Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique

Julio MORENO* et Colette LABORDE**
***Institut Technologique de Tuxtla Gutiérrez, Mexique
**Équipe IAM-IMAG, Grenoble

Notre travail tente de frayer une voie d'accès envisageable pour l'étude de la modélisation dans le cours d'équations différentielles au Mexique. Nous considérons que "la maîtrise des articulations entre cadres et registres de représentations des équations différentielles joue un rôle important dans la démarche de modélisation". Nous avons conçu une ingénierie didactique en utilisant le logiciel Cabri II Plus, qui favorise ces articulations, ainsi qu'une modélisation mathématique particulière. La mise en place de cette ingénierie nous a permis d'identifier quelques difficultés des étudiants.

1. Introduction

Une des attentes du cours des équations différentielles des Écoles d'Ingénieurs du Mexique est le développement de compétences pour la démarche de modélisation mathématique d'un système évolutif. Le texte ci-dessous, issu du programme du cours d'équations différentielles du Système National des Instituts Technologiques, résume ce qui est attendu des étudiants :

> "Modéliser un système au moyen d'une équation différentielle à résoudre et au travers de ses solutions comprendre le comportement de la situation modélisée.
> (Programme ACM-9307 SEP, DGIT, SEIT)."

Pourtant dans la pratique, l'enseignement de la modélisation n'est pas considéré comme essentiel. L'enjeu du cours au Mexique se réduit à la maîtrise des différentes méthodes algébriques de résolution. Artigue (1992) signale les limitations d'un enseignement des équations différentielles centré sur le cadre algébrique, elle considère qu'un tel enseignement laisse, dans l'esprit des étudiants, une vue restreinte et insatisfaisante de ce champ d'étude.

Nous considérons que l'absence d'activités de modélisation est peut-être due aussi à la complexité de cette tâche ainsi qu'aux multiples interactions entre divers cadres et registres de représentation attachés aux équations différentielles.

2. Cadre théorique

2.1 Cadres et registres sémiotiques de représentation

Un cadre selon Douady (1986), "*est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et ces relations*".

La notion de registre sémiotique introduit par Duval (1993) est associée à l'hypothèse que la conceptualisation mathématique passe par la capacité d'identifier un concept dans diverses représentations sémiotiques et qu'elle nécessite un travail spécifique sur l'articulation de ces registres.
Le concept d'équation différentielle fonctionne dans plusieurs cadres : algébrique, numérique et géométrique. Il admet aussi plusieurs registres de représentation : le langage naturel, les expressions algébriques des équations et des solutions, les courbes solutions, les champs de tangentes, les tableaux numériques, etc. Le travail dans un même cadre peut faire appel à

plusieurs registres de représentation et le changement de cadres implique nécessairement des passages entre registres.

2.2 La modélisation mathématique

Dans un processus de modélisation, on a d'un côté la situation à modéliser que nous appellerons "le système" et de l'autre côté les équations différentielles qui expriment les lois qui gouvernent le comportement du système et que nous appellerons "le modèle".

De façon générale, on peut dire que la modélisation mathématique en sciences a pour objectif de comprendre les mécanismes qui gouvernent le fonctionnement d'un système. À cette fin, elle vise leur traduction en expressions mathématiques et la comparaison des résultats du modèle avec les observations disponibles. Une fois validé par ces comparaisons, le modèle est un instrument de recherche qui permet d'une part de tester (sans recourir à des expériences coûteuses) diverses hypothèses et d'autre part d'être un instrument de prédiction.

3. Un regard sur le processus de modélisation dans les textes d'équations différentielles utilisés au Mexique

Dans l'enseignement actuel des équations différentielles au Mexique, il y a deux tendances :

- la première que nous appelons "approche qualitative" est le résultat de l'influence des derniers efforts de réforme dans l'enseignement des équations différentielles aux États-Unis. Cette réforme a pour propos l'utilisation des outils informatiques pour étudier dans une perspective qualitative, numérique et algébrique les équations différentielles. Cette tendance n'est pas encore officielle au Mexique, mais les nouvelles versions des manuels induisent une telle approche de l'enseignement;
- la deuxième, la plus ancienne et la plus répandue, que nous appelons "approche algébrique" met l'accent sur un enseignement des différentes méthodes algébriques de résolution.

