUTENAUER C., *Free Lie algebras*, Clarendon Press, 1993

[10] SCHEUNERT M., *The theory of Lie superalgebras*, Lect. Notes in Maths., **716**, Springer, 1979

[11] SHTERN A.S., *Free Lie superalgebras*, Siberian Math. Journ., **27**, p. 136-140, 1986

[12] VIENNOT G., *Algèbres de Lie libres et monoïdes libres*, Lect. Notes in Maths., **691**, Springer, 1976