Les ouvrages représentatifs de ces deux tendances incluent des problèmes de modélisation. Parmi les principaux sujets abordés dans les chapitres sur les équations de premier ordre figurent : l'obtention des trajectoires orthogonales d'une famille de courbes; l'évolution des populations, la désintégration radioactive, la loi de refroidissement de Newton, des mélanges de substances, des circuits électriques, des objets en mouvement. Dans ces textes, le travail de modélisation est vu principalement comme le processus pour écrire l'équation différentielle qui exprime les lois qui gouvernent les variables du système ainsi que de faire quelques activités de prédiction.

Le schéma ci-dessous montre les pas usuels de la démarche de modélisation dans ces textes. Dans l'approche algébrique, les activités de modélisation restent presque toujours dans le cadre algébrique et passent par la mise en équation, la résolution algébrique et quelques activités de prédiction. En revanche, dans l'approche qualitative, les activités de modélisation se restreignent très souvent à décrire l'évolution du système sans nécessairement résoudre l'équation correspondante, ou à demander de changer et/ou d'estimer les paramètres d'un modèle déjà connu, ou bien de modifier une équation différentielle standard pour modéliser des situations particulières du système. Cette dernière approche fait fréquemment appel aux cadres algébrique et graphique.

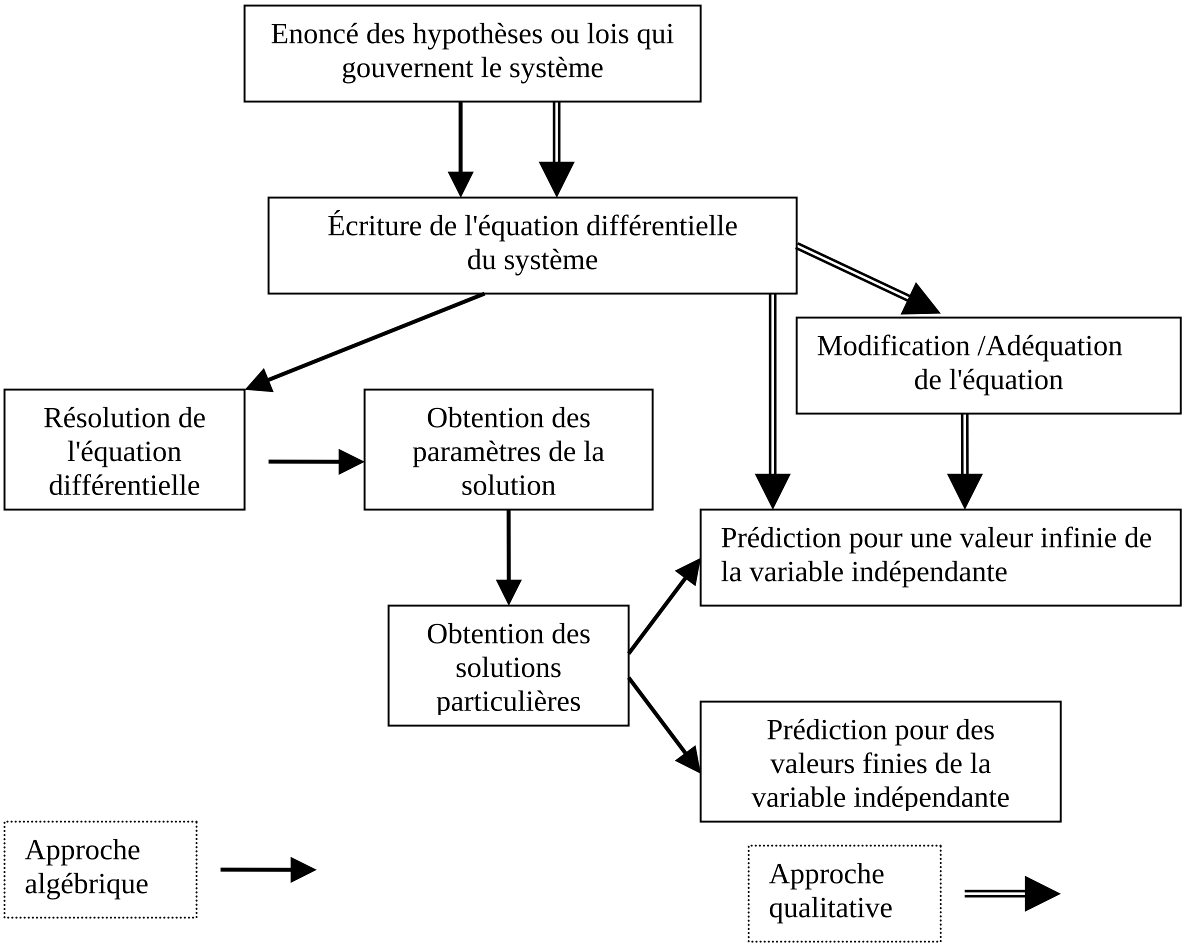


Fig 1. La démarche typique de modélisation par des équations différentielles selon les textes au Mexique

Prenons quelques exemples :

- Dans le texte *Introduction aux Équations Différentielles* (Ross, 1992) qui favorise une approche algébrique, un problème typique de modélisation est le suivant :

  "Supposez que la population d'une certaine ville croît avec une vitesse de croissance proportionnelle au nombre d'habitants. Si la population double en 40 ans, dans combien d'années la population aura-t-elle triplé ? (Problème 5, p. 97)"

La résolution du problème requiert l'écriture de l'équation différentielle, sa résolution, puis l'obtention des paramètres de la solution pour obtenir une solution particulière et enfin la prédiction demandée. En restant dans le cadre algébrique, sans faire de liens avec un autre cadre, il est possible d'arriver à résoudre le problème.

- Dans l'ouvrage *Des équations différentielles* (Blanchard, et al., 1998) qui favorise une approche qualitative, un problème typique de modélisation est le suivant :

  "Supposez qu'une espèce de poissons d'un certain lac a une population qui suit le modèle logistique avec un taux de croissance k = 0,3, un plafond de N = 2500, le temps étant mesuré en années. La population initiale est P(0) = 2500.

a) Si 100 poissons sont pêchés chaque année, quelle est la prédiction du modèle pour le comportement à long terme de la population de poissons ?

b) Si chaque année on pêche un tiers des poissons, quelle est la prédiction du modèle pour le comportement a long terme de la population de poissons ? (Problèmes 13 et 14, p. 17)"

La stratégie de résolution de ces problèmes passe par l'obtention des solutions d'équilibre et par l'analyse des signes de la dérivée, ce qui permet d'identifier les régions où les courbes solutions sont croissantes ou décroissantes. Alors, en utilisant le théorème d'existence et d'unicité des solutions on prédit le comportement du modèle à long terme. Dans ce processus de résolution on utilise très souvent des représentations graphiques des courbes solutions. En effet elles permettent des prédictions sur l'évolution à un coût moindre que celui de l'approche purement algébrique.

Nous considérons que la modélisation d'un système évolutif par des équations différentielles nécessite une certaine maîtrise des articulations entre les cadres et registres de représentations associés aux équations et à ses solutions. Il est assez fréquent que l'on dispose, pour les premiers pas de la modélisation d'un système évolutif, uniquement des données expérimentales. Par conséquent une stratégie pour trouver les lois qui gouvernent le système commence par analyser la représentation graphique des données expérimentales, pour lui associer ensuite une caractérisation algébrique sous forme d'équation différentielle.

4. La conception des situations expérimentales

Nous pensons que les diverses possibilités de construction graphique, d'exploration, de visualisation et de rétroaction qu'offre un logiciel de géométrie dynamique tel que Cabri-géomètre II plus, permettent d'organiser des milieux (Laborde et Capponi, 1994) pour l'étude expérimentale des équations différentielles. En prenant compte les caractéristiques du logiciel, nous avons conçu une ingénierie didactique qui permet à la fois des articulations entre les cadres algébrique et géométrique des équations différentielles, et qui favorise une démarche de modélisation mathématique particulière.

4.1 Les choix globaux

a) Le recours au logiciel Cabri géomètre II plus.
Pour l'étude des équations différentielles ce logiciel offre différents outils pour construire des champs de tangentes, des solutions approchées, des courbes solutions exactes, etc. La manipulation directe des objets est une caractéristique importante du logiciel pour une démarche expérimentale. Avec la redéfinition d'un objet déjà construit, les étudiants disposent d'une stratégie de validation pour leurs constructions.

b) La limitation de la complexité dans le cadre algébrique.
Nous avons décidé d'étudier des équations algébriquement intégrables pour faciliter aux étudiants d'une part le travail de résolution algébrique et d'autre de tracer les graphes des solutions.

c) Une démarche de modélisation par des équations différentielles dans un contexte géométrique.
Afin de favoriser un processus de modélisation qui n'a pas recourt à des connaissances externes aux mathématiques, nous avons choisi de modéliser des situations géométriques variationnelles issues de propriétés géométriques invariantes de familles de courbes, comme l'invariance des sous-tangentes pour une famille de courbes exponentielles, la longueur constante d'un segment de la tangente d'une famille de tractrices.

Et pour rester dans le contrat habituel au Mexique, *d) Le recours à des tables donnant des formules d'intégration pour résoudre des équations différentielles explicitement intégrables et sans demande de justifications rigoureuses.*

4.2 Deux types de situations expérimentales

a) Premier type

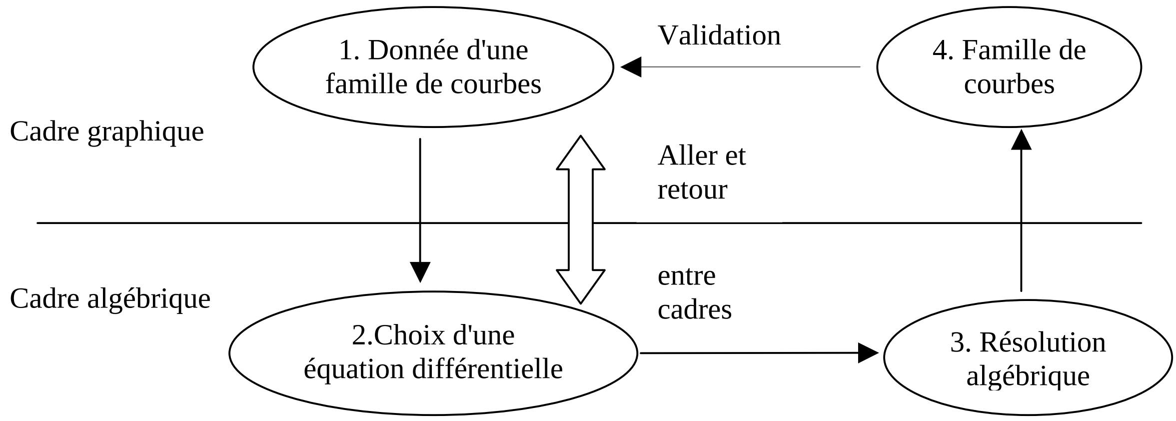


Fig 2. Des situations expérimentales qui favorisent l'articulation des cadres et des registres de représentation

L'enjeu est le choix d'une équation différentielle dans un ensemble d'équations données de telle sorte que cette équation admette la famille de courbes données comme solution. Le logiciel permet l'exploration dynamique des courbes et de leurs vecteurs tangents; le travail consiste à relier les caractéristiques géométriques observées aux caractéristiques algébriques de l'équation. La démarche nécessite donc des allers et retours entre cadre graphique et cadre algébrique que nous considérons comme préalables à la démarche de modélisation.

b) Second type

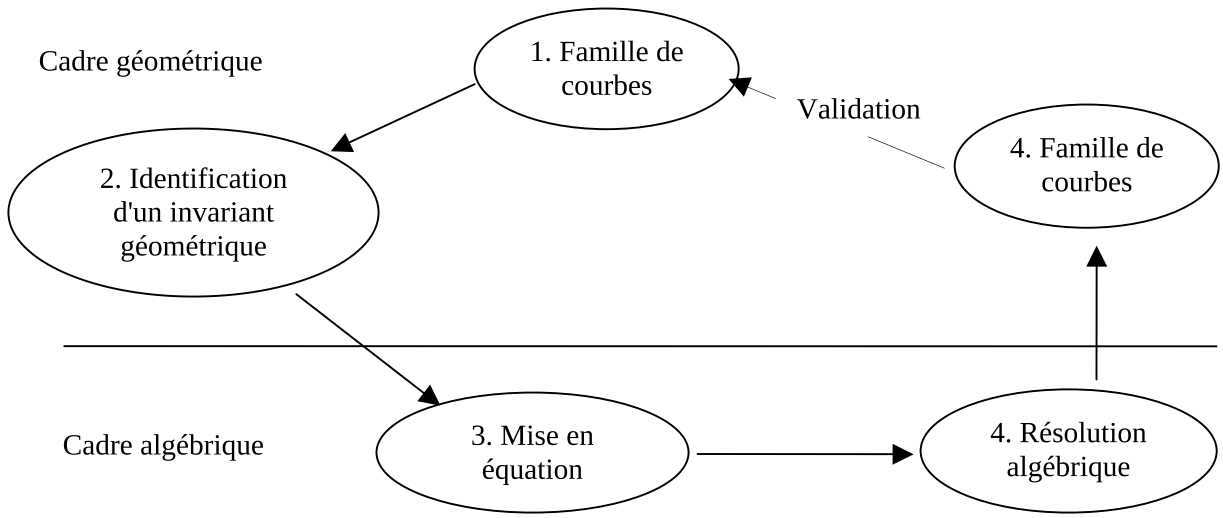


Fig 3. Des situations expérimentales qui favorisent une démarche de modélisation par des équations différentielles

La différence tient à ce qu'au lieu de choisir une équation différentielle dans un ensemble donné, il faut faire effectivement la mise en équation, tâche beaucoup plus ardue (associer une équation différentielle à un phénomène variable) et qui consiste en un travail de modélisation au sein de mathématiques (Chevallard, 1989).

4.3 Un exemple de situation du premier

a) Première partie

<u>Ouvrez la figure "Courbes 1"</u>

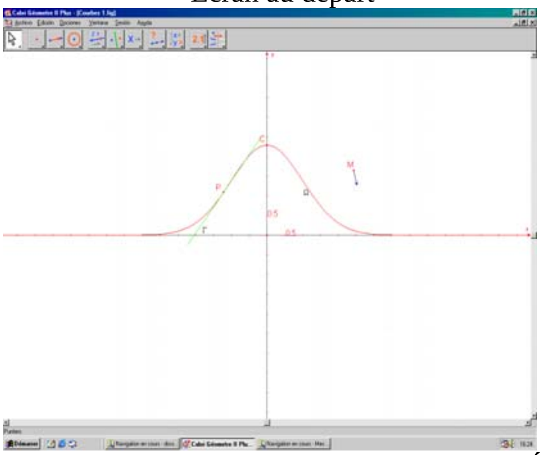
1) La tâche consiste à choisir, SANS INTÉGRER, parmi la liste ci-dessous, l'équation différentielle de la famille de courbes Ω :

E1) $y' = -a(x+y)$; E2) $y' = -b(x-y)$; E3) $y' = -m\,xy$;
E4) $y' = -n\,x/y$; E5) $y' = -p\,y/x$

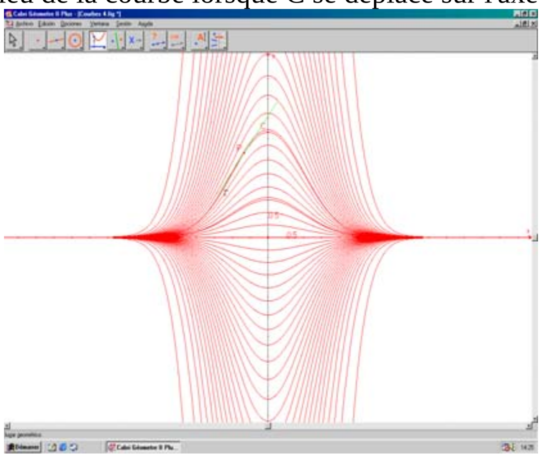
a, b, m, n et p sont éléments de R^+

2) Justification du choix

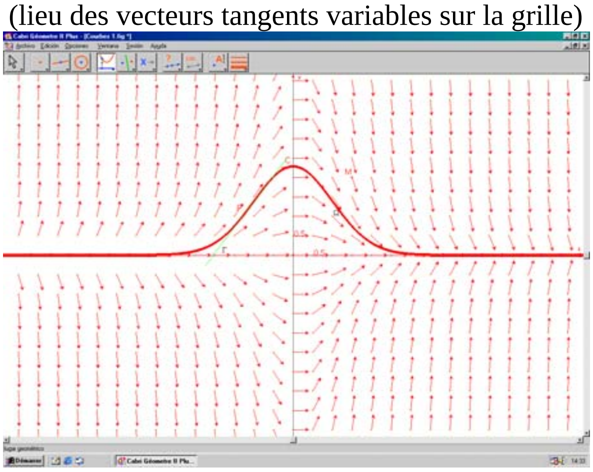
Écran au départ



Écran possible
(lieu de la courbe lorsque C se déplace sur l'axe *y*)



Écran possible
(lieu des vecteurs tangents variables sur la grille)



Γ est la droite tangente à la courbe Ω en P(x,y). Le vecteur d'origine M est un vecteur tangent aux courbes Ω. Les points P, C et M sont déplaçables.

Fig 4. L'écran initial et des écrans possibles pour une situation expérimentale du premier type *b) Deuxième partie*

3) Résolvez l'équation différentielle que vous avez choisie dans la première partie
4) Obtenez l'expression algébrique de la courbe solution Ψ qui passe par le point (0;-2).
5) Tracez la courbe solution Ψ dans Cabri
6) Formulez et expérimentez deux façons différentes dans Cabri pour vérifier que la courbe Ψ que vous avez tracée est celle que l'on a vous demandée.

Nos attentes étaient que le choix par les étudiants de l'équation différentielle E3) $y' = -m\ xy$ s'appuierait sur :

- Une interprétation fonctionnelle de la dérivée y' en termes de x et y dans les deux cadres algébrique et graphique : dans le cadre graphique, la pente de la tangente est fonction du point variable de la courbe ; dans le registre algébrique, l'équation différentielle est à considérer comme la donnée de y' en tant que fonction de x et de y.

- Le repérage des caractéristiques géométriques des courbes et des vecteurs tangents, telles que: les symétries des courbes ou du champ de tangentes par rapport aux axes; les régions où les courbes solutions sont croissantes ou décroissantes. Par exemple, pour la famille de courbes donnée : si $f(x,y) = -\ m\ xy$, la symétrie des courbes par rapport à l'axe y implique que $f(x,y) = -f(-x,y)$; la symétrie des courbes par rapport à l'axe x implique que $f(x,y) = -f(x,-y)$.

- L'utilisation de valeurs fixes de y' pour mettre en correspondance équation et comportement graphique des vecteurs tangents. Par exemple, $y' = 0$ correspond dans le cadre graphique à repérer les points extrêmes des courbes solutions ainsi que les vecteurs ou les droites tangentes horizontaux, en revanche, dans le cadre algébrique $y' = 0$ correspond à résoudre l'équation $-\ m\ xy=0$.

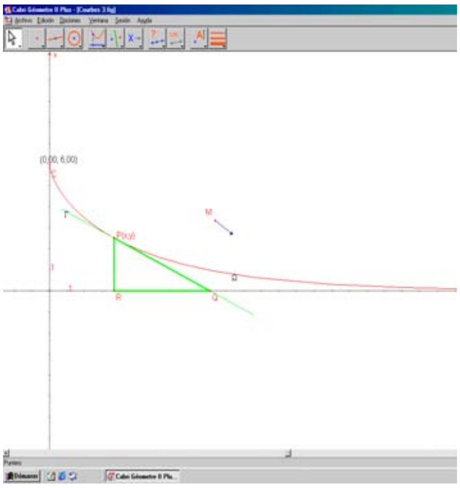
4.4 Un exemple de situation du second type

a) Première partie

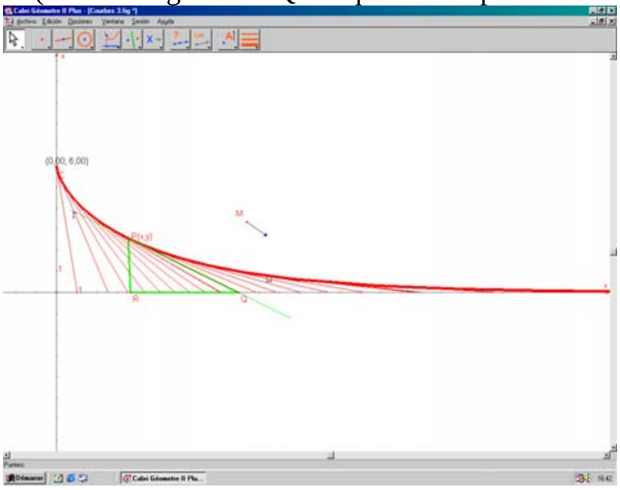
<u>Ouvrez la figure "Courbes 3"</u>

La tâche consiste à identifier une propriété invariante de chaque courbe de la famille de courbes :
1) Déplacez le point P et écrivez toutes les informations que vous tirez de ce que vous voyez à l'écran.
2) Si vous déplacez le point C, vous obtiendrez d'autres courbes, pour les différentes courbes déplacez le point P et écrivez toutes les informations que vous pouvez tirer de ce que vous voyez à l'écran.
3) Quelle est la propriété invariante de chaque courbe de la famille ?
4) En utilisant la propriété invariante que vous avez identifiée, déduisez l'équation différentielle du premier ordre dont la famille de courbes est solution.

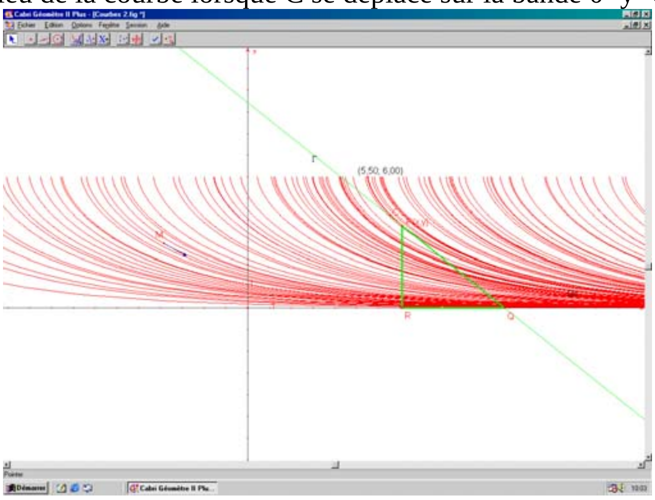
Écran au départ



Écran possible
(lieu des segments PQ lorsque P se déplace sur la courbe)



Écran possible
(lieu de la courbe lorsque C se déplace sur la bande 0<y<6)



Γ est la droite tangente à la courbe Ω en P(*x*,*y*). Q est l'intersection de la droite Γ avec l'axe des abscisses. R est l'intersection de la perpendiculaire à l'axe en passant par P. Le vecteur d'origine M est un vecteur tangent aux courbes Ω. Les points P, C et M sont déplaçables.

Fig 5. L'écran initial et des écrans possibles pour une situation expérimentale du second type

b) Deuxième partie

5) Résolvez l'équation différentielle que vous avez trouvé dans la première partie
6) Obtenez l'expression algébrique de la courbe solution Ψ qui passe par le point (0; 3)
7) Tracez la courbe Ψ dans Cabri
8) Formulez et expérimentez deux façons différentes dans Cabri pour vérifier que la courbe Ψ que vous avez tracée est celle qu'on a vous demandée.
9) Vérifiez que la courbe Ψ satisfait la propriété invariante identifiée dans la première partie.

Nos attentes étaient qu'après avoir repéré la propriété invariante (la longueur du segment [PQ] est constante) les étudiants écriraient l'équation différentielle de la famille de courbes, $y' = -\frac{y}{\sqrt{k^2-y^2}}$ où k est la longueur du segment [PQ]. Ils possèdent en effet les connaissances algébriques demandées par la mise en équation comme celles relatives à la notion de pente d'une droite et au théorème de Pythagore.

Une stratégie attendue des étudiants pour arriver à écrire l'équation consiste à repérer que dans le triangle PQR, la pente y' de la droite Γ est l'opposée de la tangente de l'angle PQR. C'est-à-dire, $y'=-\tan(PQR)=-(PR/RQ)$ où $PR=y$ et $RQ=\sqrt{k^2-PR^2}$ grâce au théorème de Pythagore.

5. Expérimentation préliminaire

Des expériences préliminaires ont été menées au Mexique, en avril 2003 avec des étudiants de deuxième année (de l'Université Autonome de Chiapas et de l'Institut Technologique de Tuxtla Gutierrez) alors qu'ils suivaient un cours d'équations différentielles.

Vingt-deux étudiants volontaires ont participé à l'expérimentation : 8 de l'Université et 14 de l'Institut Technologique, ces derniers ont été divisés en deux sous-groupes de 8 et 6 étudiants chacun. L'activité s'est déroulée hors du cours pendant trois séances. La première séance a eu comme propos d'introduire le logiciel Cabri, et les deux autres de mettre en oeuvre les situations expérimentales.

En raison des contraintes de temps et de l'existence de 4 situations différentes, nous avons décidé que les binômes travailleraient dans la même séance avec des situations différentes. La séquence expérimentale totalise 18 heures, 6 heures pour chaque groupe. On a enregistré les échanges verbaux des étudiants par binôme. La situation du premier type a été travaillée par 4 binômes et celle du second type par 2 binômes. Bien que nous n'ayons pas fini de faire toute l'analyse des réponses, nous avons pu dégager quelques tendances.

Pour la situation du premier type, la stratégie de solution a consisté le plus souvent à essayer d'intégrer les équations et d'obtenir ensuite les courbes solutions. Par exemple, un des étudiants du binôme 3 a dit "*si on a une équation différentielle pour pouvoir la dessiner il faut l'intégrer, ainsi on pourrait donner des valeurs à une variable pour obtenir l'autre",* un autre étudiant du binôme 4 a dit , "on *ne peut pas faire le choix sans intégrer, on va les intégrer dans la tête".*

Dans le passage de la famille de courbes à l'équation, la plupart des étudiants n'ont pratiquement pas utilisé les outils de Cabri, se contentant de la vue statique fournie par l'écran donné au départ. En revanche, dans la phase de vérification de leur choix d'équation, ils ont utilisé les outils nécessaires de Cabri pour représenter les courbes solutions.

Pour la situation du second type, les réponses montrent que les étudiants ont réussi à identifier la propriété invariante de la famille de courbes donnée : en déplaçant le point P de la courbe, ils ont repéré la constance du segment [PQ]. Un binôme ne comprenait pas la signification de "propriété invariante". Ce binôme a considéré aussi comme propriétés invariantes: le fait que le point C n'était pas déplaçable pour une courbe particulière et que la droite Γ restait toujours tangente à la courbe. Les deux binômes ont été bloqués pour écrire l'équation différentielle. Nous leur donc donné des pistes pour arriver à l'écrire. Un seul binôme a obtenu une équation, mais il a écrit $y'=\frac{y}{\sqrt{k^2-y^2}}$ au lieu de $y'=-\frac{y}{\sqrt{k^2-y^2}}$. Il s'est rendu compte de son erreur quand il a fait dans Cabri le graphe demandé de la solution particulière Ψ car le vecteur déplaçable d'origine M n'était pas tangent à cette dernière courbe.

Alors que dans la première situation, les étudiants n'ont pas utilisé les possibilités de Cabri pour identifier les propriétés géométriques de la famille de courbes dans son choix de l'équation, ils l'ont fait dans la seconde n'ayant pas à leur disposition d'équations à intégrer.

6. Conclusion

Nous comptions sur un usage plus important des outils de Cabri par les étudiants. On peut supposer que les contraintes de temps ont empêché une familiarisation suffisante et donc la construction de schèmes d'activité instrumentée. Cependant lorsque les stratégies de passage de l'algébrique vers le graphique sont bloquées, on a pu observer le recours aux outils de Cabri pour un travail sur le graphique. C'est peut-être une variable didactique à utiliser dans l'avenir.

Du côté des difficultés que nous avons rencontrées avec les étudiants, nous constatons que l'articulation courbes $\rightarrow$ équation n'est pas immédiate. L'effet d'un enseignement centré sur le cadre algébrique ne leur permet pas de tirer des informations du cadre géométrique. Ce constat nous conduit à approfondir, pour une étude à venir, l'hypothèse formulée par Duval (1988) "*la raison profonde de ces difficultés n'est pas à chercher dans les concepts mathématiques…, mais dans la méconnaissance des règles de correspondance sémiotique entre le registre des représentations graphiques et celui de l'écriture algébrique… Une analyse de congruence exige la discrimination des unités significatives propres à chaque registre de présentation ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles requises pour changer de registre*". Un travail sur les unités significatives serait à entreprendre. Une nouvelle ingénierie est à mettre en place faisant travailler préalablement ces règles de correspondance entre graphique et algébrique sur des objets comme courbe, fonction, tangente, dérivée.

Références bibliographiques

Artigue, M. (1989). «Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire», In *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, 183-209. Grenoble: IMAG et Institut Fourier.

Artigue, M. (1992). «Functions from an Algebraic and Graphic Point de View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices», In G. Harel et al. (Eds) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 109-132. MAA Notes Number 25.

Blanchard, P. et al. (1998). «ECUACIONES DIFERENCIALES ». International Thomson Editores.

Chevallard Y. (1989). «Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège». *Petit x*, n°19 p. 45-75. IREM de Grenoble.

Douady R. (1986). «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n° 2, p. 5-31.

Duval R. (1988). «GRAPHIQUES ET EQUATIONS : L'Articulation de deux registres», *Annales de didactique et de sciences cognitives,* Volume 1, p. 235-253, IREM de Strasbourg

Duval R. (1993). «Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée», *Annales de didactique et de sciences cognitives,* n°5, p.37-65, IREM de Strasbourg

Laborde C. & Capponi B. (1994). «Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 14, n° 1.2, p. 165-210.

Ross, S. (1992). «Introducción a las ECUACIONES DIFERENCIALES ». Mac Graw Hill